Leonardo Sasso
Enrico Zoli

Colori della Matematica

EDIZIONE VERDE

VOLUME 5

- Geometria nello spazio
- Calcolo integrale ed equazioni differenziali
- Distribuzioni di probabilità e inferenza statistica

DeA SCUOLA | Petrini

Leonardo Sasso
Enrico Zoli

Colori della Matematica

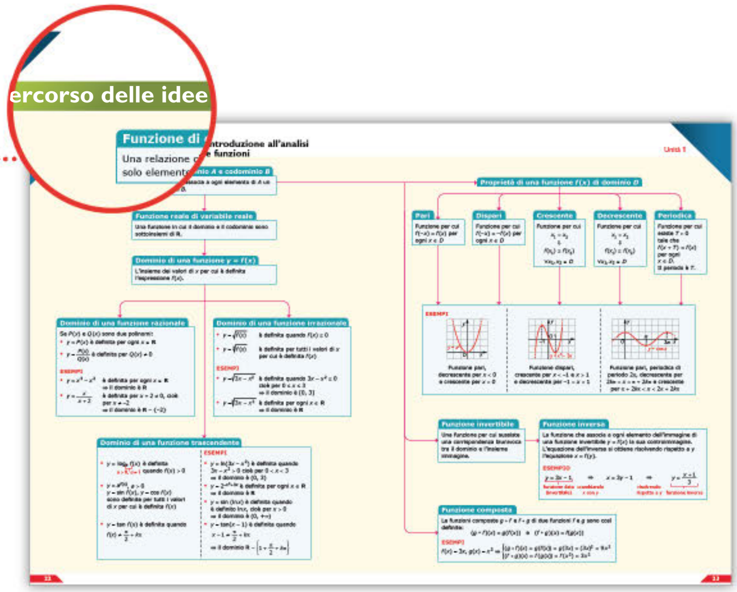
EDIZIONE VERDE

VOLUME 5

DeA SCUOLA | Petrini

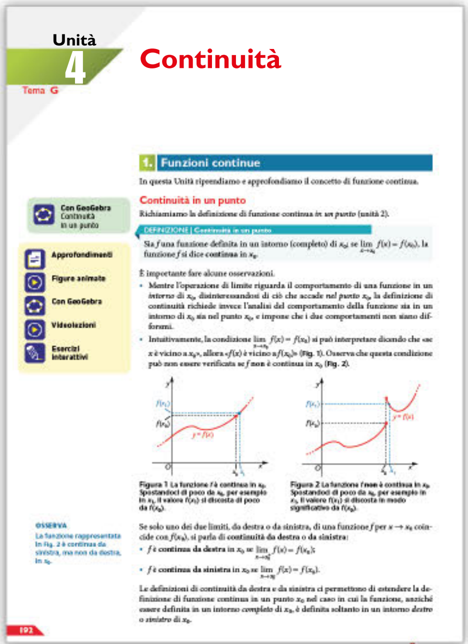
Colori della Matematica

Modellizzazione, visualizzazione, inclusività



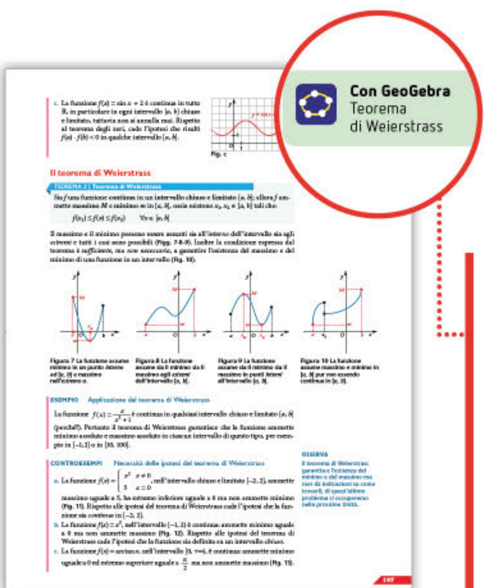
Didattica inclusiva e videolezioni

I **Percorsi delle idee**, realizzati in font ad **alta leggibilità**, presentano in modo visuale i **concetti fondamentali** di ciascuna unità.
Le **videolezioni** hanno una efficace funzione di tutoraggio.



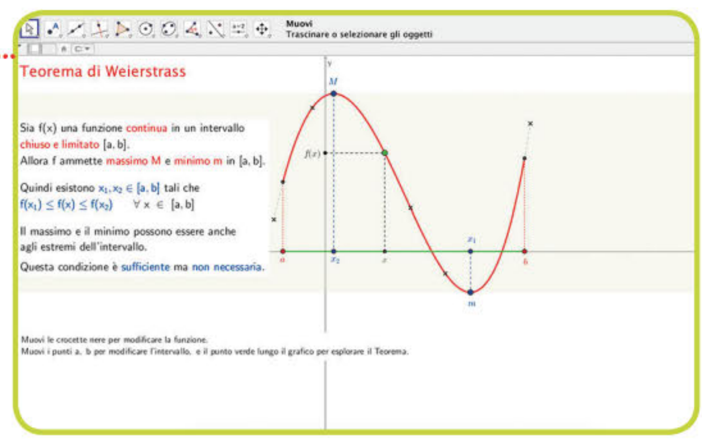
Visualizzazioni e metodo di studio

La teoria si avvale di schemi e tabelle per **visualizzare** e collegare, applica il **problem solving** e la **modellizzazione** per comprendere, propone strumenti per acquisire un corretto **metodo di studio** e per tracciare costanti **collegamenti con la realtà**.



GeoGebra

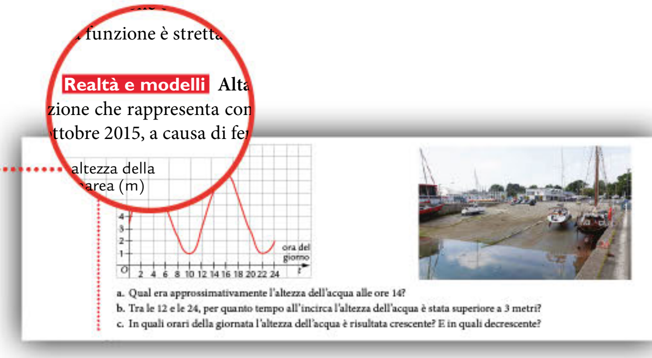
La **visualizzazione** e la comprensione dei concetti è facilitata dalla presenza costante di **animazioni in GeoGebra** di figure geometriche e grafici di funzione.

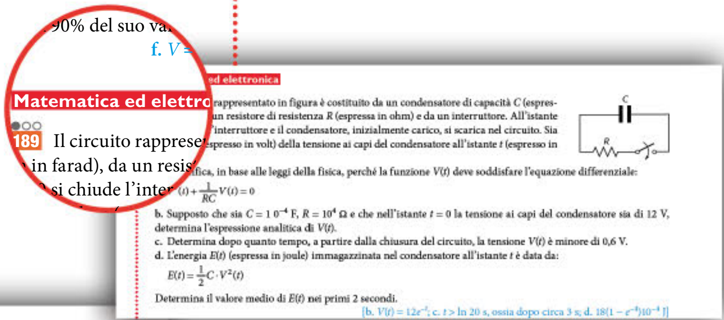


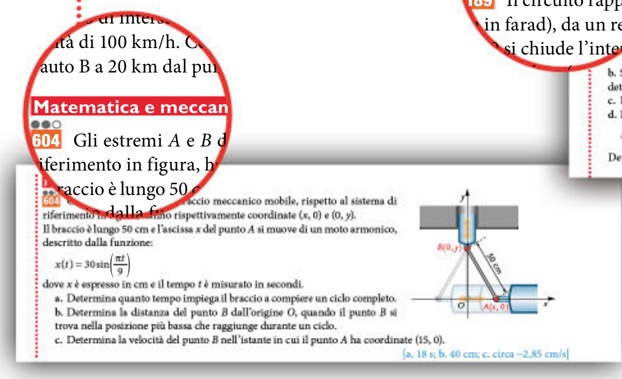
Didattica per competenze

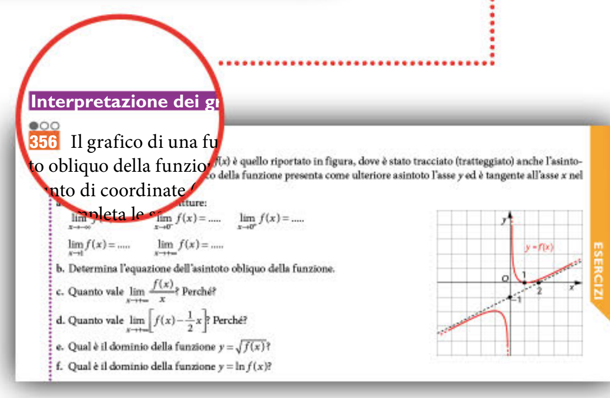
Esercizi motivanti

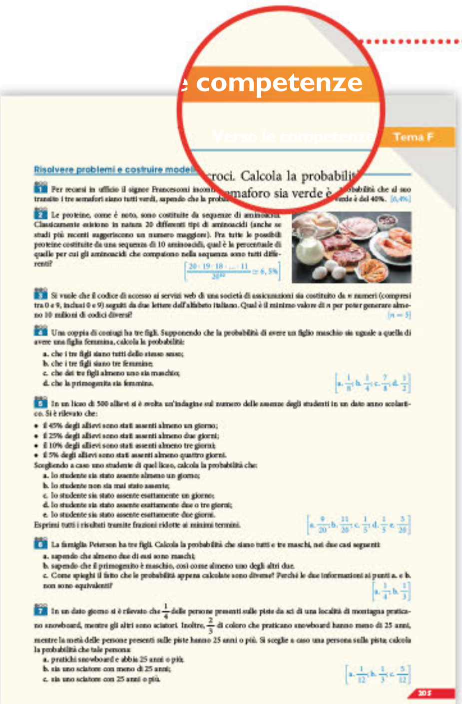
Numerose le **tipologie di esercizi**: “realtà e modelli”, “a mente”, “interpretazione di grafici”, “matematica e...”, “collegamenti”, “giustificare e argomentare”, “zoom sull’enunciato”, “dal giornale”, “dalle gare”... Per ogni esercizio è indicato il **grado di difficoltà**. Molte attività sono orientate ad **applicazioni specifiche** in ambito tecnico.











Competenze e Invalsi

Le **schede di fine tema** e le apposite **simulazioni** allenano all’**acquisizione delle competenze** e alla prova **Invalsi**.

Compiti di realtà

I **Compiti di realtà** consolidano le competenze in contesti diversi, perlopiù in **ambito lavorativo**.

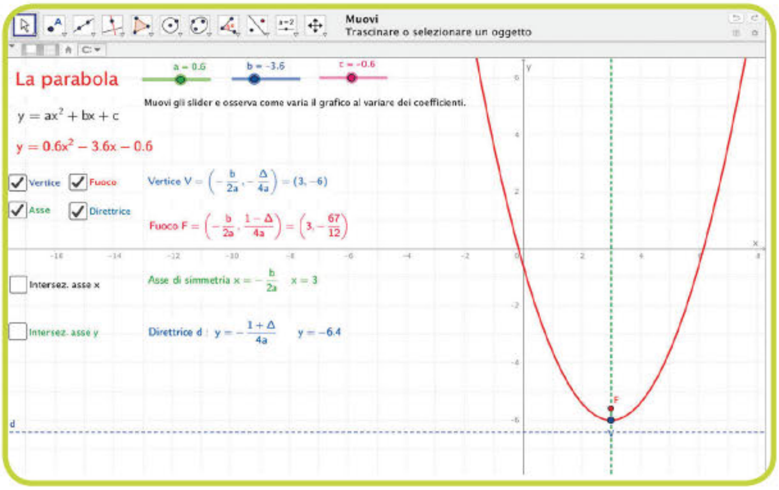
L'ambiente educativo digitale di Colori della Matematica

Le risorse digitali dell'eBook

In tutte le pagine dell'eBook si trovano icone che segnalano la presenza di una o più risorse digitali.
Queste risorse espandono il libro di testo e sono di diverse tipologie, ciascuna caratterizzata da un'icona.

Con GeoGebra

Costruzioni e animazioni in GeoGebra per esplorare dinamicamente grafici di funzione e figure geometriche.



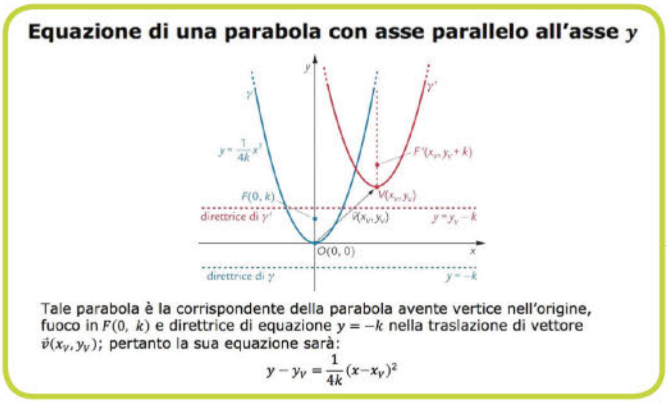
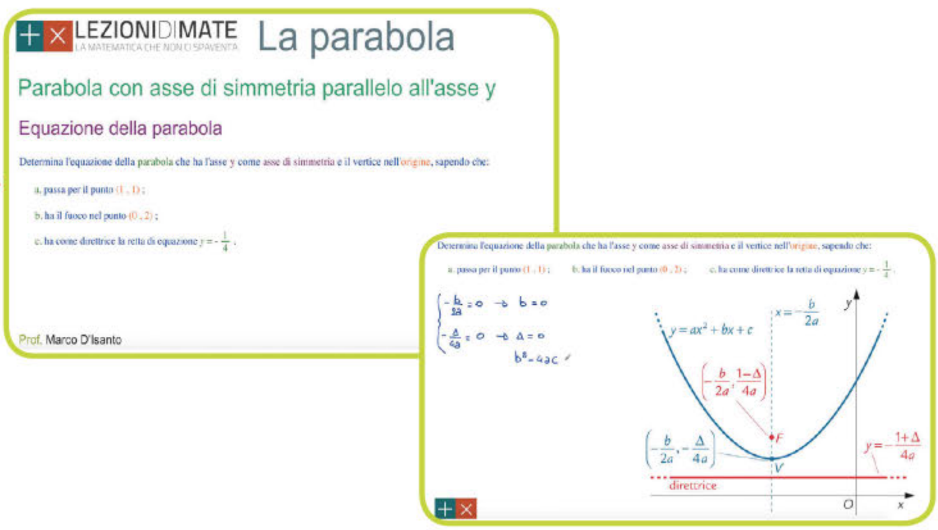


Figure animate

Brevi **filmati** in cui viene rappresentata una proprietà matematica o una figura geometrica.

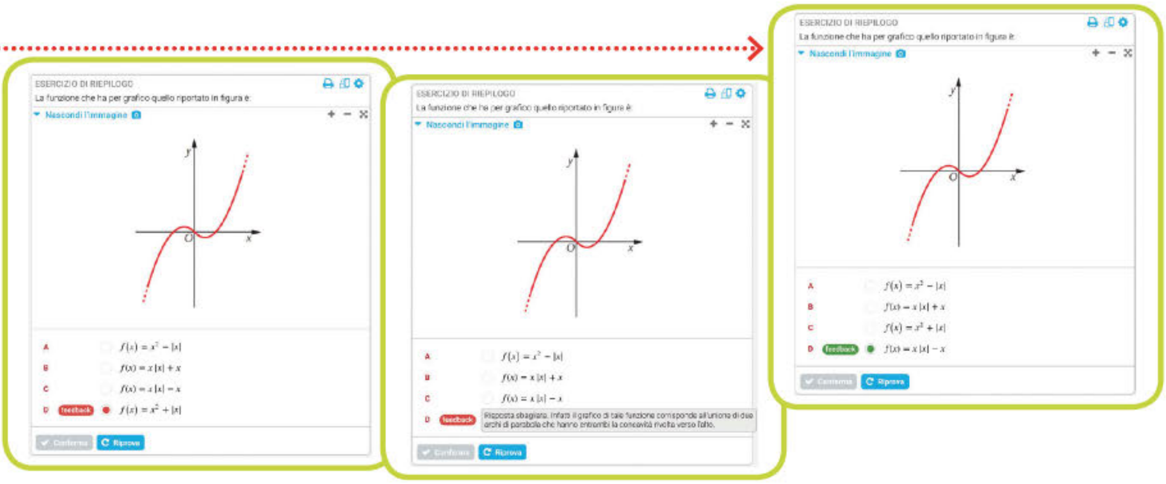
Videolezioni

Svolgimenti commentati di esercizi-modello con richiami alle regole teoriche da applicare.



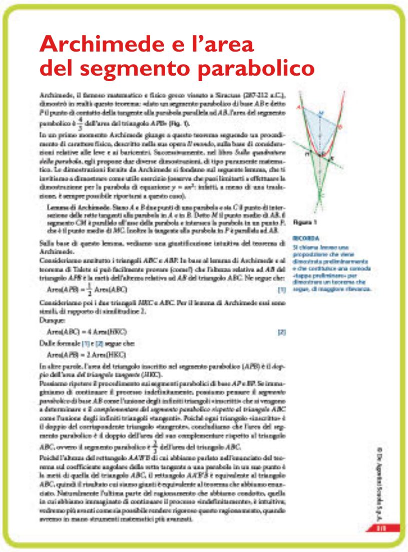
Esercizi interattivi

Esercizi autocorrettivi con feedback delle risposte sbagliate e guida alla risoluzione corretta.



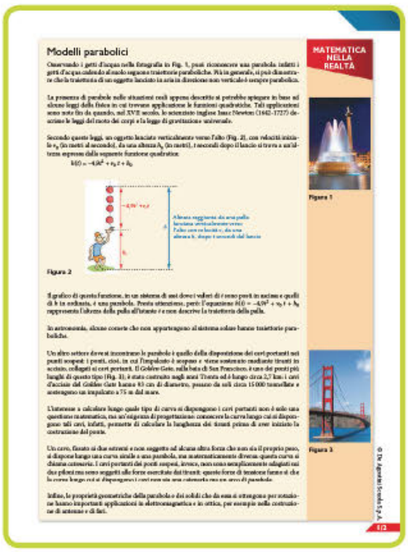
Approfondimenti

Schede in pdf (scaricabili e stampabili) che integrano e approfondiscono i concetti trattati nel libro.



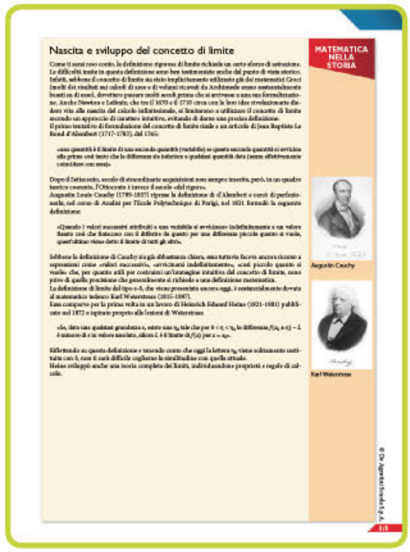
Matematica nella realtà

Schede in pdf (scaricabili e stampabili) di collegamento con la realtà.



Matematica nella storia

Schede in pdf (scaricabili e stampabili) dedicate alla storia della matematica.



In più

SITO SASSO VERDE

Tutte le risorse digitali del libro, organizzate per indice e tipologia, sono disponibili all'indirizzo **sassoverde.deascuola.it**.

PERCORSO INVALSI

Ambiente dedicato alla preparazione della Prova INVALSI di Matematica con palestre e simulazioni.

INDICE

Glossario

Matematica nella storia

Con GeoGebra

Videolezioni

Esercizi interattivi

Approfondimenti

Videolezioni

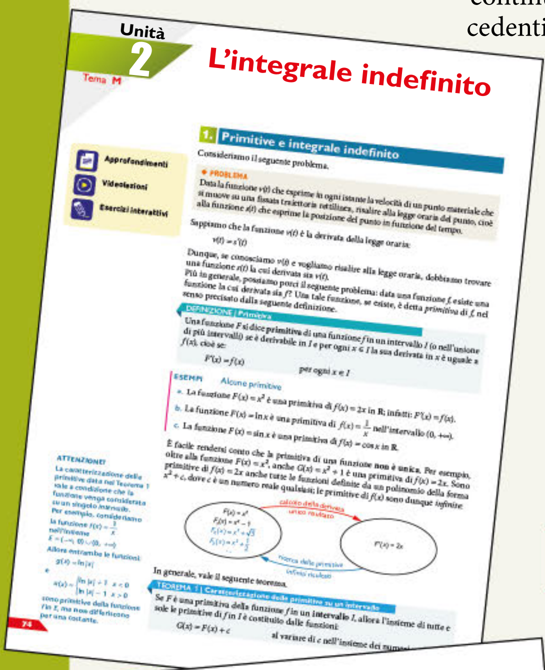
Esercizi interattivi

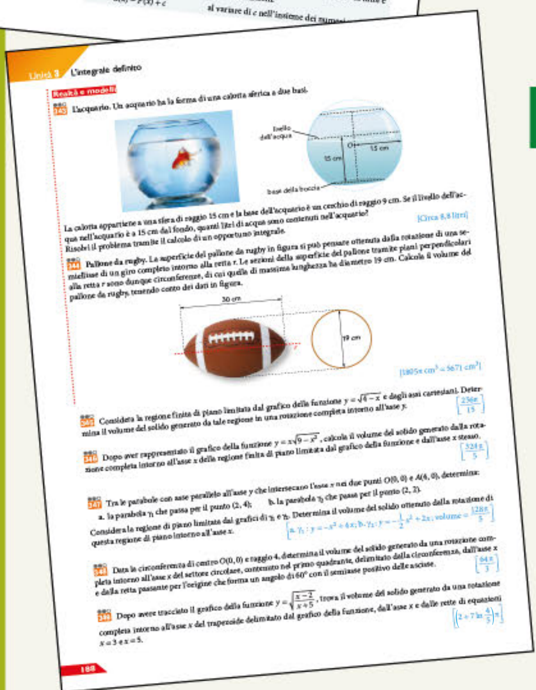
Tema N Dati e previsioni

Qualche consiglio per «studiare matematica» e utilizzare questo libro

Questo testo ha diversi scopi:

- continuare lo sviluppo delle competenze matematiche che hai acquisito nei corsi precedenti;
- farti scoprire alcune applicazioni della matematica nel mondo in cui viviamo;
- contribuire a farti acquisire quegli strumenti scientifici sempre più essenziali per partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica.





Per raggiungere questi scopi, ti diamo qualche consiglio su come studiare matematica.

1 Lo studio della matematica, come hai già avuto modo di constatare, richiede **impegno e partecipazione**. Non puoi imparare molto limitandoti ad assistere alle lezioni: devi partecipare, porti domande e confrontarti, anche da solo, con problemi ed esercizi.

2 È importante che studi matematica **con regolarità**: potrai così assimilare più agevolmente i concetti e il tuo insegnante potrà aiutarti più facilmente a superare le difficoltà.

3 Dovresti **leggere** le lezioni di questo libro e cercare di capire ciò che hai letto. A questo proposito ti diamo alcuni suggerimenti:

- leggi lentamente, prestando attenzione a ogni parola e ai simboli;
- rileggi le parti che non ti risultano chiare;
- prova a rifare da solo gli **esempi** che compaiono svolti nel testo.

4 Risolvi gli esercizi che trovi al termine di ciascuna Unità, suddivisi in paragrafi, con l'aiuto degli **esercizi svolti** e **guidati**.

5 Alla fine di ogni **tema** trovi una serie di esercizi sulle **competenze** da acquisire sugli argomenti trattati nel tema stesso; cerca di risolvere anche gli esercizi di **verso le prove INVALSI**, strutturate secondo la nuova tipologia di test d'esame.

6 Sfrutta i materiali multimediali relativi al libro disponibili **nell'e-book**: potrai trovare **figure dinamiche** per visualizzare meglio i concetti fondamentali presentati nella teoria, **figure animate**, **esercizi interattivi autocorrettivi**, **videolezioni** sulla risoluzione degli esercizi, un **glossario multimediale** in italiano e in inglese, ulteriori **complementi** e **approfondimenti**.

7 Quando risolvi un problema, non limitarti a scrivere la tua soluzione: sforzati di **illustrare ciò che stai facendo** e di **giustificare i vari passaggi**, con spiegazioni sintetiche ma esaurienti.

8 Se non riesci a rispondere a una domanda o a risolvere un esercizio immediatamente, non preoccuparti! Rileggi la lezione e gli esempi. Se puoi, abbandona momentaneamente la questione e affrontala in un secondo tempo. Quando qualcosa non ti è chiaro, **poni domande** e parlane con altri.

9 Cerca di studiare con **spirito critico**: la matematica non è solo calcolo, ma soprattutto una *forma di pensiero*. Nell'epoca di innovazioni tecnologiche in cui viviamo, questo secondo aspetto è sempre più essenziale: i calcoli si possono spesso demandare alle macchine, mentre è essenziale saper ragionare in modo corretto, risolvere e porsi problemi, unire fantasia e razionalità.

A tutti auguriamo buon lavoro

Gli Autori

Geometria nello spazio

TEMA
L

Le forme geometriche di cui facciamo quotidianamente esperienza nella realtà non si estendono nel *piano* (ambiente in cui abbiamo studiato finora la geometria) bensì nello *spazio*. Basta pensare per esempio a edifici che ci ricordano la forma del *parallelepipedo*, a strutture architettoniche quali quelle delle tombe egizie che ci ricordano la forma della *piramide*, alle comuni lattine contenenti bibite che ci richiamano la forma del *cilindro* o alle immagini dei pianeti che ci suggeriscono la forma della *sfera*. Sapere dominare la geometria nello spazio è fondamentale in svariati settori, in particolare per riuscire a *rappresentare* la realtà tridimensionale nel piano: problema che si incontra per esempio nella progettazione di auto o aerei, ma anche nella preparazione di videogiochi o di film nella nuova tecnologia «3D».
Nella prossima Unità ci occuperemo proprio di estendere lo studio della geometria dal *piano* allo *spazio*.

PREREQUISITI

- Geometria euclidea e analitica nel piano

COMPETENZE

- Confrontare e analizzare figure geometriche nello spazio, individuando invarianti e relazioni

Unità **1**

Tema **L**

Rette e piani, misure di superfici e volumi

1. Introduzione alla geometria nello spazio e parallelismo

- **Matematica nella storia**
- **Con GeoGebra**
- **Videolezioni**
- **Esercizi interattivi**

I primi assiomi di geometria dello spazio

Nei volumi precedenti abbiamo studiato la geometria euclidea nel piano, che ti abbiamo presentato seguendo il metodo assiomatico-deduttivo; abbiamo assunto cioè alcuni concetti primitivi e alcuni assiomi e da questi abbiamo dedotto vari teoremi. Seguiremo ora un percorso analogo per lo studio della geometria nello spazio, insistendo tuttavia meno sul metodo assiomatico-deduttivo (che dovrebbe ormai esserti famigliare).

Assumiamo come *primitivi* i concetti di **punto**, **retta**, **piano** e **spazio**. Indicheremo i punti con le lettere maiuscole A, B, C, ..., le rette con le lettere minuscole a, b, c, ... e i piani con le lettere minuscole dell'alfabeto greco α, β, γ, ...

ASSIOMA 1 |

a. Esiste ed è unico il piano passante per tre punti non allineati (**Fig. 1**).
b. In ogni piano valgono tutti gli ordinari assiomi della geometria euclidea.

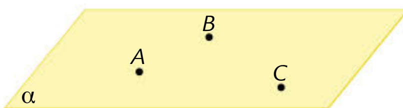


Figura 1 Il piano α è l'unico che contiene i tre punti non allineati A, B e C.

ESPRESSIONI ALTERNATIVE
Per esprimere che una retta *appartiene* a un piano diremo anche, in modo equivalente, che la retta è *contenuta* nel piano o che la retta *giace* sul piano.

ASSIOMA 2 |

Se un piano contiene due punti distinti, allora la retta che passa per essi appartiene a quel piano (**Fig. 2**).

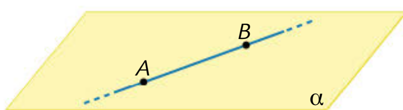


Figura 2 Se A e B appartengono al piano α, anche la retta AB è contenuta in α.

Dagli **Assiomi 1** e **2** si deduce che:

1. esiste ed è unico il piano passante per una retta r e per un punto P non appartenente a essa (**Fig. 3**);
2. esiste ed è unico il piano passante per due rette r ed s incidenti (**Fig. 4**).

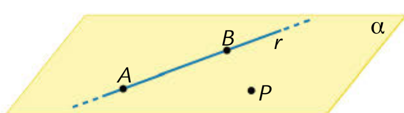


Figura 3 Scelti due punti distinti A e B appartenenti a r, i tre punti non allineati A, B e P individuano, per l'Assioma 1, un unico piano α e a tale piano appartiene la retta r per l'Assioma 2.

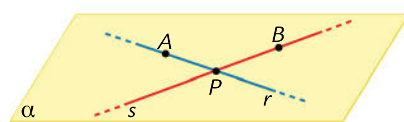


Figura 4 Detto P il punto di intersezione di r ed s e scelti due punti A e B distinti da P, appartenenti rispettivamente a r e a s, i tre punti non allineati A, B e P individuano, per l'Assioma 1, un unico piano α, cui appartengono entrambe le rette r ed s per l'Assioma 2.

Oltre a indicare un piano con una lettera greca minuscola, ci capiterà di indicarlo con i simboli degli elementi che lo individuano: per esempio scriveremo «piano ABC» per indicare il piano passante per i tre punti A, B e C, oppure «piano rs» per indicare il piano contenente due rette incidenti r ed s.
Introduciamo infine un ulteriore assioma, analogo all'assioma di partizione del piano da parte di una retta.

ASSIOMA 3 | Assioma di partizione dello spazio da parte di un piano

Dato un piano α, l'insieme dei punti dello spazio non appartenenti ad α resta diviso da α in due regioni disgiunte e convesse tali che:

a. se due punti A e B appartengono a regioni diverse, allora il segmento AB ha in comune con il piano α uno e un solo punto P (**Fig. 5**);
b. se due punti C e D appartengono alla stessa regione, allora il segmento CD non incontra il piano α in alcun punto.

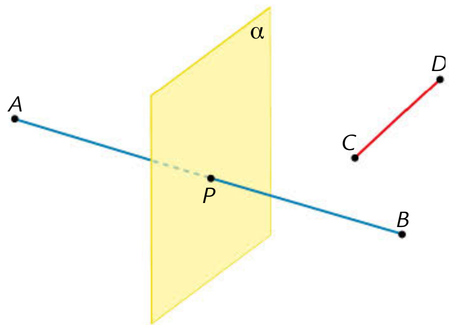


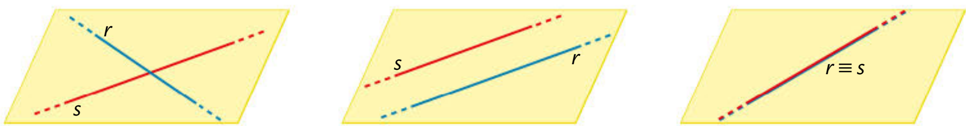
Figura 5

L'unione del piano α e di una delle due parti in cui esso divide lo spazio si chiama **semispazio** avente per origine il piano α.
Due semispazi distinti aventi la medesima origine si dicono **opposti**.

Posizioni reciproche di due rette nello spazio

Due rette nello spazio possono:

- essere **complanari**, ossia appartenenti allo stesso piano; in tal caso possono essere incidenti, parallele distinte o parallele coincidenti (**Fig. 6**);



a. Rette complanari incidenti
b. Rette complanari parallele distinte
c. Rette complanari parallele coincidenti

Figura 6 Posizioni reciproche di rette complanari.

- **non** essere complanari (**Fig. 7**); in tal caso vengono dette **sghembe** e sono prive di punti di intersezione (sai giustificare perché?).

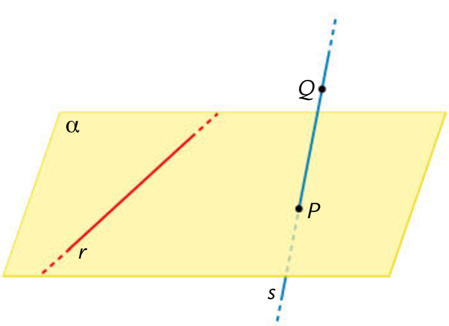


Figura 7 Sia r una retta che giace sul piano α, P un punto di α, non appartenente a r, e Q un punto non appartenente ad α. La retta r e la retta PQ sono *sghembe* (infatti, se così non fosse dovrebbero appartenere entrambe al piano α, il che è assurdo perché abbiamo supposto $Q \notin \alpha$).

DEFINIZIONE | **Rette parallele nello spazio**

Due **rette** nello spazio si dicono **parallele** quando sono complanari e non hanno punti di intersezione oppure quando coincidono.

Così come nel piano, anche nello spazio si può condurre una e una sola retta passante per un dato punto P e parallela a una assegnata retta r. Infatti:

- se $P \in r$, allora la parallela a r passante per P è la retta r stessa;
- se $P \notin r$, la retta cercata, dovendo essere complanare a r e passare per P, deve appartenere al piano individuato da P e da r: il problema è così ricondotto dallo spazio al piano, dove sappiamo che la retta cercata esiste ed è unica.

Anche nello spazio la relazione di parallelismo è *transitiva*; si può infatti dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 1 | **Transitività nello spazio della relazione di parallelismo**

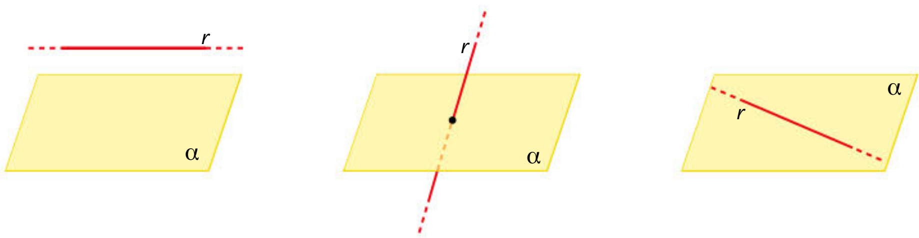
Siano r, s e t tre rette nello spazio tali che r è parallela a s ed s è parallela a t. Allora r è parallela a t.

Tutte le rette parallele a una retta data si dicono avere la stessa **direzione**.

Posizioni reciproche di una retta e un piano

Una retta e un piano nello spazio possono:

- **non** avere punti in comune (**Fig. 8a**);
- avere in comune uno e un solo punto, e in tal caso si dicono **incidenti** o **secanti** (**Fig. 8b**);
- avere in comune almeno due punti: in tal caso, per l'**Assioma 2** la retta deve appartenere al piano (**Fig. 8c**).



a. Retta e piano privi di punti di intersezione **b. Retta e piano secanti** **c. Retta che giace sul piano**

Figura 8 Posizioni reciproche tra retta e piano.

DEFINIZIONE | **Retta parallela a un piano**

Una retta si dice **parallela** a un piano quando non ha punti in comune con il piano oppure quando giace sul piano.

La retta r è parallela ad α, per esempio, nelle **Figg. 8a** e **8c**.
La relazione di parallelismo tra rette e piani gode delle proprietà espresse dai seguenti teoremi.

TEOREMA 2 | **Condizione di parallelismo tra retta e piano**

Se una retta r è parallela a una retta s contenuta nel piano α, allora la retta r è parallela al piano α (**Fig. 9**).

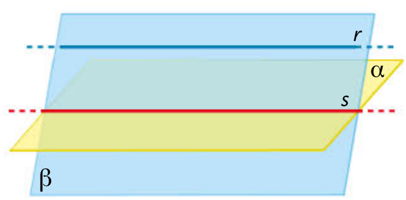


Figura 9 **Se $r \parallel s$ ed s è contenuta in α, allora $r \parallel s$.**

TEOREMA 3 |

Sia r una retta parallela a un piano α. Allora ogni piano β contenente r e incidente α ha in comune con α una retta parallela a r (**Fig. 10**).

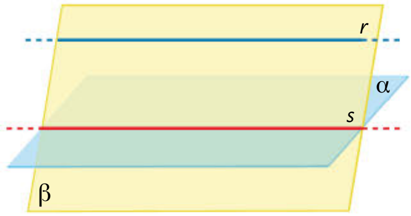


Figura 10 **Se $r \parallel \alpha$ e β è un piano che contiene r e interseca α lungo la retta s, allora $r \parallel s$.**

Posizioni reciproche di due piani

Per discutere le possibili posizioni reciproche di due piani occorre tenere presente il seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

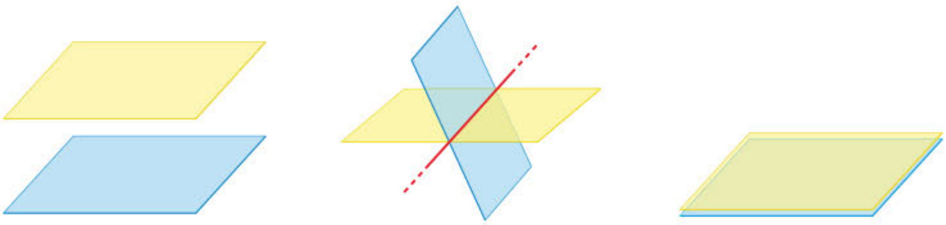
Con GeoGebra
Posizioni reciproche di due piani

TEOREMA 4 | Intersezione di due piani

Se due piani distinti hanno un punto P in comune, allora la loro intersezione è una retta passante per P.

Siamo ora in grado di stabilire le possibili posizioni reciproche di due piani; essi possono:

- non avere punti in comune (**Fig. 11a**);
- avere in comune almeno un punto: in tal caso il **Teorema 4** ci garantisce che i due piani hanno in comune tutti e soli i punti di una *retta* (**Fig. 11b**); i due piani, allora, si dicono **secanti**;
- coincidere.



a. Piani privi di punti di intersezione **b. Piani secanti** **c. Piani coincidenti**

Figura 11

DEFINIZIONE | Piani paralleli

Due piani che non hanno punti in comune (**Fig. 11a**) oppure che coincidono (**Fig. 11c**) si dicono **paralleli**.

La relazione di parallelismo tra piani gode delle proprietà espresse nei prossimi teoremi.

TEOREMA 5 | Condizione di parallelismo tra piani

Siano α e β due piani distinti. Se due rette **secanti** r ed s di un piano α sono parallele al piano β, allora i due piani α e β sono paralleli (**Fig. 12**).

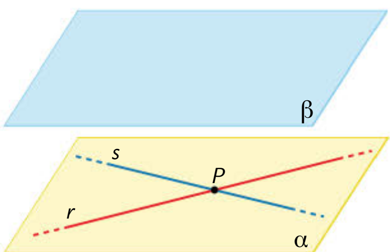


Figura 12 **Se esistono due rette r ed s, secanti e contenute in α, tali che $s \parallel \beta$ e $r \parallel \beta$, allora $\alpha \parallel \beta$.**

RIFLETTI
Mostra che, se le due rette r ed s del piano α non fossero secanti, allora il teorema non sarebbe vero.

TEOREMA 6 | Intersezioni di due piani paralleli con un piano trasversale

Se un piano γ interseca due piani paralleli e distinti α e β, le due rette intersezione di γ con α e β sono parallele (**Fig. 13**).

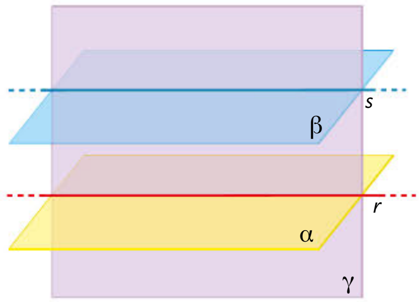


Figura 13 **Se $\alpha \parallel \beta$ e un piano γ interseca α e β lungo le rette r ed s allora $r \parallel s$.**

Si potrebbe infine dimostrare il seguente teorema.

RIFLETTI

Se il punto P appartiene al piano α, qual è il piano di cui il Teorema 7 garantisce l'esistenza?

TEOREMA 7 | Esistenza e unicità di piani paralleli

Dato un piano α e un punto P dello spazio, esiste sempre un unico piano passante per P e parallelo ad α (**Fig. 14**).

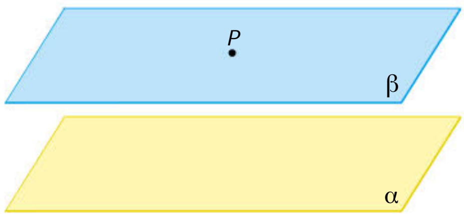


Figura 14 **Esiste un solo piano β tale che $P \in \beta$ e $\beta \parallel \alpha$.**

Fascio di piani paralleli e teorema di Talete

Si dice **fascio di piani paralleli** o **fascio improprio di piani** l'insieme di tutti i piani paralleli a un piano dato.
Il teorema di Talete nel piano si generalizza nello spazio come segue.

TEOREMA 8 | Teorema di Talete nello spazio

Un fascio di piani paralleli determina su due trasversali due classi di segmenti proporzionali (**Fig. 15**).

Per esempio, in relazione alla **Fig. 15**, in cui supponiamo $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$, il teorema di Talete nello spazio garantisce che:

$$AB : BC = A'B' : B'C' = A''B'' : B''C''$$

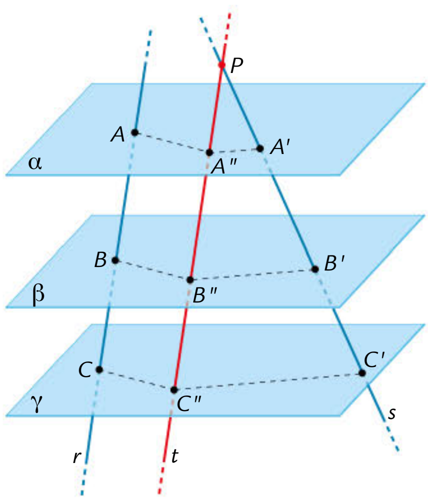


Figura 15

Figure nello spazio

DEFINIZIONE | Figura nello spazio

Chiamiamo **figura** nello spazio ogni sottoinsieme di punti dello spazio.

Si parla usualmente di **figura solida** (o semplicemente di **solido**) per riferirsi a una figura nello spazio delimitata da una superficie chiusa (assumiamo come primitivo il concetto di superficie chiusa, così come nel piano abbiamo assunto come primitivo il concetto di linea chiusa).
Anche nello spazio si può definire il concetto di *congruenza* tra due figure tramite quello di isometria. Un'**isometria** è una trasformazione tra i punti dello spazio che conserva le distanze; diciamo che due figure solide sono **congruenti** se e solo se si corrispondono in un'isometria. Particolare attenzione va prestata nell'analizzare il disegno che costituisce la *rappresentazione piana* di una figura solida: ciò che a prima vista appare dal disegno infatti può **non** corrispondere alla realtà.
Consideriamo per esempio la **Fig. 16**, in cui abbiamo rappresentato (in assonometria cavaliera) una figura solida che ti è certamente familiare: *il cubo*.

RICORDA
In geometria «trasformazione» è sinonimo di «funzione biiettiva».

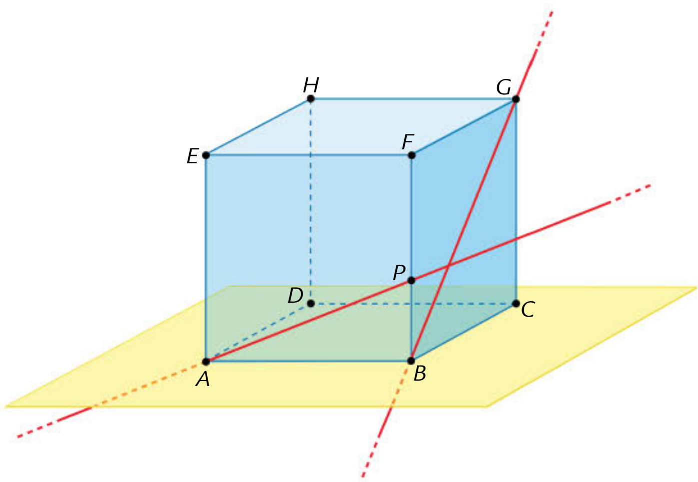


Figura 16

Dalla rappresentazione della figura sul piano:

- *sembra* che AB e BC **non** siano perpendicolari, mentre in realtà lo sono, perché $ABCD$ è un quadrato;
- *sembra* che AB e BC **non** siano congruenti, mentre in realtà lo sono, sempre perché $ABCD$ è un quadrato;
- *sembra* che le rette AP e BG siano incidenti, mentre in realtà non hanno punti di intersezione: infatti la retta AP interseca il piano che contiene i punti B, C, G ed F soltanto nel punto P.

«Vedere» nello spazio non è immediato come «vedere» nel piano. L'intuizione spaziale è possibile soltanto se si tengono in considerazione contemporaneamente, in un processo mentale unitario, sia *la rappresentazione di una figura solida* nel piano, sia le *proprietà geometriche* della figura stessa.

Esercizi p. 36

2. Perpendicolarità nello spazio

Abbiamo visto che nel piano la condizione di perpendicolarità è una *particolare* condizione di incidenza, ricca di interessanti conseguenze. Anche nello spazio si definiscono delle relazioni di perpendicolarità tra retta e piano, tra due rette e tra due piani, che illustriamo in questo paragrafo.

Perpendicolarità tra retta e piano

DEFINIZIONE | Retta perpendicolare a un piano

Una retta incidente a un piano in un punto *P* si dice **perpendicolare al piano** se è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per *P* (**Fig. 17**).

Il punto *P* di incidenza viene detto **piede della perpendicolare**.

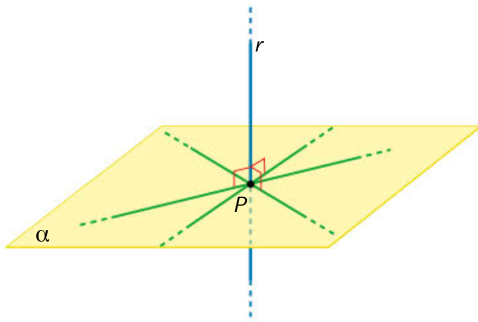


Figura 17

In base al seguente teorema, per dimostrare che una retta è perpendicolare a un piano in un suo punto *P* è sufficiente mostrare che è perpendicolare a *due* rette distinte del piano passanti per *P*.

RIFLETTI
Sai spiegare perché la perpendicolarità a una sola retta non basta a garantire la validità del Teorema 9?

TEOREMA 9 | Condizione di perpendicolarità tra retta e piano

Se una retta *r* è perpendicolare in un suo punto *P* a **due** rette di un piano, allora la retta *r* è perpendicolare al piano.

Circa la perpendicolarità tra retta e piano, sussiste il seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

TEOREMA 10 | Esistenza e unicità di rette e piani perpendicolari

a. Dato un piano e un punto *P*, esiste una e una sola retta perpendicolare al piano passante per *P* (**Fig. 18**).
b. Data una retta e un punto *P*, esiste un unico piano perpendicolare alla retta e passante per *P* (**Fig. 19**).

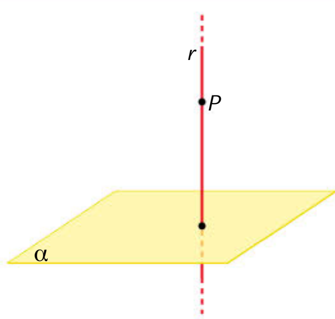


Figura 18 **La retta *r* è l'unica passante per *P* e perpendicolare al piano.**

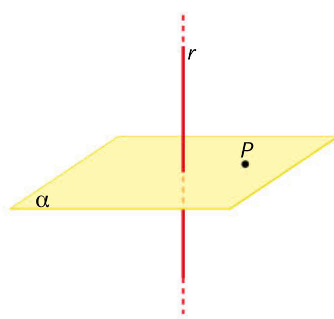


Figura 19 **Il piano α è l'unico passante per *P* e perpendicolare alla retta *r*.**

Il concetto di *asse* di un segmento, che abbiamo dato nel piano, si generalizza nello spazio come segue.

DEFINIZIONE | Piano assiale

Dato un segmento, si dice **piano assiale** del segmento il piano passante per il punto medio del segmento e perpendicolare alla retta che contiene il segmento (**Fig. 20**).

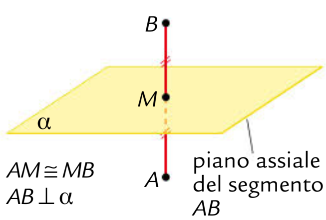


Figura 20

Sempre in analogia con quanto visto nel piano, si può dimostrare che il piano assiale di un segmento è il *luogo dei punti dello spazio equidistanti dagli estremi del segmento.*

Perpendicolarità tra due rette

Nel piano abbiamo visto che, dati una retta r e un punto P, esiste sempre un'unica retta passante per P e perpendicolare a r.
Nello spazio la situazione si presenta invece differente:

a. se il punto P **non** appartiene alla retta r (**Fig. 21**) esiste un'*unica* perpendicolare alla retta r passante per P (infatti il problema si può ricondurre dallo spazio al piano: basta osservare che esiste un unico piano α contenente il punto P e la retta r e che la perpendicolare richiesta giace sul piano α perché passa per P e per un punto di r);
b. se il punto P appartiene alla retta r, esistono invece *infinite* rette perpendicolari a r passanti per P: tutte quelle del fascio di rette di centro P appartenenti al piano perpendicolare a r in P (**Fig. 22**). Si può inoltre dimostrare che *non esistono altre rette* perpendicolari a r in P oltre a quelle giacenti su questo piano.

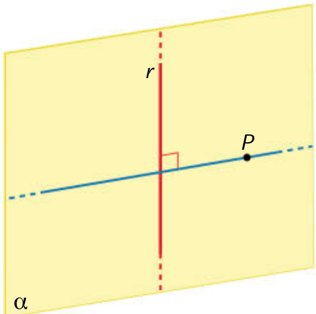


Figura 21

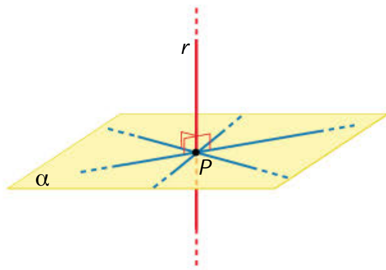


Figura 22

Un importante teorema sulla perpendicolarità delle rette nello spazio è il seguente.

TEOREMA 11 | Teorema delle tre perpendicolari

Siano α un piano, r una retta di α e P un punto dello spazio non appartenente ad α. Detti H il piede della perpendicolare condotta da P al piano α e K il piede della perpendicolare condotta da H alla retta r, allora la retta PK è perpendicolare a r.

Con GeoGebra
Teorema delle tre perpendicolari

IPOTESI $PH \perp \alpha$, $PH \cap \alpha = \{H\}$, $HK \perp r$, $HK \cap r = \{K\}$

TESI $PH \perp r$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo sulla retta r due punti A e A', simmetrici rispetto al punto K (**Fig. 23**).

- **Dimostriamo che i due triangoli *PHA* e *PHA'* sono congruenti**

I due triangoli PHA e PHA' sono rettangoli in H poiché la retta PH è, per ipotesi, perpendicolare al piano α. Inoltre tali triangoli hanno:
– il cateto PH in comune;
– $HA \cong HA'$ perché nel piano α la retta HK è (per ipotesi e per costruzione) l'asse del segmento AA'.

Dunque i due triangoli hanno i cateti rispettivamente congruenti e sono perciò congruenti.

- **Deduciamo che la retta *PK* è perpendicolare alla retta *r***

Dalla congruenza dei due triangoli PHA e PHA' segue che $PA \cong PA'$. Pertanto il triangolo PAA' è isoscele sulla base AA', quindi la mediana PK è anche altezza relativa ad AA'. Di conseguenza PK è perpendicolare alla retta r.

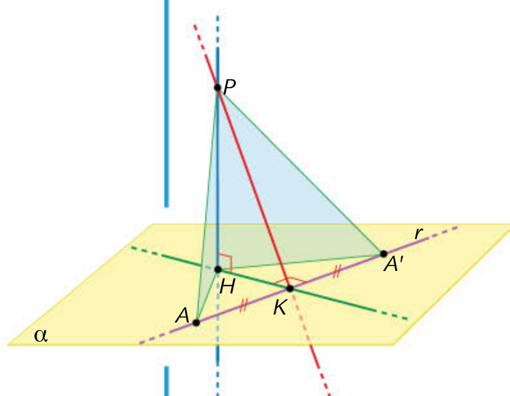


Figura 23

COROLLARIO 1 | Corollario del teorema 11

Nelle ipotesi del teorema delle tre perpendicolari, la retta r è perpendicolare al piano che contiene le due rette PH e PK.

Ulteriori conseguenze dei teoremi presentati in questo paragrafo sono i seguenti teoremi, che ci limiteremo a enunciare.

TEOREMA 12 | Parallelismo e perpendicolarità tra rette

a. Se due **rette** nello spazio sono **perpendicolari allo stesso piano**, le due rette sono parallele tra loro (**Fig. 24**).
b. Se due **rette** sono **parallele**, ogni piano che è perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra (**Fig. 24**).

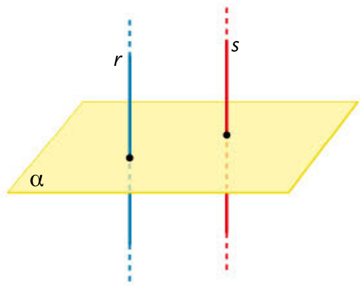


Figura 24

Rifletti sulle seguenti differenze tra piano e spazio euclideo:

- nello spazio, due rette perpendicolari a una stessa *retta* **non** sono necessariamente parallele come accade nel piano;
- nello spazio, date due rette parallele, una retta perpendicolare all'una **non** è necessariamente perpendicolare all'altra, come accade nel piano.

TEOREMA 13 | Parallelismo e perpendicolarità tra piani

a. Se due **piani** sono **perpendicolari alla stessa retta**, sono paralleli tra loro (**Fig. 25**).
b. Se due **piani** sono **paralleli**, ogni retta perpendicolare all'uno è perpendicolare anche all'altro (**Fig. 25**).

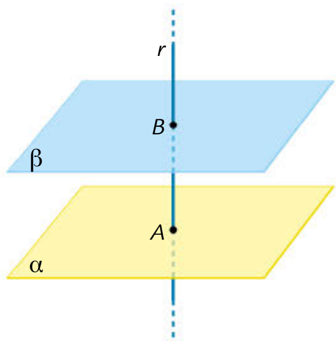


Figura 25

Diedri e perpendicolarità tra due piani

Per definire il concetto di perpendicolarità tra due piani, dobbiamo introdurre preliminarmente il concetto di *angolo diedro*: si tratta dell'analogo nello spazio del concetto di *angolo* nel piano.

DEFINIZIONE | Angolo diedro

Si chiama **angolo diedro** (o semplicemente **diedro**) ciascuna delle due parti in cui lo spazio è diviso da due semipiani aventi la stessa origine, inclusi i semipiani stessi.

I semipiani che delimitano il diedro si chiamano **facce** del diedro e ne costituiscono il contorno; la retta comune alle due facce si chiama **spigolo** del diedro (**Fig. 26**).

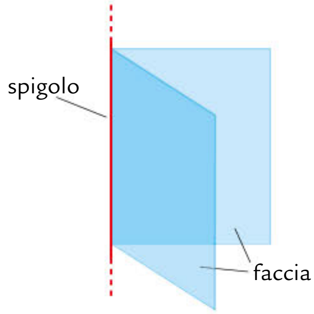


Figura 26

Due semipiani non complanari aventi la stessa origine individuano due angoli diedri, uno *concavo* e l'altro *convesso*. D'ora in avanti, quando parleremo di diedri, senza ulteriori precisazioni, intenderemo sempre riferirci a diedri **convessi**.
I punti di un diedro che non appartengono alle facce si dicono **interni** al diedro; tutti gli altri punti dello spazio, esclusi quelli del contorno del diedro, si dicono **esterni** al diedro.

DEFINIZIONE | **Sezione normale di un diedro**

Si chiama **sezione normale** di un diedro l'angolo che si ottiene intersecando il diedro con un piano perpendicolare allo spigolo (**Fig. 27**).

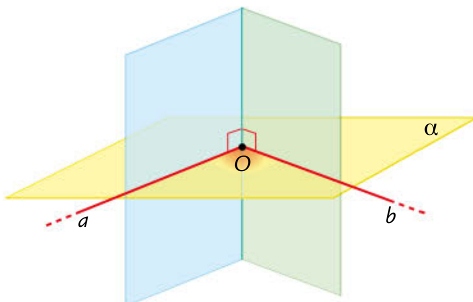


Figura 27 **L'angolo $a\hat{O}b$ è la sezione normale individuata sul diedro dal piano α.**

Un angolo è una sezione normale di un diedro se e solo se i suoi lati sono *semirette* che giacciono sulle facce del diedro e che sono *perpendicolari nello stesso punto* allo spigolo del diedro.

TEOREMA 14 | **Sezioni normali e congruenza**

a. Due sezioni normali di uno stesso diedro sono congruenti (**Fig. 28**).
b. Due diedri sono congruenti se e solo se hanno sezioni normali congruenti.

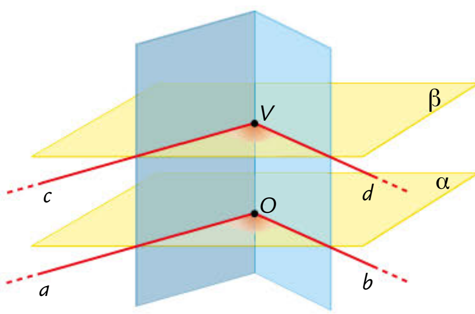


Figura 28 **Le due sezioni normali individuate sul diedro dai piani α e β sono congruenti: $a\hat{O}b \cong c\hat{V}d$.**

Poiché le sezioni normali di un diedro sono tutte congruenti, la seguente definizione è ben posta.

DEFINIZIONE | **Ampiezza di un angolo diedro**

Si dice **ampiezza** di un diedro l'ampiezza di una sua sezione normale.

Un diedro si dice **acuto**, **retto** od **ottuso** rispettivamente se la sua ampiezza è minore, uguale o maggiore di 90°.

Per i diedri si può introdurre un concetto analogo a quello di bisettrice di un angolo.

DEFINIZIONE | Semipiano bisettore

Si dice **semipiano bisettore** di un diedro il semipiano che ha come origine lo spigolo del diedro e che lo divide in due diedri congruenti (**Fig. 29**).

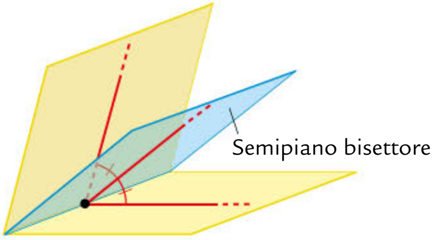


Figura 29 **Poiché il semipiano bisettore divide un diedro in due diedri congruenti, le sezioni normali dei due diedri sono individuate dalle semirette in rosso sono congruenti.**

Sempre in analogia con quanto visto nel piano, si può dimostrare che il semipiano bisettore di un diedro è il *luogo dei punti del diedro equidistanti dalle facce del diedro stesso.*

Ora che abbiamo introdotto la nozione di diedro, possiamo definire il concetto di perpendicolarità tra due piani.

RIFLETTI

Condizione necessaria e sufficiente affinché due piani incidenti siano perpendicolari è che formino (almeno) un diedro retto. Sai giustificare perché?

DEFINIZIONE | Piani perpendicolari

Due piani incidenti si dicono **perpendicolari** quando formano quattro diedri retti (**Fig. 30**).

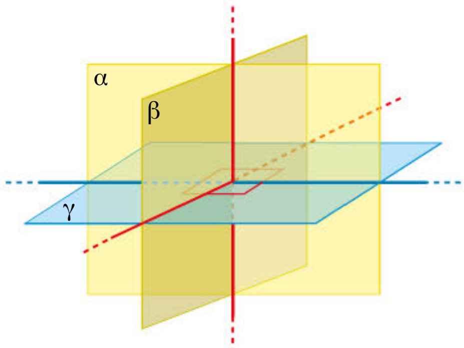


Figura 30 **I due piani α e β sono perpendicolari; infatti le sezioni normali tramite il piano γ dei quattro diedri da essi formati sono angoli retti.**

La relazione di perpendicolarità tra due piani gode delle proprietà espresse nei prossimi teoremi.

TEOREMA 15 | Condizione di perpendicolarità tra due piani

Se un piano β contiene una retta r perpendicolare al piano α, allora il piano β è perpendicolare al piano α (**Fig. 31**).

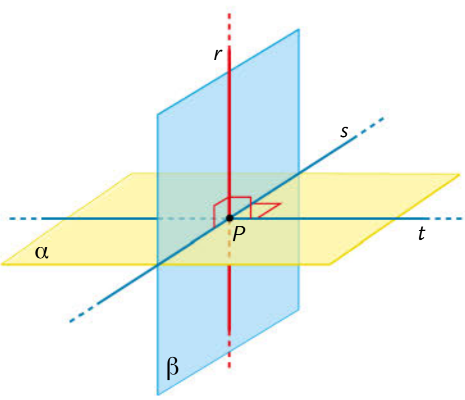


Figura 31 **Se la retta r, contenuta nel piano β, è perpendicolare ad α, allora il piano β è perpendicolare al piano α.**

TEOREMA 16 | Esistenza e unicità di piani perpendicolari

Dato un piano α e una retta r **non** perpendicolare ad α, esiste ed è unico il piano passante per r e perpendicolare ad α (**Fig. 32**).

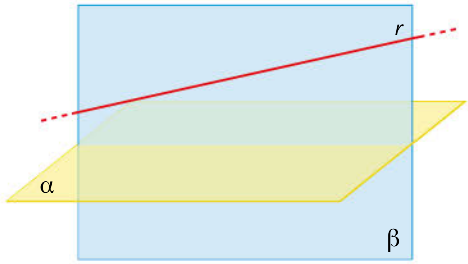


Figura 32

RIFLETTI

Nell'enunciato del Teorema 16 è supposto che *r* non sia perpendicolare ad α: che cosa cambia se $r \perp \alpha$?

Esercizi p. 38

3. Proiezioni, distanze e angoli

Con GeoGebra Costruzione della perpendicolare a due rette sghembe

Distanze

Dato un punto P e un piano α, il piede della perpendicolare condotta dal punto P al piano α viene anche detto **proiezione** del punto P su α: per esempio, in **Fig. 33**, H è la proiezione di P sul piano α.

DEFINIZIONE | Distanza di un punto da un piano

Si chiama **distanza** di un **punto** da un **piano** la distanza tra il punto stesso e la sua proiezione sul piano.

La distanza di un punto da un piano ha una proprietà di «minimo» analoga a quella messa in rilievo, nello studio della geometria euclidea del piano, per la distanza di un punto da una retta. Precisamente, la distanza del punto P dal piano α è minore della distanza del punto P da qualsiasi punto del piano diverso dalla proiezione di P: per esempio, con riferimento alla **Fig. 33**, $PH < PQ$ (ciò segue dal fatto che in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è sempre maggiore di ciascuno dei due cateti).

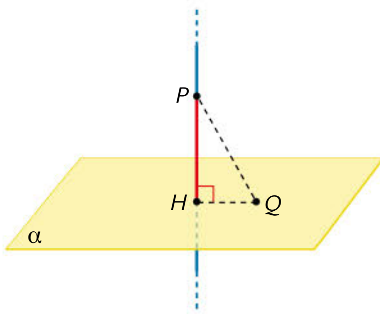


Figura 33 **Il segmento *PH* rappresenta la distanza del punto *P* dal piano α.**

DEFINIZIONE | Distanza di una retta parallela a un piano da un piano

Data una retta parallela a un piano, si chiama **distanza** della **retta** dal **piano** la distanza di un punto qualsiasi della retta dal piano (**Fig. 34**).

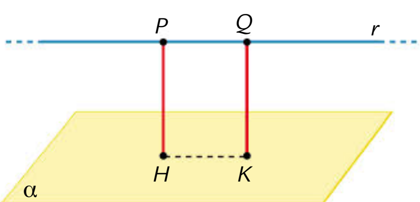


Figura 34 ***PH* e *QK* rappresentano la distanza della retta *r* dal piano α.**

La definizione è ben posta, poiché si può dimostrare che tutti i punti di una retta parallela a un piano hanno la stessa distanza dal piano (ti invitiamo a dimostrarlo facendo riferimento per esempio alla **Fig. 34** e osservando che il quadrilatero $PHKQ$ è un rettangolo).

Analogamente si può definire la distanza tra due piani paralleli.

DEFINIZIONE | Distanza tra due piani paralleli

Dati due **piani paralleli**, si definisce **distanza** tra di essi la distanza di un punto qualsiasi di un piano dall'altro (**Fig. 35**).

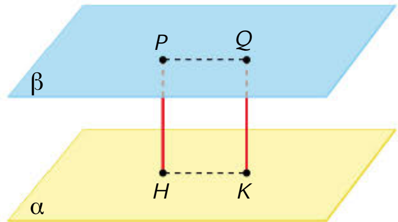


Figura 35 ***PH*** **e** ***QK*** **rappresentano la distanza del piano β dal piano α.**

La definizione è ben posta, poiché tutti i punti di un piano parallelo a un altro hanno la stessa distanza da quest'ultimo.

Angoli

Per definire il concetto di angolo formato da una retta con un piano definiamo preliminarmente il concetto di *proiezione* di una retta su un piano.

DEFINIZIONE | Proiezione di una retta su un piano

Si dice **proiezione** di una retta su un piano la figura costituita dalle proiezioni di tutti i punti della retta sul piano.

Se la retta è perpendicolare al piano, la sua proiezione sul piano si riduce a un *punto*, altrimenti la proiezione è una *retta*. Pertanto, per determinare la proiezione di una retta non perpendicolare a un piano sul piano stesso basta determinare le proiezioni sul piano di due punti della retta e considerare la retta che passa per i due punti proiezione.

DEFINIZIONE | Angolo tra una retta e un piano

Data una retta incidente e non perpendicolare a un piano, si dice **angolo** che la retta forma con il piano l'angolo **acuto** formato dalla retta con la sua proiezione sul piano (**Fig. 36**).

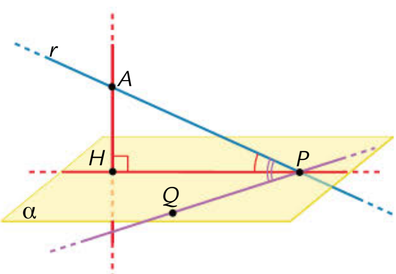


Figura 36 Il punto ***A*** **è un punto della retta** ***r*** **diverso da** ***P*** **e** ***H*** **è la proiezione di** ***A*** **sul piano α. L'angolo che la retta** ***r*** **forma con il piano α è l'angolo formato da** ***r*** **con la retta** ***PH*****, ossia** $\mathbf{A\hat{P}H}$**.**

L'angolo che una retta incidente a un piano α nel punto P forma con il piano gode di un'importante proprietà di minimo; precisamente, è minore dell'angolo formato dalla retta con qualsiasi altra retta del piano α passante per P. Per esempio, in riferimento alla **Fig. 36**, si ha $A\hat{P}H < A\hat{P}Q$.

Esercizi p. 40

4. Prismi, parallelepipedi e piramidi

Conclusa la trattazione di rette e piani nello spazio euclideo, ci addentriamo nello studio dei principali solidi: prismi (parallelepipedi), piramidi e solidi di rotazione.

Prismi

DEFINIZIONE | Prisma indefinito

Dato un poligono convesso e una retta r incidente al suo piano, si dice **prisma indefinito** la figura formata dalle rette parallele a r, passanti per tutti i punti del poligono dato, inclusi quelli del suo contorno (**Fig. 37**).

Con GeoGebra
Prismi

Le rette che passano per i vertici del poligono si dicono **spigoli** del prisma indefinito.

DEFINIZIONE | Prisma

Si dice **prisma** (definito) la parte di un prisma indefinito compresa tra una coppia di piani paralleli che intersecano tutti gli spigoli di quest'ultimo (**Fig. 38**).

I due poligoni ottenuti come intersezione dei due piani paralleli con il prisma indefinito si dicono **basi** del prisma e i loro vertici sono i **vertici** del prisma; i poligoni diversi dalle basi che delimitano il prisma si dicono **facce laterali** (**Fig. 38**). Le basi e le facce laterali di un prisma si dicono **facce** del prisma.
I lati delle basi si dicono **spigoli di base**, mentre i lati delle facce laterali che non appartengono alle basi si dicono **spigoli laterali** (**Fig. 39**). La distanza tra i due piani che contengono le basi del prisma si dice **altezza** del prisma (**Fig. 39**).
Si chiamano **diagonali** di un prisma i segmenti che congiungono due vertici del prisma non appartenenti alla stessa faccia (**Fig. 39**).

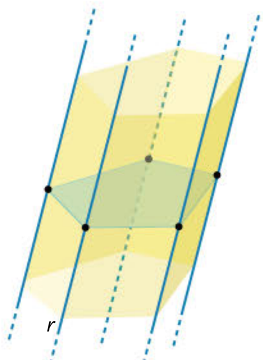


Figura 37

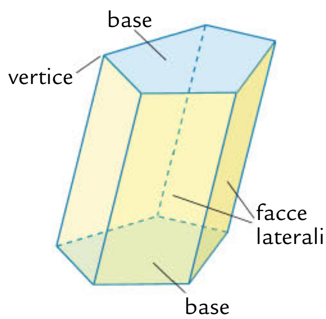


Figura 38

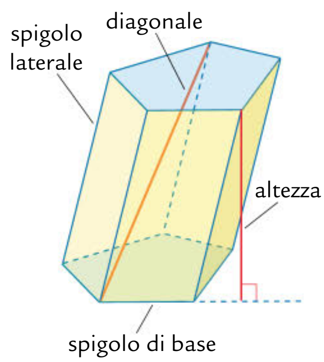


Figura 39

Si può dimostrare (ti invitiamo a farlo per esercizio) il seguente teorema.

TEOREMA 17 | Proprietà dei prismi

Le basi di un prisma sono poligoni congruenti e le sue facce laterali sono parallelogrammi.

Un prisma si dice **triangolare**, **quadrangolare**, **esagonale**... a seconda del numero dei lati delle basi.
Un prisma si dice **retto** quando gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi. Infine, un prisma retto le cui basi sono poligoni regolari viene detto **regolare**.

Parallelepipedi

Studiamo ora alcuni particolari prismi: i parallelepipedi.

DEFINIZIONE | Parallelepipedo

Si chiama **parallelepipedo** un prisma le cui basi sono parallelogrammi.

Con GeoGebra
Parallelepipedi

ATTENZIONE!
Un parallelepipedo è un particolare prisma; in quanto tale si dice **retto** quando gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.

DEFINIZIONE | Parallelepipedo rettangolo
Un parallelepipedo retto le cui basi sono rettangoli si chiama **parallelepipedo rettangolo**.

Un parallelepipedo ha sei facce e ogni faccia è adiacente ad altre quattro; la restante faccia si dice **opposta** a quella considerata.

TEOREMA 18 | Proprietà delle diagonali di un parallelepipedo
Le quattro diagonali di un parallelepipedo si intersecano nel loro punto medio (**Fig. 40**).

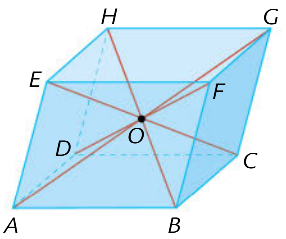


Figura 40 **Le diagonali** ***AG*****,** ***BH*****,** ***CE*** **e** ***DF*** **si intersecano nel loro punto medio** ***O*****.**

Se il parallelepipedo è rettangolo vale l'ulteriore proprietà espressa dal seguente teorema.

TEOREMA 19 | Proprietà delle diagonali di un parallelepipedo rettangolo
Le diagonali di un parallelepipedo rettangolo sono congruenti.

La misura d delle diagonali di un parallelepipedo rettangolo si può esprimere facilmente in funzione delle misure degli spigoli di base e di quelli laterali, applicando ripetutamente il teorema di Pitagora. In riferimento alla **Fig. 41**, in cui abbiamo posto:

$$\overline{AB} = a \quad \overline{BC} = b \quad \overline{AE} = c$$

abbiamo infatti che:

$$d = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AE}^2} =$$ **Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo** ***ACE***

$$= \sqrt{\underbrace{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}_{\overline{AC}^2} + \overline{AE}^2}$$ **Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo** ***ABC***

RICORDA
Le misure dei tre spigoli di un parallelepipedo rettangolo uscenti da uno stesso vertice sono anche chiamate **dimensioni** del parallelepipedo. Per esempio, le tre dimensioni del parallelepipedo in Fig. 41 sono *a*, *b* e *c*.

Pertanto, abbiamo:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad [1]$$

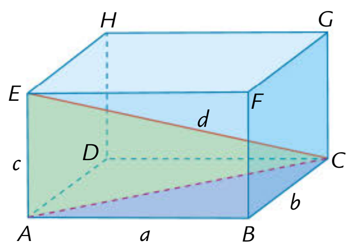


Figura 41

Il **cubo** è un particolare parallelepipedo rettangolo, avente tutti gli spigoli congruenti.
In particolare, se la misura dello spigolo di un cubo è s, dalla [1] segue che la misura d delle sue diagonali è:

$$d = \sqrt{s^2 + s^2 + s^2} = s\sqrt{3}$$

Angoloidi e piramidi

In questo sottoparagrafo vogliamo studiare alcuni particolari solidi, **non** appartenenti all'insieme dei prismi: le *piramidi*. A tale scopo, occorre introdurre preliminarmente il concetto di **angoloide**.

DEFINIZIONE | Angoloide

Dato un poligono convesso e un punto V non appartenente al piano del poligono, si chiama **angoloide** di vertice V la figura formata da tutte le semirette di origine V che passano per i punti del poligono dato, inclusi quelli appartenenti al suo contorno (**Fig. 42**).

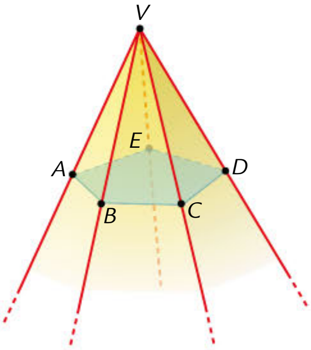


Figura 42 **Angoloide di vertice *V*. Le semirette *VA*, *VB*, *VC*, *VD* e *VE* sono gli spigoli dell'angoloide. L'angolo di vertice *V* che ha come lati le semirette *VA* e *VB* rappresenta una delle cinque facce dell'angoloide.**

Le semirette che passano per il punto V e per i vertici del poligono si chiamano **spigoli** dell'angoloide. In particolare, un angoloide con tre spigoli si chiama **triedro**. Gli *angoli* che hanno come vertice V e come lati due spigoli consecutivi si dicono **facce** dell'angoloide.

DEFINIZIONE | Piramide

Si chiama **piramide** la parte di un angoloide compresa tra il vertice dell'angoloide e un piano che interseca tutti gli spigoli dell'angoloide.

Con GeoGebra
Piramidi

Per esempio, in **Fig. 43** è rappresentata la piramide individuata da un angoloide di vertice V e dal piano α.

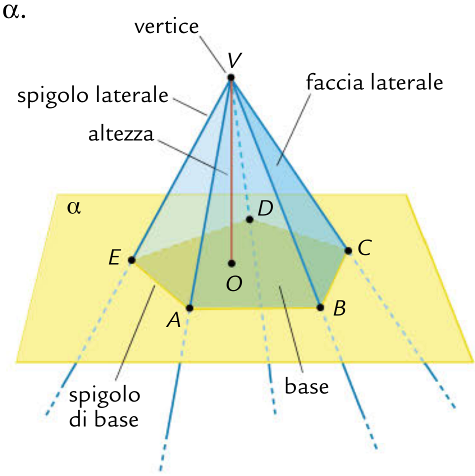
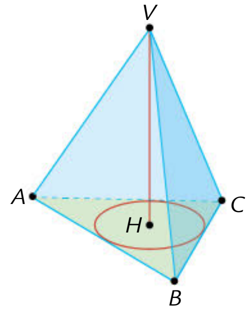
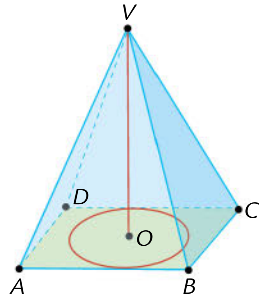
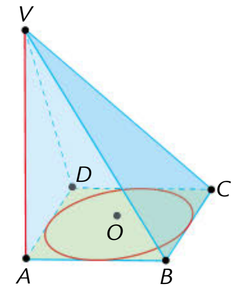


Figura 43

Il poligono che si ottiene dall'intersezione del piano α con l'angoloide è detto **base** della piramide e ogni suo lato è detto **spigolo di base**.
Il punto V è detto **vertice** della piramide e la distanza tra il vertice V e il piano della base è detta **altezza** della piramide.
Il piano α stacca sulle facce dell'angoloide dei triangoli di vertice V, che vengono detti **facce laterali** della piramide; i lati delle facce laterali che non appartengono alla base sono detti **spigoli laterali** della piramide. Si dice **angolo diedro** formato da due facce di una piramide aventi uno spigolo in comune l'angolo diedro formato dai due piani che contengono le facce. Una piramide si dice *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*... a seconda che la sua base sia un *triangolo*, un *quadrilatero*, un *pentagono*... In particolare, una piramide a base triangolare si chiama **tetraedro**.

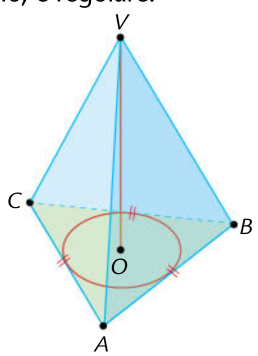
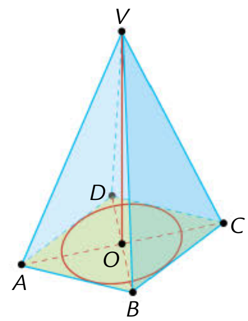
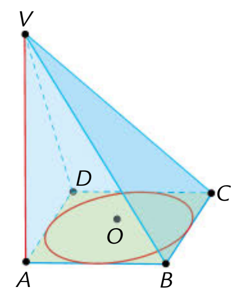
DEFINIZIONE | Piramide retta

Una piramide si dice **retta** se la base è un poligono circoscrivibile a una circonferenza e il centro di tale circonferenza coincide con il piede dell'altezza della piramide.

Esempio	Controesempi	
Una piramide a base triangolare, tale che il piede dell'altezza cade nell'incentro del triangolo di base, è retta.	Una piramide avente come base un rettangolo (che non sia un quadrato), tale che il piede dell'altezza cade nel centro del rettangolo, **non** è retta.	Una piramide avente come base un quadrato *ABCD*, tale che il vertice appartiene alla perpendicolare in *A* al piano della base, **non** è retta.
		
Infatti un triangolo è sempre circoscrivibile a una circonferenza e il centro di tale circonferenza è l'incentro del triangolo.	**Infatti il rettangolo di base non è circoscrivibile a una circonferenza.**	**Infatti la base è circoscrivibile a una circonferenza, ma il piede dell'altezza, cioè *A*, non coincide con il centro della circonferenza inscritta nel quadrato.**

DEFINIZIONE | Piramide regolare

Una piramide si dice **regolare** se è retta e la base è un poligono regolare.

Esempio	Controesempi	
Una piramide avente come base un triangolo equilatero, tale che il piede dell'altezza cade nel baricentro del triangolo, è regolare.	Una piramide avente come base un rombo (che non sia un quadrato), tale che il piede dell'altezza cade nel centro del rombo, **non** è regolare.	Una piramide avente come base un quadrato *ABCD*, tale che il vertice appartiene alla perpendicolare in *A* al piano di base, **non** è regolare.
		
Infatti: **– la base, essendo un triangolo equilatero, è un poligono regolare;** **– la base è circoscrivibile a una circonferenza e il centro di tale circonferenza coincide con il baricentro del triangolo, quindi la piramide è retta.**	**Infatti, sebbene la piramide sia retta, la base, un rombo, non è un poligono regolare.**	**Affinché una piramide sia *regolare*, deve in particolare essere *retta*. La piramide in esame non è retta (come già osservato in precedenza), quindi non può essere regolare.**

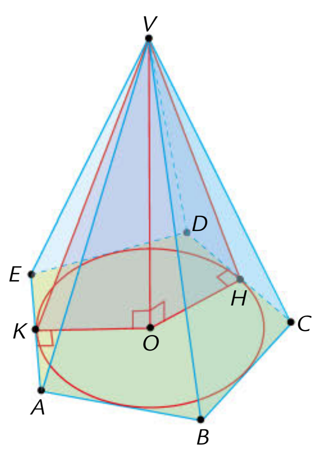


Figura 44

Le piramidi rette e le piramidi regolari godono di alcune importanti proprietà. Per scoprirle, fissiamo inizialmente l'attenzione sulla piramide *retta*, a base pentagonale, rappresentata in **Fig. 44**.

Abbiamo indicato con V il vertice della piramide, con O il piede dell'altezza della piramide, con H e K i punti di contatto dei lati CD e AE della base con la circonferenza in essa inscritta. Osserviamo che:

- VH e VK, per il teorema delle tre perpendicolari, sono perpendicolari rispettivamente a CD e AE, quindi sono *altezze* delle facce CVD e AVE;
- i triangoli rettangoli VOH e VOK sono congruenti perché hanno il cateto VO in comune e i cateti OH e OK congruenti in quanto raggi della stessa circonferenza; in particolare, quindi, $VH \cong VK$.

Dunque le altezze delle facce CVD e AVE sono congruenti.

Con ragionamenti del tutto analoghi, si può dimostrare che, più in generale, vale il seguente teorema.

TEOREMA 20 | Proprietà delle piramidi rette

In una piramide **retta** i segmenti che congiungono il vertice della piramide con i punti di tangenza dei lati della base con la circonferenza inscritta in quest'ultima sono **altezze** delle **facce laterali** della piramide e sono tutti **congruenti** tra loro.

In base al teorema precedente risulta ben posta la seguente definizione.

DEFINIZIONE | Apotema di una piramide retta

Data una piramide retta, ciascuna delle altezze delle facce laterali relative agli spigoli di base viene detta **apotema** della piramide.

ATTENZIONE!
Nel caso di una piramide **non** retta non è possibile parlare di *apotema*, ma solo di *altezze* delle facce laterali, poiché queste ultime non sono tutte congruenti.

Per scoprire, infine, le ulteriori proprietà delle piramidi *regolari*, fissiamo l'attenzione sulla piramide regolare, a base pentagonale, rappresentata in **Fig. 45**, in cui O è il piede dell'altezza della piramide.

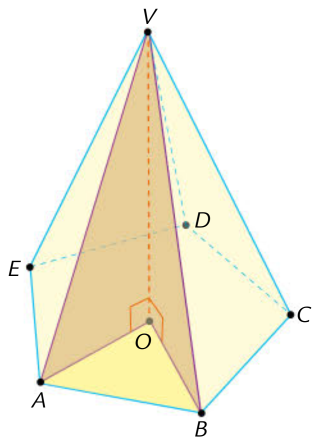


Figura 45

I *triangoli rettangoli* VOA e VOB sono congruenti perché hanno:

- il cateto VO in comune;
- i cateti OA e OB congruenti perché raggi della circonferenza circoscritta al pentagono (circonferenza che esiste poiché il pentagono è regolare, e che ha centro in O poiché il centro della circonferenza circoscritta a un poligono regolare coincide con quello della circonferenza inscritta).

Dalla congruenza dei due triangoli VOA e VOB segue, in particolare, che i due spigoli laterali VA e VB sono congruenti, quindi il triangolo VAB è isoscele sulla base AB.
Con analoghi ragionamenti si può dimostrare che, più in generale, vale il seguente teorema.

TEOREMA 21 | Proprietà delle piramidi regolari

In una piramide **regolare** gli **spigoli laterali** sono tutti tra loro **congruenti** e le **facce laterali** sono triangoli **isosceli congruenti**.

Tronco di piramide

Sezionando una piramide con un piano parallelo alla base, la piramide resta divisa in due parti: una piramide «più piccola», avente lo stesso vertice di quella originaria, e un solido che si chiama **tronco di piramide** (colorato in azzurro in **Fig. 46**).

RIFLETTI

In forza del teorema di Talete le basi del tronco di piramide sono poligoni simili. Anche le facce laterali della piramide «più piccola» ottenuta tramite la sezione sono simili alle corrispondenti facce della piramide «più piccola» ottenuta tramite la sezione.

I due poligoni appartenenti a piani paralleli che delimitano un tronco di piramide si dicono **basi** del tronco, mentre gli altri poligoni che delimitano il tronco sono *trapezi* (in base al **Teorema 12**) e vengono detti **facce laterali**. La distanza tra le due basi è l'**altezza** del tronco. Se la piramide da cui è stato ottenuto il tronco è *retta*, i trapezi che costituiscono le facce laterali hanno uguale altezza, detta **apotema** del tronco.

Con GeoGebra
Tronco di piramide

Esercizi p. 40

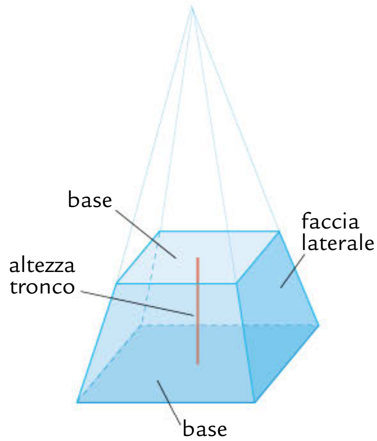


Figura 46

5. Solidi di rotazione

Con GeoGebra
Solidi di rotazione

In questo paragrafo studieremo alcuni particolari solidi, detti **solidi di rotazione** perché possono essere generati dalla rotazione di una figura piana intorno a una retta (**Fig. 47**). Supporremo che l'angolo di rotazione sia un angolo giro e per esprimere ciò parleremo di rotazione **completa**.

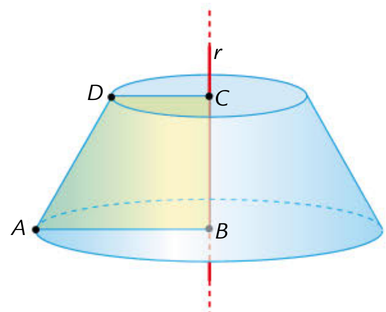


Figura 47 Solido generato dalla rotazione completa del trapezio *ABCD* intorno alla retta *r*.

Ogni punto della figura che ruota (per esempio A o D in **Fig. 47**) genera, nella rotazione, una circonferenza appartenente al piano perpendicolare all'asse di rotazione e passante per il punto stesso.

Cilindro

Con GeoGebra
Cilindri

DEFINIZIONE | Cilindro

Si dice **cilindro circolare retto** (o semplicemente **cilindro**) il solido generato da un rettangolo nella rotazione completa intorno a un suo lato.

Con GeoGebra
Sezioni di un cilindro con un piano parallelo all'asse

Il lato del rettangolo intorno al quale avviene la rotazione è l'**altezza** del cilindro (**Fig. 48**); i due lati del rettangolo perpendicolari all'altezza del cilindro sono i **raggi** del cilindro e generano, nella rotazione, due cerchi, detti **basi** del cilindro. La retta che contiene l'altezza del cilindro è detta **asse** del cilindro.

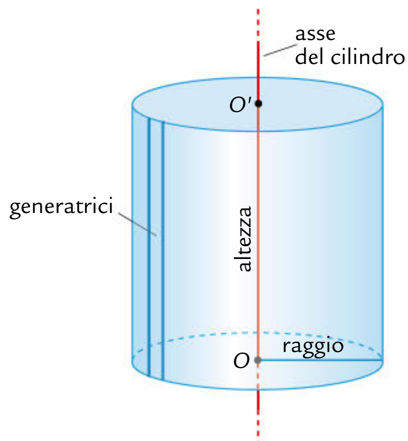


Figura 48

I segmenti congruenti all'altezza del cilindro, paralleli al suo asse e aventi come estremi due punti appartenenti alle circonferenze che delimitano le sue basi sono detti **generatrici** di quella che è chiamata **superficie laterale** del cilindro.
Un cilindro si dice **equilatero** quando la sua altezza è congruente al diametro della base.

Cono e tronco di cono

DEFINIZIONE | Cono

Si dice **cono circolare retto** (o semplicemente **cono**) il solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo intorno a uno dei suoi cateti.

Con GeoGebra
Coni

Il cateto intorno al quale avviene la rotazione si dice **altezza** del cono e la retta che contiene l'altezza è l'**asse** del cono (**Fig. 49**); l'altro cateto è il **raggio** del cono e genera nella rotazione un cerchio, detto **base** del cono. L'ipotenusa del triangolo che ruota è l'**apotema** del cono e il punto in comune all'altezza del cono e all'apotema è il **vertice** del cono.

Con GeoGebra
Sezione di un cono con un piano passante per il vertice

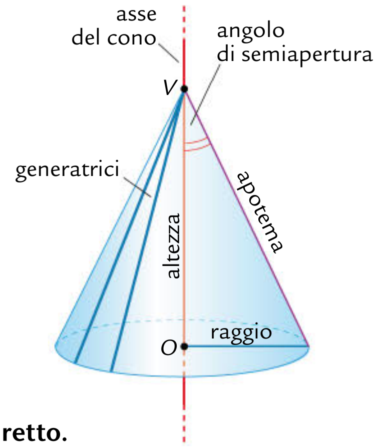


Figura 49 Cono circolare retto.

Ciascuno degli infiniti segmenti, congruenti all'apotema, che congiungono il vertice del cono con uno dei punti appartenenti alla circonferenza che delimita la sua base è detto anche **generatrice** (**Fig. 49**) della **superficie laterale** del cono.
L'angolo che ha come vertice il vertice del cono e come lati le semirette che contengono l'altezza e l'apotema del cono è detto **angolo di semiapertura** del cono (**Fig. 49**).
Un cono il cui apotema è congruente al diametro della base si dice **equilatero.**
Sezionando un cono con un piano parallelo alla base, il cono viene diviso in due parti: un cono «più piccolo» avente lo stesso vertice del cono originario, e un solido detto **tronco di cono** (disegnato in azzurro in **Fig. 50**). La base del cono originario e il cerchio ottenuto dalla sezione del cono con il piano sono le **basi** del tronco; la distanza tra le basi del tronco costituisce l'**altezza** del tronco.

Con GeoGebra
Tronco di cono

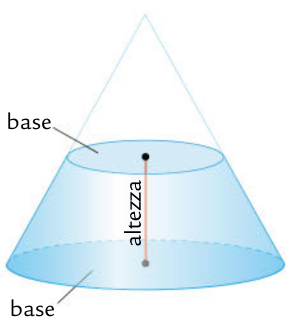


Figura 50 Tronco di cono.

Sfera

DEFINIZIONI | Sfera e superficie sferica

Si dice **sfera** il solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio intorno al suo diametro. Si dice **superficie sferica** la superficie generata dalla rotazione completa di una semicirconferenza intorno al suo diametro.

Con GeoGebra
Sfere

Il centro e il raggio del semicerchio (della semicirconferenza) che ruota sono detti rispettivamente **centro** e **raggio** (**Fig. 51**) della sfera (superficie sferica).

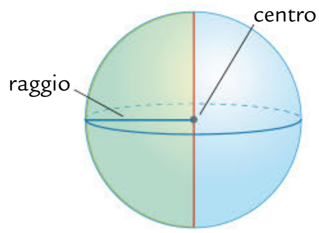


Figura 51

Con GeoGebra
Posizioni reciproche di un piano e una sfera

Studiamo ora le posizioni reciproche di un piano e di una sfera. Indichiamo con d la distanza del piano dal centro della sfera e con r il raggio di quest'ultima; si può dimostrare che:

- se $d < r$, il piano ha in comune con la sfera un cerchio: il piano si dice perciò **secante** la sfera (**Fig. 52**); in particolare, un piano secante passante per il centro della sfera si dice **piano diametrale** e la sua sezione con la sfera viene detta **cerchio massimo**;
- se $d = r$, il piano ha un solo punto T in comune con la sfera e si dice perciò **tangente** a essa; in analogia al caso della tangenza nel piano tra retta e circonferenza, il piano risulta perpendicolare al raggio che congiunge il centro della sfera con il punto T di tangenza (**Fig. 53**);
- se $d > r$, il piano **non** ha punti in comune con la sfera e si dice perciò **esterno** a essa (**Fig. 54**).

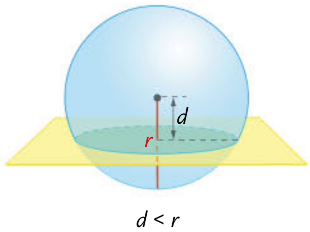


Figura 52

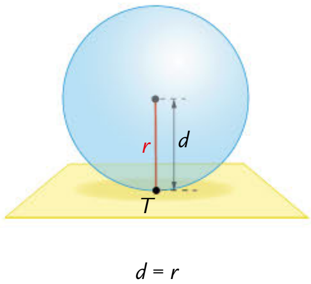


Figura 53

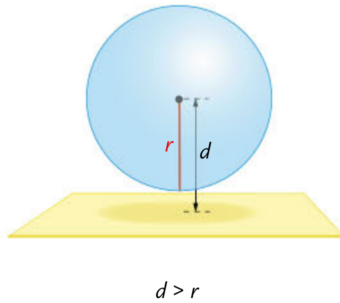


Figura 54

Con GeoGebra
Parti della superficie sferica e della sfera

Lasciamo a te lo studio delle posizioni reciproche di un piano e di una superficie sferica, limitandoci a segnalare che la sezione di un piano diametrale con la superficie sferica è detta **circonferenza massima**.

PER SAPERNE DI PIÙ **Parti della superficie sferica e della sfera**

Le due parti di sfera (superficie sferica) individuate da un piano secante sono dette **segmenti sferici a una base** (**calotte sferiche**, rispettivamente). La porzione di sfera (superficie sferica) compresa tra due piani paralleli e secanti la sfera viene detta **segmento sferico a due basi** (**zona sferica**, rispettivamente). Infine, si chiama **spicchio sferico** (**fuso**, rispettivamente) la parte di sfera (superficie sferica) individuata da due semipiani aventi come origine una retta che contiene lo stesso diametro.

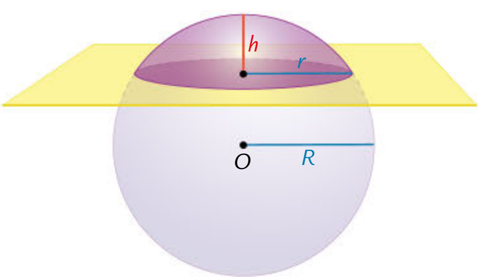


Figura 55 Segmento sferico a una base e calotta sferica.

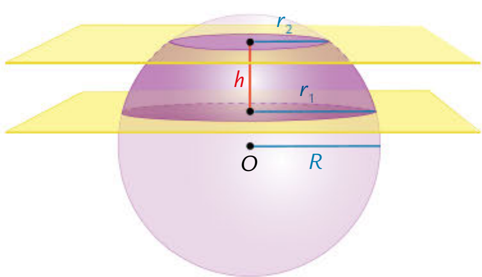


Figura 56 Segmento sferico a due basi e zona sferica.

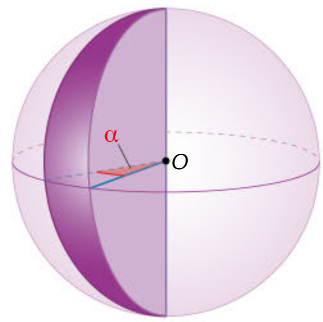


Figura 57 Spicchio sferico e fuso sferico.

Esercizi p. 42

6. Aree di superfici e volumi

Aree di superfici

Assumeremo come *primitivo* il concetto di **superficie** di un solido. Nello studio di alcuni solidi notevoli nei quali sono presenti una o più basi, parleremo di **superficie totale** (di area S_t) per indicare appunto la superficie complessiva del solido e di **superficie laterale** (di area S_l) per indicare la superficie che si ottiene sottraendo dalla superficie totale quella delle basi.
Un solido si dice **sviluppabile** se, mediante un numero finito di tagli, si può distendere completamente la sua superficie su un piano senza deformarla. La figura piana ottenuta si chiama **sviluppo** (in piano) del solido originario; in **Fig. 58** è rappresentato per esempio lo sviluppo di un cubo.
Se un solido è sviluppabile, il problema di misurare l'area della sua superficie si può ricondurre a un problema di geometria *piana*: basta misurare l'area del suo sviluppo. Sulla base di questa osservazione si possono facilmente dedurre (come vedremo nel proseguimento del paragrafo) le formule che forniscono l'area della superficie laterale e totale di prismi, piramidi, cilindri e coni. La sfera invece è un solido non sviluppabile, per cui l'area della sua superficie non è ricavabile con metodi elementari: bisogna ricorrere a metodi riconducibili all'analisi infinitesimale.

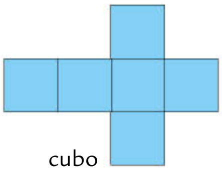


Figura 58

NELLA REALTÀ

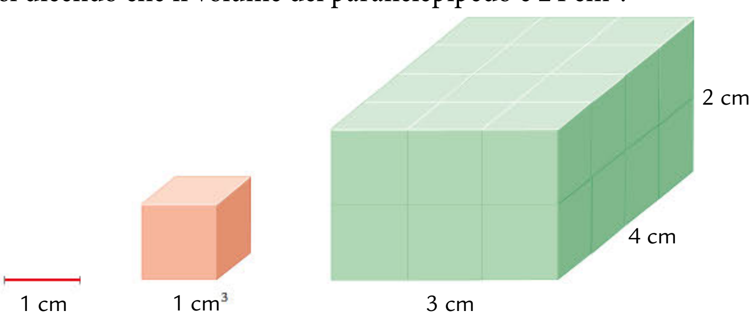
Il fatto che la sfera non sia sviluppabile ha importanti conseguenze in cartografia (cioè nella realizzazione delle carte geografiche). Per porzioni ridotte, la rappresentazione piana della superficie terrestre è piuttosto buona, dal momento che una superficie sferica è «localmente» ben approssimabile con un piano, ma «globalmente» una simile identificazione è impossibile. Te ne puoi facilmente rendere conto osservando un planisfero: l'Antartide, per esempio, è ben diversa dalla sua rappresentazione cartografica, così come la Nuova Zelanda e la Terra del Fuoco, estremità meridionale del continente sudamericano, sono in realtà ben più ravvicinate di quanto appaia su una carta.

L'equivalenza tra solidi e il volume

Intuitivamente diciamo che due solidi realizzati con lo stesso materiale sono *equiestesi* se hanno lo stesso peso, oppure che due recipienti sono *equivalenti* se contengono la stessa quantità di acqua.
Come nel piano abbiamo assunto come primitivo il concetto di *estensione* di una superficie, così nello spazio assumeremo come *primitivo* il concetto di **estensione** di un solido.
Due solidi che hanno la stessa estensione si dicono **equivalenti.**
Nei volumi precedenti abbiamo definito *lunghezza* la misura di un segmento, *ampiezza* la misura di un angolo e *area* la misura di una superficie. Analogamente, si definisce **volume** la misura di un solido.
Intuitivamente, si tratta di scegliere una unità di misura per i solidi e poi confrontare il solido da misurare con quella unità di misura e vedere quante volte l'unità di misura è contenuta in esso. Come unità di misura per i volumi si sceglie di solito il cubo avente per spigolo il segmento assunto come unità di misura per le lunghezze.
Il volume di un solido, come la lunghezza di un segmento e l'area di una superficie, è espresso da un numero reale non negativo. Nel seguito indicheremo il volume di un solido con la lettera V.

ESEMPIO

Consideriamo come unità di misura per le lunghezze il centimetro e, di conseguenza, come unità di misura per i volumi il cubo di spigolo 1 cm, e la indichiamo con il simbolo cm^3. Allora un parallelepipedo come quello in figura, di dimensioni 3 cm, 4 cm e 2 cm, contiene esattamente 24 cubetti di spigolo 1 cm, pertanto il volume del parallelepipedo, rispetto al cm^3, è 24. Più brevemente, è consuetudine esprimersi dicendo che il volume del parallelepipedo è 24 cm^3.



ATTENZIONE!

In alcuni testi il concetto di *volume* viene definito come la *comune estensione* di tutti i solidi equivalenti a un solido dato. In questa impostazione si parla di *misura del volume* di un solido. Per questo motivo nella pratica sono largamente diffuse sia espressioni del tipo «il *volume* di un solido è...», sia «*la misura del volume* di un solido è...».

Il principio di Cavalieri

DALLA STORIA

Il principio di Cavalieri deve il suo nome al matematico **Bonaventura Cavalieri** (1598 circa-1647), allievo di Galileo Galilei e titolare della cattedra di matematica all'università di Bologna. La sua fama è dovuta soprattutto al trattato *Geometria degli indivisibili,* in cui si occupa del problema della misura di aree e volumi, anticipando molte idee che portarono successivamente allo sviluppo dell'analisi infinitesimale.

Presentiamo ora un principio che fornisce una condizione **sufficiente** a garantire l'equivalenza di due solidi. Consideriamo una pila di monete (**Fig. 59** a sinistra) e immaginiamo di spostarle in modo da ottenere la configurazione della **Fig. 59** a destra.

Figura 59

Confrontiamo ora le due pile: a ogni moneta nella pila di sinistra corrisponde nella pila di destra una moneta uguale posta alla stessa altezza: siamo quindi portati ad affermare, senza ombra di dubbio, che le due pile di monete hanno lo stesso volume. Un ragionamento analogo può ripetersi anche se le monete non sono tutte uguali (**Fig. 60**): anche in questo caso saremo portati ad affermare che hanno lo stesso volume perché, a ogni moneta nella pila di sinistra, corrisponde nella pila di destra una moneta uguale, posta alla stessa altezza.

Figura 60

Immaginiamo ora di applicare queste medesime considerazioni a due solidi, pensati come «pile di fogli» di spessore sottilissimo: così come nelle pile di monete considerate poc'anzi, se a ogni foglio che forma il primo solido corrisponde nel secondo solido un foglio uguale posto alla stessa altezza, potremo dire che i due solidi sono equivalenti. Il principio di Cavalieri (che assumeremo come assioma) scaturisce dalla generalizzazione e formalizzazione di queste idee intuitive.

Con GeoGebra
Principio di Cavalieri

ASSIOMA 4 | **Principio di Cavalieri**

Se due solidi possono essere disposti, rispetto a un piano α, in modo che **ogni** piano parallelo ad α che interseca uno dei due solidi intersechi anche l'altro e individui su di essi **sezioni equivalenti**, allora anche i due solidi sono **equivalenti**.

Il calcolo dell'area e del volume dei principali solidi

1. Prisma

Fissiamo l'attenzione per esempio sul prisma retto a base pentagonale in **Fig. 61**, in cui gli spigoli di base misurano a, b, c, d, e e l'altezza misura h.

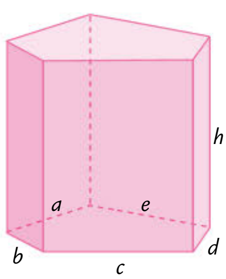


Figura 61

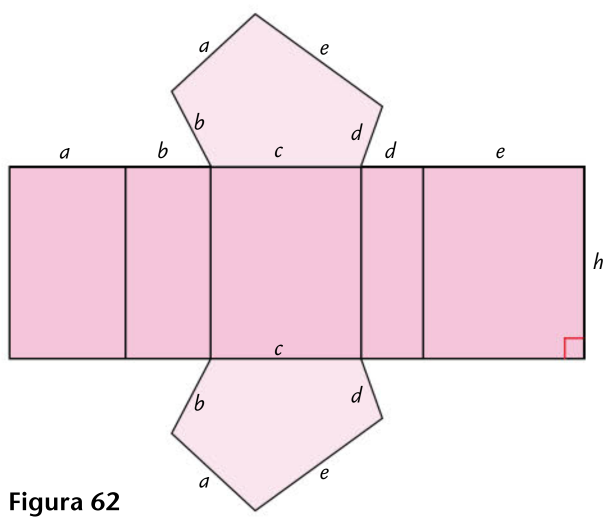


Figura 62

L'area della superficie laterale è la somma delle aree delle cinque facce laterali, che sono rettangoli di altezza uguale a quella del prisma (**Fig. 62**), quindi:

$$S_l = a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h + d \cdot h + e \cdot h = (a + b + c + d + e) \cdot h$$

Ma la somma $a + b + c + d + e$ rappresenta la misura del perimetro, $2p$, della base del prisma, quindi:

$$S_l = 2p \cdot h$$

Detta S_b la misura dell'area di ciascuna base del prisma, sarà infine:

$$S_t = S_l + 2 \cdot S_b = 2p \cdot h + 2S_b$$

Analoghi ragionamenti valgono per un prisma retto qualsiasi.

TEOREMA 22 | Area della superficie di un prisma retto

L'area della **superficie laterale** di un **prisma retto** il cui perimetro di base misura $2p$ e la cui altezza misura h è data dalla formula:

$$S_l = 2p \cdot h$$

Detta S_b l'area di ciascuna delle due basi, la **superficie totale** del prisma ha area espressa dalla formula:

$$S_t = 2p \cdot h + 2S_b$$

Nel caso particolare di un **parallelepipedo rettangolo**, i cui spigoli di base misurano a e b e la cui altezza misura c, risulta: $2p = 2(a + b)$ e $S_b = a \cdot b$ quindi avremo:

$$S_l = 2(a + b) \cdot c \qquad S_t = 2(a + b) \cdot c + 2a \cdot b = 2(ab + bc + ac)$$

In particolare, se il parallelepipedo è un **cubo** il cui spigolo misura l:

$$S_l = 4l^2 \qquad S_t = 6l^2$$

Il calcolo del volume di un prisma si fonda su quello del parallelepipedo; per quest'ultimo vale il seguente teorema.

TEOREMA 23 | Volume di un parallelepipedo rettangolo

Il **volume** di un **parallelepipedo rettangolo** è uguale al prodotto delle misure a, b, c delle tre dimensioni del parallelepipedo (**Fig. 63**):

$$V_{\text{parallelepipedo}} = a \cdot b \cdot c$$

RIFLETTI

La superficie totale e il volume di un parallelepipedo sono espressi da polinomi simmetrici nelle variabili *a*, *b*, *c* (cioè da polinomi che sono invarianti rispetto a una permutazione delle variabili). Ciò è coerente con il fatto che la scelta della base e dell'altezza di un parallelepipedo rettangolo è arbitraria. Non può dirsi altrettanto per gli altri solidi studiati in questa Unità.

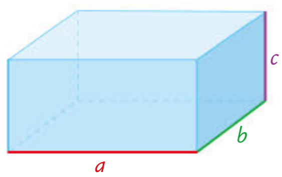


Figura 63

Nel caso particolare di un **cubo** il cui spigolo misura l, la formula diventa:

$$V_{\text{cubo}} = l^3$$

Si dimostra che in base al principio di Cavalieri un prisma (non necessariamente retto) è equivalente a un parallelepipedo di base equivalente e altezza congruente; pertanto vale il seguente teorema.

TEOREMA 24 | Volume di un prisma

Il **volume** di un **prisma** la cui area di base è S_b e la cui altezza misura h è espresso dalla formula:

$$V_{\text{prisma}} = S_b \cdot h$$

2. Piramide

Poniamoci anzitutto il problema di calcolare l'area della superficie laterale di una piramide *retta*. Siano $l_1, l_2, ..., l_n$ le misure dei lati della base della piramide e a la misura dell'apotema. L'area della superficie laterale è la somma delle aree delle facce laterali, che sono triangoli aventi come altezze l'apotema della piramide (vedi la **Fig. 64**, in cui abbiamo considerato come esempio una piramide retta a base triangolare); pertanto:

$$S_l = \frac{1}{2}l_1 \cdot a + \frac{1}{2}l_2 \cdot a + ... + \frac{1}{2}l_n \cdot a = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + ... + l_n) \cdot a$$

Ma l'espressione $\frac{1}{2}(l_1 + l_2 + ... + l_n)$ rappresenta la misura del semiperimetro, p, della base, quindi:

$$S_l = p \cdot a$$

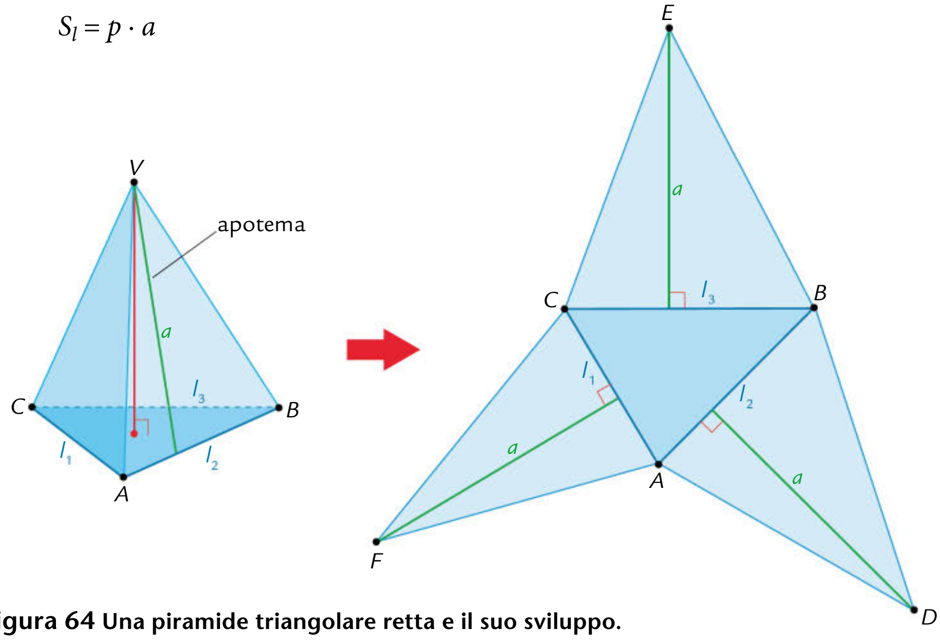


Figura 64 **Una piramide triangolare retta e il suo sviluppo.**

Analoghi ragionamenti valgono per una piramide *retta* qualsiasi, quindi in particolare per le piramidi *regolari*.

TEOREMA 25 | Area della superficie di una piramide retta

L'area della **superficie laterale** di una **piramide retta** il cui perimetro di base misura $2p$ e il cui apotema misura a è data dalla formula:

$$S_l = p \cdot a \qquad [2]$$

Detta S_b l'area della base della piramide, la **superficie totale** della piramide ha area espressa dalla formula:

$$S_t = p \cdot a + S_b$$

Nel caso di piramidi **non** rette, le facce laterali non hanno tutte la stessa altezza, quindi la formula [2] **non** può essere utilizzata e l'area della superficie laterale va calcolata come somma delle aree delle singole facce.
Si dimostra che una piramide è equivalente a un terzo di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza della piramide. Vale quindi il seguente teorema.

Con GeoGebra
Equivalenza tra piramide e prisma

TEOREMA 26 | Volume della piramide

Il volume di una piramide la cui base ha area B e la cui altezza misura h è espressa dalla formula:

$$V_{\text{piramide }(B,\,h)} = \frac{1}{3}V_{\text{prisma avente stessa base e altezza}} = \frac{1}{3}B \cdot h$$

ESEMPIO Volume di una piramide

Calcoliamo il volume di una piramide retta avente base quadrata, di lato $4a$, e spigolo laterale di misura $6a$.

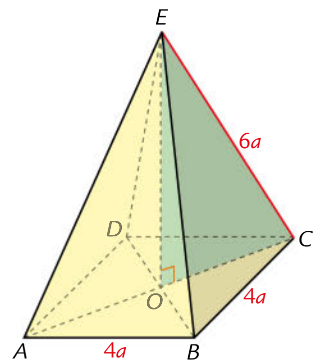
Per ricavare la misura dell'altezza della piramide dobbiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OCE. Osserviamo preliminarmente che la misura di OC è la metà della misura della diagonale del quadrato $ABCD$, quindi:

$$\overline{OC} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{4a\sqrt{2}}{2} = 2a\sqrt{2}$$

Abbiamo allora:

$$\overline{OE} = \sqrt{(6a)^2 - (2a\sqrt{2})^2} = \sqrt{36a^2 - 8a^2} = \sqrt{28a^2} = 2a\sqrt{7}$$

$$V_{\text{piramide}} = \frac{1}{3}(4a)^2 \cdot 2a\sqrt{7} = \frac{32}{3}a^3\sqrt{7}$$



3. Cilindro

Il calcolo dell'area della superficie di un **cilindro** è particolarmente semplice perché la superficie di un cilindro è *sviluppabile*; in **Fig. 65** abbiamo riportato lo sviluppo di un cilindro avente raggio di base di misura r e altezza di misura h.
La superficie *laterale* del cilindro ha come sviluppo un *rettangolo* i cui lati misurano $2\pi r$ e h, quindi assumeremo come area della superficie laterale di un cilindro l'area di questo rettangolo, che misura $2\pi r \cdot h$. Per ottenere l'area della superficie *totale* bisogna aggiungere all'area della superficie laterale le aree delle due basi, ciascuna delle quali misura πr^2. Vale quindi il seguente teorema.

RIFLETTI
Si tratta di problemi analoghi a quelli che si sono posti per la determinazione della lunghezza di una circonferenza e dell'area di un cerchio.

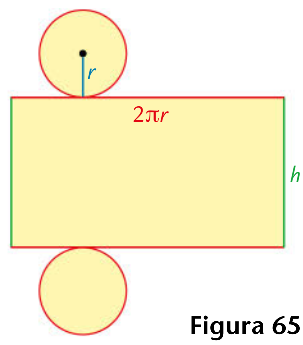


Figura 65

TEOREMA 27 | Area della superficie di un cilindro

L'area della **superficie laterale** di un **cilindro** la cui base ha raggio di misura r e la cui altezza misura h è espressa dalla formula:

$$S_l = 2\pi r \cdot h$$

L'area della **superficie totale** del cilindro è data da:

$$S_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Per quanto riguarda invece il calcolo del *volume* di un cilindro, si dimostra in base al principio di Cavalieri che un cilindro è equivalente a un prisma avente base equivalente a quella del cilindro e stessa altezza. Ne discende il seguente teorema.

TEOREMA 28 | Volume di un cilindro

Se un cilindro ha raggio di base di misura r e altezza di misura h, allora il **volume** del **cilindro** è espresso dalla formula:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h$$

4. Cono

Anche la superficie del cono, come quella del cilindro, è *sviluppabile*.
In **Fig. 66** abbiamo rappresentato lo sviluppo di un cono avente raggio di base di misura r e apotema di misura a. In particolare, la superficie *laterale* del cono ha come sviluppo un *settore circolare*, avente come raggio l'apotema del cono, delimitato da un arco avente la stessa lunghezza della circonferenza di base del cono. Ricordando che un settore circolare è equivalente a un triangolo avente base della stessa lunghezza dell'arco che delimita il settore e come altezza il raggio del settore, deduciamo che l'area della superficie laterale del cono è: $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot a = \pi ra$. Per ottenere l'area della superficie *totale* bisogna aggiungere, all'area della superficie laterale, l'area della base del cono, che è πr^2.

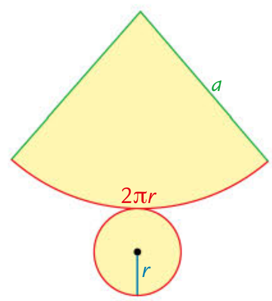


Figura 66

Vale quindi il seguente teorema.

TEOREMA 29 | Area della superficie di un cono

L'area della **superficie laterale di un cono** la cui base ha raggio di misura r e il cui apotema misura a è espressa dalla formula:

$$S_l = \pi r a$$

L'area della **superficie totale del cono** è data da:

$$S_t = \pi r a + \pi r^2$$

Per quanto riguarda invece il calcolo del *volume* di un cono si dimostra, in base al principio di Cavalieri, che un cono è equivalente a una piramide avente base equivalente a quella del cono e stessa altezza. Ne discende il seguente teorema.

TEOREMA 30 | Volume di un cono

Se un cono ha raggio di base di misura r e altezza di misura h, allora il **volume del cono** è espresso dalla formula

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

5. Sfera

Poiché la sfera non è sviluppabile sul piano, non è possibile ricavare intuitivamente la formula che fornisce l'area della superficie dalla sfera. Ricorrendo a metodi riconducibili all'analisi infinitesimale, si dimostra quanto segue.

TEOREMA 31 | Area della superficie della sfera

L'area della superficie di una sfera di raggio r è $4\pi r^2$.

È possibile infine dimostrare il seguente teorema (*vedi* la scheda di approfondimento a pagina successiva).

TEOREMA 32 | Volume della sfera

Il volume di una sfera di raggio r è $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Aree e volumi di solidi simili

Si possono estendere nello spazio i concetti di **omotetia** e di **similitudine** (come trasformazione ottenuta componendo una omotetia e una isometria); similmente a quanto avviene nel piano, due figure solide nello spazio si dicono **simili** se si corrispondono in una similitudine. Se due solidi sono simili, di rapporto di similitudine k, allora:

- il rapporto tra le aree delle superfici dei due solidi è k^2;
- il rapporto tra i volumi dei due solidi è k^3.

In particolare, se si seziona una piramide con un piano parallelo alla sua base, si ottiene una piramide «più piccola», simile a quella originaria; analogamente, se si seziona un cono con un piano parallelo alla base si ottiene un cono simile (**Fig. 67**).

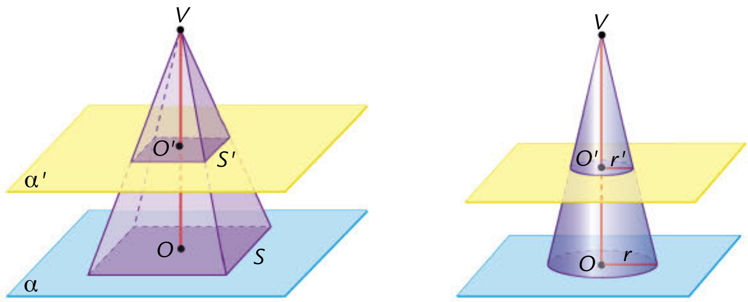


Figura 67 La piramide (il cono) di vertice V e altezza VO' è simile alla piramide (al cono) di vertice V e altezza VO.

APPROFONDIMENTO **Il calcolo del volume della sfera**

La formula per il calcolo del volume della sfera si basa su un importante teorema di equivalenza tra una sfera e la sua corrispondente anticlessidra, che è così definita:

DEFINIZIONE | Anticlessidra

Data una sfera, consideriamo il cilindro (equilatero) circoscritto alla sfera e i due coni che hanno le basi coincidenti con quelle del cilindro e vertice nel centro della sfera. Si chiama **anticlessidra** corrispondente alla sfera il solido costituito dalla **differenza** tra il cilindro e i due coni (**Fig. 68**).

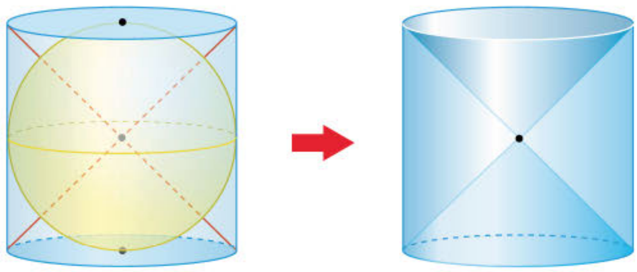


Figura 68 **Dalla sfera alla sua anticlessidra.**

TEOREMA 33 | Equivalenza tra sfera e anticlessidra

Una sfera è equivalente alla sua anticlessidra.

Con GeoGebra Equivalenza tra sfera e anticlessidra

DALLA STORIA

Il calcolo della misura del volume della sfera è dovuto ad **Archimede**, il grande matematico greco che visse a Siracusa fra il 287 e il 212 a.C.

DIMOSTRAZIONE

Disponiamo una sfera e la sua corrispondente anticlessidra su un piano α, in modo che stiano dalla stessa parte rispetto a esso, che la sfera sia tangente al piano e la base dell'anticlessidra giaccia sul piano (**Fig. 69**).

Sezioniamo quindi la sfera e la sua corrispondente anticlessidra con un piano parallelo ad α.

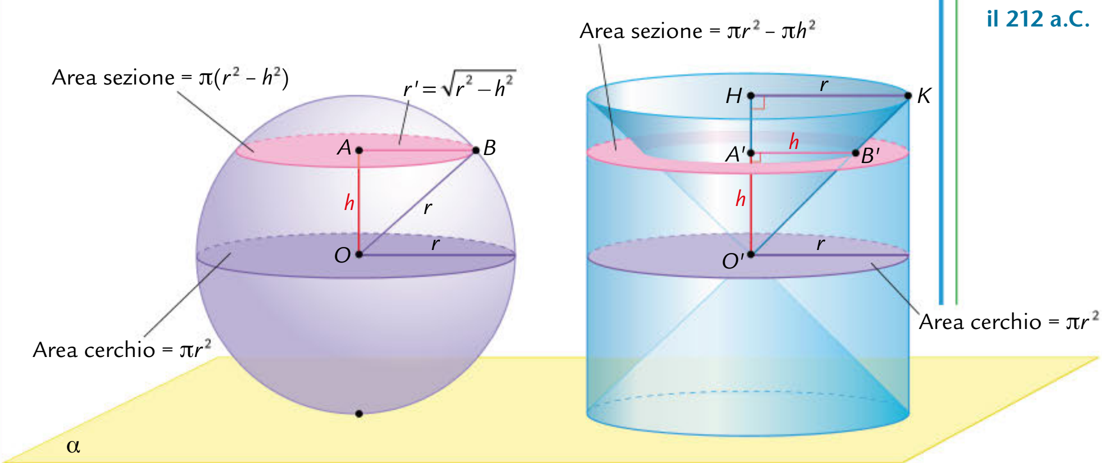


Figura 69 **Le sezioni della sfera e dell'anticlessidra sono equivalenti.**

- **1° caso: il piano passa per il centro della sfera**

In questo caso le sezioni del piano con la sfera e la sua anticlessidra sono due cerchi il cui raggio misura r (colorati in viola in **Fig. 69**), entrambi di area πr^2 e quindi equivalenti.

- **2° caso: il piano non passa per il centro della sfera**

In questo caso:
– la sezione della sfera con il piano è il *cerchio* in rosa in **Fig. 69**;
– la sezione dell'anticlessidra con il piano è la *corona circolare* in rosa nella stessa figura.

Indichiamo con h la distanza del piano secante da O (distanza uguale a quella tra il piano secante e O') e calcoliamo le aree di queste due sezioni.

a. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAB, si ottiene che il raggio del cerchio sezione con la sfera (AB in **Fig. 69**) misura $\sqrt{r^2-h^2}$, quindi l'area del cerchio sezione misura:

$$\pi(\sqrt{r^2-h^2}\,)^2=\pi(r^2-h^2)$$

b. Esaminiamo ora la corona circolare. La circonferenza di raggio maggiore che la delimita ha raggio r; la circonferenza di raggio minore ($A'B'$ in **Fig. 69**) ha raggio di misura h: infatti il triangolo $O'HK$ è rettangolo isoscele (poiché $O\widehat{H}K=90°$ e $\overline{O'H}=\overline{HK}=r$), quindi anche $O'A'B'$, simile a $O'HK$, deve essere tale. Ne segue che l'area della corona circolare misura:

$$\pi r^2-\pi h^2=\pi(r^2-h^2)$$

• **Conclusione**

Ogni piano parallelo ad α che interseca la sfera interseca anche la sua anticlessidra e, per quanto mostrato sopra, le due sezioni del piano con la sfera e con la sua anticlessidra sono sempre equivalenti, pertanto per il principio di Cavalieri la sfera e l'anticlessidra sono equivalenti. Dal **Teorema 33** possiamo facilmente dedurre la formula che fornisce la misura del volume della sfera. Abbiamo:

$$V_{\text{sfera}}=V_{\text{anticlessidra}}=V_{\text{cilindro}}-2\cdot V_{\text{cono}}=$$
$$=\pi r^2\cdot 2r-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot r=2\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Esercizi p. 43

7. Poliedri e poliedri regolari

In questo paragrafo introduciamo una famiglia di solidi, quella dei *poliedri*, che comprende come casi particolari le piramidi e i prismi.

Poliedri e loro proprietà

DEFINIZIONE | **Poliedro**

Si chiama **poliedro** un solido delimitato da una superficie formata da un numero finito di poligoni situati in piani diversi e disposti in modo che ciascun lato dei poligoni sia comune a esattamente due di essi.

I poligoni che delimitano il poliedro si dicono **facce** del poliedro, i vertici e i lati dei poligoni sono rispettivamente i **vertici** e gli **spigoli** del poliedro.

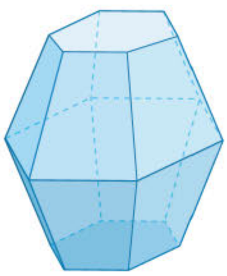


Figura 70

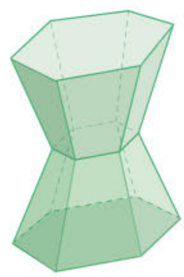
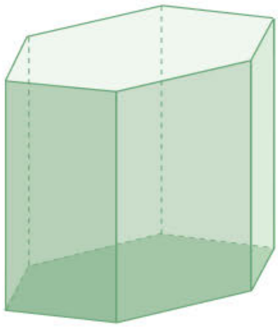
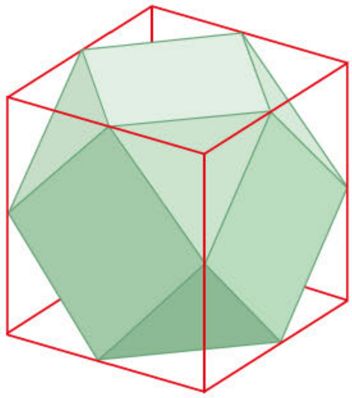
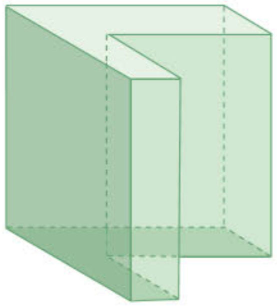
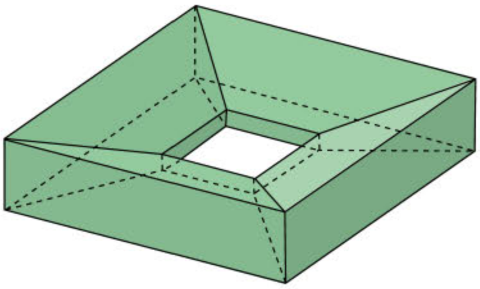


Figura 71

Il poliedro in **Fig. 70** è un esempio di poliedro *convesso*, mentre quello mostrato in **Fig. 71** è un esempio di poliedro *concavo*. Nel proseguimento della nostra trattazione ci riferiremo a poliedri convessi, che possono essere definiti come segue.

DEFINIZIONE | **Poliedro convesso**

Si chiama **poliedro convesso** un poliedro tale che, comunque si scelga una sua faccia, è interamente contenuto in uno dei due semispazi aventi come origine il piano che contiene la faccia.

Esempi	
I prismi sono poliedri convessi. 	Il solido colorato in figura, che ha come vertici i punti medi degli spigoli del cubo rappresentato, è un poliedro convesso. 
Controesempi	
Il solido in figura è un poliedro ma **non** è convesso. 	Il solido in figura è un poliedro ma non è convesso. 

MODI DI DIRE

Il solido racchiuso dagli spigoli rossi del cubo è detto cubo (o esaedro) troncato perché può essere ottenuto troncando da un cubo le 8 «cuspidi». Poiché un cubo ha 6 facce e 8 vertici, il cubo troncato ha 14 facce.

In tutti i poliedri convessi sussiste una particolare relazione tra il numero delle facce, quello dei vertici e quello degli spigoli, espressa dalla cosiddetta *relazione di Eulero*, che ci limitiamo a enunciare.

TEOREMA 34 | **Relazione di Eulero**

Siano F, S e V, rispettivamente, i numeri delle facce, degli spigoli e dei vertici di un poliedro convesso. Allora vale la relazione:

$$F + V = S + 2$$

La relazione precedente ci dice che la quantità $F + V - S$ è costante, uguale a 2, per tutti i poliedri convessi: abbiamo quindi scoperto l'esistenza di un **invariante** per i poliedri convessi (analogo per esempio alla somma delle ampiezze degli angoli, che è un invariante per i triangoli).

È importante fare alcune osservazioni:

1. La relazione di Eulero **non** vale in generale per poliedri **non** convessi: per esempio, il poliedro presentato come ultimo controesempio nella tabella precedente ha 16 facce, 16 vertici e 32 spigoli, quindi:

   $F + V = 32$, mentre $S + 2 = 34$

2. La condizione di convessità di un poliedro è *sufficiente*, ma **non** necessaria, per garantire la validità della relazione di Eulero: per esempio, il poliedro mostrato in **Fig. 71** non è convesso, tuttavia soddisfa la relazione di Eulero. Ciò si può intuire osservando che il poliedro in **Fig. 71** si può immaginare ottenuto da quello in **Fig. 70** (convesso e quindi soddisfacente la relazione di Eulero) mediante una «strozzatura» che evidentemente non cambia il numero di vertici, spigoli e facce.

ATTENZIONE!

I prismi *regolari* e le piramidi *regolari* definiti nei precedenti paragrafi **non** sono *regolari* nel senso della definizione sopra riportate. Nell'ambito della geometria nello spazio l'aggettivo «regolare» va quindi interpretato con accezioni diverse a seconda che sia riferito a un prisma, a una piramide o a un generico poliedro.

Con GeoGebra
Poliedri regolari

Matematica nella storia
I poliedri regolari

Poliedri regolari

Introduciamo ora una particolare classe di poliedri, che è la corrispondente nello spazio dei poligoni regolari definiti nel piano.

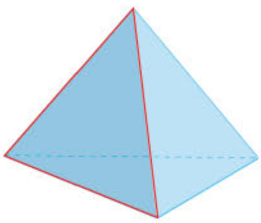
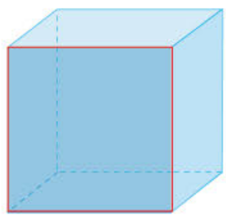
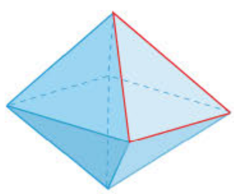
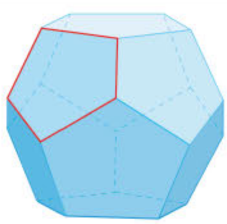
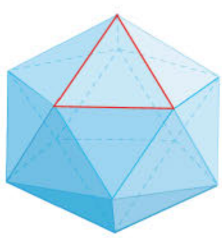
DEFINIZIONE | Poliedro regolare

Un poliedro si dice **regolare** quando è convesso e inoltre:

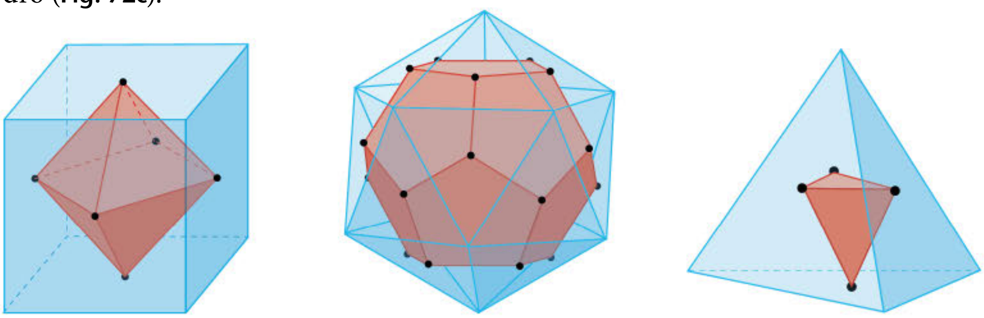
a. tutte le facce sono poligoni regolari;
b. tutte le facce sono congruenti;
c. in ogni vertice concorrono lo stesso numero di facce.

Sappiamo che nel piano esistono *infiniti* poligoni regolari; nello spazio, invece, i poliedri regolari sono in numero *finito*. Precisamente, si può dimostrare che esistono solo 5 poliedri regolari, descritti in **Tab. 1**.

Tabella 1

Tipo di poliedro regolare	Figura	Caratteristiche
Tetraedro		4 facce triangolari, 6 spigoli, 4 vertici, in ciascuno dei quali concorrono 3 facce
Cubo		6 facce quadrate, 12 spigoli, 8 vertici, in ciascuno dei quali concorrono 3 facce
Ottaedro		8 facce triangolari, 12 spigoli, 6 vertici, in ciascuno dei quali concorrono 4 facce
Dodecaedro		12 facce pentagonali, 30 spigoli, 20 vertici, in ciascuno dei quali concorrono 3 facce
Icosaedro		20 facce triangolari, 30 spigoli, 12 vertici, in ciascuno dei quali concorrono 5 facce

Dalla tabella precedente emerge che il cubo e l'ottaedro hanno lo stesso numero di spigoli, mentre hanno scambiati il numero delle facce e il numero dei vertici. Per questo motivo i due poliedri sono detti «duali». Tale corrispondenza biunivoca tra le facce dell'uno e i vertici dell'altro è illustrata con chiarezza in **Fig. 72a**: congiungendo i centri delle facce non opposte del cubo si ottiene un ottaedro (la dualità è «a doppio senso»: unendo i centri delle facce dell'ottaedro aventi uno spigolo in comune resta individuato un cubo). Analogamente, l'icosaedro e il dodecaedro sono duali, come puoi constatare rileggendo la tabella alla pagina precedente e osservando la **Fig. 72b**. Quanto al tetraedro, avendo lo stesso numero di facce e di vertici, esso è un poliedro «autoduale»: unendo i centri delle sue quattro facce resta individuato un altro tetraedro (**Fig. 72c**).

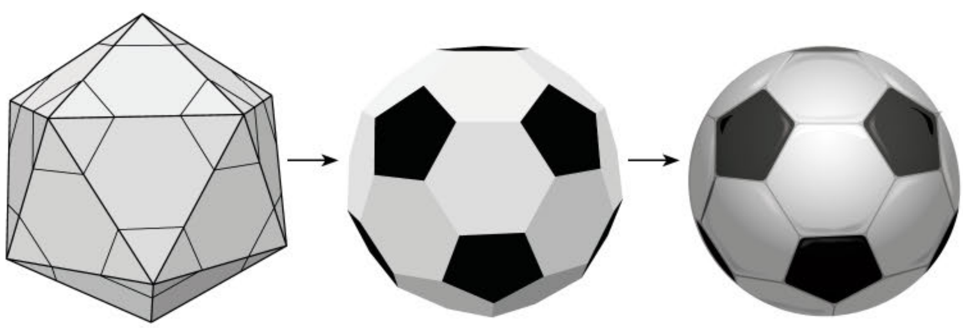


a **b** **c**

Figura 72

PER SAPERNE DI PIÙ **Icosaedro troncato e... palloni da calcio**

Tra i poliedri che, pur non essendo regolari, godono comunque di interessanti proprietà di simmetria, probabilmente il più familiare è l'**icosaedro troncato**. Esso è ottenuto da un icosaedro regolare troncando le 12 cuspidi (**Fig. 73a**). Esso ha quindi 32 facce: 12 pentagoni regolari (tanti quanti i *vertici* dell'icosaedro originario) e 20 esagoni regolari (tanti quante le facce dell'icosaedro originario). Il numero degli spigoli si calcola facilmente: $(20 \times 6 + 12) : 2 = 90$ (ogni spigolo è comune a due facce, di qui divisione per due). In forza della relazione di Eulero, il numero dei vertici dell'icosaedro troncato è $90 + 2 - 32 = 60$. La popolarità dell'icosaedro troncato dipende dal fatto che esso è il modello con cui si produce la maggior parte dei palloni da calcio, solitamente colorando le facce pentagonali in nero e quelle esagonali in bianco (**Fig. 73b**). Se ben gonfiati (**Fig. 73c**), i palloni così realizzati sono di forma approssimativamente sferica, ideali quindi per il gioco.



icosaedro icosaedro troncato pallone da calcio

a **b** **c**

Figura 73

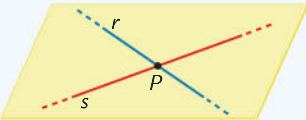
Esercizi p. 55

Percorso delle idee

Rette e piani, misure di superfici e volumi

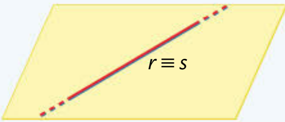
Figure nello spazio

Rette

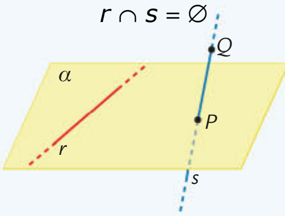


Complanari
secanti
$r \cap s = \{P\}$

Complanari
parallele distinte
$r \cap s = \varnothing$

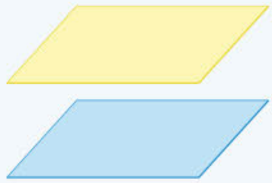


Complanari
coincidenti

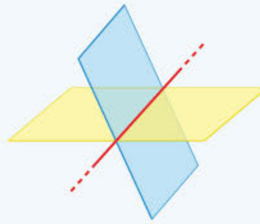


Sghembe: non esiste un
piano che le contiene
$r \cap s = \varnothing$

Piani



Paralleli distinti

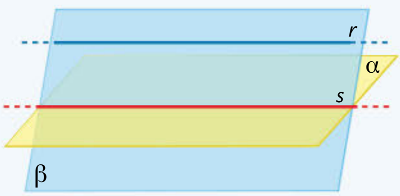


Secanti

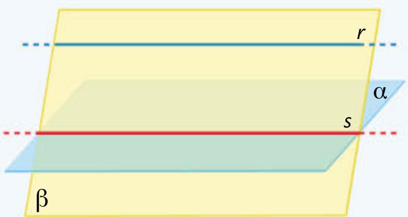
Paralleli coincidenti

Parallelismo

1. Se una retta r è parallela a una retta s del piano α, allora r è parallela ad α.

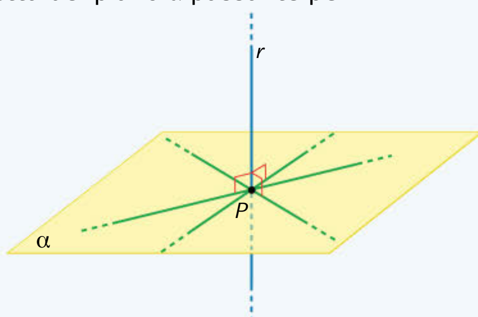


2. Sia r una retta parallela a un piano α. Allora ogni piano β contenente r e secante α ha in comune con α una retta s parallela a r.

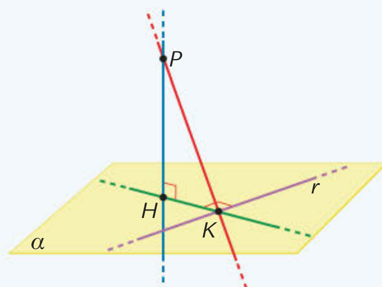


Perpendicolarità

1. Se una retta r è perpendicolare a un piano α in un punto P, allora r è perpendicolare a ogni retta del piano α passante per P.

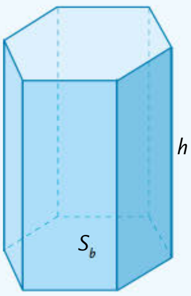


2. Teorema delle tre perpendicolari. Siano α un piano, r una retta di α e P un punto dello spazio non appartenente ad α. Detti H il piede della perpendicolare condotta da P al piano α e K il piede della perpendicolare condotta da H alla retta r, allora la retta PK è perpendicolare a r.



Area della superficie e volume di solidi notevoli

Prisma retto



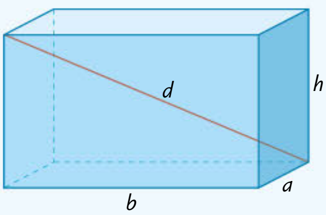
$$\underbrace{S_l}_{\text{superficie laterale}} = \underbrace{2p}_{\text{perimetro di base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altezza}}$$

$$\underbrace{S_t}_{\text{superficie totale}} = \underbrace{S_l}_{\text{superficie laterale}} + 2 \cdot \underbrace{S_b}_{\text{superficie di base}}$$

$$V = \underbrace{S_b}_{\text{superficie di base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altezza}}$$

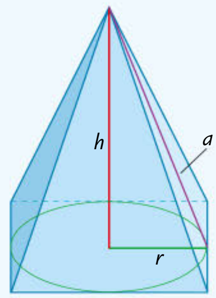
Caso particolare

Parallelepipedo rettangolo



$$S_l = 2\,(a + b) \cdot h$$
$$S_t = S_l + 2ab$$
$$V = ab \cdot h$$
$$\underbrace{d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}}_{\text{misura diagonali}}$$

Piramide retta



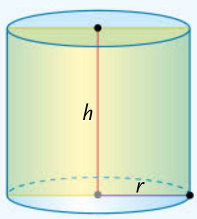
$$S_l = \underbrace{p}_{\text{semiperimetro di base}} \cdot \underbrace{a}_{\text{apotema}}$$

$$\underbrace{S_t}_{\text{superficie totale}} = \underbrace{S_l}_{\text{superficie laterale}} + \underbrace{S_b}_{\text{superficie di base}}$$

$$\underbrace{V}_{\text{volume}} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{S_b}_{\text{superficie di base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altezza}}$$

Solidi di rotazione

Cilindro

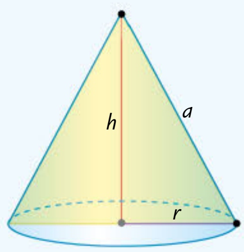


$$S_l = \underbrace{2\pi r}_{\text{circonferenza di base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altezza}}$$

$$S_t = \underbrace{2\pi rh}_{\text{superficie laterale}} + 2 \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{superficie di base}}$$

$$V = \underbrace{\pi r^2}_{\text{superficie di base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altezza}}$$

Cono

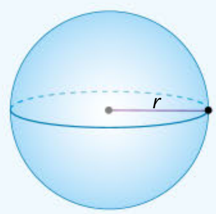


$$S_l = \underbrace{\pi r}_{\text{semiperimetro di base}} \cdot \underbrace{a}_{\text{apotema}}$$

$$S_t = \underbrace{\pi ra}_{\text{superficie laterale}} + \underbrace{\pi r^2}_{\text{superficie di base}}$$

$$V = \frac{1}{3}\,\underbrace{\pi r^2}_{\text{superficie di base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altezza}}$$

Sfera



$$\underbrace{S}_{\text{superficie totale}} = 4\pi r^2$$

$$\underbrace{V}_{\text{volume}} = \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

Esercizi

1. Introduzione alla geometria nello spazio e parallelismo

Teoria p. 2

Esercizi introduttivi

1 **Vero o falso?**

a. per tre punti distinti dello spazio passa sempre uno e un solo piano, comunque siano scelti i tre punti V F
b. se due rette dello spazio sono complanari, allora sono parallele V F
c. se due rette dello spazio sono parallele, allora sono complanari V F
d. così come nel piano, due rette nello spazio possono presentare due sole posizioni reciproche: o sono parallele o sono incidenti V F
e. se due rette nello spazio sono incidenti, allora sono complanari V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

2 **Vero o falso?**

a. due piani distinti possono avere in comune esattamente due punti V F
b. se due piani hanno in comune due punti distinti, ne hanno in comune infiniti altri V F
c. se A, B, C sono tre punti in comune ai due piani distinti α e β, allora A, B, C possono non essere allineati V F
d. se due piani distinti hanno un punto in comune, allora la loro intersezione è una retta V F
e. se due piani distinti α e β sono paralleli, r è una retta appartenente ad α ed s è una retta appartenente a β, allora r ed s sono parallele V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

3 **Caccia all'errore.** Secondo Nunzia, «due rette distinte nello spazio sono parallele se e solo se non hanno punti in comune». Vito sostiene invece che «due piani distinti nello spazio sono paralleli se e solo se non hanno punti in comune». Chi sbaglia, e perché?

4 Da che cosa può essere costituita l'intersezione di tre piani distinti?

Parallelismo nello spazio

Test

5 Sia r una retta parallela al piano α; allora:

A r è parallela a una sola retta del piano α
B r è parallela a tutte le rette del piano α
C r è parallela a due sole rette del piano α
D r è parallela a infinite rette del piano α, ma non a tutte

6 Tre rette r, s e t nello spazio sono tali che r è parallela a s ed s è secante a t; possiamo affermare che:

A r e t sono secanti
B r e t sono complanari
C r è parallela al piano che contiene s e t
D il piano che contiene r ed s è parallelo al piano che contiene s e t

7 Siano α e β due piani paralleli; quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

A Tutte le rette contenute nel piano α sono parallele al piano β
B Tutti i piani paralleli ad α sono paralleli anche a β
C Se un piano γ è secante sia α sia β, la retta intersezione di α e γ è parallela alla retta intersezione di β e γ
D Comunque scelte una retta r contenuta in α e una retta s contenuta in β, le due rette r ed s sono parallele

8 Nello spazio, quante sono le rette passanti per un assegnato punto P e parallele a una retta r?

A Una sola
B Almeno due, ma non infinite
C Infinite
D Può non esisterne alcuna

9 Nello spazio, quante sono le rette parallele a un dato piano α e passanti per un assegnato punto P, con $P \notin \alpha$?

A Una sola
B Almeno due, ma non infinite
C Infinite
D Può non esisterne alcuna

10 Nello spazio, quanti sono i piani passanti per un assegnato punto P e paralleli a un dato piano α?

A Uno solo
B Infiniti, tutti paralleli tra loro
C Infiniti, ma non tutti paralleli tra loro
D Può non esisterne alcuno

11 Nello spazio, quanti sono i piani paralleli a una data retta r e passanti per un assegnato punto P con $P \notin r$?

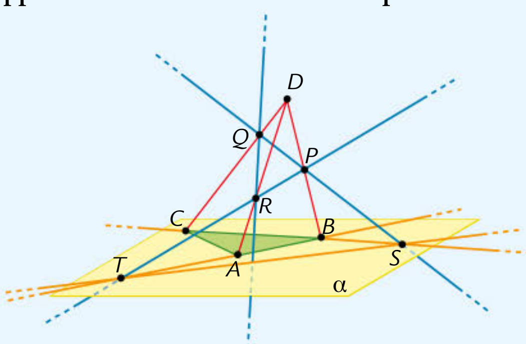
A Uno solo
B Infiniti, tutti paralleli tra loro
C Infiniti, ma non tutti paralleli tra loro
D Può non esisterne alcuno

«Vedere» nello spazio

12 ESERCIZIO GUIDATO

Sia ABC un triangolo, appartenente a un piano α, e D un punto non appartenente ad α. Indica con P il punto medio del segmento BD, con Q il punto interno a CD tale che $QD \cong \frac{1}{4}CD$ e con R il punto interno ad AD tale che $DR \cong \frac{2}{3}AD$.

a. Le rette PQ e BC sono incidenti? Se sì, il loro punto di intersezione appartiene al piano α?
b. Le rette PR e AB sono incidenti? Se sì, il loro punto di intersezione appartiene al piano α?
c. Qual è l'intersezione del piano PQR con il piano α?



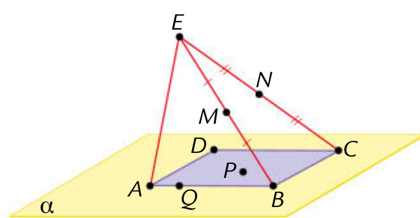
—

a. Le rette PQ e BC appartengono entrambe al piano passante per B, C e D. Inoltre la retta PQ **non** è parallela a BC perché ...., pertanto interseca la retta BC in un punto, diciamo S, che appartiene al piano α (dal momento che la retta BC è contenuta in α).
b. Ragionando analogamente al caso precedente, puoi dedurre che la retta PR interseca la retta AB in un punto, diciamo T, che appartiene ....
c. Il piano PQR e il piano α sono distinti (perché?); inoltre hanno in comune i punti S e .... Dunque la loro intersezione è la retta ....

13 Considera su un piano α un parallelogramma $ABCD$. Sia E un punto non appartenente ad α. Indica con M il punto medio di BE, con N il punto medio di EC, con P un punto interno al parallelogramma e con Q un punto interno al lato AB.

a. Qual è la posizione reciproca delle rette QN e AB?
b. Qual è la posizione reciproca delle rette MP e AB?
c. Qual è la posizione reciproca delle rette MN e AD?
d. Qual è la posizione reciproca delle due rette EQ ed MN?

Giustifica adeguatamente tutte le risposte.



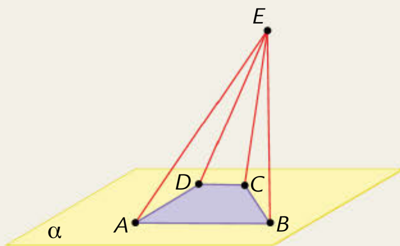
14 Siano A, B e C tre punti non allineati. Indica con α il piano passante per A, B e C e considera un punto D non appartenente al piano α. Sia P un punto interno al segmento AD e Q un punto interno al segmento BC. Qual è l'intersezione dei due piani AQD e BPC?
(*Suggerimento*: considera i punti P e Q e osserva che ....)

15 Siano A, B e C tre punti non allineati, M il punto medio di AB ed N il punto medio di BC. Indica con α il piano passante per A, B e C e considera un punto D non appartenente al piano α.

a. Qual è l'intersezione dei due piani DMN e DAB?
b. Qual è l'intersezione dei due piani DMN e ABC?

16 **ESERCIZIO SVOLTO**

Sia $ABCD$ un trapezio, di basi AB e CD, appartenente al piano α. Consideriamo un punto E non appartenente ad α. Qual è l'intersezione dei due piani AEB e DEC?



- I due piani AEB e DEC sono secanti poiché hanno in comune il punto E.
- La retta AB è parallela al piano DEC poiché è parallela alla retta DC; pertanto l'intersezione del piano ABE con il piano DEC deve essere una retta parallela ad AB.
- Concludiamo allora che l'intersezione dei due piani AEB e DEC è la retta passante per E e parallela alle basi del trapezio.

17 Sia $ABCD$ un parallelogramma, giacente sul piano α. Considera un punto E, non appartenente ad α.

a. Da che cosa è costituita l'intersezione dei due piani ABE e CDE?
b. Da che cosa è costituita l'intersezione dei due piani ADE e BCE?

18 Considera un parallelogramma $ABCD$. Siano α e β due piani passanti per un dato punto P non appartenente al piano del parallelogramma, contenenti rispettivamente le rette AB e CD. Qual è l'intersezione dei due piani α e β?

2. Perpendicolarità nello spazio

Teoria p. 7

Esercizi introduttivi

19 **Vero o falso?**

a. data una retta r e un punto $P \in r$, esiste una sola retta passante per P e perpendicolare alla retta r V F
b. data una retta r e un punto $P \notin r$, esiste sempre una sola retta passante per P e perpendicolare alla retta r V F
c. dato un piano α e una retta r non contenuta in α, esiste sempre un unico piano che contiene r ed è perpendicolare ad α V F
d. dato un piano α e un punto $P \notin \alpha$, esiste un unico piano passante per P e perpendicolare al piano α V F
e. dato un piano α e un punto $P \in \alpha$, esiste un unico piano passante per P e perpendicolare al piano α V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

20 Sia $ABCD$ un rettangolo appartenente al piano α. Traccia la retta r, passante per A e perpendicolare ad α, e considera su di essa un punto P. Come risultano le rette PD e DC? Come risultano le rette PB e BC?

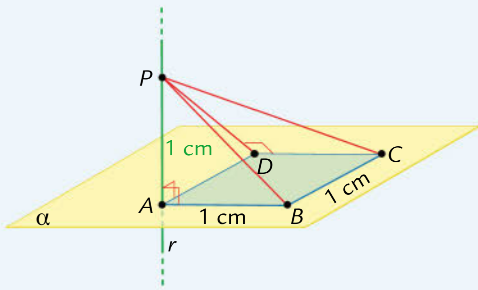
21 **Caccia all'errore.** Monica sostiene che se α, β e γ sono tre piani paralleli per cui la distanza tra β e γ è due volte la distanza tra α e β, allora la distanza tra α e γ è tre volte la distanza tra α e β. Individua l'errore commesso da Monica e correggilo.

22 **Caccia all'errore.** Daniele afferma, senza ulteriore specificazione, che due semipiani distinti aventi la stessa origine individuano due diedri, di cui uno convesso e l'altro concavo. Correggi l'errore di Daniele: che cosa ha mancato di specificare?

Problemi

23 **ESERCIZIO GUIDATO**

Considera un quadrato *ABCD*, appartenente al piano α, il cui lato misura *a*. Traccia la retta *r* perpendicolare in *A* al piano del quadrato e considera su tale perpendicolare il punto *P* tale che *PA* = 1 cm. Determina la distanza di *P* da *B*, *C* e *D*.



- Osserva preliminarmente che:
  - poiché la retta r è perpendicolare in A al piano α, gli angoli $P\widehat{A}B$ e $P\widehat{A}D$ sono retti;
  - per il teorema delle tre perpendicolari, l'angolo $P\widehat{D}C$ è retto.
- Puoi allora applicare il teorema di Pitagora ai triangoli *PAB*, *PAD* e *PDC*, ottenendo così che:

  $PB =$ ..... $PD =$ ..... $PC =$ .....

24 Considera un triangolo *ABC*, rettangolo in *C*, tale che $AB = 5$ cm e $AC = 3$ cm. Traccia la perpendicolare in *A* al piano del triangolo e considera su tale perpendicolare un punto *P* tale che $AP = 4$ cm. Determina la distanza di *P* da *B* e da *C*. $\left[PB = \sqrt{41}\text{ cm};\ PC = 5\text{ cm}\right]$

25 Considera un triangolo *ABC*, rettangolo in *C*, con $A\widehat{B}C = 30°$ e $AB = 6$ cm. Traccia la perpendicolare in *C* al piano del triangolo e considera su tale perpendicolare il punto *P* tale che $PC = 1$ cm. Determina la distanza del punto *P* da *A* e da *B*. $\left[PA = \sqrt{10}\text{ cm};\ PB = 2\sqrt{7}\text{ cm}\right]$

26 Sia *ABC* un triangolo isoscele sulla base *BC* tale che $AB = AC = 5$ cm e $BC = 6$ cm. Traccia la perpendicolare in *A* al piano del triangolo e considera su tale perpendicolare un punto *P* tale che $PA = AC$. Determina la distanza di *P* da *B*, da *C* e dal punto medio *M* di *BC*. $\left[PB = PC = 5\sqrt{2}\text{ cm};\ PM = \sqrt{41}\text{ cm}\right]$

27 Sia *ABCD* un rettangolo con $\overline{AB} = 6a$ e $\overline{BC} = 3a$. Traccia la perpendicolare in *A* al piano del rettangolo e considera su tale perpendicolare il punto *P* tale che $\overline{AP} = 4a$. Determina la distanza di *P* da *B*, *C* e *D*. $\left[\overline{PB} = 2a\sqrt{13};\ \overline{PC} = a\sqrt{61};\ \overline{PD} = 5a\right]$

28 Considera un triangolo *ABC*, rettangolo in *C*, con $A\widehat{B}C = 30°$ e $\overline{AB} = 6a$. Traccia la perpendicolare in *A* al piano del triangolo e considera su tale perpendicolare il punto *P* tale che $\overline{PA} = a$. Determina perimetro e area del triangolo *PBC*. $\left[a\left(\sqrt{10} + \sqrt{37} + 3\sqrt{3}\right);\ \frac{3}{2}a^2\sqrt{30}\right]$

29 Sia *ABCD* un quadrato, di lato $2a$, appartenente al piano α. Indica con *M* il punto medio del lato *AD* del quadrato. Sulla perpendicolare in *M* al piano del quadrato considera il punto *P*, tale che $\overline{PM} = 2a$. Determina la distanza di *P* da *A*, *B*, *C* e *D*. $\left[\overline{PA} = \overline{PD} = a\sqrt{5};\ \overline{PB} = \overline{PC} = 3a\right]$

30 Sia *ABCD* un rettangolo, appartenente al piano α, tale che $\overline{AB} = 4a$ e $\overline{BC} = 2a$. Indica con *M* il punto medio del lato *AB*. Sulla perpendicolare in *M* al piano del rettangolo, considera il punto *P*, tale che $\overline{PM} = 3a$. Determina la distanza di *P* da *A*, *B*, *C* e *D*. $\left[\overline{PA} = \overline{PB} = a\sqrt{13};\ \overline{PC} = \overline{PD} = a\sqrt{17}\right]$

3. Proiezioni, distanze e angoli

Teoria p. 13

Esercizi introduttivi

31 **Vero o falso?**

a. i segmenti ottenuti proiettando su un piano due segmenti non congruenti sono sempre non congruenti V F

b. nello spazio non è possibile definire il concetto di «distanza» tra due rette se e solo se le due rette sono parallele V F

c. l'angolo formato da una retta incidente un piano con il piano stesso è l'angolo formato dalla retta con la perpendicolare al piano passante per il punto di incidenza V F

d. il luogo dei punti dello spazio che hanno una prefissata distanza da un dato piano è costituito da due piani paralleli V F

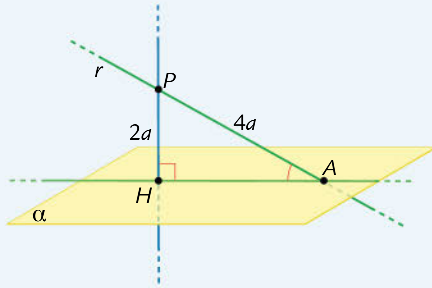
[1 affermazione vera e 3 false]

Problemi

32 **ESERCIZIO GUIDATO**

Una retta r interseca in A un piano α. Sia P un punto della retta distante 4 cm da A e 2 cm dal piano α. Determina l'ampiezza dell'angolo che la retta r forma con il piano α.

- Indicata con H la proiezione di P sul piano α, la retta AH è la proiezione della retta r sul piano stesso, quindi l'angolo che la retta r forma con il piano α è l'angolo $P\widehat{A}H$.
- Osserva che $\overline{PH} = \overline{AP} \cdot \sin P\widehat{A}H$, da cui segue che $\sin P\widehat{A}H =$ ....., quindi $P\widehat{A}H =$ .....



33 Dato un quadrato $ABCD$, di lato 1 cm, indica con O il suo centro. Traccia la retta r, perpendicolare in C al piano del quadrato. Determina la posizione di un punto P sulla retta in modo che il segmento PO formi con il piano del quadrato un angolo di 30°. $\left[PC = \frac{\sqrt{6}}{6}\text{cm}\right]$

34 Una retta r interseca un piano π nel punto O e forma con il piano stesso un angolo α tale che $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Considera sulla retta r un punto P tale che $PO = 6$ cm. Qual è la distanza del punto P dal piano π? $[4\sqrt{2}\,\text{cm}]$

35 Una retta r interseca il piano α nel punto O. Un punto P, sulla retta r, è tale che $OP = 3$ cm e $PH = 1$ cm, essendo H la proiezione di P sul piano α. Determina l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalla retta r con il piano α, arrotondando il risultato a meno di un grado. [19°]

4. Prismi, parallelepipedi e piramidi

Teoria p. 15

Esercizi introduttivi

36 **Vero o falso?**

a. un prisma avente come base un triangolo ha 6 vertici e 9 spigoli V F

b. una piramide è un particolare prisma V F

c. un parallelepipedo è un particolare prisma V F

d. se un parallelepipedo ha come basi due rettangoli, allora il parallelepipedo si dice rettangolo V F

e. ogni parallelepipedo retto ha come basi dei rettangoli V F

[2 sole affermazioni vere]

37 **Caccia all'errore.** Le tre definizioni che seguono sono tutte inesatte, nel senso che non corrispondono a quelle date nella parte di teoria. Correggile.

a. Una piramide si dice retta se la base è un poligono inscrivibile in una circonferenza e il centro di tale circonferenza coincide con il piede dell'altezza della piramide.

b. Una piramide si dice regolare se la base è un poligono regolare.

c. Un prisma si dice retto quando gli angoli del poligono di base sono retti.

38 **Argomentare e dimostrare** Spiega perché:
a. una piramide avente come base un triangolo equilatero può non essere regolare;
b. una piramide retta a base triangolare può non essere regolare;
c. per una generica piramide non si può definire il concetto di apotema.

39 Una piramide avente come base un rombo e il cui vertice appartiene alla perpendicolare al piano della base passante per il punto di intersezione delle diagonali del rombo è necessariamente retta? È regolare?

40 Una piramide avente come base un triangolo equilatero e il cui vertice appartiene alla perpendicolare al piano della base passante per il baricentro del triangolo è necessariamente retta? È regolare?

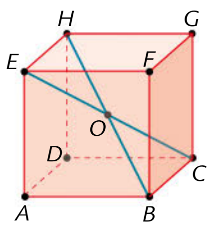
41 Una piramide avente come base un trapezio isoscele e il cui vertice appartiene alla perpendicolare al piano della base passante per il punto di intersezione delle diagonali del trapezio è necessariamente retta? È regolare?

42 Una piramide avente come base un rettangolo e il cui vertice appartiene alla perpendicolare al piano della base passante per il punto di intersezione delle diagonali del rettangolo è retta? È regolare?

43 Una piramide avente come base un quadrato e il cui vertice appartiene alla perpendicolare al piano della base passante per uno dei vertici del quadrato è retta? È regolare?

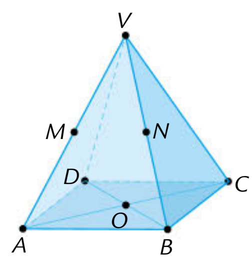
«Vedere» nello spazio

44 **Vero o falso?**
Fai riferimento al cubo in figura.



a. le rette AB ed EC sono incidenti V F
b. le rette EC e BH sono complanari V F
c. le rette BD ed FH sono complanari V F
d. le rette AH e BG sono sghembe V F
e. le rette AG e BH sono secanti V F
f. i piani ABE ed EFB sono coincidenti V F
g. la retta DH è contenuta nel piano ADE V F
h. la retta AH è parallela al piano BFC V F
i. la retta DE è secante rispetto al piano ABG V F
[7 affermazioni vere e 2 false]

45 Fai riferimento alla piramide in figura. La base della piramide è un parallelogramma di centro O. M ed N sono i punti medi degli spigoli AV e BV.



a. Qual è l'intersezione del piano ABV e del piano ADV?
b. Qual è l'intersezione del piano AVC e del piano BVD?
c. Le due rette CM e VO sono sghembe o complanari? Sono incidenti? Nel caso siano incidenti, qual è il loro punto di intersezione?
d. Qual è la posizione reciproca delle rette MN e CD?
e. Qual è l'intersezione dei piani ABV e CDM?
f. La retta MN è parallela al piano VDC?

Problemi

46 Qual è la lunghezza delle diagonali di un parallelepipedo rettangolo avente come base un quadrato il cui lato è lungo 4 cm e la cui altezza è 2 cm? [6 cm]

47 La diagonale di un cubo misura 6 cm. Qual è la misura dello spigolo del cubo? [$2\sqrt{3}$ cm]

48 L'area della base di un cubo è 12 cm^2. Qual è la misura della diagonale del cubo? [6 cm]

49 Un parallelepipedo rettangolo ha come base un quadrato di area 64 cm^2 e altezza lunga 4 cm. Qual è la misura della diagonale del parallelepipedo? [12 cm]

50 Gli spigoli di base di un parallelepipedo rettangolo sono uno doppio dell'altro e l'altezza del parallelepipedo misura 5 cm. Sapendo che la diagonale del parallelepipedo è lunga 10 cm, determina l'area della base del parallelepipedo. [30 cm^2]

51 In una piramide regolare a base quadrata, lo spigolo di base misura 10 cm e l'apotema misura 10 cm. Qual è la misura dell'altezza della piramide? $[5\sqrt{3}\ \text{cm}]$

52 In una piramide regolare a base quadrata l'altezza misura 8 cm e lo spigolo di base misura 12 cm. Qual è la misura dell'apotema della piramide? [10 cm]

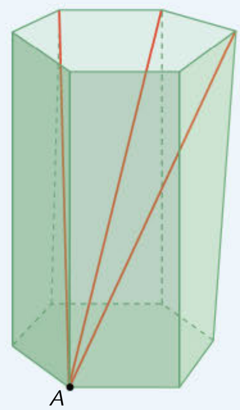
53 In una piramide regolare a base quadrata gli spigoli laterali misurano 4 cm e lo spigolo di base misura 2 cm. Qual è la misura dell'altezza della piramide? $[\sqrt{14}\ \text{cm}]$

54 In una piramide regolare a base quadrata l'altezza misura 8 cm e l'apotema misura 10 cm. Qual è la misura degli spigoli laterali? $[2\sqrt{34}\ \text{cm}]$

55 ESERCIZIO GUIDATO

Determina quanti lati deve avere il poligono di base di un prisma, affinché il numero delle diagonali del prisma sia uguale al numero dei suoi spigoli.

- Indica con n il numero dei lati del poligono di base di un prisma ed esprimi anzitutto in funzione di n il numero degli spigoli e delle diagonali del prisma stesso.
- Il prisma ha $2n$ spigoli di base ed n spigoli laterali, quindi il numero complessivo di spigoli è ...... Ogni diagonale è univocamente individuata dalla scelta dei suoi due estremi: l'estremo sulla base inferiore del prisma può essere scelto in n modi e, una volta scelto l'estremo sulla base inferiore, l'estremo sulla base superiore può essere scelto in $(n-3)$ modi, dunque le diagonali sono complessivamente .....
- Concludi la risoluzione del problema risolvendo l'equazione ottenuta uguagliando il numero delle diagonali e il numero degli spigoli trovati al punto precedente. $[n = 6]$



In rosso le diagonali del prisma uscenti da A

56 Determina quanti lati deve avere il poligono di base di un prisma, in modo che la somma tra il numero dei vertici e il numero degli spigoli superi di 18 il numero delle facce. $[n = 5]$

57 Determina quanti lati deve avere il poligono di base di una piramide, in modo che il doppio del numero dei suoi spigoli sia uguale al triplo del numero delle facce. [3]

58 Determina quanti lati deve avere il poligono di base di una piramide, in modo che la somma tra il numero dei vertici e il numero degli spigoli sia uguale a 100. [33]

59 Verifica che non esiste alcuna piramide tale per cui la somma tra il numero dei vertici, il numero degli spigoli e il numero delle facce sia 100.

60 Determina quanti lati deve avere il poligono di base di un prisma, in modo che il numero delle diagonali sia uguale alla somma tra il numero dei vertici e il numero degli spigoli. $[n = 8]$

61 Determina quanti lati deve avere il poligono di base di un prisma, in modo che il numero delle diagonali sia il quadruplo del numero delle facce. $[n = 8]$

5. Solidi di rotazione

Teoria p. 20

Esercizi introduttivi

62 Vero o falso?

a. un cono equilatero è un cono in cui l'altezza è congruente al raggio di base V F
b. il solido ottenuto dalla rotazione di un quadrato intorno a uno qualunque dei suoi lati è un cilindro equilatero V F
c. se un piano è tangente a un cilindro, la sua intersezione con il cilindro stesso è costituita da un unico punto V F
d. se un piano è tangente a una sfera, la sua intersezione con la sfera è costituita da un unico punto V F
e. ruotando un triangolo rettangolo intorno a uno qualunque dei suoi lati si ottiene un cono V F
f. ruotando un rettangolo intorno a uno qualunque dei suoi lati si ottiene un cilindro V F

[4 affermazioni false e 2 vere]

63 Descrivi il solido che si ottiene ruotando di un giro completo un triangolo rettangolo intorno:
a. a uno dei due cateti;
b. all'ipotenusa.

64 Descrivi il solido che si ottiene ruotando di un giro completo un trapezio rettangolo intorno:
a. all'altezza del trapezio;
b. alla base maggiore;
c. alla base minore;
d. al lato obliquo.

65 Descrivi il solido che si ottiene ruotando di un giro completo un trapezio isoscele intorno:
a. alla base maggiore;
b. alla base minore;
c. a uno dei due lati obliqui;
d. all'asse delle basi.

66 **Argomentare e dimostrare** Stefania afferma che un cilindro è equilatero se l'altezza è congruente al diametro di base. Angela sostiene che un cono è equilatero se l'altezza è congruente al diametro di base. Stabilisci se hanno ragione e spiega perché.

Problemi

67 Determina la misura dell'apotema di un cono di raggio 1 cm, avente l'altezza congruente al diametro della base. [$\sqrt{5}$ cm]

68 In un cono l'area del cerchio di base è 36π cm^2 e l'apotema è il doppio dell'altezza. Determina la lunghezza dell'altezza e dell'apotema del cono. [Altezza = $2\sqrt{3}$ cm; apotema = $4\sqrt{3}$ cm]

69 In un cono l'apotema misura 10 cm e l'area del cerchio di base è 25π cm^2. Qual è la misura dell'altezza del cono? [$5\sqrt{3}$ cm]

70 **Videolezione** In un cono l'altezza misura 8 cm e l'apotema misura 10 cm. Qual è l'area del cerchio di base? [36π cm^2]

71 L'area del cerchio di base di un cilindro equilatero è 16π cm^2. Qual è la misura dell'altezza del cilindro? [8 cm]

72 Un cilindro equilatero ha altezza 12 cm. Qual è l'area del cerchio di base? [36π cm^2]

73 In un cono equilatero l'apotema è 10 cm. Qual è la misura dell'altezza del cono? [$5\sqrt{3}$ cm]

74 In un cono equilatero l'altezza è 6 cm. Qual è la misura dell'apotema? [$4\sqrt{3}$ cm]

75 **Videolezione** In un cono l'apotema è $\frac{3}{2}$ dell'altezza e il raggio è 10 cm. Qual è la lunghezza dell'altezza? [$4\sqrt{5}$ cm]

76 La sezione di un cilindro di raggio 4 cm con un piano passante per l'asse del cilindro è un rettangolo avente area 100 cm^2. Qual è la lunghezza dell'altezza del cilindro? [12,5 cm]

6. Aree di superfici e volumi

Teoria p. 23

Esercizi introduttivi

77 **Vero o falso?**
a. se due prismi retti hanno la stessa altezza e lo stesso perimetro di base, allora l'area della superficie laterale dei due prismi è la stessa V F
b. se due prismi retti hanno la stessa altezza e lo stesso perimetro di base, allora l'area della superficie totale dei due prismi è la stessa V F
c. se due prismi hanno la stessa altezza e aree di base equivalenti, allora hanno lo stesso volume V F
d. raddoppiando lo spigolo di un cubo, raddoppia anche la sua diagonale V F
e. raddoppiando lo spigolo di un cubo, raddoppia anche la sua superficie totale V F
f. raddoppiando lo spigolo di un cubo, raddoppia anche il suo volume V F

[3 affermazioni vere e 3 false]

78 **Vero o falso?**

a. il rapporto tra i volumi di due piramidi aventi la stessa altezza è uguale al rapporto tra le aree delle rispettive basi V F

b. per qualsiasi piramide, l'area della superficie laterale ha misura uguale al prodotto del semiperimetro della base per la misura dell'apotema V F

c. una piramide avente come vertice il centro di una faccia di un cubo e come base la faccia opposta ha volume uguale a $\frac{1}{3}$ del volume del cubo V F

d. se il volume di una piramide misura V e l'area della base misura A, allora l'altezza relativa alla base misura $\frac{3V}{A}$ V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

Test

79 Un cubo ha spigolo di misura 1 cm. Considera il cubo avente diagonale tripla di quella del cubo precedente. Il volume di quest'ultimo rispetto al volume del cubo originario è:

A il doppio
B il triplo
C il quadruplo
D nessuna delle precedenti risposte è esatta

80 Un parallelepipedo rettangolo ha superficie laterale di area 72 cm^2 e base quadrata di area 9 cm^2. Qual è la lunghezza dell'altezza del parallelepipedo?

A 2 cm
B 3 cm
C 6 cm
D 9 cm

---

81 Un parallelepipedo rettangolo ha base quadrata, il cui lato misura 2 cm; la diagonale del parallelepipedo misura $\sqrt{17}$ cm . Qual è il volume del parallelepipedo?

A 2 cm B 3 cm C 4 cm D 5 cm

82 Un prisma retto ha altezza lunga 10 cm e come base un triangolo rettangolo i cui cateti sono lunghi 3 cm e 4 cm. Qual è l'area della superficie totale del prima?

A 120 cm^2 B 124 cm^2 C 132 cm^2 D 144 cm^2

83 Un prisma regolare di base triangolare ha altezza doppia dello spigolo di base, che misura 1 cm. Qual è il volume del prisma?

A $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ cm^3 B $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ cm^3 C $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ cm^3 D $\frac{1}{9}\sqrt{3}$ cm^3

84 Due piramidi regolari a basi quadrate sono tali che una ha altezza e spigolo di base doppi dell'altra. Allora il volume della piramide di maggiore altezza, rispetto al volume dell'altra piramide, è:

A il doppio B il quadruplo C il triplo D nessuno dei precedenti

85 Una piramide ha come base un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti misurano 1 cm e altezza di misura 6 cm. Qual è il volume della piramide?

A 1 cm^3 B 2 cm^3 C 3 cm^3 D 4 cm^3

86 Due piramidi hanno basi equivalenti e altezze congruenti. Allora i volumi delle due piramidi:

A sono certamente uguali
B sono uguali se e solo se le due piramidi sono regolari
C sono uguali se e solo se le due piramidi sono rette
D potrebbero non essere uguali, anche se le due piramidi fossero rette o regolari

87 Una piramide regolare ha come base un quadrato di lato 6 cm e altezza lunga 4 cm. Qual è l'area della superficie laterale?

A 20 cm^2 B 30 cm^2 C 40 cm^2 D 60 cm^2

88 In una piramide regolare di base esagonale lo spigolo di base misura 1 cm e l'apotema è congruente allo spigolo di base. Qual è il volume delle piramide?

A $\frac{1}{2}$ cm^3 B $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ cm^3 C $\frac{1}{8}\sqrt{3}$ cm^3 D Non si può stabilirlo senza ulteriori informazioni

Test

89 Qual è il raggio di base di un cono equilatero la cui superficie laterale ha area 18π cm^2 ?

A 1 cm
B 2 cm
C 3 cm
D 4 cm

90 Qual è il volume di un cilindro inscritto in un cubo il cui spigolo misura 2 cm?

A π cm^3
B 2π cm^3
C 4π cm^3
D 6π cm^3

91 Qual è l'area della superficie laterale di un cono equilatero il cui raggio di base misura r?

A πr^2
B $\pi r^2\sqrt{2}$
C $2\pi r^2$
D $\pi r^2\sqrt{5}$

92 Qual è il volume di un cono il cui raggio di base misura r e la cui altezza è congruente al diametro di base?

A $\frac{1}{3}\pi r^3$
B $\frac{2}{3}\pi r^3$
C πr^3
D $\frac{4}{3}\pi r^3$

93 Qual è l'altezza di un cilindro avente superficie totale di area 20π cm^2 e raggio di base di misura 2 cm?

A 1 cm B 2 cm C 3 cm D 4 cm

94 Una sfera ha raggio 1 cm. Qual è l'area della superficie della sfera?

A 2π cm^2
B 4π cm^2
C 6π cm^2
D 8π cm^2

95 Qual è il raggio di una sfera la cui superficie ha area 400π cm^2?

A 10 cm
B 20 cm
C 40 cm
D 80 cm

96 Se il raggio di una sfera raddoppia, allora l'area della sua superficie:

A raddoppia
B quadruplica
C diventa otto volte l'area della superficie della sfera originaria
D diventa sedici volte l'area della superficie della sfera originaria

97 Se il raggio di una sfera raddoppia, allora il suo volume:

A raddoppia
B quadruplica
C diventa otto volte il volume della sfera originaria
D diventa sedici volte il volume della sfera originaria

Problemi sui parallelepipedi

98 Un cubo ha area della superficie totale uguale a 96 cm^2. Determina il volume del cubo. [64 cm^3]

99 In un parallelepipedo rettangolo il rettangolo di base ha lati lunghi 8 cm e 4 cm e l'altezza del parallelepipedo è lunga 4 cm. Determina:

a. la lunghezza delle diagonali del parallelepipedo;
b. l'area della sua superficie totale;
c. il suo volume. [**a.** $4\sqrt{6}$ cm; **b.** 160 cm^2; **c.** 128 cm^3]

100 Un cubo ha diagonale lunga $6\sqrt{3}$ cm. Determina l'area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo avente lo stesso volume del cubo, sapendo che la base del parallelepipedo ha diagonali lunghe 10 cm e un lato lungo 6 cm. [222 cm^2]

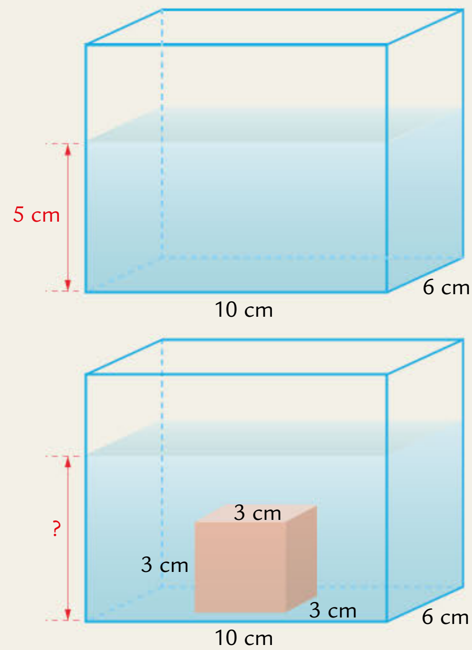
101 In un parallelepipedo retto a base quadrata, la cui altezza è il triplo dello spigolo di base, le diagonali sono lunghe $3\sqrt{11}$ cm. Determina l'area della superficie totale e il volume del parallelepipedo. [126 cm^2; 81 cm^3]

102 Un parallelepipedo retto a base quadrata ha area della superficie totale uguale al quadruplo dell'area della superficie laterale. Inoltre il volume del parallelepipedo è 288 cm^3. Determina la misura della diagonale del parallelepipedo. [$2\sqrt{73}$ cm]

103 **Videolezione** Un cubo ha diagonale di misura $3a\sqrt{2}$. Determina il volume del parallelepipedo avente come base un quadrato di lato a, e la cui superficie totale è equivalente alla superficie totale del cubo. $\left[\frac{17}{2}a^3\right]$

104 **ESERCIZIO SVOLTO**

In un recipiente a forma di parallelepipedo rettangolo, in cui i lati di base sono lunghi 6 cm e 10 cm, l'acqua in esso contenuta raggiunge il livello di 5 cm. Si immerge nell'acqua un cubo di spigolo 3 cm. Quando il cubo è completamente immerso nell'acqua, qual è l'altezza dell'acqua del recipiente?



- Calcoliamo inizialmente *di quanto sale* il livello dell'acqua per effetto dell'immersione del cubo. Questo problema equivale a stabilire l'altezza h del parallelepipedo rettangolo che ha la base congruente a quella del recipiente e che risulta equivalente al cubo di spigolo 3 cm. Poiché il volume V del cubo è $3^3\ \text{cm}^3 = 27\ \text{cm}^3$, mentre l'area A della base del recipiente è $10 \cdot 6\ \text{cm}^2 = 60\ \text{cm}^2$, l'altezza h che cerchiamo si ricava dal rapporto:

$$h = \frac{V}{A} = \frac{27\ \text{cm}^3}{60\ \text{cm}^2} = \frac{9}{20}\text{cm} = 0{,}45\ \text{cm}$$

- Sommando questa lunghezza all'altezza *iniziale* dell'acqua, otteniamo l'altezza *finale* dell'acqua, cioè l'altezza dopo l'immersione del cubo:

$$5\ \text{cm} + 0{,}45\ \text{cm} = 5{,}45\ \text{cm}$$

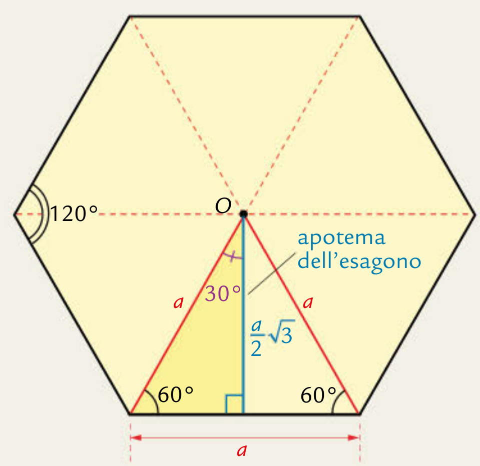
105 Un recipiente ha la forma di un parallelepipedo rettangolo, in cui i lati di base sono lunghi 8 cm e 9 cm e in cui l'altezza è lunga 11 cm. Nel recipiente è contenuta dell'acqua, che raggiunge un'altezza di 7 cm. Si inserisce nel recipiente un cubo pesante di spigolo 6 cm. Quando il cubo è completamente immerso, qual è l'altezza dell'acqua nel recipiente? L'acqua fuoriesce dal recipiente? [10 cm; no]

106 **Realtà e modelli** **Oro falso.** Barbara vuole stabilire se un oggetto, apparentemente d'oro, lo sia effettivamente. Inizialmente pesa l'oggetto e verifica che ha una massa di 2624 g. Poi lo inserisce in un contenitore graduato contenente acqua, a forma di parallelepipedo rettangolo, avente come base un quadrato di 10 cm di lato. Prima di inserire l'oggetto l'acqua nel contenitore raggiungeva un'altezza di 42 cm; dopo avere inserito l'oggetto il livello dell'acqua raggiunge un'altezza di 43,5 cm. A questo punto Barbara, ricordando che la densità dell'oro è di 19,3 g/cm^3, afferma che l'oggetto **non** è d'oro. Verifica che Barbara ha ragione.

Problemi sui prismi

107 **ESERCIZIO SVOLTO**

Il lato della base di un prisma regolare esagonale misura *a*. Sapendo che il volume *V* del prisma è $6a^3\sqrt{3}$, determiniamo l'area della superficie totale del prisma.



- Determiniamo anzitutto l'area A della base del prisma. Trattandosi di un esagono regolare, l'area è data dal semiperimetro dell'esagono per l'apotema dell'esagono stesso, quindi:

$$A = \frac{6a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

- Conoscendo l'area della base del prisma e il volume del prisma, possiamo ricavarne l'altezza h:

$$h = \frac{V}{A} = \frac{6a^3\sqrt{3}}{\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}} = 4a$$

- La superficie totale S del prisma si ottiene sommando quella laterale, S_l, al doppio di quella di base, S_b:

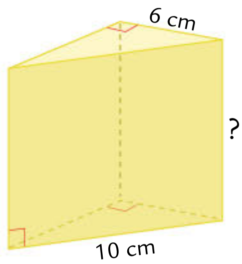
$$S = S_l + 2S_b = 6a \cdot 4a + 2 \cdot \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = 24a^2 + 3\sqrt{3}a^2 = 3(8+\sqrt{3})a^2$$

108 Un prisma ha come base un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 5 cm e 10 cm. L'altezza del prisma è 5 cm. Qual è il volume del prisma? [125 cm^3]

109 Un prisma retto ha come base un rombo le cui diagonali misurano 8 cm e 6 cm. L'altezza del prisma ha la stessa lunghezza della diagonale maggiore del rombo. Determina il volume del prisma e l'area della sua superficie totale. [192 cm^3; 208 cm^2]

110 Un prisma retto ha come base un trapezio rettangolo in cui la base maggiore misura 10 cm, la base minore misura 5 cm e l'altezza è congruente alla base minore. L'altezza del prisma è 10 cm. Determina il volume del prisma e l'area della superficie totale. $\left[375\ \text{cm}^2;\ \left(275+50\sqrt{2}\right)\ \text{cm}^2\right]$

111 Il prisma rappresentato in figura ha volume uguale a 192 cm^3. Determina l'altezza del prisma. [8 cm]



112 Un prima regolare ha altezza congruente allo spigolo di base. Sapendo che quest'ultimo misura 1 cm, calcola l'area della superficie totale e il volume del prisma. $\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)\ \text{cm}^2;\ \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^3\right]$

113 Un prisma retto ha come base un triangolo equilatero. L'altezza del prisma è $\frac{4}{3}$ del lato del triangolo di base. Sapendo che il volume del prisma è $72\sqrt{3}$ cm^3, determina l'area della superficie totale del prisma. $\left[\left(144+18\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2\right]$

114 Considera un prisma esagonale regolare, in cui l'altezza è il doppio del lato dell'esagono di base. Sapendo che il volume del prisma è $24\sqrt{3}$ cm^3, determina l'area della superficie totale. $\left[12\left(4+\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2\right]$

115 Un prisma regolare a base esagonale, in cui tutte le facce laterali sono quadrati, ha area della superficie laterale uguale a 96 cm^2. Qual è il volume del prisma? $\left[96\sqrt{3}\ \text{cm}^3\right]$

116 Un prisma retto ha come base un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, tale che $A\widehat{C}B=120°$. L'altezza del prisma è il doppio dei lati obliqui del triangolo ABC. Sapendo che il volume del prisma è $4\sqrt{3}$ cm^3, determina l'area della superficie totale del prisma. $\left[\left(16+10\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2\right]$

117 Un prisma regolare ha come base un esagono regolare il cui perimetro è 12 cm. Il volume del prisma è $48\sqrt{3}$ cm^3. Determina l'area della superficie totale del prisma. $\left[12\left(8+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2\right]$

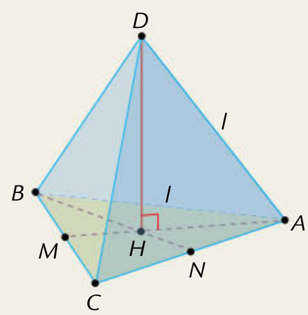
118 Un prisma retto ha come base un triangolo rettangolo isoscele. L'altezza del prisma è congruente all'ipotenusa del triangolo di base. L'area della superficie totale del prisma è $\left(75+50\sqrt{2}\right)a^2$. Determina il volume del prisma. $\left[\frac{125\sqrt{2}}{2}a^3\right]$

119 Un prisma retto ha come base un triangolo rettangolo di area $9a^2$, la cui ipotenusa misura $3a\sqrt{5}$. Il volume del prisma è $54a^3$. Calcola l'area della superficie laterale del prisma. $\left[18a^2\left(3+\sqrt{5}\right)\right]$

Problemi sulla piramide

120 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo il volume del tetraedro regolare il cui spigolo misura *l*.



- Il tetraedro regolare non è altro che una piramide regolare, a base triangolare di lato l, il cui spigolo laterale misura anch'esso l. Per calcolarne il volume occorre ricavare sia l'area A della base sia l'altezza h.
- L'area della base è l'area di un triangolo equilatero di lato l, dunque risulta:

$$A=\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

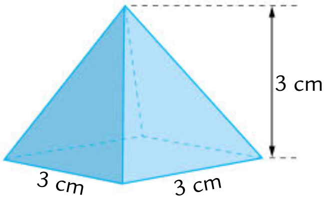
- Per determinare l'altezza DH del tetraedro, applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo DHA in figura. Poiché la piramide è regolare, H è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo ABC, cioè il baricentro del triangolo ABC: dunque $\overline{AH}=\frac{2}{3}\overline{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}\sqrt{3}=\frac{l\sqrt{3}}{3}$. L'altezza h del tetraedro è quindi:

$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}l^2}=l\sqrt{\frac{2}{3}}$$

- Possiamo ora calcolare il volume V del tetraedro:

$$V=\frac{1}{3}\cdot A\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{l^2}{4}\sqrt{3}\cdot l\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{12}l^3$$

121 Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide regolare a base quadrata rappresentata in figura.

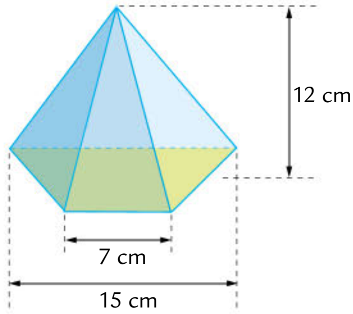


$\left[9 \text{ cm}^3;\ 9\left(1+\sqrt{5}\right) \text{ cm}^2\right]$

122 Una piramide ha come base un rettangolo $ABCD$, di centro O, i cui lati misurano 6 cm e 8 cm. Il vertice V della piramide appartiene alla perpendicolare condotta da O al piano che contiene la base della piramide. L'altezza della piramide misura 4 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide. $\left[64 \text{ cm}^3;\ \left(88+24\sqrt{2}\right) \text{ cm}^2\right]$

123 Una piramide regolare ha come base un quadrato di lato 8 cm. Sapendo che l'apotema della piramide è 5 cm, determina l'area della superficie totale e il volume della piramide. $[144 \text{ cm}^2;\ 64 \text{ cm}^3]$

124 La piramide in figura ha altezza lunga 12 cm e ha come base un trapezio isoscele le cui basi sono lunghe rispettivamente 15 cm e 7 cm. Sapendo che il volume della piramide è 220 cm^3, determina l'altezza del trapezio.



$[5 \text{ cm}]$

---

125 L'apotema di una piramide regolare a base quadrata è lungo 13 cm, mentre l'altezza è lunga 12 cm. Determina l'area della superficie totale e il volume della piramide. $[360 \text{ cm}^2;\ 400 \text{ cm}^3]$

126 Determina il volume di una piramide triangolare regolare, sapendo che lo spigolo di base misura $6a\sqrt{3}$ e che l'area della superficie laterale della piramide è $45a^2\sqrt{3}$. $\left[36a^3\sqrt{3}\right]$

127 Una piramide triangolare regolare è tale che:

a. gli spigoli laterali misurano $5a$;

b. la base ha perimetro $18a$.

Determina l'area della superficie totale e il volume della piramide. $\left[9a^2\left(4+\sqrt{3}\right);\ 3a^3\sqrt{39}\right]$

128 Una piramide esagonale regolare ha base di area $\frac{2}{3}a^2\sqrt{3}$ e superficie laterale di area $8a^2$. Determina il volume della piramide. $\left[\frac{2}{9}a^3\sqrt{47}\right]$

129 Una piramide retta ha come base un rombo $ABCD$ e vertice E. La diagonale BD del rombo è $\frac{3}{4}$ della diagonale AC. L'altezza della piramide è $\frac{3}{10}$ della diagonale BD. Sapendo che il volume della piramide è 14,4 cm^3, determina l'area della superficie totale della piramide. $[54 \text{ cm}^2]$

130 In una piramide triangolare regolare, di altezza 2 cm, il rapporto tra l'area di una faccia laterale e l'area della base è $\frac{2}{9}\sqrt{3}$. Determina il volume della piramide. $\left[24\sqrt{3} \text{ cm}^3\right]$

131 Una piramide ha come base un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, in cui $\overline{AB}=12a$ e $\overline{AC}=\overline{BC}=10a$. Il vertice D della piramide appartiene alla perpendicolare in C al piano della base e lo spigolo CD è congruente all'altezza relativa alla base del triangolo ABC. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide. $\left[128a^3;\ \left(128+48\sqrt{2}\right)a^2\right]$

132 Considera un rettangolo $ABCD$, in cui $\overline{AB}=4a$ e $\overline{BC}=6a$. Sia M il punto medio di AD. Sulla perpendicolare in M al piano del rettangolo $ABCD$ indica con E un punto tale che $\overline{EM}=4a$. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide che ha come base il rettangolo $ABCD$ e come vertice il punto E. $\left[32a^3;\ 4\left(14+3\sqrt{2}\right)a^2\right]$

133 In una piramide quadrangolare tutte le facce laterali sono triangoli equilateri di lato a.

a. Dimostra che la piramide è regolare.

b. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide. $\left[\textbf{b.}\ \frac{a^3\sqrt{2}}{6};\ a^2\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

134 Una piramide retta ha per base un trapezio isoscele $ABCD$ di base maggiore $AB = 8$ cm e base minore $CD = 2$ cm. L'altezza della piramide è lunga 1,5 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide.
[10 cm^3; 45 cm^2]

135 **Realtà e modelli** **La piramide del Louvre e quella di Cheope.** La piramide del Louvre è una piramide regolare, a base quadrata. Lo spigolo di base misura circa 35,42 m e lo spigolo laterale misura circa 33,10 m. La superficie laterale è formata da rombi e triangoli equilateri realizzati in vetro.

a. Qual è il volume della piramide del Louvre? E quale l'area della sua superficie in vetro?
b. Determina l'angolo che una faccia laterale della piramide forma con il suolo.
c. La piramide del Louvre si può considerare con buona approssimazione simile alla piramide di Cheope in Egitto, la cui altezza è circa 146 m. Sulla base di questa ipotesi, determina a quale percentuale del volume della piramide di Cheope corrisponde il volume della piramide del Louvre.

[**a.** Circa 9050 m^3, circa 1981 m^2; **b.** circa 50,7°; **c.** circa 0,3%]

Problemi sul cilindro

136 Un cilindro ha raggio di base di 4 cm e altezza di 10 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale del cilindro.
[160π cm^3, 112π cm^2]

137 Un cilindro ha come base un cerchio di area 36π cm^2. L'altezza del cilindro è il doppio del raggio di base. Determina il volume e l'area della superficie totale del cilindro.
[432π cm^3, 216π cm^2]

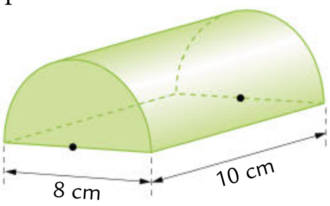
138 Un cilindro ha volume 120π cm^3 e area della superficie di base uguale a 16π cm^2. Determina l'altezza del cilindro e l'area della sua superficie totale.
[7,5 cm; 92π cm^2]

139 Facendo ruotare un quadrato di un giro completo intorno a un suo lato si ottiene un cilindro di volume $\frac{27}{8}\pi$ cm^3. Determina la superficie totale del cilindro.
[9π cm^2]

140 Facendo ruotare un quadrato di un giro completo intorno a un suo lato si ottiene un cilindro di superficie totale $36\pi a^2$. Determina il volume del cilindro.
[27π cm^3]

141 Un cilindro ha volume uguale a $6\pi a^3$ e superficie laterale di area $6\pi a^2$. Calcola la misura dell'altezza del cilindro e l'area della superficie totale.
$\left[\frac{3}{2}a; 14\pi a^2\right]$

142 Il solido rappresentato in figura è stato ottenuto sezionando un cilindro con un piano passante per l'asse del cilindro. Determina il volume e l'area della superficie totale del solido.



[80π cm^3; $(80 + 56\pi)$ cm^2]

143 Le aree delle sezioni di un cilindro con un piano passante per l'asse e con un piano perpendicolare all'asse valgono rispettivamente 48 cm^2 e 9π cm^2. Determina volume e superficie totale del cilindro. [72π cm^3; 66π cm^2]

144 Un cilindro ha superficie totale di area uguale a 70π cm^2 e altezza lunga 2 cm. Determina:
a. il volume del cilindro;
b. la lunghezza delle diagonali del rettangolo che risulta dallo sviluppo del cilindro, arrotondando il risultato a meno di un decimo. $\left[\textbf{a.}\ 50\pi \text{ cm}^3;\ \textbf{b.}\ 2\sqrt{1+25\pi^2} \text{ cm} \simeq 31{,}5 \text{ cm}\right]$

145 **Videolezione** Un cilindro ha superficie totale di area 37π cm^2 e la sezione del cilindro con un piano passante per il suo asse ha area 5 cm^2. Determina il volume del cilindro. [10π cm^3]

146 Considera un cilindro la cui base è un cerchio di raggio r e la cui altezza è il doppio del raggio di base. Determina la misura della diagonale del quadrilatero che si ottiene come sezione del cilindro con un piano parallelo al suo asse e la cui distanza da esso è uguale alla metà del raggio. $\left[r\sqrt{7}\right]$

147 Un rettangolo $ABCD$ ha la base AB doppia dell'altezza BC. Facendo ruotare il rettangolo di un giro completo intorno ad AB si ottiene un cilindro C_1. Facendo ruotare il rettangolo di un giro completo intorno a BC si ottiene un cilindro C_2. La somma dei volumi di C_1 e C_2 è 162π cm^3. Determina le aree delle superfici totali dei due cilindri. [108π cm^2; 54π cm^2]

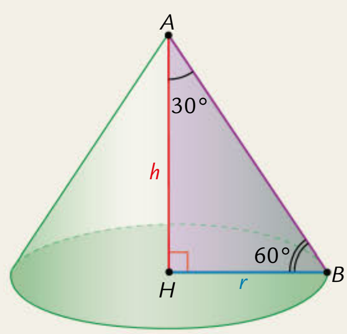
148 **Realtà e modelli** **Una fioriera.** Una fioriera è stata ottenuta da un tronco di legno lungo 200 cm, assimilabile a un cilindro, tramite una sezione parallela al suo asse (*vedi* la figura). Qual era il volume del tronco di legno da cui è stata ricavata la fioriera? Esprimi il risultato in metri cubi.

[Circa 1,27 m^3]

Problemi sul cono

149 **ESERCIZIO SVOLTO**

Determiniamo, in funzione del raggio di base r, l'area della superficie totale e il volume del cono equilatero avente raggio di base r.



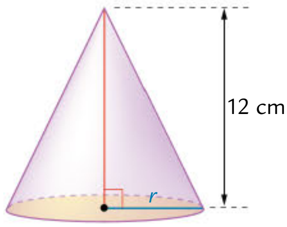
- L'apotema del cono equilatero è $2r$, quindi la sua superficie laterale è:
  $S_l = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2$
- L'area della superficie totale si ottiene sommando a quest'ultima l'area della base:
  $S_t = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$
- Per calcolare il volume del cono bisogna preliminarmente calcolare l'altezza h del cono; ricordando le relazioni tra i lati di un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°, ottieniamo $h = r\sqrt{3}$, quindi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} r^3$$

150 Un cono ha raggio di base di 6 cm e altezza di 8 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale del cono. [96π cm^3; 96π cm^2]

151 L'area del cerchio di base di un cono è 144π cm^2 e l'apotema del cono è lungo 20 cm. Determina l'area della superficie totale e il volume del cono. [384π cm^2; 768π cm^3]

152 Il volume del cono in figura è 324π cm^3. Determina la lunghezza r del raggio di base e l'area della sua superficie totale.



[$r = 9$ cm; area $= 216\pi$ cm^2]

153 L'area della superficie laterale di un cono equilatero è 18π cm^2. Calcola il volume del cono. $\left[9\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3\right]$

154 La sezione di un cono con un piano passante per l'asse del cono è un triangolo rettangolo isoscele. Sapendo che l'area della superficie laterale del cono è $16\pi\sqrt{2}$ cm^2, calcola il volume del cono. $\left[\frac{64\pi}{3}\text{cm}^3\right]$

155 Un cono ha raggio di base di misura 2 cm e volume 2π cm^3. Determina l'area della superficie totale del cono. [9π cm^2]

156 **Videolezione** In un cono, avente altezza doppia del raggio di base, l'area della superficie laterale è $4\pi\sqrt{5}$ cm^2. Determina il volume del cono. $\left[\frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3\right]$

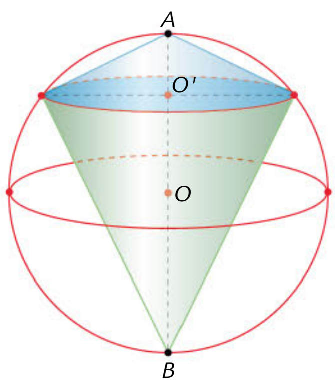
157 Un cono ha apotema lungo 10 cm e raggio di base lungo 6 cm. Traccia il piano parallelo alla base del cono e distante 2 cm dal vertice del cono e determina i volumi delle due parti in cui il piano divide il cono. $\left[\frac{3}{2}\pi \text{ cm}^3, \frac{189}{2}\pi \text{ cm}^3\right]$

158 Un cono ha raggio di base lungo 2 cm e altezza lunga 6 cm.

a. Calcola il volume e la superficie laterale del cono.

b. Lo sviluppo della superficie totale del cono è un settore circolare; determina l'ampiezza (in gradi) di tale settore, arrotondando il risultato a meno di un grado. $\left[\textbf{a.}\, 8\pi \text{ cm}^3,\ 4\pi\left(1+\sqrt{10}\right) \text{cm}^2;\ \textbf{b.}\, 114°\right]$

159 La sezione di una sfera di diametro $AB = 13$ cm con un piano è un cerchio di centro O' e raggio 6 cm. Determina il volume e l'area della superficie del solido formato dai due coni che hanno come base il cerchio di centro O' e come vertici A e B.



$\left[156 \text{ cm}^3; 30\pi\sqrt{13} \text{ cm}^2\right]$

160 La sezione di un cono con un piano passante per l'asse del cono è un triangolo rettangolo isoscele. Sapendo che l'area della superficie laterale del cono è $16\pi\sqrt{2}$ cm^2, calcola il volume del cono. $\left[\frac{64}{3}\pi \text{ cm}^3\right]$

Realtà e modelli

161 **Coni e fontane.** Nella piazzetta di Miramare, una località estiva, è visibile una fontana, in cui sono presenti coni e sfere. I coni sono ricoperti di mosaici sulla loro superficie laterale e hanno la base appoggiata al fondo della fontana e immersa in acqua.
Uno dei coni ha diametro di 60 cm e altezza di 180 cm.

a. La posa dei mosaici sulla superficie laterale del cono considerato è costata 120 euro al metro quadrato. Qual è stato il costo complessivo (in euro) per la posa del mosaico?

b. Il livello dell'acqua nella fontana, mediamente, è pari a 20 cm; qual è il volume della parte del cono immerso nell'acqua?

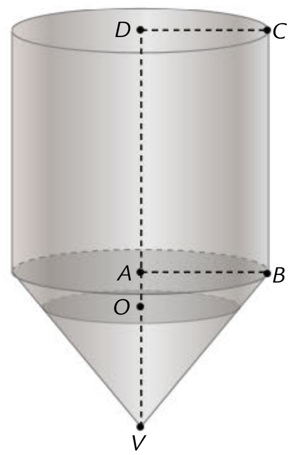
Arrotonda i risultati a un numero intero. [**a.** Circa 207 euro (arrotondato per eccesso); **b.** circa 50 498 cm^3]

162 **Silo.** Un silo per lo stoccaggio di cereali è costituito da un cono, sormontato da un cilindro che ha la base inferiore in comune con la base del cono. L'altezza VA del cono misura 3 m, l'altezza AD del cilindro misura 5 m e il raggio di base AB misura 2 m.

a. Determina il volume del silo (in metri cubi), arrotondando il risultato alla prima cifra decimale.

b. Il silo è riempito di mais fino all'altezza $VO = 2$ m. Sapendo che la densità del mais contenuto nel silo è 200 kg/m^3, calcola quanti kilogrammi di mais sono contenuti nel silo. Arrotonda il risultato a un numero intero.

[**a.** Circa 75, 4 m^3; **b.** circa 745 kg]



Problemi sui solidi generati dalla rotazione di figure

163 Considera un rettangolo $ABCD$, in cui il lato AB misura 1 cm e il lato BC misura 2 cm. Traccia la retta r, simmetrica della retta AD rispetto alla retta BC. Determina il volume e l'area della superficie totale del solido ottenuto dalla rotazione completa del rettangolo $ABCD$ intorno alla retta r. [6π cm^3; 18π cm^2]

164 Un trapezio isoscele $ABCD$ è tale che la base maggiore AB è lunga 8 cm, la base minore CD è lunga 2 cm e i lati obliqui sono lunghi 5 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio $ABCD$ intorno alla base maggiore AB. [64π cm^3; 56π cm^2]

165 Un trapezio isoscele $ABCD$ è tale che la base maggiore AB è lunga 8 cm, la base minore CD è lunga 2 cm e i lati obliqui sono lunghi 5 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio $ABCD$ intorno alla base minore CD. [96π cm^3; 104π cm^2]

166 Considera un trapezio isoscele $ABCD$, in cui gli angoli adiacenti alla base maggiore AB hanno ampiezza 45° e la base minore CD è congruente all'altezza. Facendo ruotare il trapezio di un giro completo intorno alla base maggiore AB si ottiene un solido di volume $45\pi a^3$. Qual è l'area della superficie totale di questo solido? $\left[18\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2\right]$

167 Nel triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, risulta $BC = 5\,\text{cm}$ e $AB = \sqrt{5}$ cm. Determina l'area della superficie totale e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo:

a. intorno al cateto AC;

b. intorno al cateto AB;

c. intorno all'ipotenusa BC.

$$\left[\mathbf{a.}\,5\pi\left(1+\sqrt{5}\right)\text{ cm}^2,\ \frac{10}{3}\pi\sqrt{5}\text{ cm}^3;\ \mathbf{b.}\,10\pi\left(2+\sqrt{5}\right)\text{ cm}^2,\ \frac{20}{3}\pi\sqrt{5}\text{ cm}^3;\ \mathbf{c.}\,6\pi\sqrt{5}\text{ cm}^2,\ \frac{20}{3}\pi\text{ cm}^3\right]$$

168 Un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa $AB = 5$ cm, è tale che il cateto AC misura $\sqrt{5}$ cm. Traccia la retta r, passante per C e parallela ad AB. Determina il volume e l'area della superficie del solido generato dalla rotazione completa del triangolo ABC intorno alla retta r. $\left[\frac{40}{3}\pi \text{ cm}^3; \left(20+6\sqrt{5}\right)\pi \text{ cm}^2\right]$

169 Data una circonferenza di raggio r 1 cm, centro O e diametro AB, prolunga AB dalla parte di B di un segmento BC, congruente al raggio della circonferenza. Traccia da C una retta tangente alla circonferenza, indicando con T il punto di contatto con la circonferenza stessa. Determina il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo OTC intorno alla retta AC. $\left[\frac{\pi}{2} \text{ cm}^3\right]$

170 Considera un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, il cui angolo al vertice $B\widehat{A}C$ è di 120°. I lati obliqui del triangolo misurano a. Determina il volume del solido ottenuto:

a. ruotando di un giro completo il triangolo intorno alla base BC;
b. ruotando di un giro completo il triangolo intorno a uno dei due lati obliqui. $\left[\textbf{a.}\ \frac{\pi\sqrt{3}}{12}a^3;\ \textbf{a.}\ \frac{\pi a^3}{4}\right]$

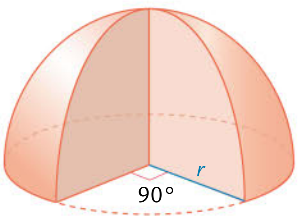
Problemi sulla sfera

171 Determina l'area della superficie e il volume di una sfera di raggio 3 cm. $[36\pi \text{ cm}^2; 36\pi \text{ cm}^3]$

172 Determina il volume di una sfera, sapendo che l'area della sua superficie è 9π cm^2. $\left[\frac{9}{2}\pi \text{ cm}^3\right]$

173 Determina l'area della superficie di una sfera, sapendo che il suo volume è 288π cm^3. $[144\pi \text{ cm}^2]$

174 Determina il raggio r del solido rappresentato in figura, sapendo che il suo volume è 108π cm^3.



[6 cm]

175 Determina l'area della superficie e il volume della sfera inscritta in un cubo di diagonale $4\sqrt{3}$ cm. $\left[16\pi \text{ cm}^2; \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3\right]$

176 Il volume di una sfera è 36π cm^3. Di quanto si deve aumentare il suo raggio affinché l'area della sua superficie aumenti di 64π cm^2? [2 cm]

177 L'area della superficie di una sfera è 16π cm^2. Di quanto si deve aumentare il suo raggio affinché il suo volume aumenti di $\frac{61}{6}\pi$ cm^3? $\left[\frac{1}{2} \text{ cm}\right]$

178 **Videolezione** La somma dei volumi di due sfere, aventi una il raggio doppio dell'altra, è 324π cm^3. Determina le aree delle superfici delle due sfere. $[36\pi \text{ cm}^2; 144\pi \text{ cm}^2]$

179 Un piano distante 1 cm dal centro di una sfera individua con la sfera una sezione di area 35π cm^2. Determina l'area della superficie totale della sfera e il suo volume. $[144 \text{ cm}^2; 288 \text{ cm}^3]$

180 Un recipiente a forma di sfera, di raggio 60 cm, ha una cavità sferica. Il recipiente, quando è completamente riempito, contiene 40 litri di acqua. Determina la misura in centimetri del raggio della cavità, arrotondando il risultato a meno di un decimo. [59,1 cm]

Realtà e modelli

181 **La Géode.** La Géode è una sala cinematografica e la sua superficie esterna è a forma di calotta sferica. Il raggio della sfera cui appartiene la calotta è 18 m e il raggio del cerchio che costituisce la superficie dell'edificio al suolo è 14 m. Qual è l'altezza della Géode? Arrotonda il risultato al metro.

[29 m]

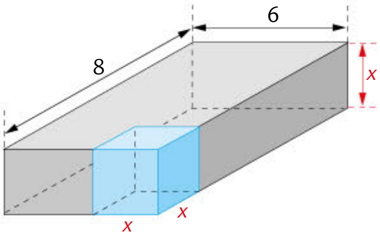
182 **Pallone da calcio.** Un pallone da calcio è costruito assemblando 20 esagoni regolari e 12 pentagoni regolari di lato lungo 6 cm.

a. Qual è l'area complessiva di tutti i poligoni?

b. I pentagoni e gli esagoni, cuciti lungo i lati, formano un solido, detto icosaedro troncato, che, se ben gonfiato, è assimilabile a una sfera. Secondo il regolamento, un pallone da calcio deve avere circonferenza compresa tra i 68 cm e i 70 cm. Il pallone da calcio costruito con gli esagoni e i pentagoni descritti all'inizio è regolamentare? [a. Circa 2614 cm^2; b. no]

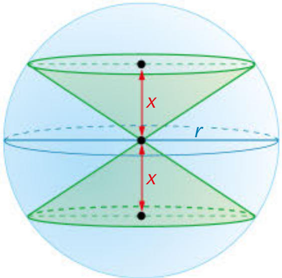
Problemi di massimo e di minimo di geometria nello spazio

183 Considera un parallelepipedo rettangolo i cui spigoli di base misurano 8 e 6 e la cui altezza misura x. Da tale parallelepipedo viene tolto un cubo il cui spigolo misura x, come indicato in figura. Per quale valore di x il prisma che ne risulta ha volume massimo?



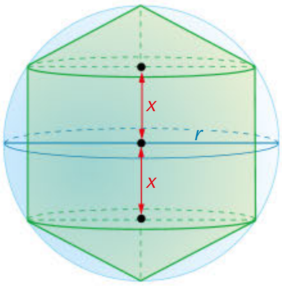
[4]

184 Determina x in modo che la «clessidra», colorata in verde, inscritta nella sfera di raggio r abbia volume massimo.



$\left[\frac{r}{3}\sqrt{3}\right]$

185 Determina x in modo che il volume del solido colorato in verde, inscritto nella sfera avente raggio r, abbia volume massimo.



$\left[\frac{r}{6}(\sqrt{13}-1)\right]$

186 Una piramide regolare a base quadrata ha spigolo laterale di lunghezza a. Determina l'altezza della piramide in modo che abbia volume massimo. $\left[\frac{a\sqrt{3}}{3}\right]$

187 Determina il massimo volume di un cono retto inscritto in una sfera di raggio r. $\left[\frac{32}{81}\pi r^3\right]$

188 Determina la massima area della superficie laterale di un cono retto inscritto in una sfera di raggio r. $\left[\frac{8\pi r^2\sqrt{3}}{9}\right]$

189 Determina il massimo volume di un cilindro retto inscritto in una sfera di raggio r. $\left[\frac{4}{9}\pi r^3\sqrt{3}\right]$

190 Dato un cono retto, di raggio r e altezza h, determina raggio e altezza del cilindro inscritto avente:

a. area laterale massima;

b. volume massimo. $\left[\text{a. } \frac{r}{2}, \frac{h}{2}; \text{ b. } \frac{2}{3}r, \frac{h}{3}\right]$

191 Determina la massima area della superficie laterale di un cilindro retto inscritto in una sfera di raggio r. $[2\pi r^2]$

192 Determina il minimo volume di un cono retto circoscritto a una sfera di raggio r. $\left[\pi r^2(3+2\sqrt{2})\right]$

193 Determina l'area minima della superficie laterale di un cono retto circoscritto a una sfera di raggio r. $\left[\pi r^2(3+2\sqrt{2})\right]$

194 Determina l'area minima della superficie totale di un cono retto circoscritto a una sfera di raggio r. $[8\pi r^2]$

195 Determina il minimo volume di un cono retto circoscritto a un cilindro retto avente raggio r e altezza h. $\left[\frac{9}{4}\pi r^2 h\right]$

196 Sia ABC un triangolo equilatero il cui lato misura a. Considera un punto P sul lato AC tale che $\overline{AP}=x$ e traccia da P la parallela ad AB e la parallela a BC. Indica con Q il punto in cui la parallela a BC interseca il lato AB e con R il punto in cui la parallela ad AB interseca il lato BC.

a. Verifica che il volume del solido generato da una rotazione completa del parallelogramma $PQBR$ intorno alla retta AB è espresso dalla funzione $V(x)=\frac{3\pi}{4}(ax^2-x^3)$.

b. Determina per quale valore di x tale volume è massimo. $\left[\frac{2}{3}a\right]$

197 Sia ABC un triangolo equilatero il cui lato misura a. Considera un punto P sul lato AC tale che $\overline{AP} = x$ e indica con Q la sua proiezione ortogonale sul lato AB e con R il punto in cui la parallela ad AB passante per P incontra il lato BC.

a. Verifica che il volume del solido generato da una rotazione completa del quadrilatero $PQBR$ intorno alla retta AB è espresso dalla funzione $V(x) = \frac{\pi}{8}(6ax^2 - 5x^3)$.

b. Determina per quale valore di x tale volume è massimo. $\left[\frac{4}{5}a\right]$

198 Considera i prismi retti aventi come base un triangolo equilatero e di volume a^3. Determina la misura dello spigolo di base in modo che l'area della superficie totale del prisma sia minima. $[a\sqrt[3]{4}]$

199 Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina:

a. quello che in una rotazione completa intorno all'altezza genera il cono di volume massimo;

b. quello che in una rotazione completa intorno alla base genera il solido di volume massimo.

(*Suggerimento*: indica con x la misura dell'altezza del triangolo.)

[Nel caso **a** il massimo si ha per $x = \frac{4}{3}r$ e nel caso **b** per $x = \frac{5}{3}r$]

200 Il volume di una piramide quadrangolare di altezza h è $\frac{4}{3}h^3$. Conduci un piano parallelo alla base, che interseca la piramide individuando un quadrilatero. Proietta ortogonalmente il quadrilatero sezione sulla base della piramide stessa, ottenendo così un prisma retto. Determina la posizione del piano in modo che il prisma abbia volume massimo. (*Suggerimento*: indica con x la distanza del piano dalla base della piramide.) [Il volume è massimo per $x = \frac{h}{3}$]

201 È data una piramide retta di base quadrata $ABCD$ e vertice V. Il lato di base della piramide misura a e l'altezza della piramide misura $2a$. Seziona la piramide con un piano α parallelo alla base della piramide e indica con γ il cerchio inscritto nella sezione ottenuta. Costruisci il cilindro che ha per basi γ e la proiezione di γ sul piano che contiene il quadrato $ABCD$.

a. Determina a quale distanza dal vertice V deve essere condotto il piano α in modo che il cilindro abbia volume massimo.

b. Verifica che in corrispondenza del piano di cui al punto precedente è massima anche la superficie totale del cilindro. $\left[\textbf{a. } \frac{4a}{3}\right]$

7. Poliedri e poliedri regolari

Teoria p. 30

Esercizi introduttivi

202 **Vero o falso?**

a. ogni prisma è un poliedro convesso V F

b. le piramidi non sono poliedri V F

c. esistono poliedri regolari aventi un qualsivoglia numero di facce V F

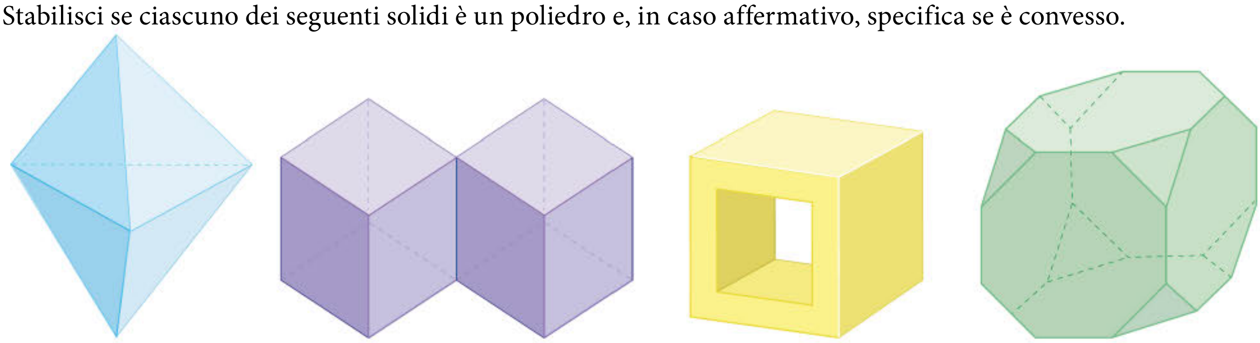
d. un poliedro in cui tutte le facce sono poligoni regolari congruenti è regolare V F

e. se un poliedro è regolare, tutte le sue facce sono poligoni regolari congruenti V F

f. un poliedro soddisfa la relazione di Eulero se e solo se è convesso V F

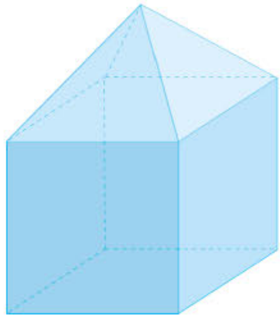
[Solo 2 affermazioni sono vere]

203 Stabilisci se ciascuno dei seguenti solidi è un poliedro e, in caso affermativo, specifica se è convesso.

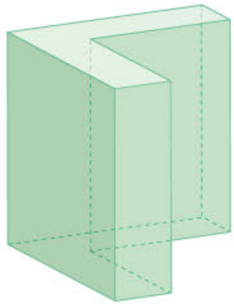


204 Spiega perché una piramide regolare e un prisma regolare non sono, in generale, poliedri regolari.

205 Il poliedro rappresentato in figura è costituito dall'unione di un cubo e di una piramide regolare, che ha come base una faccia del cubo, e come facce laterali triangoli equilateri. Spiega perché **non** si tratta di un poliedro regolare.



206 Verifica che il poliedro rappresentato in figura soddisfa la relazione di Eulero, sebbene **non** sia convesso.

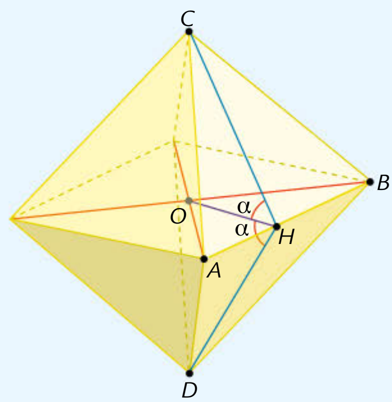


207 Un poliedro convesso ha 12 facce triangolari. Quanti spigoli e quanti vertici ha? [Spigoli = 18, vertici = 8]

Problemi

208 ESERCIZIO GUIDATO

Dato un ottaedro regolare, determina l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce aventi uno spigolo in comune.



- Ricorda che un ottaedro regolare è l'unione di due piramidi regolari a base quadrata, le cui facce laterali sono triangoli equilateri.
- Fai riferimento alla figura, in cui O è il centro della base comune alle due piramidi e H è il punto medio di AB. Osserva che $C\widehat{H}D$ individua una sezione normale del diedro formato dalle due facce ABC e ABD.
- Posto $C\widehat{H}O = \alpha$, applicando il secondo teorema sui triangoli rettangoli al triangolo COH puoi ricavare che $\tan\alpha = \sqrt{2}$.
- Deduci l'ampiezza di α e quindi quella di $C\widehat{H}D = 2\alpha$.

$[C\widehat{H}D \simeq 109°]$

209 Considera un tetraedro regolare di base ABC e vertice V, il cui spigolo misura l. Indica con M il punto medio di AB e con N il punto medio di BC. Qual è l'area del triangolo MNV? $\left[\dfrac{l^2}{16}\sqrt{11}\right]$

210 Considera un tetraedro regolare di base ABC e vertice V, il cui spigolo misura l. Determina l'area del triangolo che si ottiene come sezione del tetraedro con un piano passante per uno spigolo laterale del tetraedro e perpendicolare al piano della base ABC. $\left[\dfrac{l^2}{4}\sqrt{2}\right]$

211 Dato un tetraedro regolare, determina l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce aventi uno spigolo in comune. $\left[\arctan\left(2\sqrt{2}\right) \simeq 71°\right]$

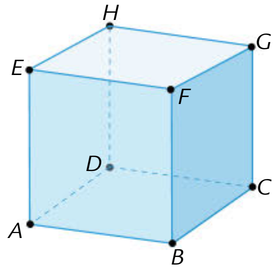
212 Verifica che le diagonali di un ottaedro regolare il cui spigolo misura l misurano $l\sqrt{2}$.

213 Determina il raggio della sfera circoscritta e il raggio della sfera inscritta a un ottaedro regolare il cui spigolo misura l.
(*Suggerimento*: fai riferimento alla figura dell'esercizio guidato precedente e osserva che il punto O è equidistante sia dai vertici sia dalle facce dell'ottaedro.) $\left[\dfrac{l}{2}\sqrt{2};\ \dfrac{l}{6}\sqrt{6}\right]$

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

214 **Vero o falso?**
Fai riferimento al cubo rappresentato in figura.



a. il quadrilatero $DBFH$ è un quadrato V F
b. il triangolo AHB è isoscele V F
c. il triangolo AHF è equilatero V F
d. le rette DG e CF sono secanti V F
e. i piani AEF e ADH sono secanti V F
f. le rette BC ed EH sono parallele V F
g. le diagonali AG e BH si intersecano nel loro punto medio V F
h. la retta AB è secante il piano CDF V F
i. i piani EHB e BCH coincidono V F

Test

215 Sono dati quattro punti non complanari. Quanti piani distinti contengono tre di tali punti?
A 6 B 8 C 4 D 10

216 Un cubo ha spigolo lungo $\sqrt{3}$ cm. Quanto misura la sua diagonale?
A $\sqrt{6}$ cm B $2\sqrt{3}$ cm C $2\sqrt{6}$ cm D 3 cm

217 Se sezioniamo una sfera di raggio r con un piano che ha distanza dal centro uguale a $\frac{1}{3}r$, l'area della sezione ottenuta misura:
A $\frac{1}{9}\pi r^2$ B $\frac{8}{9}\pi r^2$ C $\frac{2}{9}\pi r^2$ D $\frac{16}{9}\pi r^2$

---

218 Un parallelepipedo rettangolo a base quadrata ha volume $V = 128\sqrt{2}$ cm^3 e diagonale di base $d = 4\sqrt{2}$ cm. Qual è l'area A della sua superficie totale?
A $A = 32(1+4\sqrt{2})$ cm^2
B $A = 128\sqrt{2}$ cm^2
C $A = 32$ cm^2
D $A = 128$ cm^2

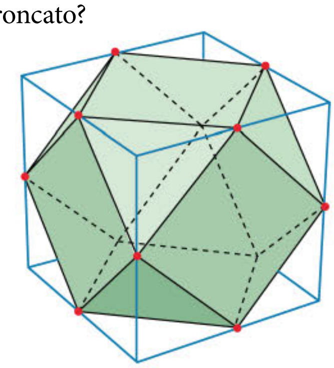
219 Considera un parallelepipedo rettangolo di basi $ABCD$ e $EFGH$. Sia V il centro della faccia $EFGH$. Quanto vale il rapporto tra il volume del parallelepipedo e il volume della piramide avente come base $ABCD$ e come vertice V?
A 2 B 3 C 6
D Per poterlo determinare occorre conoscere le misure di tutti gli spigoli del parallelepipedo

220 Quanto vale l'area della superficie totale di un cono, il cui raggio di base misura $2a$ e il cui volume è $\frac{16}{3}\pi a^3$?
A $4\pi(1+\sqrt{3})a^2$
B $4\pi a^2$
C $4\pi(1+\sqrt{5})a^2$
D $4\pi\sqrt{3}a^2$

221 Quanto misura il volume di una sfera avente superficie di area 144π cm^2?
A 268π cm^3
B 278π cm^3
C 288π cm^3
D Nessuna delle misure proposte

222 Sono dati una piramide retta a base quadrata e un cono retto equivalenti, aventi basi equivalenti. Possiamo quindi affermare che:
A l'area della superficie totale della piramide è minore di quella della superficie totale del cono
B l'area della superficie totale della piramide è uguale a quella della superficie totale del cono
C l'area della superficie totale della piramide è maggiore di quella della superficie totale del cono
D le due aree totali non si possono confrontare, non conoscendo la lunghezza degli apotemi

223 Congiungendo i punti medi degli spigoli di un cubo si ottiene il solido mostrato in figura, detto cubo troncato. Se lo spigolo del cubo misura l, quanto vale l'area della superficie totale del cubo troncato?
A $8l^2$
B $(3+\sqrt{3})l^2$
C $(4+\sqrt{3})l^2$
D $6l^2$



224 Facendo riferimento alla figura dell'esercizio precedente, qual è il volume del cubo troncato?

A $\frac{2}{3}l^3$ C $\frac{11}{18}l^3$

B $\frac{17}{24}l^3$ D $\frac{5}{6}l^3$

225 Se sezioniamo una superficie sferica di raggio r con un piano che ha distanza dal centro uguale a $\frac{1}{3}r$, l'area della calotta minore ottenuta è:

A $\frac{1}{3}\pi r^2$ C $\frac{4}{3}\pi r^2$

B $\frac{8}{3}\pi r^2$ D $\frac{2}{3}\pi r^2$

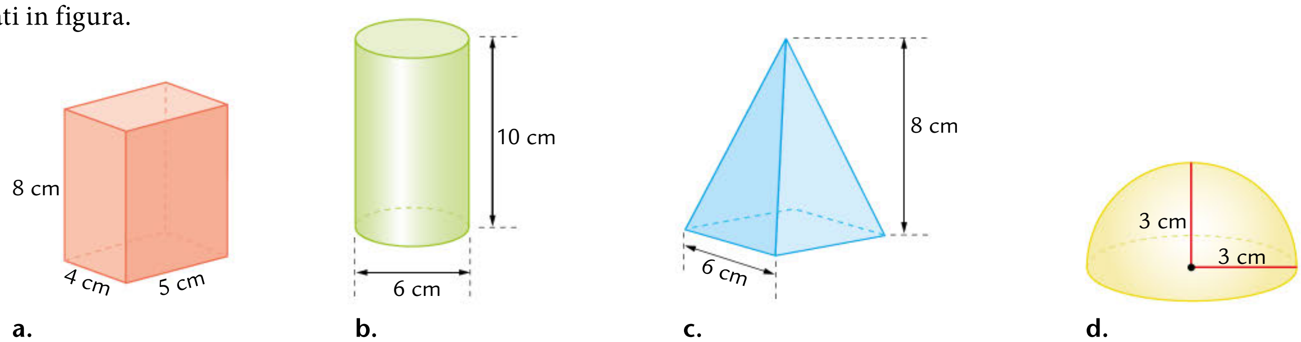
Argomentare e dimostrare

226 Specifica se le varie affermazioni in tabella sono vere oppure false, giustificando le risposte. Attenzione a distinguere il contesto: piano euclideo oppure spazio euclideo.

Proposizione	Piano	Spazio
Due rette parallele a una terza sono parallele tra loro		
Due rette perpendicolari a una terza sono perpendicolari tra loro		
Due rette perpendicolari a una terza sono parallele tra loro		
Due rette parallele e distinte non sono incidenti		
Se due rette non sono incidenti allora sono parallele		

227 Spiega perché, se quattro punti nello spazio non sono complanari, allora tre di essi non possono essere allineati.

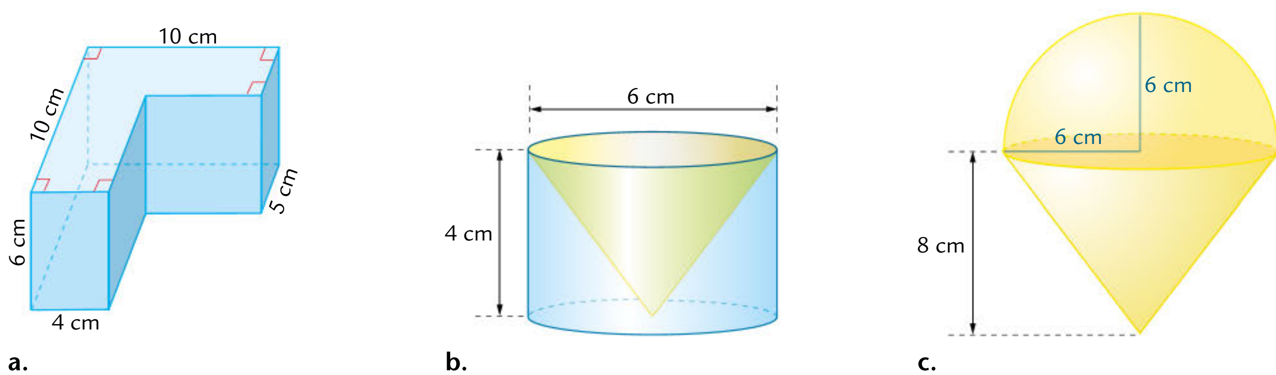
228 Considera il parallelepipedo rettangolo, il cilindro, la piramide quadrangolare regolare e la semisfera rappresentati in figura.



Per ciascuno di questi solidi determina il volume e l'area della superficie totale.

[**a.** 160 cm^3, 184 cm^2; **b.** 90π cm^3, 78π cm^2; **c.** 96 cm^3, $(36+12\sqrt{73})$ cm^2; **d.** 18π cm^3, 27π cm^2]

229 In figura sono rappresentati tre solidi: un prisma retto avente come base un esagono, un cilindro con una cavità a forma di cono e un cono sormontato da una semisfera.



Per ciascuno di questi solidi determina il volume e l'area della superficie totale.

[**a.** 420 cm^3, 380 cm^2; **b.** 24π cm^3, 48π cm^2; **c.** 240π cm^3, 132π cm^2]

230 L'area della superficie totale di un cubo è 24 cm^2. Determina:
a. la lunghezza del lato del cubo;
b. la lunghezza della diagonale del cubo;
c. il volume del cubo. [**a.** 2 cm; **b.** $2\sqrt{3}$ cm; **c.** 8 cm^3]

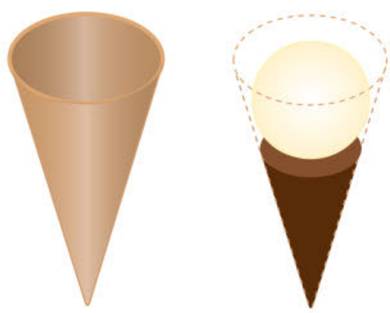
231 Un parallelepipedo retto ha come base un rettangolo di lati 4 cm e 6 cm e altezza di lunghezza 9 cm. Determina:
a. il volume del parallelepipedo;
b. l'area della superficie totale del parallelepipedo;
c. il lato e la diagonale di un cubo equivalente al parallelepipedo;
d. l'area della superficie totale del cubo di cui al punto **c**. [**a.** 216 cm^3; **b.** 228 cm^2; **c.** 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm; **d.** 216 cm^2]

232 Una piramide regolare ha come base un quadrato di lato 12 cm. Sapendo che l'apotema della piramide è lungo 10 cm, determina:
a. l'area della superficie totale della piramide;
b. l'altezza della piramide;
c. il volume della piramide. [**a.** 384 cm^2; **b.** 8 cm; **c.** 384 cm^3]

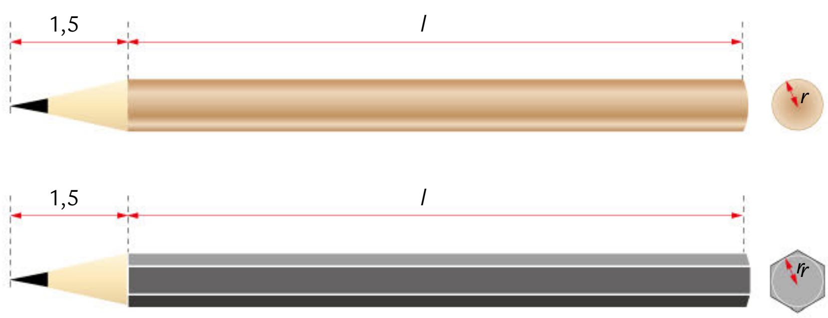
233 Una piramide regolare ha come base un quadrato. L'altezza della piramide è il doppio dello spigolo di base. Sapendo che il volume della piramide è 144 cm^3, determina:
a. la lunghezza dello spigolo di base;
b. la lunghezza dell'apotema;
c. l'area della superficie totale della piramide. [**a.** 6 cm; **b.** $3\sqrt{17}$ cm; **c.** $36(1+\sqrt{17})$ cm^2]

Realtà e modelli

234 **Un cornetto speciale.** Una ditta di gelati ha ideato un nuovo tipo di cornetto con un ripieno speciale all'interno del cono. Il ripieno è composto da crema al cioccolato con all'interno una pallina di gelato al cocco e un fondo di crema nero fondente. Il cono che costituisce il modello geometrico del cornetto ha il diametro di 6 cm e l'altezza di 12 cm; la pallina al cocco (assimilabile a una sfera) risulta tangente sia alla base del cono che rappresenta il cornetto sia alla base del cono che rappresenta la parte del cornetto riempita di crema nero fondente. Calcola il raggio della pallina di gelato al cocco e il raggio della base del cono riempito di crema nero fondente. [Circa 2,3 cm; circa 1,8 cm]



235 **Matite.** Considera le due matite raffigurate: la prima può essere assimilata all'unione di un cono di altezza 1,5 cm (rappresentato dalla punta della matita) e di un cilindro di altezza l (in centimetri) e raggio r (in centimetri); la seconda può essere assimilata all'unione di un cono di altezza 1,5 cm e raggio di base di misura r (sempre in centimetri) e di un prisma retto di altezza l (in centimetri) avente come base l'esagono regolare circoscritto alla base del cono.



a. Esprimi in funzione di r e di l il volume V_1 (in centimetri cubi) della prima matita.
b. Esprimi in funzione di r e di l l'area della superficie totale S_1 (in centimetri quadrati) della prima matita.
c. Esprimi in funzione di r e di l il volume V_2 (in centimetri cubi) della seconda matita.
d. Esprimi in funzione di r e di l l'area della superficie totale S_2 (in centimetri quadrati) della seconda matita.
e. Considera due matite in cui è $l = 9$: è vero che il volume della prima matita risulta inferiore di più del 10% del volume della seconda?

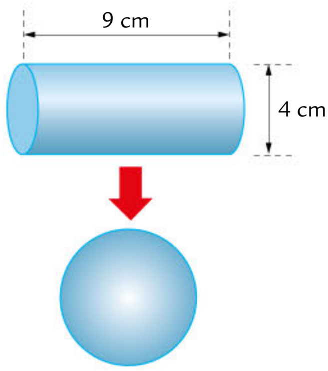
236 Quale dei due solidi ha volume maggiore: un cono di raggio 2 cm e altezza 4 cm oppure una sfera di raggio 2 cm? [La sfera]

237 Quale dei due solidi ha volume maggiore: un cilindro di raggio 6 cm e altezza 9 cm oppure una sfera di raggio 6 cm? [Il cilindro]

238 Una sfera ha raggio di 3 cm. Aumentando di 1 cm la misura del raggio, di quanto aumenta il volume della sfera? $\left[\frac{148\pi}{3}\ \text{cm}^3\right]$

239 Una sfera ha raggio di 2 cm. Aumentando di 1 cm la misura del raggio, di quanto aumenta l'area della superficie della sfera? $[20\pi\ \text{cm}^2]$

240 Il cilindro di plastilina rappresentato in figura viene modellato a forma di sfera. Qual è l'area della superficie della sfera ottenuta?



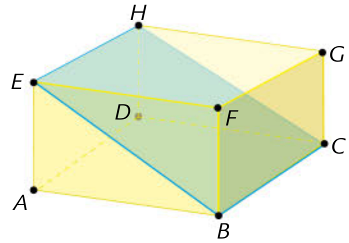
$[36\pi\ \text{cm}^2]$

241 Considera un cubo di diagonale $20\sqrt{3}$ cm.

a. Qual è la misura del raggio della sfera inscritta nel cubo?

b. Traccia un piano distante 6 cm dal centro della sfera; determina l'area della sezione del piano con la sfera. [**a.** 10 cm; **b.** 64π cm^2]

242 Considera il parallelepipedo rettangolo in figura.



a. Determina la natura del quadrilatero *BCHE*.

Supposto che $AB = 4$ cm, $BC = 10$ cm, $BF = 3$ cm, determina:

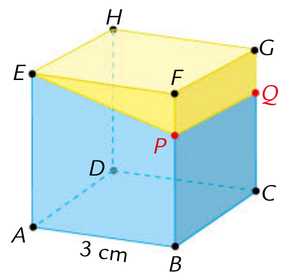
b. l'area e la lunghezza delle diagonali del quadrilatero *BCHE*;

c. il volume del parallelepipedo;

d. l'area della superficie totale del parallelepipedo.

$\left[\textbf{b.}\ 50\ \text{cm}^2,\ 5\sqrt{5}\ \text{cm};\ \textbf{c.}\ 120\ \text{cm}^3;\ \textbf{d.}\ 164\ \text{cm}^2\right]$

243 Considera il cubo rappresentato in figura, il cui spigolo misura 3 cm. Sia *P* un punto appartenente allo spigolo *BF* e *Q* il punto in cui il piano *PEH* interseca lo spigolo *CG*.



a. Determina la natura del quadrilatero *EPQH*.

b. Supposto che $PF = 2$ cm, verifica che il volume del prisma avente come basi *EPF* e *HQG* è $\frac{1}{3}$ del volume del cubo.

244 In un parallelepipedo rettangolo i lati del rettangolo di base sono tali che il maggiore supera di 2 cm il minore. L'altezza del parallelepipedo ha lunghezza uguale al lato minore del rettangolo di base. Sapendo che la superficie totale del parallelepipedo ha area 128 cm^2, determina:

a. il volume del parallelepipedo;

b. l'area della superficie e il volume della sfera che ha il centro nel punto di intersezione delle diagonali del parallelepipedo e passa per i vertici del parallelepipedo stesso.

$\left[\textbf{a.}\ 96\ \text{cm}^3;\ \textbf{b.}\ \text{Area} = 68\pi\ \text{cm}^2,\ \text{Volume} = \frac{68}{3}\pi\sqrt{17}\ \text{cm}^3\right]$

Collegamenti Coni e trigonometria

245 Esprimi l'area della superficie laterale S_l e il volume V del cono in funzione del raggio di base r e dell'angolo α di semiapertura.

$\left[S_l = \pi\frac{r^2}{\sin\alpha};\ V = \frac{1}{3}\pi\frac{r^3}{\tan\alpha}\right]$

246 Esprimi l'area della superficie laterale S_l e il volume V del cono in funzione dell'altezza h e dell'angolo α di semiapertura.

$\left[S_l = \pi\frac{h^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha};\ V = \frac{1}{3}\pi h^3\tan^2\alpha\right]$

247 Esprimi l'area della superficie laterale S_l e il volume V del cono in funzione dell'apotema a e dell'angolo α di semiapertura.

$\left[S_l = \pi a^2\sin\alpha;\ V = \frac{1}{3}\pi a^3\sin^2\alpha\ \cos\alpha\right]$

Esercizi *più*

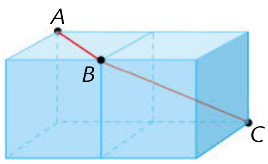
248 Siano a, b, c, con $a < b < c$, le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo. Mostra che il percorso più breve, sulla *superficie* del parallelepipedo, che congiunge due vertici opposti ha lunghezza $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$.
(*Suggerimento*: considera lo sviluppo piano della superficie del parallelepipedo.)

Dalle gare

249 I due cubi in figura hanno una faccia in comune. Qual è, in gradi, la misura dell'angolo $A\hat{B}C$?

A 90
B 115
C 120
D 135
E 150

(Kangourou 2008) [A]

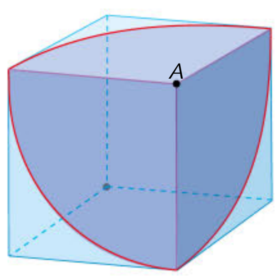


250 Versando 40 cm^3 di acqua in un recipiente a forma di parallelepipedo rettangolo avente un lato della base lungo 4 cm, il livello del liquido raggiunge 5 cm. Versandone una quantità incognita in un altro recipiente parallelepipedo rettangolo che ha quel lato della base lungo 6 cm e l'altro inalterato, il liquido raggiunge un livello di 15 cm. Quanti cm^3 di acqua sono stati versati la seconda volta?

A 180
B 80
C 40
D 20
E $\frac{80}{9}$

(Giochi di Archimede 2000)

251 Da un vertice A di un cubo si tracciano degli archi di cerchio con centro in A e raggio pari al lato del cubo su ciascuna delle tre facce aventi un vertice in A. Qual è la frazione della superficie del cubo evidenziata?



A $\frac{1}{4}$
B $\frac{3}{8}$
C $\frac{\pi}{8}$
D $\frac{\pi}{6}$
E Dipende dal lato del cubo

(Giochi di Archimede 2002)

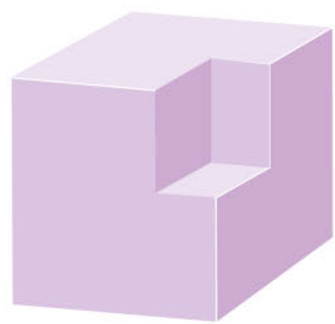
252 Due oggetti omogenei, fatti di due materiali diversi, hanno lo stesso volume, ma il primo pesa 242 g più del secondo. Sapendo che il materiale di cui è fatto il primo oggetto ha densità 8,9 g/cm^3 e quello di cui è fatto il secondo oggetto ha densità 7,8 g/cm^3, qual è il volume di ciascuno degli oggetti?

A 120 cm^3
B 150 cm^3
C 220 cm^3
D 300 cm^3
E I dati sono insufficienti

(Giochi di Archimede 2002)

253 La scultura astratta che si vede nella figura è stata ottenuta asportando un parallelepipedo rettangolo da un solido che originariamente era un cubo. Il volume del cubo originale era di 512 dm^3. Qual è l'area della superficie totale della scultura?

A 320 dm^2
B 336 dm^2
C 384 dm^2
D 468 dm^2



(Kangourou 2002)

254 Due palline di mercurio con superficie di 2 mm^2 ciascuna si uniscono a formare un'unica pallina. Qual è la superficie della nuova pallina?

A 2 mm^2
B $2^{\frac{3}{2}}$ mm^2
C $2^{\frac{5}{3}}$ mm^2
D 4 mm^2
E $2^{\frac{5}{2}}$ mm^2

(Kangourou 2005)

255 Un tetraedro (non regolare) ha un vertice tale che le tre facce che vi confluiscono hanno aree 3, 4 e 6 e gli angoli di queste facce, relativi a quel vertice, misurano tutti 90°. Qual è il volume di quel tetraedro?

A 4
B 5
C 6
D 8
E 12

(Kangourou 2005)

Prova di autoverifica

Rette e piani, misure di superfici e volumi

1 **Vero o falso?**

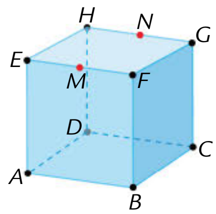
a. se la retta r è perpendicolare al piano α e α è perpendicolare alla retta s, allora r ed s sono parallele; V F

b. se la retta r è perpendicolare alla retta s e la retta s è contenuta nel piano α, allora la retta r è perpendicolare al piano α; V F

c. se la retta r è parallela alla retta s ed s è contenuta nel piano α, allora r è parallela ad α; V F

d. se la retta r è parallela sia al piano α sia al piano β, allora il piano α è parallelo al piano β. V F

2 Considera il cubo rappresentato in figura, dove M ed N sono, rispettivamente, i punti medi degli spigoli EF e GH. Determina da che cosa è costituita l'intersezione:



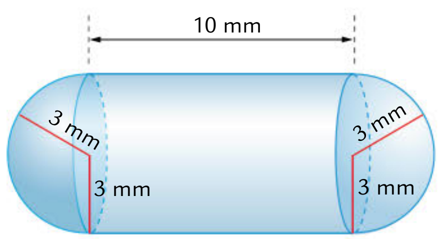
a. dei due piani BFM ed EMD;
b. dei due piani FGM ed END;
c. dei due piani ABC ed ENH.

3 Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{\pi}$ e $9\sqrt{2\pi}$ cm. Determina il raggio della sfera equivalente al parallelepipedo.

4 Un cono ha raggio di base lungo 4 cm e apotema lungo 8 cm. Determina:
a. l'area della superficie totale del cono;
b. il volume del cono.

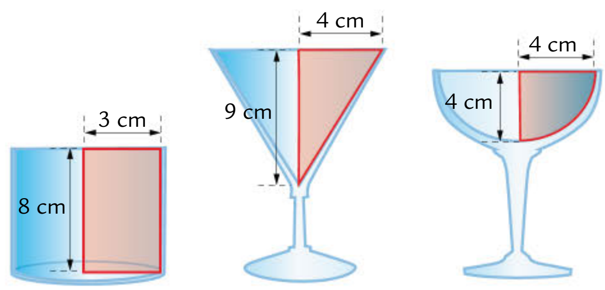
5 Una piramide retta a base quadrata ha tutti gli spigoli di lunghezza 1 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide.

6 La capsula medicinale in figura è formata da un cilindro e da due semisfere che hanno le basi coincidenti con quelle del cilindro. Determina il volume e l'area della superficie totale della capsula.



7 Il rapporto tra i volumi di due parallelepipedi rettangoli simili è 4. In che rapposto sono le rispettive superfici totali?

8 Considera i tre bicchieri in figura. La parte destinata a contenere le bevande si può assimilare nei tre bicchieri rispettivamente a un cilindro, un cono e una semisfera, aventi le misure indicate.
a. Disponi i tre bicchieri in ordine di capacità crescente.
b. Immagina di riempire d'acqua fino all'orlo il bicchiere di capacità minima e di versarne successivamente il contenuto nel bicchiere di capacità massima. Quale livello raggiungerà l'acqua?



9 Un rettangolo $ABCD$ ha base AB che misura 1 cm e altezza BC che misura 2 cm. Sia S_1 il solido ottenuto da una rotazione completa del rettangolo intorno ad AB ed S_2 il solido ottenuto da una rotazione completa del rettangolo intorno a BC. Determina il rapporto:
a. tra il volume di S_1 e il volume di S_2;
b. tra l'area della superficie totale di S_1 e l'area della superficie totale di S_2.

10 Un prisma triangolare regolare con l'altezza congruente al doppio dello spigolo di base ha volume uguale a $32\sqrt{3}$ cm^3. Determina l'area della superficie totale.

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale
Punteggio massimo	$0{,}25 \cdot 4 = 1$	$0{,}25 \cdot 3 = 0{,}75$	1	1	1	1	1	$0{,}5 \cdot 2 = 1$	1	1,25	10
Punteggio ottenuto											

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 389

Confrontare e analizzare figure geometriche

1 Determina il volume e l'area della superficie totale del solido che si ottiene dalla rotazione intorno alla retta CH del triangolo isoscele ABC in **Fig. A**.
$\left[\text{Volume} = \frac{160\pi}{3}\ \text{cm}^3;\ \text{Area superficie} = 8\pi\left(2+\sqrt{29}\right)\right]$

2 Determina il volume e l'area della superficie totale del solido che si ottiene dalla rotazione intorno alla base maggiore AB del trapezio isoscele $ABCD$ in **Fig. B**. $\left[\text{Volume} = \pi\left(36\sqrt{2}+144\right)\ \text{cm}^3;\ \text{Area superficie} = 66\pi\sqrt{2}\ \text{cm}^2\right]$

3 Il solido in **Fig. C** è l'unione di due coni aventi la base in comune.
Il volume del cono di vertice V_1 è $18\pi\ \text{cm}^3$ e la sua altezza è 6 cm. L'area della superficie laterale del cono di vertice V_2 è $15\pi\ \text{cm}^2$. Qual è la distanza tra i vertici dei due coni? [10 cm]

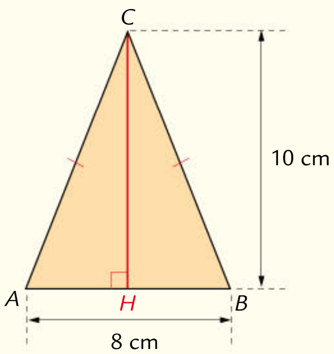


Fig. A

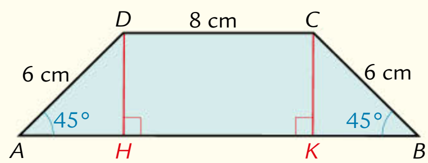


Fig. B

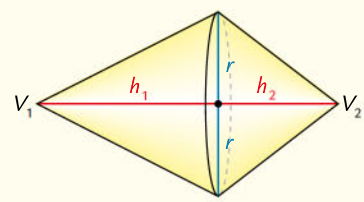
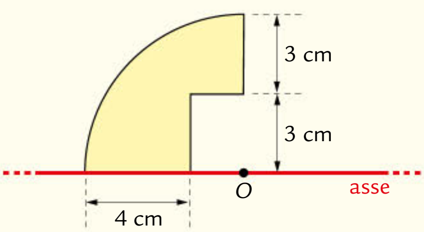
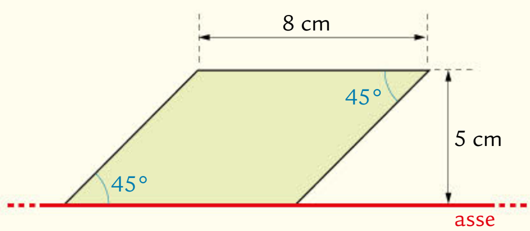


Fig. C

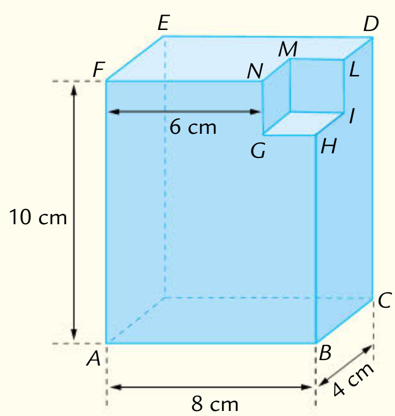
4 La prima figura rappresentata qui sotto è stata ottenuta togliendo un rettangolo da un settore circolare di centro O e ampiezza 90°; la seconda figura è un parallelogramma con due angoli opposti di 45°.





a. Disegna e descrivi il solido che si ottiene da una rotazione completa di ciascuna delle due figure rappresentate intorno all'asse di rotazione (colorato in rosso).
b. Calcola il volume di ciascuno dei solidi ottenuti.
[Volume generato dalla prima figura = $126\ \text{cm}^3$; volume generato dalla seconda figura = $200\pi\ \text{cm}^3$]

5 In figura è rappresentato un solido ottenuto togliendo un cubo da un parallelepipedo rettangolo. Determina il volume e l'area della superficie totale del solido.

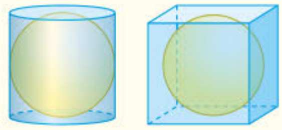


[Volume = $312\ \text{cm}^3$; Area = $304\ \text{cm}^2$]

6 Una piramide ha come base un rettangolo $ABCD$ avente la diagonale BD lunga 10 cm e il lato AB lungo 8 cm. Il vertice V della piramide giace sulla perpendicolare al piano che contiene il rettangolo $ABCD$ passante per il punto d'intersezione delle diagonali del rettangolo. L'altezza della piramide ha la stessa lunghezza di AB. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide.

[Volume $= 128$ cm^3; Area $= 8\left(6+3\sqrt{5}+\sqrt{73}\right)$ cm^2]

7 Un cubo e un cilindro sono tali che sia la sfera inscritta nel cilindro, sia la sfera inscritta nel cubo hanno raggio r.



a. Disponi in ordine crescente i volumi dei tre solidi (cilindro, cubo, sfera).

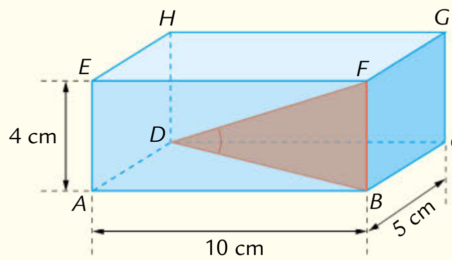
b. Disponi in ordine crescente le aree delle superfici totali dei tre solidi (cilindro, cubo, sfera).

---

8 Considera il parallelepipedo rettangolo in figura.

a. Giustifica perché il triangolo DBF è rettangolo.

b. Determina l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{D}F$, arrotondando il risultato a meno di un grado.

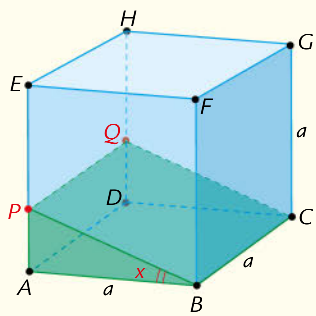


[b. 20°]

9 Un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, è tale che $BC = 10$ cm e $\cos A\widehat{B}C = \frac{3}{5}$. Determina il volume e l'area della superficie totale del cono ottenuto dalla rotazione di un giro completo del triangolo intorno alla retta AC.

[Volume $= 96\pi$ cm^3; Area $= 96\pi$ cm^2]

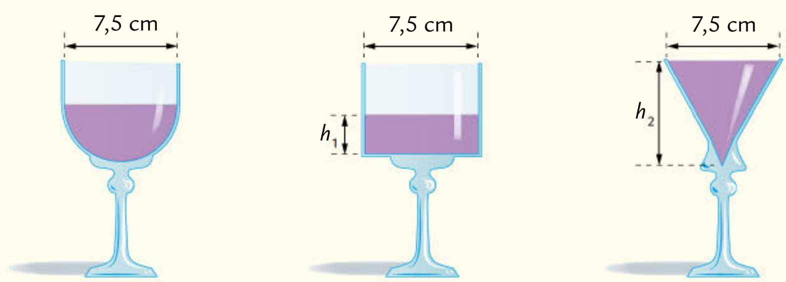
10 Considera il cubo rappresentato in figura, il cui spigolo misura a. Un piano passante per lo spigolo BC del cubo forma con la base $ABCD$ un angolo x, con $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, e interseca gli spigoli AE e DH in P e Q. Esprimi in funzione di x il volume $V(x)$ e l'area $S(x)$ della superficie totale del prisma colorato, di basi ABP e DCQ.



$$\left[V(x) = \frac{1}{2}a^3 \tan x;\ S(x) = a^2\left(1 + 2\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)\right]$$

Risolvere problemi e costruire mdelli

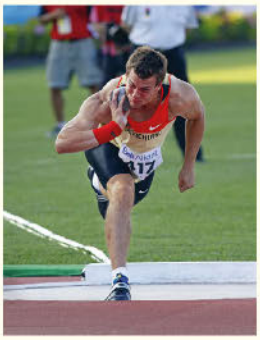
11 **Bicchieri.** Tre bicchieri contengono tutti la stessa quantità d'acqua.



La parte piena del primo bicchiere ha la forma di una semisfera, quella del secondo è cilindrica e la terza è a forma di cono. Calcola le altezze h_1 e h_2 dell'acqua nel secondo e nel terzo bicchiere.

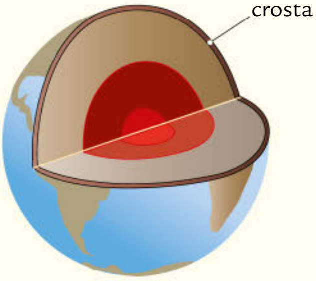
[$h_1 = 2{,}5$ cm; $h_2 = 7{,}5$ cm]

12 **Lancio del peso.** La sfera di ferro che viene usata per il lancio del peso nell'atletica leggera ha una massa pari a 7,25 kg per le competizioni maschili. Sapendo che la densità del ferro è di 7,87 g/cm^3, qual è approssimativamente l'area della superficie di tale sfera? Arrotonda il risultato al centimetro quadrato.



[458 cm^2]

13 **La crosta della Terra.** La Terra ha una «buccia» chiamata *crosta*, il cui spessore medio è di 24 km. Supponi che la Terra sia perfettamente sferica e che il suo raggio sia di 6375 km. Approssimativamente, quale percentuale del volume della Terra è occupato dalla crosta?

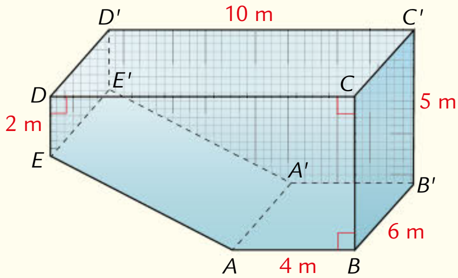


[Circa 1,13%]

14 **La piscina.** Una piscina ha la forma di un prisma retto come quello rappresentato in figura. Le basi del prisma sono due pentagoni ($ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ in figura).

a. Quanti litri di acqua può contenere la piscina?

b. Una pompa immette nella piscina 50 litri di acqua al minuto. Quanto tempo (espresso in giorni e ore) è necessario per riempire la piscina con quella pompa?

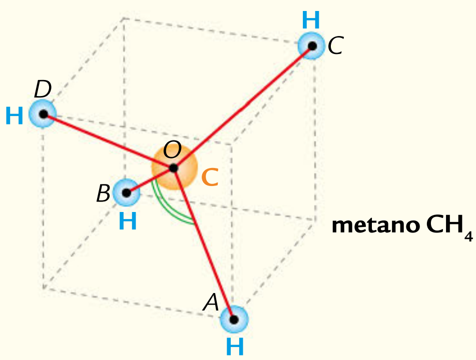


[**a.** 246 000 litri; **b.** 3 giorni e 10 ore]

15 **Metano.** La molecola del metano è formata da quattro atomi di idrogeno e un atomo di carbonio. I quattro atomi di idrogeno sono disposti in modo tale da occupare quattro vertici di un cubo di cui l'atomo di carbonio rappresenta il centro, come illustrato nel modello geometrico qui sotto (le sfere rappresentano gli atomi).

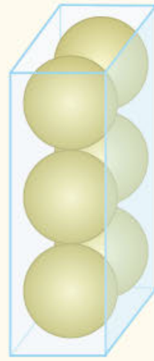
a. Verifica che l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{O}B$ in figura è circa 109,5°.

b. Sapendo che la distanza tra due atomi di idrogeno è circa 1,78 Å (ossia $1{,}78 \cdot 10^{-10}$ m), determina la distanza dell'atomo di carbonio da ciascuno dei quattro atomi di idrogeno.



[**b.** Circa 1,09 Å]

16 **Palline inscatolate.** Una scatola, a forma di parallelepipedo rettangolo, contiene sei palline uguali di forma sferica, come indicato in figura. Le palline sono disposte in modo da essere tangenti l'una all'altra e alle pareti della scatola, così che non possono muoversi in nessuna direzione.

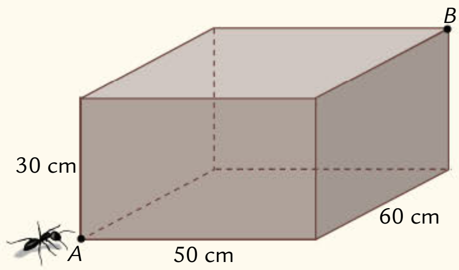


a. Qual è la percentuale del volume della scatola che non è occupato dalle palline?

b. Una seconda scatola, sempre a forma di parallelepipedo rettangolo, contiene ancora sei palline sferiche disposte come nella precedente figura, ma il raggio delle palline è una volta e mezza quello delle palline nella prima scatola. Stabilisci, giustificando adeguatamente la risposta, se è vero che il volume di questa seconda scatola è il 237,5% in più del volume della prima scatola.

[**a.** Circa il 47,64%; **b.** è vero]

17 **La formica.** Una formica, posta nel vertice A della scatola in figura (a forma di parallelepipedo rettangolo), vuole raggiungere il vertice opposto B percorrendo la minima distanza possibile e restando sempre sulla superficie della scatola. Dotata di spiccato intuito matematico, ha considerato lo sviluppo piano della scatola e individuato così il tragitto più breve. Qual è questo tragitto? E qual è la sua lunghezza?

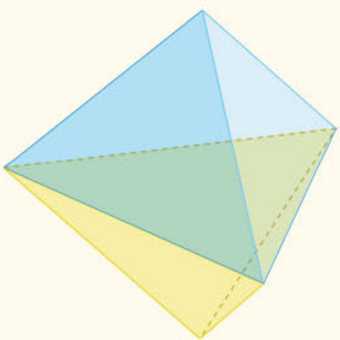


[100 cm]

Esporre, argomentare e dimostrare

18 Siano AB e CD due rette incidenti nello spazio. Stabilisci se le due rette AC e BD possono essere sghembe, giustificando la risposta.

19 Il solido rappresentato in figura è costituito dall'unione di due tetraedri regolari, aventi una faccia in comune. Stabilisci se questo solido è un poliedro regolare, giustificando la risposta.



20 Date due rette sghembe r ed s, descrivi e giustifica un procedimento per costruire un piano che contenga la retta r e sia parallelo alla retta s.

21 Su un piano α è dato un triangolo ABC. Sia M il punto medio di AB ed N il punto medio di BC. Sia infine D un punto non appartenente al piano α. Dimostra che la retta MN è parallela al piano che contiene i punti A, C e D.

22 Considera due punti A e B appartenenti a un piano α e un punto C non appartenente ad α. Una retta r interseca il segmento AC in P, il segmento BC in Q e il piano α in R. Dimostra che R è allineato con A e con B.

23 Considera un parallelogramma $ABCD$, appartenente a un piano α, e un punto $P \notin \alpha$. Sia r la retta intersezione dei due piani APD e BPC ed s la retta passante per i punti medi dei lati AB e CD del parallelogramma. Dimostra che le due rette r ed s sono complanari.

Collegamenti **Geometria nello spazio e luoghi geometrici**

24 Qual è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti A e B?

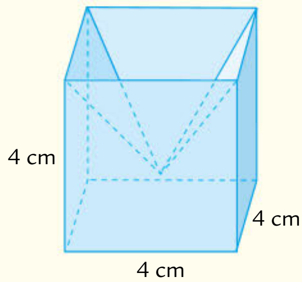
25 **E se?** Siano α e β due piani paralleli. Descrivi e rappresenta qual è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da α e β.

▶ Come cambierebbe la risposta se α e β fossero incidenti?

26 **E se?** Siano r ed s due rette parallele. Descrivi e rappresenta qual è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da r ed s.

▶ Come cambierebbe la risposta se r ed s fossero incidenti?

1 Il piccolo fermacarte della figura è realizzato nel seguente modo. Si prende un cubo di spigolo 4 cm e su una faccia si realizza una cavità a forma di piramide con la stessa base del cubo e altezza $\frac{3}{4}$ di quella del cubo.
Qual è il volume del solido così ottenuto?



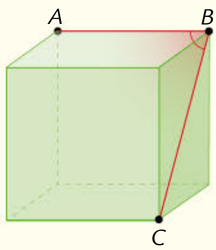
A 46 cm^3 B 48 cm^3 C 50 cm^3 D 52 cm^3

2 Un cilindro e un cono che hanno basi congruenti e altezze congruenti:
A sono equivalenti
B non hanno mai superficie laterale di uguale area
C hanno sempre superficie totale di uguale area
D nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

3 Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.
a. nello spazio, se la retta r è parallela a s ed s è parallela a t, allora r è parallela a t V F
b. nello spazio, se le due rette r ed s sono perpendicolari alla retta t, allora r ed s sono parallele V F
c. nello spazio, se la retta r è complanare alla retta s e la retta s è complanare alla retta t, allora le rette r e t sono complanari V F
d. nello spazio, se la retta r è parallela alla retta s e la retta s è perpendicolare al piano α, allora anche la retta r è perpendicolare al piano α V F
e. nello spazio, se la retta r è incidente alla retta s e la retta s è parallela alla retta t, allora le rette r e t sono complanari V F

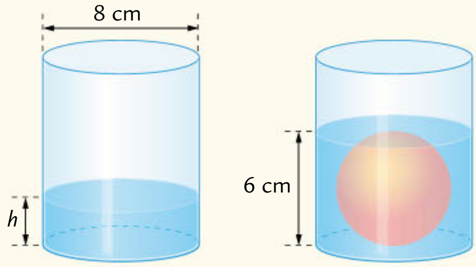
4 Gli spigoli di un parallelepipedo rettangolo hanno lunghezza a, b, c. Quale tra le seguenti è l'espressione dell'area della superficie totale S del parallelepipedo?
A $S=(2a+2b)c$
B $S=(a+b)c$
C $S=2bc+a(2b+2c)$
D $S=(2a+2b)c+ab$

5 Siano A, B, C tre vertici di un cubo, come in figura. Quanto misura l'angolo $A\hat{B}C$?
A 60°
B 90°
C 120°
D 150°



6 Considera una piramide il cui poligono di base ha n lati.
a. Scrivi la formula che fornisce, in funzione di n, il numero complessivo v dei vertici.
Risposta: $v=$ ....
b. Scrivi la formula che fornisce, in funzione di n, il numero complessivo s degli spigoli.
Risposta: $s=$ ....
c. Scrivi la formula che fornisce, in funzione di n, il numero complessivo f delle facce.
Risposta: $f=$ ....

7 In un recipiente cilindrico contenente acqua viene inserita una sfera di acciaio. L'acqua, come mostrato in figura, ricopre la sfera a filo. Qual era l'altezza h dell'acqua nel recipiente prima di inserire la sfera?



A 3,5 cm B 3,75 cm C 4 cm D I dati sono insufficienti per determinarlo

8 Dimezzando il raggio di una sfera:

A sia l'area della superficie della sfera sia il volume della sfera diventano la metà

B l'area della superficie della sfera diventa la metà e il volume della sfera diventa $\frac{1}{4}$ del volume della sfera originaria

C l'area della superficie della sfera diventa la metà e il volume della sfera diventa $\frac{1}{8}$ del volume della sfera originaria

D nessuna delle precedenti risposte è esatta

9 Una piramide retta ha come base un quadrato il cui lato misura 20 cm e apotema di misura 40 cm. Quanto misura l'altezza della piramide?

A $10\sqrt{15}$ cm
B $12\sqrt{15}$ cm
C $17\sqrt{15}$ cm
D $20\sqrt{15}$ cm

10 La diagonale di un cubo misura 15 cm. Qual è l'area della superficie totale del cubo?

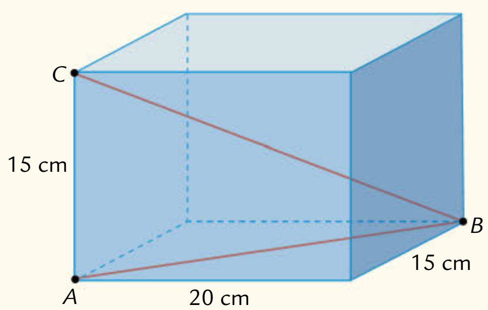
A 400 cm^2
B 420 cm^2
C 440 cm^2
D 450 cm^2

11 **a.** Considera un prisma, le cui basi sono poligoni di n lati, e completa la tabella.

Numero di lati delle basi	Numero complessivo di diagonali del prisma
$n = 3$	0
$n = 4$	.....
$n = 5$	.....

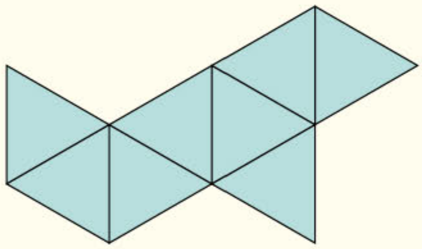
b. Scrivi la formula che fornisce, in funzione di n, il numero d delle diagonali del prisma.
$d =$ ....

12 In figura è rappresentato un parallelepipedo rettangolo, di cui sono indicate le misure degli spigoli. Qual è l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$, arrotondata al grado?



A 28°
B 31°
C 34°
D Nessuno dei precedenti

1 Di quale solido è rappresentato lo sviluppo in figura?



A Di un ottaedro
B Di un esaedro
C Di un tetraedro
D Di nessun solido
E Di un prisma a base triangolare

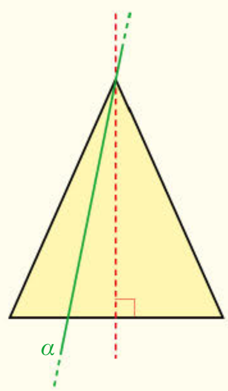
(Prova di ammissione, Corso di laurea in Architettura 2009)

2 Quale affermazione è falsa?

A Sezionando la superficie sferica con un piano si possono ottenere sia circonferenze sia ellissi.
B La sfera è una figura simmetrica rispetto a infiniti piani.
C Sulla superficie di una sfera sono identificabili meridiani e paralleli.
D La superficie sferica non è sviluppabile sul piano.
E La superficie sferica è una superficie di rotazione.

(Prova di ammissione, Corso di laurea in Architettura 2010)

3 Dato un cono circolare retto, sezionato con un piano α inclinato come in figura, quale sezione piana si ottiene?



A Triangolo
B Ellisse
C Iperbole
D Circonferenza
E Parabola

(Prova di ammissione, Corso di laurea in Architettura 2010)

4 Il rapporto tra i volumi di due cubi è 4. Qual è il rapporto tra le loro superfici?

A 2
B 4
C $4^{\frac{2}{3}}$
D $2^{\frac{3}{2}}$
E $4^{\frac{1}{3}}$

(Prova di ammissione, Corso di laurea in Medicina 2010)

5 Dato un cono di altezza h, volume V e vertice P, considera un secondo cono con vertice P, che si ottiene sezionando il primo cono con un piano parallelo alla base a distanza $\frac{h}{3}$ dal punto P. Il secondo cono ha volume:

A $\frac{V}{9}$
B $\frac{V}{12}$
C $\frac{V}{24}$
D $\frac{V}{27}$
E $\frac{V}{18}$

(Test di ingresso, Facoltà di Scienze, 2010)

6 Un solido S è costituito da due cubi sovrapposti, in modo che due facce dei cubi coincidano. Se lo spigolo di ciascun cubo misura 1, qual è la massima lunghezza possibile di un segmento che unisce due punti di S?

A $2\sqrt{2}$
B $2\sqrt{3}$
C $\sqrt{5}$
D $\sqrt{6}$

(Test di ingresso, Facoltà di Scienze, 2009)

7 Si vuole riempire completamente un parallelepipedo a base quadrata di lato 30 cm ed altezza 50 cm con dei cubi indeformabili uguali. Qual è il minimo numero di tali cubetti?

A 15 B 45 C 75 D 150

(Test di ingresso, Facoltà di Scienze, 2008)

8 Un cocomero di forma sferica viene tagliato in 16 fette tutte uguali fra loro. Se il diametro del cocomero è di 40 cm, il volume di ciascuna fetta è di:

A $\frac{40\pi}{16}$ cm^3 B $\frac{40^3\pi}{16}$ cm^3 C $\frac{\pi^3}{16}$ cm^3 D $\frac{2000\pi}{3}$ cm^3 E $\frac{\pi}{16}$ cm^3

(Prova di ammissione, Ingegneria, 2006)

9 Considera le due sfere S_1 e S_2, la prima inscritta e la seconda circoscritta al medesimo cubo. Allora tra i volumi V_1 e V_2 delle due sfere sussiste la seguente relazione:

A $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}V_2$ B $V_1 > V_2$ C $V_2 = V_1\sqrt{2}$ D $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}V_2$ E $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}V_2$

(Prova di ammissione, Ingegneria, 2006)

10 Una sfera è inscritta in un cubo; il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo è:

A $\frac{\pi}{4}$ B $\frac{\pi}{6}$ C $\frac{2\pi}{3}$ D $\frac{4\pi}{3}$ E $\frac{\pi}{2}$

(Prova di ammissione, Ingegneria, 2007)

11 Una quantità di liquido che riempie una sfera di raggio K viene travasata in cilindri aventi diametro di base K e altezza K. Qual è il numero minimo di cilindri che occorrono per compiere questa operazione?

A 5 B 6 C 3 D 9 E 4

(Prova di ammissione, Ingegneria, 2007)

12 A parità di tutte le altre condizioni (materiale, rugosità, stato di pulizia ecc.) serve meno quantità di pittura per tinteggiare:

A un cono (circolare retto) di altezza 1 metro e base di raggio 1 metro
B una sfera di raggio 1 metro
C un cubo di lato 1 metro
D una piramide avente tutte le facce che sono triangoli equilateri (tetraedro) di lato 1 metro
E un cilindro (circolare retto) di raggio 1 metro e di altezza 1 metro

(Prova di ammissione, Ingegneria, 2009)

13 Date due sfere concentriche di raggio 1 e r (con $r < 1$) che valore deve assumere r affinché il volume della parte esterna alla sfera minore sia la metà del volume della sfera maggiore?

A $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ B $r = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ C $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ D $r = \frac{1}{2}$ E $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(Prova di ammissione, Ingegneria, 2009)

14 Nel piano cartesiano è dato un triangolo di vertici (1, 0); (0, 3); (3, 0). Qual è il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo intorno all'asse y?

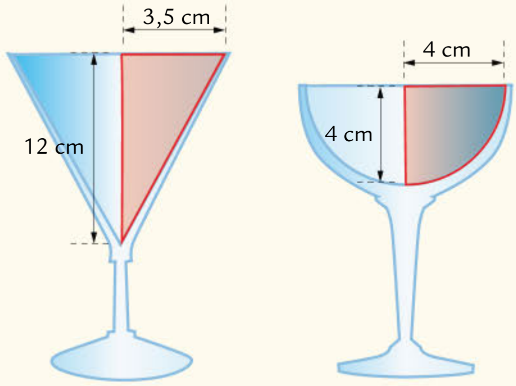
A 8π B 12π C 16π D 24π

(Prova di ammissione, Facoltà di Scienze, 2004)

Compito di realtà 1

Bicchieri

Osserva i due bicchieri in figura: la parte destinata a contenere le bevande è assimilabile nel primo bicchiere a un cono di altezza 12 cm e diametro di base 7 cm, mentre la seconda è approssimativamente una semisfera di raggio 4 cm.



1 Verifica che il primo bicchiere ha una capacità maggiore del secondo.

2 Si riempie di acqua il primo bicchiere, fino al livello di 6 cm, cioè esattamente a mezza altezza. Spiega perché l'acqua versata occupa un volume uguale a $\frac{1}{8}$ della capacità del bicchiere.

3 Supponi ora, più in generale, che il primo bicchiere sia pieno fino a un livello h (in centimetri). Esprimi, in funzione di h, il volume V della parte del bicchiere occupata dall'acqua.

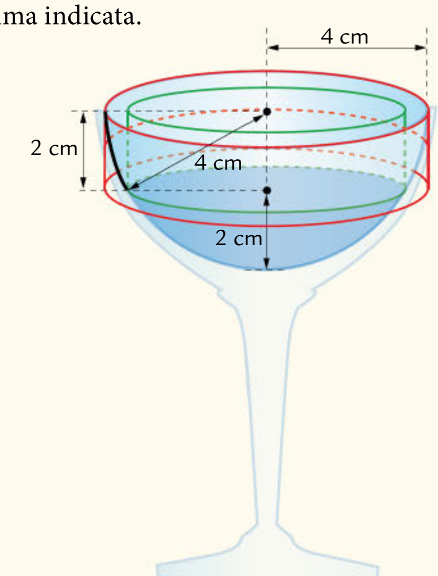
Il secondo bicchiere è colmo d'acqua e ne versi l'intero contenuto nel primo.

4 Qual è il livello raggiunto dall'acqua nel primo bicchiere?

Si riempie di acqua il secondo bicchiere, fino al livello di 2 cm, cioè esattamente a mezza altezza. Il calcolo esatto del volume V occupato dall'acqua in questo caso è laborioso ma non è dfficile fornirne stime per difetto e per eccesso.

5 Detto V il volume (in cm^3) occupato dall'acqua, verifica che risulta $\frac{32}{3}\pi < V < \frac{56}{3}\pi$, procedendo come segue:

- osserva che il volume del segmento sferico a due basi evidenziato in figura è compreso tra il volume del cilindro «interno», uguale a 24π cm^3, e quello del cilindro «esterno», uguale a 32π cm^3;
- deduci, per differenza, la doppia stima indicata.



Risposte p. 391

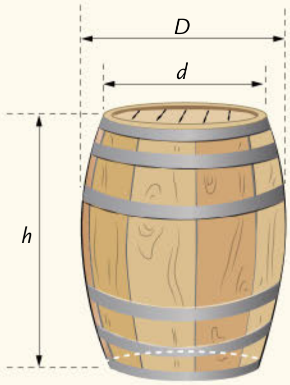
Compito di realtà 2

Il volume di una botte

La formula:

$$V = \frac{\pi h}{12}(2D^2 + d^2) \qquad [1]$$

esprime, con buona approssimazione, il volume V di una botte a doghe circolari, dove h rappresenta l'altezza della botte, D il diametro della sezione più larga (a mezza altezza) e d il diametro delle due basi.



1 Verifica che se $D = d$, cioè se la botte è perfettamente cilindrica, la formula **[1]** fornisce effettivamente il volume di un cilindro di altezza h e raggio di base $r = \frac{D}{2}$.

2 Il bottaio Vincenzo produce botti di dimensioni $h = D = 80$ cm e $d = 60$ cm. Calcola la capacità delle botti di Vincenzo (trascurandone ovviamente lo spessore). Approssima al litro.

3 Si vuole costruire una botte *simile* a quella di Vincenzo, ma di capacità dimezzata. Per quale costante di proporzionalità k occorre dividere le dimensioni h, D e d calcolate al punto **2** per ottenere le dimensioni della botte più piccola desiderata?

- A $k = 2$
- B $k = \sqrt{2}$
- C $k = \sqrt[3]{2}$
- D $k = \sqrt[4]{2}$

Individua la risposta corretta e giustificala; calcola poi le dimensioni della botte «piccola» e controlla che la sua capacità è effettivamente la metà (all'incirca) della botte di Vincenzo.

Vincenzo ipotizza una formula più facilmente memorizzabile per calcolare il volume delle botti:

$$V^* = \pi h\left(\frac{D+d}{4}\right)^2 \qquad [2]$$

Egli la giustifica così: «Il volume di una botte è all'incirca quello di un cilindro di uguale altezza e di raggio $r = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2} + \frac{d}{2}\right) = \frac{D+d}{4}$, cioè di raggio uguale alla media aritmetica tra il raggio massimo e il raggio minimo delle sezioni della botte». Alberto, un amico di Vincenzo, cerca di dissuaderlo: «se utilizzassi la formula [2], invece della [1], per calcolare il volume delle botti che produci, commetteresti un errore superiore al 10%!».

4 Verifica che Alberto ha ragione.

Alberto aggiunge che la [2] presenta un ulteriore importante difetto: se $D > d$ (cioè se la botte non è perfettamente cilindrica, come accade in pratica), essa fornisce *sempre* una stima *per difetto* della capacità della botte.

5 Verifica che anche quest'ultima affermazione di Alberto è corretta.

Risposte p. 391

Calcolo integrale ed equazioni differenziali

TEMA
M

Nel Volume 4, con lo studio delle derivate e delle loro applicazioni, abbiamo presentato i più importanti elementi del *calcolo differenziale*.

Le prossime Unità saranno dedicate a un altro ramo fondamentale dell'analisi infinitesimale: il *calcolo integrale*.

Dal punto di vista geometrico il calcolo integrale nasce in relazione al problema del calcolo delle aree di regioni a contorno curvilineo.

Anche l'integrale definito, come il concetto di derivata di una funzione in un punto, verrà introdotto come un particolare *limite*, che scopriremo intervenire in svariate applicazioni.

Dopo avere presentato il concetto di integrale definito, scopriremo un nesso profondo tra il calcolo differenziale e il calcolo integrale, espresso dal cosiddetto *teorema fondamentale del calcolo*.

Infine, vedremo come le equazioni differenziali, in cui compaiono le derivate della funzione incognita, rappresentino un modello adatto alla descrizione di numerosi fenomeni di varia natura.

PREREQUISITI

- Conoscenze di base di geometria nel piano e nello spazio
- Limiti e continuità
- Calcolo differenziale

COMPETENZE

- Utilizzare gli strumenti del calcolo integrale nella descrizione e modellizzazione di fenomeni di varia natura

Unità 2

Tema M

L'integrale indefinito

- Approfondimenti
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

1. Primitive e integrale indefinito

Consideriamo il seguente problema.

◆ **PROBLEMA**
Data la funzione $v(t)$ che esprime in ogni istante la velocità di un punto materiale che si muove su una fissata traiettoria rettilinea, risalire alla legge oraria del punto, cioè alla funzione $s(t)$ che esprime la posizione del punto in funzione del tempo.

Sappiamo che la funzione $v(t)$ è la derivata della legge oraria:

$$v(t) = s'(t)$$

Dunque, se conosciamo $v(t)$ e vogliamo risalire alla legge oraria, dobbiamo trovare una funzione $s(t)$ la cui derivata sia $v(t)$.
Più in generale, possiamo porci il seguente problema: data una funzione f, esiste una funzione la cui derivata sia f? Una tale funzione, se esiste, è detta *primitiva* di f, nel senso precisato dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE | Primitiva
Una funzione F si dice **primitiva** di una funzione f in un intervallo I (o nell'unione di più intervalli) se è derivabile in I e per ogni $x \in I$ la sua derivata in x è uguale a $f(x)$, cioè se:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{per ogni } x \in I$$

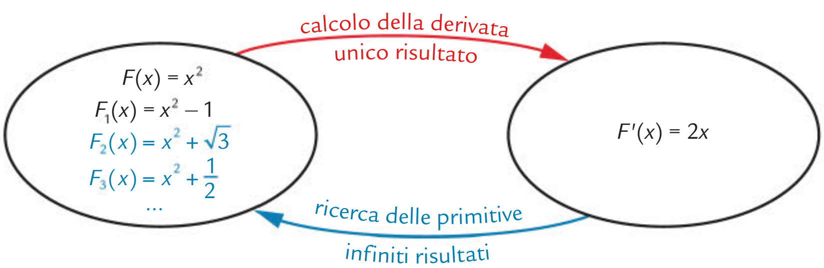
ESEMPI Alcune primitive

a. La funzione $F(x) = x^2$ è una primitiva di $f(x) = 2x$ in $\mathbf{R}$; infatti: $F'(x) = f(x)$.

b. La funzione $F(x) = \ln x$ è una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nell'intervallo $(0, +\infty)$.

c. La funzione $F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$ in $\mathbf{R}$.

È facile rendersi conto che la primitiva di una funzione **non è unica**. Per esempio, oltre alla funzione $F(x) = x^2$, anche $G(x) = x^2 + 1$ è una primitiva di $f(x) = 2x$. Sono primitive di $f(x) = 2x$ anche tutte le funzioni definite da un polinomio della forma $x^2 + c$, dove c è un numero reale qualsiasi; le primitive di $f(x)$ sono dunque *infinite*:



In generale, vale il seguente teorema.

TEOREMA 1 | Caratterizzazione delle primitive su un intervallo
Se F è una primitiva della funzione f in un **intervallo** I, allora l'insieme di tutte e sole le primitive di f in I è costituito dalle funzioni:

$$G(x) = F(x) + c \qquad \text{al variare di } c \text{ nell'insieme dei numeri reali}$$

ATTENZIONE!
La caratterizzazione delle primitive data nel Teorema 1 vale a condizione che la funzione venga considerata su un singolo *intervallo*.
Per esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nell'insieme
$E = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Allora entrambe le funzioni:
$g(x) = \ln|x|$
e
$$u(x) = \begin{cases} \ln|x| + 1 & x < 0 \\ \ln|x| - 1 & x > 0 \end{cases}$$
sono primitive della funzione f in E, ma **non** differiscono per una costante.

DIMOSTRAZIONE

- Poiché l'operazione di derivazione è *lineare* e la derivata di una costante è *zero*, risulta:

$$\frac{d}{dx}[F(x)+c]=\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}c=f(x)+0=f(x)$$

Dunque *tutte* le funzioni del tipo $F(x)+c$ sono primitive della funzione f in I.

- Sia $G(x)$ una primitiva di f in I; allora:

$$\frac{d}{dx}[G(x)-F(x)]=\frac{d}{dx}G(x)-\frac{d}{dx}F(x)=f(x)-f(x)=0$$

Poiché se una funzione ha derivata nulla in un intervallo è *costante* (lo avevamo mostrato come conseguenza del teorema di Lagrange), ne segue che esiste $c \in \mathbf{R}$ per cui:

$$G(x)-F(x)=c \qquad \text{per ogni } x \in I$$

ovvero

$$G(x)=F(x)+c \qquad \text{per ogni } x \in I$$

Dunque *solo* le funzioni del tipo $F(x)+c$ sono primitive della funzione f in I.

Geometricamente, il teorema afferma che si possono determinare tutte le primitive di $f(x)$ in un intervallo a partire da una di esse mediante delle traslazioni verticali (**Fig. 1**).

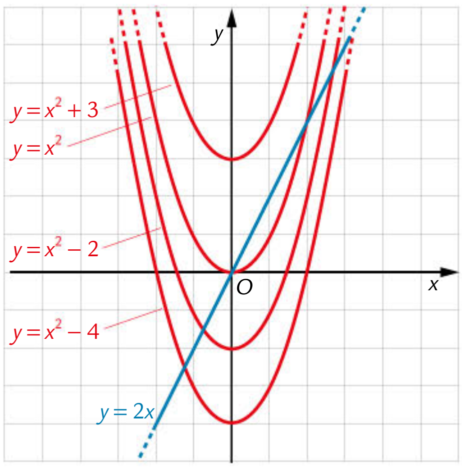


Figura 1 **Le primitive della funzione $y=2x$ sono le funzioni $y=x^2+c$, al variare di c in $\mathbf{R}$. In figura sono rappresentate le parabole corrispondenti ai valori $c=-4$, $c=-2$, $c=0$, $c=3$. Dal grafico di una primitiva (per esempio da quello di $y=x^2$) possiamo ottenere quelli di tutte le altre primitive mediante opportune traslazioni verticali.**

Se si vuole determinare la primitiva il cui grafico passa per un particolare punto del piano, si deve determinare la costante c che la caratterizza.

ESEMPIO Primitiva passante per un punto

Determiniamo la primitiva di $f(x)=2x$ il cui grafico passa per il punto $P(3, 2)$.

Abbiamo visto che l'insieme delle primitive della funzione $f(x)=2x$ è formato dalle funzioni $F(x)=x^2+c$, con $c \in \mathbf{R}$. Imponendo il passaggio per il punto $P(3, 2)$ otteniamo la condizione $2=3^2+c$, da cui $c=-7$.
Pertanto la primitiva cercata è:

$$F(x)=x^2-7$$

Dimostreremo nella prossima Unità che se una funzione è continua in un intervallo I allora ammette primitiva in I. L'esistenza della primitiva può invece venire meno nel caso in cui la funzione non sia continua in I, come mostra il seguente controesempio.

CONTROESEMPIO Una funzione che non ammette primitiva

Consideriamo la funzione f: $[-1, 1] \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \le x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Dimostriamo che essa non può ammettere primitiva nell'intervallo $[-1, 1]$.

Se tale funzione ammettesse una primitiva, quest'ultima dovrebbe essere una primitiva della funzione costante uguale a -1 nell'intervallo $-1 \le x < 0$ e una primitiva della funzione costante uguale a 1 nell'intervallo $0 \le x \le 1$. Quindi sarebbe del tipo:

$$F(x) = \begin{cases} -x + c_1 & \text{se } -1 \le x < 0 \\ x + c_2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

per qualche $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Ma questa funzione **non** è derivabile in $x = 0$ per alcun valore di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Dunque non può esistere una primitiva della funzione f nell'intervallo $[-1, 1]$, dovendo tale primitiva essere derivabile, per definizione, in *tutti* i punti dell'intervallo.

OSSERVA

In generale si può dimostrare, ragionando in modo simile all'esempio a fianco, che se una funzione presenta dei punti di *singolarità di tipo salto* in un intervallo *I* **non** può ammettere primitiva.

L'integrale indefinito

Abbiamo visto come associare a ogni funzione derivabile la sua derivata e abbiamo chiamato questa operazione *derivazione*. Il procedimento inverso consiste, data una funzione f, nel determinare, se esistono, tutte le sue primitive. Chiamiamo questa operazione *integrazione* e il risultato dell'operazione, cioè l'insieme di tutte le primitive di una funzione assegnata, *integrale indefinito*.

MODI DI DIRE

Talvolta, al posto del termine «integrazione», si usa il termine «antiderivazione», il quale suggerisce in modo immediato che i procedimenti di integrazione e derivazione sono inversi.

DEFINIZIONE | Integrale indefinito

L'insieme di tutte le primitive di una funzione f si dice **integrale indefinito** della funzione f e si indica con il simbolo:

$$\int f(x)\, dx$$

che si legge «integrale indefinito di $f(x)$ in dx».

Limitandoci a considerare le primitive di f definite in un *intervallo*, per il **Teorema 1** possiamo scrivere che:

il simbolo dx indica la variabile rispetto cui si effettua l'integrazione

le primitive di f su un intervallo differiscono per una costante

simbolo di integrazione

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + c}$$

la funzione f è la **funzione integranda**

è una primitiva della funzione f

PER LA PRECISIONE

Dato che l'integrale indefinito è un insieme di funzioni, le uguaglianze che coinvolgono integrali indefiniti vanno lette come uguaglianze tra insiemi. In particolare, la scrittura:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

è un modo conciso per scrivere che l'integrale indefinito al primo membro è uguale all'*insieme* costituito dalle funzioni di espressione analitica $F(x) + c$, al variare di $c \in \mathbf{R}$.

ESEMPI Qualche integrale indefinito

a. $\int 2x\, dx = x^2 + c$ **b.** $\int \cos x\, dx = \sin x + c$ **c.** $\int e^x\, dx = e^x + c$

Supposto che una funzione ammetta primitive, *come è possibile individuarle*? Alla risposta a questa domanda (almeno nei casi più semplici) saranno dedicati i prossimi paragrafi di questa Unità.

Esercizi p. 94

2. Integrali immediati

Iniziamo il nostro percorso alla scoperta dei principali **metodi di integrazione**, ossia dei metodi per determinare la *primitiva* di una data funzione. In questo paragrafo presentiamo il metodo di integrazione **per scomposizione**.

La tabella delle primitive delle funzioni elementari

Tutta la teoria dell'integrazione si fonda sulla seguente tabella, che si ottiene leggendo «in senso inverso» la tabella delle derivate delle funzioni elementari. Tutte le formule della **Tab. 1** possono essere verificate derivando il secondo membro e verificando che la derivata è uguale alla funzione integranda.

Tabella 1

Primitive delle funzioni elementari		
$\int k\,dx = kx + c \qquad k \in \mathbf{R}$		[1]
$\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq -1$		[2]
$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + c$		[3]
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$		[4]
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$		[5]
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + c$		[6]
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x + c$		[7]
$\int e^x\,dx = e^x + c$		[8]
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$		[9]
$\int \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$	$\int \dfrac{1}{x^2+k^2}\,dx = \dfrac{1}{k}\arctan\dfrac{x}{k} + c$	[10]
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx = \arcsin\dfrac{x}{k} + c$	[11]

ATTENZIONE!
Non bisogna dimenticare che una primitiva di una funzione è, per definizione, una funzione *derivabile*: le formule in tabella sono quindi valide in ogni *intervallo* in cui la primitiva soddisfa questa proprietà. Per esempio, la formula:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

è valida in ogni intervallo che **non** contiene l'origine.

MODI DI DIRE
Gli integrali della tabella sono detti **integrali immediati**.

È importante osservare che la [2] (similmente alla corrispondente formula di derivazione) permette di calcolare le primitive di tutte le funzioni che possono essere scritte sotto forma di potenza con esponente diverso da –1, quali per esempio: $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$.
L'unica funzione potenza che non può essere integrata mediante la [2] è $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$; per questa funzione la [2] perde significato e bisogna applicare la [3].

ESEMPI Integrali di funzioni potenza

Calcoliamo i seguenti integrali:

a. $\int x^3\,dx$ **b.** $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx$ **c.** $\int \sqrt{x}\,dx$

a. $\int x^3\,dx = \dfrac{x^{3+1}}{3+1} + c = \dfrac{x^4}{4} + c$ Formula [2]

b. $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \dfrac{x^{-1}}{-1} + c = -\dfrac{1}{x} + c$ Formula [2]

c. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$ Formula [2]

La linearità dell'integrale indefinito

Una fondamentale proprietà dell'integrale indefinito è quella di essere **lineare**, vale a dire: l'integrale della somma di due funzioni è la somma degli integrali delle due funzioni, e l'integrale del prodotto di una funzione per una *costante* è il prodotto della costante per l'integrale della funzione. Questa proprietà è una immediata conseguenza del fatto che l'operazione di *derivazione* è lineare.

PROPRIETÀ | Linearità dell'integrale indefinito

a. $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ **[12]**

b. $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$ per ogni $k \in \mathbf{R}$ **[13]**

Le proprietà **[12]** e **[13]**, unitamente alle formule **[1]** e **[2]**, ci consentono di calcolare in particolare l'integrale indefinito di qualsiasi funzione definita da un *polinomio*.

ATTENZIONE!
Quando si scrive un integrale come somma di due o più integrali, invece di utilizzare una costante di integrazione per ogni addendo, ne si utilizza una sola, c, che si aggiunge alla fine, dopo aver calcolato gli integrali dei singoli addendi.

ESEMPIO Integrale di un polinomio

Calcoliamo $\int (x^3+2x^2-1)\,dx$.

Abbiamo:

$$\int (x^3+2x^2-1)\,dx = \underbrace{\int x^3\,dx + 2\int x^2\,dx - \int dx}_{\text{per la linearità dell'integrale}} = \underbrace{\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - x + c}_{\text{applicando la [2] e la [1]}}$$

Integrazione per scomposizione

Abbiamo ora tutti gli strumenti per presentare il metodo di integrazione di cui abbiamo parlato all'inizio di questo paragrafo, il cosiddetto **metodo di integrazione per scomposizione**. Esso consiste nel cercare di scrivere la funzione da integrare, se possibile, sotto forma di *combinazione lineare* delle funzioni elementari di cui in **Tab. 1** abbiamo indicato le primitive. L'integrale può così essere calcolato sfruttando la proprietà di linearità.

ESEMPI Integrazione per scomposizione

Calcoliamo i seguenti integrali:

a. $\int \frac{x^3+1}{x^2}\,dx$ **b.** $\int \frac{1-3xe^x}{x}\,dx$

a. Possiamo scrivere la funzione da integrare come somma di funzioni potenza mediante semplici manipolazioni algebriche:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx \underset{\uparrow}{=} \int x\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx =$$

linearità dell'integrale

$$= \int x\,dx + \int x^{-2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c$$ **Formula [2]**

b. Mediante semplici manipolazioni algebriche possiamo scrivere la funzione da integrare come differenza di funzioni elementari di cui sappiamo calcolare le primitive:

$$\int \frac{1-3xe^x}{x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - 3e^x\right)dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{x}\,dx - 3\int e^x\,dx =$$

linearità dell'integrale

$$= \ln|x| - 3e^x + c$$ **Formule [3] e [8]**

Esercizi p. 98

3. Integrazione di funzioni composte e per sostituzione

Integrazione di funzioni composte

I metodi di integrazione che presentiamo in questo paragrafo si ricollegano sostanzialmente al *teorema di derivazione delle funzioni composte*. Nel **Volume 4** abbiamo visto che se f e g sono due funzioni derivabili, allora anche la funzione composta $g(f(x))$ è derivabile, e risulta:

$$\mathrm{D}\, g(f(x)) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

Questa formula può essere riletta in termini di integrali indefiniti come segue:

$$\int f'(x) \cdot g'(f(x))\, dx = g(f(x)) + c \qquad [14]$$

Per esempio:

- nel caso particolare in cui $g(x) = \sin x$, quindi $g'(x) = \cos x$, la [14] diventa:

$$\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \sin f(x) + c$$

- nel caso particolare in cui $g(x) = x^{\alpha+1}$, con $\alpha \neq -1$, quindi $g'(x) = (\alpha+1)x^{\alpha}$, la [14] diventa:

$$\int f'(x)(\alpha+1)[f(x)]^{\alpha}\, dx = [f(x)]^{\alpha+1} + c \;\Rightarrow\; \int f'(x)[f(x)]^{\alpha}\, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Ragionando analogamente, si ottiene la seguente tabella, che generalizza quella presentata nel paragrafo precedente.

Tabella 2

Primitive di funzioni composte	
$\int f'(x) \cdot [f(x)]^{\alpha}\, dx = \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \neq -1$	[15]
$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	[16]
$\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \sin f(x) + c$	[17]
$\int f'(x) \sin f(x)\, dx = -\cos f(x) + c$	[18]
$\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\, dx = \tan f(x) + c$	[19]
$\int \dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\, dx = -\cot f(x) + c$	[20]
$\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$	[21]
$\int f'(x)\, a^{f(x)}\, dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$	[22]
$\int \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2 + k^2}\, dx = \dfrac{1}{k} \arctan \dfrac{f(x)}{k} + c$	[23]
$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{k^2 - [f(x)]^2}}\, dx = \arcsin \dfrac{f(x)}{k} + c$	[24]

MODI DI DIRE
Gli integrali della Tab. 2 sono detti talvolta integrali **quasi immediati**.

In pratica, quindi, le regole di integrazione delle funzioni elementari presentate in **Tab. 1** nel paragrafo precedente possono essere generalizzate al caso in cui l'argomento della funzione integranda non è x ma $f(x)$, *a patto che la funzione integranda sia moltiplicata per* $f'(x)$.

ESEMPI Integrazione di funzioni composte

Calcoliamo i seguenti integrali:

a. $\int (x+1)^5\,dx$ **b.** $\int x(x^2+1)^3\,dx$ **c.** $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

d. $\int \sin 2x\,dx$ **e.** $\int e^{1-3x}\,dx$ **f.** $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ **g.** $\int \frac{x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

a. $$\int \underbrace{(x+1)^5}_{[f(x)]^5,\ \text{con}\ f(x)=x+1} dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(x+1)^5}_{[f(x)]^5} dx = \frac{(x+1)^6}{6} + c$$ Formula [15] con $\alpha = 5$

b. Osserviamo la forma dell'integrale:

$$\int x\underbrace{(x^2+1)^3}_{[f(x)]^3,\ \text{con}\ f(x)=x^2+1} dx$$

Per poter applicare la formula [15], il fattore $(x^2+1)^3$ dovrebbe essere moltiplicato per $f'(x) = 2x$, mentre nel nostro caso è moltiplicato soltanto per x. Possiamo tuttavia arrivare ad avere come fattore $2x$ moltiplicando e dividendo per 2. Ovvero:

$$\int x\underbrace{(x^2+1)^3}_{[f(x)]^3,\ \text{con}\ f(x)=x^2+1} dx = \int \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2}_{\text{moltiplicando e dividendo per 2}} \cdot x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(x^2+1)^3}_{[f(x)]^3\ \text{con}\ f(x)=x^2+1} dx$$

All'ultimo integrale scritto possiamo ora applicare la formula [15], concludendo così:

$$\frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(x^2+1)^3}_{[f(x)]^3,\ \text{con}\ f(x)=x^2+1} dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^4}{4} + c = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + c$$

RIFLETTI

Il calcolo al termine dell'esempio b indurrebbe a scrivere nell'espressione dell'integrale indefinito $\frac{c}{2}$ invece di c. Poiché c è una costante *arbitraria*, tanto quanto $\frac{c}{2}$, si preferisce tuttavia utilizzare più semplicemente c. Opereremo in questo modo in tutti i casi analoghi.

c. $$\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \underbrace{(\ln x)^{-2}}_{[f(x)]^{-2}} dx \underset{\uparrow\ \text{formula [15]}}{=} \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

d. Analogamente caso **b**, possiamo ricondurci alla formula [18] moltiplicando e dividendo per un fattore opportuno:

$$\int \sin 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin 2x}_{\sin f(x)} dx =$$

$$\underset{\uparrow\ \text{formula [18]}}{=} \frac{1}{2}(-\cos 2x + c) = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

e. Procediamo analogamente ai casi **b** e **d**:

$$\int e^{1-3x}\,dx = \int \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3e^{1-3x})\,dx = -\frac{1}{3}\int \underbrace{(-3)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(e^{1-3x})}_{e^{f(x)}} dx \underset{\uparrow\ \text{formula [21]}}{=} -\frac{1}{3}e^{1-3x} + c$$

f. $$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x}^{f'(x)}}{\underbrace{1+(x^2)^2}_{1+[f(x)]^2}}\,dx = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \arctan f(x) + c$$

g. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$

$$= \int x(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x}_{f'(x)}\underbrace{(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{[f(x)]^{-1/2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(4-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \arcsin\frac{x}{2} + c =$$

$$\int f'(x)\cdot[f(x)]^{\alpha}\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{k} + c$$

$$= -\sqrt{4-x^2} - \arcsin\frac{x}{2} + c$$

ATTENZIONE!

Abbiamo visto negli esempi precedenti che per ricondurre un integrale a una delle forme della Tab. 2 è spesso utile moltiplicare e dividere per *una costante*. Sarebbe un grave errore applicare lo stesso procedimento con una *espressione algebrica* invece che con una costante. Per esempio, non è corretto scrivere:

$\cancel{\int (x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2x}\int 2x(x^2+1)^3\,dx}$ **Sbagliato!**

È lecito infatti «portare fuori» dal simbolo di integrale una costante (in forza della linearità dell'operazione di integrazione), mentre non è possibile portare fuori dal simbolo di integrale un'espressione dipendente da x.

Integrazione per sostituzione

Un altro metodo di integrazione basato sul teorema di derivazione delle funzioni composte è il cosiddetto metodo di **integrazione per sostituzione**.
Esso si basa sulla seguente formula:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt \qquad \text{con } x = g(t) \qquad [25]$$

ATTENZIONE!
Stiamo implicitamente supponendo che $g(t)$ sia una funzione derivabile, con derivata continua e invertibile.

Il significato della [25] è il seguente: se non sappiamo calcolare $\int f(x)\,dx$, ma troviamo una sostituzione $x = g(t)$ per cui sappiamo calcolare $\int f(g(t))g'(t)\,dt$, possiamo «scaricare» il calcolo su quest'ultimo integrale, e poi tornare alla variabile x effettuando la sostituzione inversa $t = g^{-1}(x)$, dove g^{-1} indica la funzione inversa di g, nelle primitive di $f(g(t))\,g'(t)$.
È importante notare che se $x = g(t)$, allora il differenziale di x, per definizione, è:

$$dx = d(g(t)) = g'(t)\,dt$$

quindi la [25] si può rileggere come segue: nell'eseguire un cambio di variabile all'interno di un integrale si deve operare *come se* i simboli dx e dt fossero *differenziali*: un cambio di variabile $x = g(t)$ all'interno di un integrale prevede anche la sostituzione all'interno del simbolo dx di «differenziale».
Tenendo conto anche di quest'ultima osservazione, il metodo di integrazione per sostituzione si può così riassumere.

RIFLETTI
Il simbolo dx, come abbiamo precisato quando abbiamo introdotto il simbolo di integrale indefinito, non ha alcun particolare significato, se non quello di indicare la variabile di integrazione. Il fatto di poter operare come se dx fosse un differenziale è un puro artificio di calcolo (che getta luce però sul motivo per cui negli integrali si utilizza la notazione con il dx).

REGOLA | Integrazione per sostituzione

Per calcolare $\int f(x)\,dx$ mediante il **metodo di sostituzione** si procede come segue:

1. si pone $x = g(t)$ e si calcola $dx = g'(t)\,dt$;
2. si riscrive l'integrale in termini di t, sostituendo $g(t)$ al posto di x e $g'(t)\,dt$ al posto di dx, e si calcola l'integrale nella variabile t così ottenuto;
3. si ritorna infine alla variabile x, eseguendo sul risultato la sostituzione inversa $t = g^{-1}(x)$.

ESEMPIO Integrazione per sostituzione

Calcoliamo $\int x\sqrt{x-1}\,dx$.

▶ 1° passo **Scelta della sostituzione**

Poniamo $\sqrt{x-1}=t$, ossia $x-1=t^2$, da cui:

$$x = 1 + t^2 \qquad g(t) = 1 + t^2$$

Ne segue che:

$$dx = 2t\,dt \qquad dx = g'(t)\,dt$$

▶ 2° passo **Riscriviamo l'integrale in termini di t e calcoliamolo**

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int \underbrace{(1+t^2)}_{x} \cdot \underbrace{t}_{\sqrt{x-1}} \cdot \underbrace{2t\,dt}_{dx} =$$

$$= \int (2t^2 + 2t^4)\,dt = 2\int t^2\,dt + 2\int t^4\,dt = \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + c$$

▶ 3° passo **Ritorniamo alla variabile x**

Ricordiamo che abbiamo posto $\sqrt{x-1}=t$:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + c$$

Approfondimento
Particolari sostituzioni per l'integrazione di funzioni goniometriche e di funzioni irrazionali

Esercizi p. 104

4. Integrazione per parti

Nel paragrafo precedente abbiamo visto le regole di integrazione che corrispondono al teorema di *derivazione delle funzioni composte*. In questo paragrafo presentiamo invece la regola di integrazione corrispondente al teorema di *derivazione del prodotto* di due funzioni.
In base alla regola di derivazione del prodotto di due funzioni, si ha:

$$D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Questa uguaglianza equivale alla seguente, in termini di *integrali indefiniti*:

$$\int [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]\,dx = f(x)\cdot g(x)$$

ossia:

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)$$

da cui:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx \qquad [26]$$

La [26] esprime la cosiddetta regola di **integrazione per parti**; la funzione $f(x)$ al primo membro della [26] viene tradizionalmente chiamata **fattore finito**, mentre l'espressione $g'(x)\,dx$ viene chiamata **fattore differenziale**. Nell'applicare la [26], la funzione $f(x)$ che costituisce il fattore finito va *derivata* (perché per sviluppare il secondo membro occorre conoscere $f'(x)$), mentre la funzione $g'(x)$ che compare nel fattore differenziale va *integrata* (perché per sviluppare il secondo membro occorre conoscere $g(x)$). Vediamo subito un esempio per comprendere come viene utilizzata in pratica la [26].

ESEMPIO Integrazione per parti

Calcoliamo $\int xe^{2x}\,dx$.

Scegliamo:

$$f(x)=x \quad \text{e} \quad g'(x)=e^{2x}$$

x è il fattore finito, $e^{2x}\,dx$ il fattore differenziale

da cui:

$$f'(x)=1 \quad \text{e} \quad g(x)=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}$$

OSSERVA

Per $g(x)$ possiamo scegliere qualsiasi primitiva; sceglieremo per semplicità quella con costante nulla.

Applichiamo ora la regola di integrazione per parti:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{g(x)}\,dx =$$

Utilizzando la [26]

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+c=$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

Lo scopo dell'applicazione del metodo di integrazione per parti è di ricondursi a un integrale *più semplice* di quello di partenza: per esempio, nell'esercizio precedente siamo partiti da $\int xe^{2x}\,dx$ e ci siamo ricondotti al calcolo di un integrale quasi immediato, $\int e^{2x}\,dx$. Per raggiungere questo scopo è particolarmente importante scegliere *opportunamente* il *fattore finito* e il *fattore differenziale*. Per esempio, se nel medesimo esercizio avessimo scelto come fattore differenziale $x\,dx$ e come fattore finito e^{2x}, avremmo ottenuto:

$$\int \underbrace{e^{2x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{e^{2x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{g(x)} - \int \underbrace{2e^{2x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{g(x)}\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int x^2e^{2x}\,dx$$

Sebbene la formula [26] sia stata applicata correttamente, il nuovo integrale cui siamo giunti, $\int x^2e^{2x}\,dx$, non è più semplice, ma più complicato di quello iniziale (il grado della potenza infatti è salito)!
Non è possibile dare regole generali per la scelta del fattore finito e del fattore differenziale, tuttavia possono essere utili le indicazioni di **Tab. 3**.

Tabella 3

Per il calcolo degli integrali del tipo...			si considera...
$\int x^n e^x\,dx$	$\int x^n \sin x\,dx$	$\int x^n \cos x\,dx$	x^n come fattore finito
$\int x^n \ln x\,dx$	$\int x^n \arcsin x\,dx$	$\int x^n \arctan x\,dx$	x^n come fattore differenziale

ATTENZIONE!

In Tab. 3 si suppone che n indichi un intero positivo.

Il metodo di integrazione per parti può essere applicato anche in presenza di **una sola funzione**, come mostriamo nel prossimo esempio.

ESEMPIO Integrazione per parti con una sola funzione

Calcoliamo $\int \ln x\,dx$.

Possiamo pensare $\ln x=\ln x\cdot 1$ e assumere:

$$f(x)=\ln x \quad \text{e} \quad g'(x)=1$$

Ne segue:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \int 1\,dx = x$$

Pertanto:

$$\int \ln x\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx =$$

$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c$$

Talvolta il metodo di integrazione per parti va **utilizzato ripetutamente**.

ESEMPIO Integrazione per parti ripetuta

Calcoliamo $\int x^2 \sin x\,dx$.

Osserviamo che si tratta di un integrale del tipo $\int x^n \sin x\,dx$.

Come suggerito in **Tab. 3**, assumiamo come fattore finito x^2:

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g'(x) = \sin x$$

da cui: $f'(x) = 2x \quad \text{e} \quad g(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x$

Abbiamo allora:

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx \qquad [27]$$

L'integrale ottenuto è più semplice di quello di partenza perché la potenza si è abbassata di grado, ma va ancora calcolato *per parti*; assumiamo:

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g'(x) = \cos x$$

da cui: $f'(x) = 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \int \cos x\,dx = \sin x$

Ne deduciamo il seguente sviluppo della [27], che conclude il calcolo del nostro integrale:

$$-x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int 1\cdot \sin x\,dx\right) =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2(-\cos x) + c =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

Tieni presente infine che la regola di integrazione per parti è **spesso** utile per integrare il *prodotto* di due funzioni, ma **non** è **sempre** utile. In molti casi l'integrazione va effettuata con i metodi presentati nei paragrafi precedenti. Ecco di seguito un esempio esplicativo.

ESEMPIO Un caso in cui il metodo di integrazione per parti non è utile

Calcoliamo $\int x^2 e^{x^3} dx$.

In questo caso il metodo di integrazione per parti non è di alcuna utilità; l'integrale si risolve immediatamente riconoscendo che la funzione integranda è riconducibile alla forma $f'(x)\,e^{f(x)}$:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

Esercizi p. 111

5. Integrazione di funzioni razionali frazionarie

Premesse

In questo paragrafo presentiamo le tecniche di integrazione delle funzioni *razionali frazionarie*, ossia i metodi per calcolare integrali del tipo:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$$

essendo $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi.
La prima osservazione importante è che è sempre possibile ricondursi a un integrale in cui il grado del numeratore è **minore** del grado del denominatore.
Infatti, se questa condizione non fosse verificata, detti $Q(x)$ ed $R(x)$ il quoziente e il resto della divisione di $A(x)$ per $B(x)$, avremmo:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x), \quad \text{con grado di } R(x) < \text{grado di } B(x)$$

quindi:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx = \int \frac{B(x)\cdot Q(x) + R(x)}{B(x)}\,dx = \int \Bigg(\underbrace{Q(x)}_{\text{polinomio}} + \underbrace{\frac{R(x)}{B(x)}}_{\substack{\text{il grado di } R(x) \text{ è ora} \\ \text{minore di quello di } B(x)}} \Bigg)\,dx$$

In conclusione: *la funzione integranda può sempre essere riscritta come somma di un polinomio e di una funzione razionale frazionaria in cui il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.*

ESEMPIO Decomposizione della funzione integranda nel caso in cui il grado del numeratore sia maggiore di quello del denominatore

Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$.

- **Effettuiamo la divisione tra numeratore e denominatore**

La divisione tra x^4 e x^2+1, svolta qui a fianco, fornisce:

$$Q(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad R(x) = 1$$

x^4	x^2+1
$-x^4-x^2$	x^2-1
$-x^2$	
x^2+1	
1	

Ne segue che:

$$\underbrace{x^4}_{A(x)} = \underbrace{(x^2-1)}_{Q(x)}\underbrace{(x^2+1)}_{B(x)} + \underbrace{1}_{R(x)} \qquad [28]$$

- **Riscriviamo l'integrale e calcoliamolo**

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\overbrace{(x^2-1)(x^2+1)+1}^{[28]}}{x^2+1}\,dx = \int \Bigg(\underbrace{x^2-1}_{Q(x)} + \frac{\overbrace{1}^{R(x)}}{\underbrace{x^2+1}_{B(x)}} \Bigg)\,dx =$$

$$= \int \underbrace{(x^2-1)}_{\text{polinomio}}\,dx + \int \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\substack{\text{funzione razionale con} \\ \text{numeratore di grado minore} \\ \text{del denominatore}}}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c$$

Nell'esempio precedente la decomposizione della funzione integranda ci ha condotti a un polinomio e a una funzione razionale frazionaria di integrazione immediata; non sempre però ciò accade, pertanto occorre stabilire delle tecniche generali per integrare le funzioni razionali in cui il grado del numeratore è *minore* di quello del denominatore. Distinguiamo vari a casi, a seconda del *grado* del denominatore.

OSSERVA

Stiamo supponendo il numeratore di grado minore del denominatore, quindi se il denominatore è di primo grado, il numeratore deve essere di grado 0, ossia una costante k.

Il denominatore è di primo grado

In questo caso l'integrale si presenta nella forma $\int \frac{k}{ax+b}dx$.

Un integrale di questo tipo si può sempre ricondurre alla forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, quindi le primitive sono funzioni logaritmiche.

ESEMPIO

$$\int \frac{1}{2x+3}dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2}^{f'(x)}}{\underbrace{2x+3}_{f(x)}}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$$

OSSERVA

Stiamo supponendo il numeratore minore del denominatore, quindi se il denominatore è di secondo grado, il numeratore deve essere di primo grado o di grado 0.

Il denominatore è di secondo grado

In questo caso l'integrale si presenta nella forma $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$.

Le tecniche di integrazione sono diverse a seconda del *discriminante* del trinomio ax^2+bx+c.

1° caso: il discriminante è maggiore di 0

Se $\Delta > 0$, il trinomio ax^2+bx+c ha due radici reali distinte x_1, x_2. La tecnica di integrazione consiste nel trovare due numeri A e B tali che:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \qquad \text{se } \Delta > 0 \qquad [29]$$

In questo modo la funzione integranda originaria risulta decomposta nella somma di frazioni (dette **fratti semplici**) i cui integrali sono immediati.

ESEMPIO Il denominatore è di secondo grado e ha discriminante positivo

Calcoliamo $\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx$.

- **Scomponiamo il denominatore, dopo aver verificato che il discriminante è positivo**

È facile verificare che il discriminante del denominatore è positivo e riconoscere che:

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

- **Riscriviamo opportunamente la funzione integranda**

Cerchiamo due numeri A e B in modo che:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \qquad [30]$$

La [30] implica, moltiplicando i due membri per $(x-1)(x-2)$:

$$x = A(x-2) + B(x-1) \qquad [31]$$

ossia:

$$x = (A+B)x - 2A - B \qquad [32]$$

I due polinomi al primo e secondo membro della [32] sono uguali se e solo se hanno lo stesso coefficiente di x e lo stesso termine noto, da cui il sistema:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=0 \end{cases}$$

che risolto fornisce $A=-1$, $B=2$. Pertanto:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

SUGGERIMENTO

Per il calcolo dei coefficienti A e B, una volta giunti alla [31], anziché impostare e risolvere il sistema si poteva procedere più rapidamente ragionando come segue. Dovendo la [31] risultare un'identità, deve essere soddisfatta per ogni valore di x, in particolare deve essere soddisfatta per $x=2$ e per $x=1$ (valori che annullano i coefficienti di A e di B). Sostituendo nella [31] questi valori di x si giunge direttamente ai valori di A e B:

- per $x=2$ la [31] diviene $2=B$, ossia $B=2$;
- per $x=1$ la [31] diviene $1=A(-1)$, da cui $A=-1$.

- **Calcoliamo l'integrale**

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)dx =$$
$$= -\int\frac{1}{x-1}\,dx + 2\int\frac{1}{x-2}\,dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + c$$

2° caso: il discriminante è uguale a 0

Se $\Delta = 0$, il trinomio $ax^2 + bx + c$ è un quadrato, diciamo $(px+q)^2$. La tecnica di integrazione consiste nel trovare due numeri A e B tali che:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{px+q} + \frac{B}{(px+q)^2} \qquad \text{se } \Delta = 0 \qquad [33]$$

Come nel caso precedente, questo procedimento consente di ricondursi a integrali immediati.

ESEMPIO Il denominatore è di secondo grado e ha discriminante nullo

Calcoliamo $\int \frac{x+2}{x^2-6x+9}\,dx$.

- **Scomponiamo il denominatore**

È immediato riconoscere che:

$$x^2-6x+9 = (x-3)^2$$

- **Riscriviamo opportunamente la funzione integranda**

Cerchiamo A e B in modo che:

$$\frac{x+2}{x^2-6x+9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} \qquad [34]$$

Con le stesse tecniche viste in uno degli esempi precedenti si ricava $A = 1$, $B = 5$. Dunque:

$$\frac{x+2}{x^2-6x+9} = \frac{1}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}$$

- **Calcoliamo l'integrale**

$$\int\frac{x+2}{x^2-6x+9}\,dx = \int\left[\frac{1}{x-3}+\frac{5}{(x-3)^2}\right]dx = \int\frac{1}{x-3}\,dx + \int\frac{5}{(x-3)^2}\,dx =$$
$$= \int\frac{1}{x-3}\,dx + 5\int(x-3)^{-2}\,dx = \ln|x-3| + 5\frac{(x-3)^{-1}}{-1} + c = \ln|x-3| - \frac{5}{x-3} + c$$

IN UN ALTRO MODO **Funzioni razionali integrate senza scomposizione in fratti semplici**

Il metodo esposto negli ultimi due esempi ha il pregio della generalità, ma talvolta può essere più rapido risolvere l'integrale per altre vie. Per esempio:

- per calcolare $\int\frac{x}{4x^2-1}\,dx$ conviene riconoscere che si può ricondurre l'integrale alla forma $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ e procedere come segue:

$$\int\frac{x}{4x^2-1}\,dx = \frac{1}{8}\int\frac{8x}{4x^2-1}\,dx = \frac{1}{8}\ln|4x^2-1| + c$$

- per calcolare $\int\frac{x-3}{x^2-4x+4}\,dx$ conviene riconoscere che si può scrivere:

$$\int\frac{x-3}{x^2-4x+4}\,dx = \int\frac{(x-2)-1}{(x-2)^2}\,dx =$$
$$= \int\frac{1}{x-2}\,dx - \int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + c$$

3° caso: il discriminante è minore di 0

In questo caso il trinomio $ax^2 + bx + c$ è *irriducibile*. La tecnica di integrazione prevede due sottocasi:

a. se il numeratore della funzione da integrare è una costante, la strategia è quella di ricondurre l'integrale, con la tecnica del completamento del quadrato, alla forma seguente (conseguenza dell'integrale notevole [23]):

$$\int \frac{1}{(x+m)^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{x+m}{k}+c \qquad [35]$$

b. se il numeratore della funzione integranda è di *primo grado*, la strategia è invece quella di scrivere la funzione integranda come *somma di due addendi*, uno avente al numeratore un multiplo della derivata del denominatore (che, integrato, porta a una funzione *logaritmica*) e uno avente al numeratore una costante (che, integrato con la strategia indicata nel sotto-caso precedente, porta a una funzione *arcotangente*).

Il modo di procedere apparirà più chiaro dai seguenti esempi.

ESEMPIO Il denominatore è irriducibile e il numeratore è un numero

Calcoliamo $\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,dx$.

Per ricondurci alla forma [35] dobbiamo scrivere il denominatore come *somma di due quadrati*. A tale scopo si può utilizzare la tecnica del *completamento del quadrato*; consideriamo i primi due termini che compaiono al denominatore (cioè $x^2 + 3x$) e ricordiamo che se aggiungiamo a questi due termini il quadrato della metà del coefficiente di x, cioè $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, otteniamo un quadrato; infatti:

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2+3x+\frac{9}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$

Pertanto sommiamo e sottraiamo $\frac{9}{4}$ al denominatore della funzione integranda:

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,dx = \int \frac{1}{\underbrace{x^2+3x+\frac{9}{4}}_{\text{quadrato}}-\frac{9}{4}+4}\,dx =$$

Completando il quadrato

$$\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\,dx =$$

Mettendo in evidenza la somma di quadrati al denominatore

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\arctan\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+c = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+c$$

Ricordando che $\int \frac{1}{(x+m)^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{x+m}{k}+c$

ESEMPIO Il denominatore è irriducibile e il numeratore è di primo grado

Calcoliamo $\int \frac{x+5}{x^2+2x+3}\,dx$.

L'obiettivo, come abbiamo spiegato all'inizio, è di riscrivere la funzione integranda come somma di due addendi, di cui uno avente *al numeratore un multiplo della derivata del denominatore* e l'altro avente *come numeratore una costante*.
Poiché la derivata del denominatore della funzione da integrare risulta in questo caso $2x+2$, cerchiamo due numeri A e B in modo che risulti:

$$\frac{x+5}{x^2+2x+3} = \frac{A(2x+2)}{x^2+2x+3}+\frac{B}{x^2+2x+3} \qquad [36]$$

Deve essere $x+5 = 2Ax+2A+B$, da cui si ricava immediatamente $A=\frac{1}{2}$ e $B=4$.

Pertanto:

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+3}\,dx =$$ Integrale da calcolare

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx}_{\text{questo integrale porta a una funzione logaritmo}} + 4\underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx}_{\text{questo integrale porta a una funzione arcotangente}} =$$ Utilizzando la [36] con $A = \frac{1}{2}$ e $B = 4$ e la linearità dell'integrale

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 4\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx =$$ Completando il quadrato al denominatore del secondo integrale

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 4\int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\,dx =$$ Mettendo in evidenza la somma di quadrati al denominatore

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

Ricordando che $\int \frac{1}{(x+m)^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{x+m}{k} + c$

OSSERVA

Nell'espressione $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)$ è inutile porre il valore assoluto nell'argomento del logaritmo, perché il trinomio x^2+2x+3 risulta positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Il denominatore è di grado superiore al secondo

Per calcolare $\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$ nel caso in cui $B(x)$ abbia grado superiore al secondo (e $A(x)$ abbia grado minore di $B(x)$), si procede come segue:

1. si *scompone* anzitutto $B(x)$ nel prodotto di fattori di primo grado o di fattori *irriducibili* di secondo grado;
2. si riscrive la funzione integranda come somma di frazioni (dette **fratti semplici**) aventi come denominatori i *fattori* di $B(x)$; questa decomposizione si effettua secondo le corrispondenze riassunte in **Tab. 4**;
3. si applicano alla funzione così decomposta le tecniche di integrazione note.

Tabella 4

Fattore nella scomposizione di $B(x)$	Addendo corrispondente nella scomposizione di $\frac{A(x)}{B(x)}$ in fratti semplici
$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$
$(ax+b)^r$	$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(ax+b)^r}$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2+bx+c)^r$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$

SUGGERIMENTO

Per non commettere errori, è utile tenere presente la seguente osservazione nella scomposizione della funzione integranda in fratti semplici: il numero dei coefficienti da determinare (da noi indicati con *A*, *B*, *C*, ...) è sempre uguale al grado del denominatore della funzione integranda originaria.

Per esempio:

Per integrare...	...cercheremo una scomposizione in fratti semplici del tipo
$\frac{1}{x(x-1)(x-2)}$	$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$
$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}$	$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$
$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}$	$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$
$\frac{1}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}$	$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$

ESEMPIO Integrazione di una funzione con denominatore di terzo grado

Calcoliamo $\int \frac{x+1}{x^3+4x^2+4x}dx$.

- **Scomponiamo il denominatore**

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2$$

- **Riscriviamo opportunamente la funzione integranda**

Cerchiamo A, B e C in modo che risulti:

$$\frac{x+1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \qquad [37]$$

La [37] implica:

$$x+1 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx \qquad [38]$$

La [38] deve essere vera in particolare per $x=-2$ e per $x=0$.

Per $x=-2$ si ottiene $-1=-2C$, da cui $C=\frac{1}{2}$

Per $x=0$ si ottiene $1=4A$, da cui $A=\frac{1}{4}$

Infine, tenendo conto che $A=\frac{1}{4}$ e $C=\frac{1}{2}$, sostituendo nella [38] il valore $x=-1$ otteniamo:

$$0 = \frac{1}{4}\cdot 1 + B(-1)1 + \frac{1}{2}(-1)$$

da cui

$$B = -\frac{1}{4}$$

Pertanto:

$$\frac{x+1}{x(x+2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{2(x+2)^2}$$

- **Calcoliamo l'integrale**

$$\int \frac{x+1}{x^3+4x^2+4x}dx = \int\left[\frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{2(x+2)^2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+2)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+2| - \frac{1}{2(x+2)} + c$$

SINTESI

Metodo di integrazione delle funzioni razionali

Il procedimento per calcolare un integrale del tipo:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}dx, \quad \text{con } A(x) \text{ e } B(x) \text{ due polinomi}$$

si può riassumere come segue.

1. Si osservano anzitutto i gradi di $A(x)$ e di $B(x)$: se il grado di $A(x)$ è maggiore o uguale a quello di $B(x)$, si effettua la divisione di $A(x)$ per $B(x)$ e si riscrive l'integrale nella forma:

$$\int\left[Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}\right]dx$$

essendo $Q(x)$ ed $R(x)$ il quoziente e il resto della divisione.

2. In ogni caso si è ricondotti a integrare una funzione razionale frazionaria avente il numeratore di grado *minore* del denominatore. La tecnica di integrazione è diversa, a seconda del grado del denominatore:
   - se il grado del denominatore è 1, l'integrale è immediato;
   - se il grado del denominatore è 2, occorre stabilire se il discriminante del denominatore è maggiore, minore o uguale a zero, quindi procedere come indicato negli esempi precedenti;
   - se il grado del denominatore è maggiore di 2, occorre scomporre il denominatore in fattori di primo grado o di secondo grado irriducibili, riscrivere la funzione da integrare come somma di frazioni semplici, quindi integrare queste ultime (che hanno denominatori di primo o secondo grado) mediante le tecniche viste ai punti precedenti.

COLLEGHIAMO I CONCETTI **I vari metodi di integrazione**

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti vari metodi per integrare una funzione. La scelta del metodo più opportuno varia a seconda dell'integrale. Possiamo comunque riassumere alcune idee utili.

1. **Cerca, se possibile, di ricondurre la funzione integranda a una somma di integrali immediati e/o di integrali di una delle forme della Tab. 2.**

Tecniche utili	Esempi
Sviluppare una potenza	$\int x(1+x)^2\,dx = \int x(1+2x+x^2)\,dx = \int x\,dx + 2\int x^2\,dx + \int x^3\,dx = \ldots$
Scrivere una frazione algebrica come somma di altre due	$\int \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ldots$
Sommare e sottrarre al numeratore uno stesso numero	$\int \frac{2x}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+1}\,dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \ldots$
Moltiplicare e dividere per un fattore numerico	$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{e^{3x}-1}\,dx = \ldots$
Utilizzare formule goniometriche	$\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1-\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = \ldots$
Utilizzare la tecnica del completamento del quadrato	$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx = \ldots$
Moltiplicare numeratore e denominatore per uno stesso termine (in particolare razionalizzare un denominatore)	$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \ldots$ $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\,dx = \int \sqrt{x+1}\,dx + \int \sqrt{x}\,dx = \ldots$

2. **Se non riesci a risolvere l'integrale procedendo come indicato al punto 1, cerca di classificare la funzione integranda e di applicare le relative tecniche di integrazione.**

Tipo di funzione	Metodo	Si applica per esempio ai seguenti integrali:
Razionale frazionaria	Applica i metodi di integrazione visti nel **Paragrafo 3**	$\int \frac{x^2-1}{x^2-4}\,dx;\quad \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx;\quad \int \frac{1}{x^2+3x+4}\,dx$
Prodotto di un polinomio per una funzione trascendente	Applica il metodo di integrazione per parti	$\int (x^2-1)e^{-2x}\,dx;\quad \int x\cos x\,dx;\quad \int \ln x\,dx$
Irrazionale	Esegui le opportune sostituzioni (*vedi* la scheda di approfondimento richiamata alla fine del **Paragrafo 3**)	$\int \sqrt{9-x^2}\,dx;\quad \int \sqrt{4+x^2}\,dx;\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

3. **Se ti sembra di non riuscire a risolvere l'integrale secondo quanto suggerito ai punti 1 e 2, prova a cercare un'opportuna sostituzione che possa semplificare l'integrale o ad applicare la combinazione di più tecniche di integrazione (per parti, per sostituzione ecc.).**

Per esempio, per calcolare $\int e^{\sqrt{x-1}}\,dx$, l'idea più ragionevole è tentare anzitutto una *sostituzione*, in modo da ricondursi a un integrale *razionale*. Ponendo $\sqrt{x-1}=t$ ed eseguendo la sostituzione ci si riconduce all'integrale $\int 2te^t\,dt$, che è calcolabile per parti.

Esercizi p. 114

Percorso delle idee

L'integrale indefinito

Primitiva

Si dice **primitiva** di una funzione $f(x)$ in un insieme D (unione di uno o più intervalli) una funzione $F(x)$, derivabile in D, tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$.

Integrale indefinito

Tutte e sole le primitive di $f(x)$ in un **intervallo** I differiscono da $F(x)$ per una costante. L'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ in I si chiama **integrale indefinito** e si indica con il simbolo $\int f(x)\,dx$. Valgono le proprietà:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

Metodi di integrazione

integrali immediati

Potenze

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbf{R} \text{ con } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

In generale

$$\int f'(x)[f(x)]^\alpha\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbf{R} \text{ con } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Esponenziali

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

In generale

$$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int f'(x)\,a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

Seno e coseno

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

In generale

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin(f(x)) + c$$

$$\int f'(x)\sin f(x)\,dx = -\cos(f(x)) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx = -\cot f(x) + c$$

Funzioni le cui primitive sono goniometriche inverse

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{k} + c$$

In generale

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}\,dx = \arctan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{f(x)}{k} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{k^2-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin\frac{f(x)}{k} + c$$

Per sostituzione

Sotto opportune ipotesi risulta:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

ponendo $x = g(t)$

ESEMPIO

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int \underbrace{(t^2-1)\cdot t}_{f(g(t))} \cdot \underbrace{2t}_{g'(t)}\,dt$$

$\sqrt{x+1} = t$

$x + 1 = t^2$

$x = t^2 - 1$

$g(t) \rightarrow g'(t) = 2t$

Per parti

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Per funzioni razionali fratte

Calcolo di $\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$, con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi

Grado di $A(x) \geq$ grado di $B(x)$

Si esegue la divisione di $A(x)$ per $B(x)$ e si scrive:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx = \int \underbrace{Q(x)}_{\text{quoziente della divisione}} + \frac{\overbrace{R(x)}^{\text{resto della divisione}}}{B(x)}\,dx$$

quindi si integrano i due termini:

$$\underbrace{Q(x)}_{\text{polinomio}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{R(x)}{B(x)}}_{\text{caso in cui il grado di } R(x) \text{ risulta minore del grado di } B(x)}$$

Grado di $A(x) <$ grado di $B(x)$

Si cerca di ricondursi a integrali della forma:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$$

1° caso: $ax^2 + bx + c$ ha $\Delta > 0$ e quindi ha due radici x_1 e x_2.
Si cercano A e B in modo che

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

2° caso: $ax^2 + bx + c$ ha $\Delta = 0$ e quindi è della forma $(px+q)^2$.
Si cercano A e B in modo che:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{px+q} + \frac{B}{(px+q)^2}$$

3° caso: $ax^2 + bx + c$ ha $\Delta < 0$.
Se il numeratore è costante ci si riconduce alla formula:

$$\int \frac{1}{(x+m)^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{x+m}{k} + c \quad [*]$$

Altrimenti si cercano A e B in modo da scriverlo nella forma:

$$\underbrace{\int \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}\,dx}_{\text{immediato}} + \underbrace{\int \frac{B}{ax^2+bx+c}\,dx}_{\text{riconducibile alla forma [*]}}$$

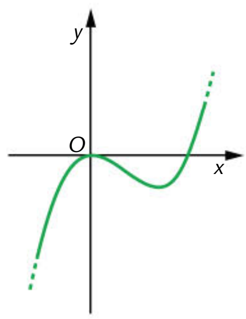
Esercizi

1. Primitive e integrale indefinito

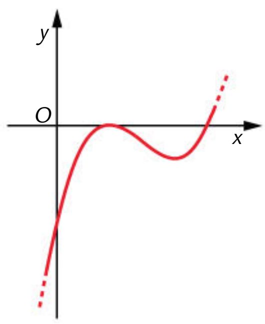
Teoria p. 74

Esercizi introduttivi

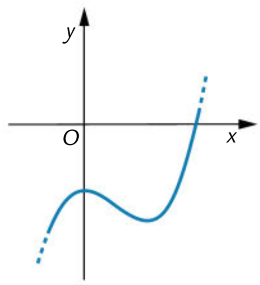
1 **Interpretazione di grafici** **Test.** I grafici nelle seguenti figure rappresentano tutti primitive di una stessa funzione *f*, tranne uno. Quale?



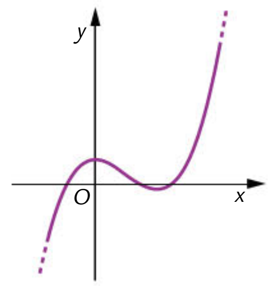
A



B



C



D

2 Verifica che la funzione $F(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ è una primitiva della funzione $f(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$.

3 Verifica che la funzione $F(x) = (2x-1)e^{2x}$ è una primitiva della funzione $f(x) = 4xe^{2x}$.

Argomentare e dimostrare

4 Spiega perché la funzione $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ **non** può ammettere primitiva nell'intervallo $[-1, 1]$.

5 Fornisci l'esempio di due primitive di $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, definite in $\mathbf{R} - \{0\}$, che **non** differiscono per una costante. Perché invece si può affermare che **tutte** le primitive della funzione $g(x) = x^3$ definite in $\mathbf{R}$ differiscono per una costante?

6 Ada sostiene che, nell'intervallo $(0, +\infty)$, tutte e sole le funzioni primitive della funzione $y = \dfrac{1}{x}$ sono del tipo $F(x) = \ln x + c$, con $c \in \mathbf{R}$. Secondo Riccardo, esse sono invece esprimibili nella forma $F(x) = \ln(kx)$, con $k > 0$. Al termine del confronto, comprendono di avere ragione entrambi. Sapresti spiegare perché?

Esercizi con parametri

7 **ESERCIZIO SVOLTO**

Determiniamo a e b in modo che $F(x) = ax^4 + bx^3$ sia una primitiva di $f(x) = 8x^3 + 15x^2$.

Si tratta di determinare a e b in modo che la derivata della funzione $F(x)$ sia la funzione $f(x)$.
Poiché:

$$F'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$$

affinché sia $F'(x) = f(x)$ deve essere soddisfatto il seguente sistema, che risolviamo:

$$\begin{cases} 4a = 8 \\ 3b = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

I valori di a e b per cui è soddisfatta la condizione richiesta sono quindi $a = 2$, $b = 5$.

8 Determina a, b e c in modo che $F(x) = ax^5 + bx^4 + cx$ sia una primitiva di $f(x) = 2x^4 + x^3 + 3$. $\left[a = \frac{2}{5}, b = \frac{1}{4}, c = 3\right]$

9 Determina a e b in modo che $F(x) = a \sin 2x + b \cos 4x$ sia una primitiva di $f(x) = 4 \cos 2x - 12 \sin 4x$. $[a = 2, b = 3]$

10 Determina a e b in modo che $F(x) = ae^{3x} + be^{2x}$ sia una primitiva di $f(x) = e^{3x} - e^{2x}$. $\left[a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{2}\right]$

11 Determina a e b in modo che $F(x) = a \sin 2x + b \cos x$ sia una primitiva di $f(x) = \cos 2x + 3 \sin x$. $\left[a = \frac{1}{2}, b = -3\right]$

12 Determina a e b in modo che $F(x) = (ax + b)e^{2x}$ sia una primitiva di $f(x) = xe^{2x}$. $\left[a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}\right]$

13 Determina a e b in modo che $F(x) = a \ln|x| + \frac{b}{x}$ sia una primitiva di $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$. $[a = 1, b = -1]$

14 Determina a, b e c in modo che $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ sia una primitiva di $f(x) = x^2e^x$. $[a = 1, b = -2, c = 2]$

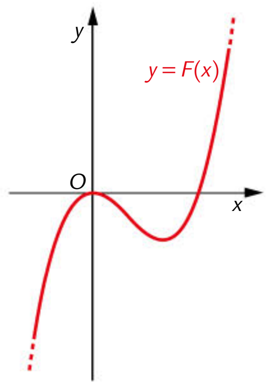
15 Determina a, b e c in modo che $F(x) = a \ln|x + 2| + bx^2 + cx$ sia una primitiva di $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$. $\left[a = 4, b = \frac{1}{2}, c = -2\right]$

Dal grafico di una funzione a quello della primitiva

Interpretazione di grafici

16 In figura è tracciato il grafico della funzione $y = F(x)$. Di quale delle seguenti funzioni è una primitiva?

A $y = x^2 - 2x$
B $y = x^2 + 2x$
C $y = -x^2 + 2x$
D $y = -x^2 - 2x$



17 Quale tra i due grafici in **Figg. b** e **c** rappresenta una primitiva della funzione f il cui grafico è tracciato in **Fig. a**?

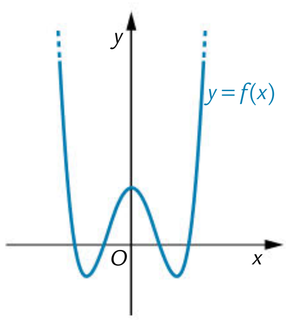


Figura a

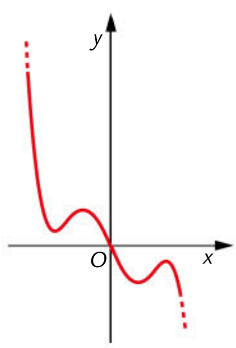


Figura b

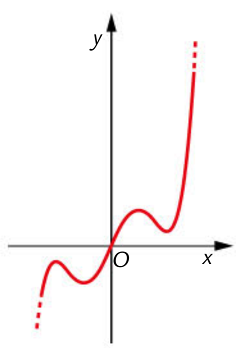
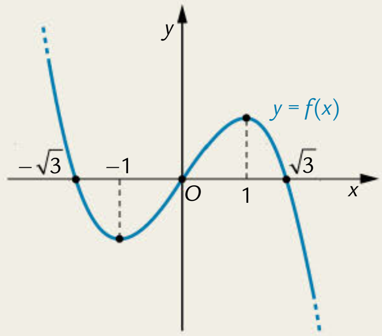


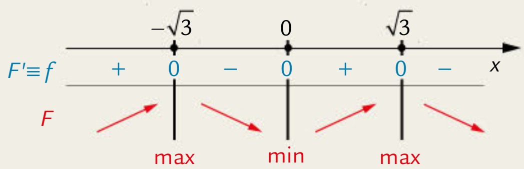
Figura c

18 **ESERCIZIO SVOLTO**

Tracciamo un grafico plausibile della primitiva $y = F(x)$, il cui grafico passa per l'origine, della funzione $y = f(x)$ che ha il grafico mostrato in figura.

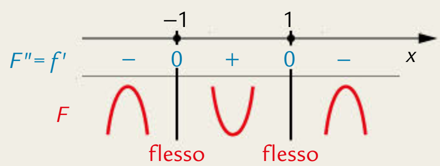


- La derivata prima della funzione F di cui vogliamo tracciare il grafico è la funzione f. Possiamo dunque «leggere» sul grafico di f il segno e gli zeri di F' (F' è positiva, nulla o negativa rispettivamente dove lo è f). Ne ricaviamo lo schema seguente.

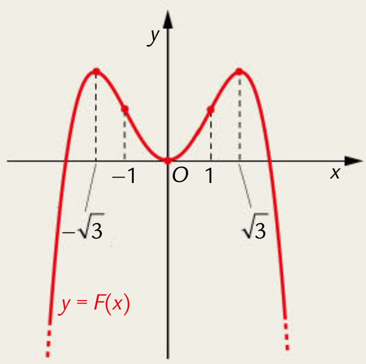


  Inoltre, la condizione di passaggio per l'origine data nel testo ci permette di affermare che $F(0) = 0$.

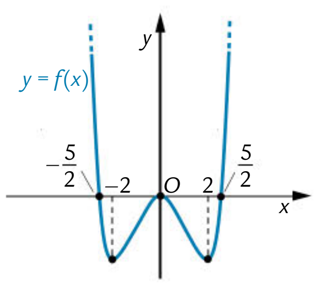
- La derivata seconda di F è la derivata prima della funzione f; possiamo dunque «leggere» sul grafico di f il segno e gli zeri di F'', tenendo conto che F'' sarà positiva, nulla o negativa rispettivamente dove f è crescente, dove ha punti stazionari e dove è decrescente.



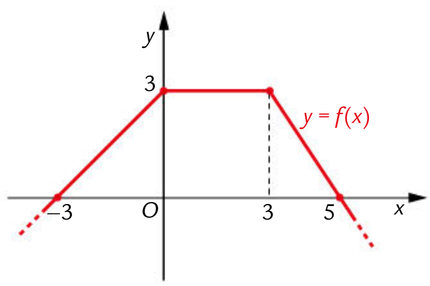
- Dalle informazioni dedotte segue che un grafico plausibile della primitiva F di f passante per l'origine è quello nella figura qui sotto.



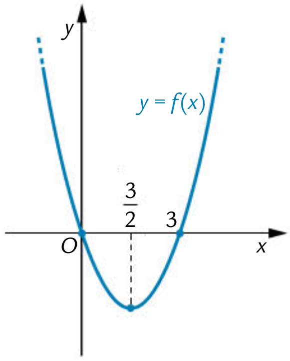
19 In figura è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$. Traccia un grafico plausibile della sua primitiva passante per l'origine.



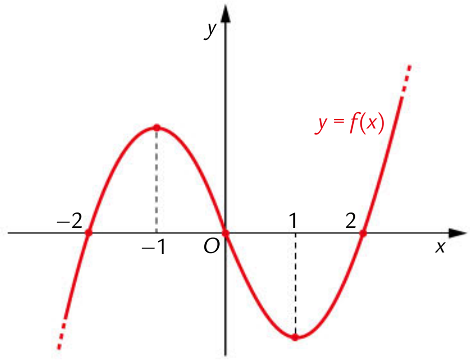
20 In figura è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$. Traccia un grafico plausibile della sua primitiva $y = F(x)$ tale che $F(-3) = 0$.



21 In figura è tracciato il grafico di una parabola $y = f(x)$. Traccia un grafico plausibile:
- **a.** della sua derivata;
- **b.** della sua primitiva passante per l'origine.

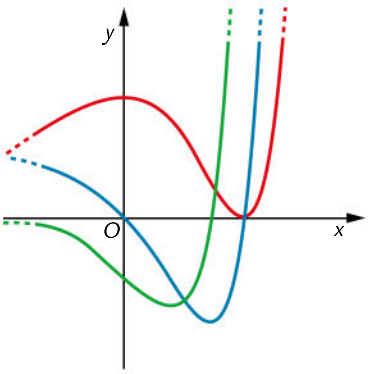


22 In figura è tracciato il grafico di una cubica $y = f(x)$. Traccia un grafico plausibile:
- **a.** della sua derivata;
- **b.** della sua primitiva passante per l'origine.

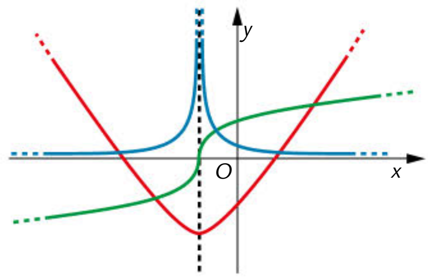


Interpretazione di grafici

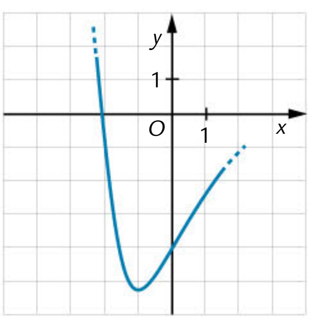
23 Le tre curve disegnate nella seguente figura rappresentano il grafico di una funzione f, il grafico della sua derivata f' e il grafico di una primitiva F di f. Associa a ciascuna curva il grafico corretto, giustificando la risposta.



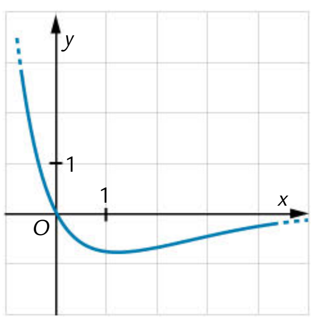
24 Le tre curve disegnate nella seguente figura rappresentano il grafico di una funzione f, il grafico della sua derivata f' e il grafico di una primitiva F di f. Associa a ciascuna curva il grafico corretto, giustificando la risposta.



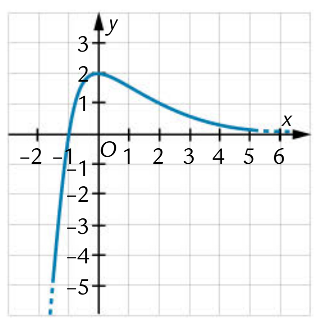
25 Le seguenti tre figure rappresentano il grafico di una funzione f, il grafico della sua derivata f' e il grafico di una primitiva F di f.



A



B



C

- **a.** Associa a ciascuna delle tre figure la funzione corretta.
- **b.** Deduci dal grafico di f' qual è il segno di $f''(0)$.
- **c.** Detta G la primitiva di f tale che $G(0) = 5$, deduci dal grafico di F il valore di $G(-2)$.
- **d.** Considerata la funzione $g(x) = \ln f(x)$, deduci dai grafici il dominio della funzione g e stabilisci qual è il segno del prodotto $g'(1) \cdot g'(2)$.

Giustifica tutte le risposte.

2. Integrali immediati

Teoria p. 77

Esercizi introduttivi

Test

26 Quale delle seguenti è una primitiva di x^5?

A $5x^4$ B $4x^5$ C $\frac{x^4}{4}$ D $\frac{x^6}{6}$

27 Quale delle seguenti è una primitiva di $\frac{1}{x}$?

A $\ln|x|$ B $-\frac{1}{x^2}$ C $\frac{1}{x^2}$ D $-\ln|x|$

28 Quale delle seguenti è una primitiva di $\frac{1}{x^2}$?

A $\frac{1}{x}$ B $-\frac{1}{x}$ C $\frac{1}{x^2}$ D $-\frac{1}{x^2}$

29 Quale delle seguenti è una primitiva di e^x?

A e^x B $e^x \cdot e$ C $\frac{e^x+1}{x+1}$ D Nessuna delle precedenti

30 Quale delle seguenti è una primitiva di $\sin x$?

A $\sin x$ B $\cos x$ C $-\sin x$ D $-\cos x$

31 **Vero o falso?**

a. $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ V F

b. $\int 3f(x)\,dx = 3\int f(x)\,dx$ V F

c. $\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$ V F

d. $\int [3f(x)-4g(x)]\,dx = 3\int f(x)\,dx - 4\int g(x)\,dx$ V F

e. $\int f(2x)\,dx = 2\int f(x)\,dx$ V F

[3 uguaglianze vere e 2 false]

Calcolo di integrali immediati

32 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a. $\int (x+2)^2\,dx$ **b.** $\int \frac{x^2-1}{x^3}\,dx$ **c.** $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

---

a. $\int (x+2)^2\,dx = \int (x^2+4x+4)\,dx = \int x^2\,dx + 4\int x\,dx + 4\int dx = \frac{x^3}{.....} + 4\cdot ..... + ... + c = \frac{x^3}{.....} + ... + c$

b. $\int \frac{x^2-1}{x^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int x^{-3}\,dx = \ln|x| - \frac{x^{-3+1}}{.....} + c = \ln|x| + \frac{1}{.....} + c$

c. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+.....}}{\frac{1}{2}+.....} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+.....}}{-\frac{1}{2}+.....} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{.....} - 2\sqrt{.....} + c$

Calcola i seguenti integrali indefiniti, ricordando gli integrali notevoli delle funzioni potenza.

33 $\int (x+2)\,dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2+2x+c\right]$

34 $\int (4x^3+6x^2+1)\,dx$ $\left[x^4+2x^3+x+c\right]$

35 $\int (9x^2 - 4x - 3)\,dx$ $\quad [3x^3 - 2x^2 - 3x + c]$

36 $\int (x+1)^2\,dx$ $\quad \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x + c\right]$

37 $\int x(3x-2)^2\,dx$ $\quad \left[\frac{9}{4}x^4 - 4x^3 + 2x^2 + c\right]$

38 $\int (x+2)(x-2)^2\,dx$ $\quad \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x + c\right]$

39 $\int (x^2+1)(x+1)\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c\right]$

40 $\int \left(\frac{1}{x} + x\right)dx$ $\quad \left[\ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + c\right]$

41 $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$ $\quad \left[\ln|x| - \frac{1}{x} + c\right]$

42 $\int \frac{x^2+2}{x}\,dx$ $\quad \left[2\ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + c\right]$

43 $\int \frac{x^2+2}{x^2}\,dx$ $\quad \left[x - \frac{2}{x} + c\right]$

44 $\int \frac{x^2+2}{x^3}\,dx$ $\quad \left[\ln|x| - \frac{1}{x^2} + c\right]$

45 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\quad \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c\right]$

46 $\int \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + c\right]$

47 $\int \left(x^2 + \frac{4}{x^3}\right)dx$ $\quad \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{x^2} + c\right]$

48 $\int \sqrt{x}\,(x+2)\,dx$ $\quad \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + c\right]$

49 **Videolezione** $\int \left(x + \frac{2}{x}\right)(x^2+3)\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 6\ln|x| + c\right]$

50 $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad [x + 2\sqrt{x} + c]$

51 $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x} + c\right]$

52 $\int \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2}\,dt$ $\quad \left[\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{t} + c\right]$

53 $\int \frac{at^2 + vt}{t^3}\,dt$ $\quad \left[a\ln|t| - \frac{v}{t} + c\right]$

54 $\int \frac{x^2 + 4\sqrt{x} - 1}{x}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}x^2 + 8\sqrt{x} - \ln|x| + c\right]$

55 $\int \frac{(2x-3)(x+1)}{x}\,dx$ $\quad [x^2 - x - 3\ln|x| + c]$

56 $\int x(\sqrt{x} - 1)^2\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + c\right]$

57 $\int \frac{3q^2+1}{\sqrt{q}}\,dq$ $\quad \left[\frac{6}{5}q^2\sqrt{q} + 2\sqrt{q} + c\right]$

58 $\int \frac{(2x^2-1)(2x^2+1)}{x^3}\,dx$ $\quad \left[2x^2 + \frac{1}{2x^2} + c\right]$

59 $\int \sqrt{x}\,(x-2)^2 dx$ $\quad \left[\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + c\right]$

60 $\int \frac{x^3 - 4x^2 - \sqrt{x} - 1}{x}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2\sqrt{x} - \ln|x| + c\right]$

61 $\int \frac{3q^2 - q\sqrt{q} - 3}{q^4}\,dq$ $\quad \left[-\frac{3}{q} + \frac{2}{3q\sqrt{q}} + \frac{1}{q^3} + c\right]$

62 $\int \frac{4q\sqrt{q} + q^2}{q^3}\,dq$ $\quad \left[\ln|q| - \frac{8}{\sqrt{q}} + c\right]$

63 $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$ $\quad \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + c\right]$

64 $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$ $\quad \left[\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + c\right]$

65 $\int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{27}}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\quad \left[\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} - \frac{3}{11}x^3\sqrt[3]{x^2} + c\right]$

Matematica ed elettronica

66 Un conduttore è percorso da una corrente (in ampere) variabile nel tempo secondo la legge $I(t) = 3t^2 + 4$ dove t è espresso in s. Sapendo che la quantità di carica che ha attraversato una sezione del conduttore da $t = 0$ a $t = 1$ s è 11 C, determina la quantità di carica che ha attraversato la stessa sezione del conduttore da $t = 0$ a $t = 2$ s. [22 C]

67 La tensione (in volt) applicata a un circuito varia nel tempo secondo la funzione $V(t) = 2t^2 + 3$ e l'intensità della corrente (in ampere) che circola nel circuito è espressa dalla funzione $i(t) = 4t$. Determina l'espressione della funzione $E(t)$ che esprime l'energia (in joule) dissipata in funzione del tempo. $[E(t) = 2t^4 + 6t^2]$

ESERCIZI

68 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a. $\int (e^{3x} \cdot e^{-2x} + 5)\,dx$ b. $\int \frac{6^x}{3^x}\,dx$ c. $\int \sqrt[3]{27^x}\,dx$

---

a. $\int (e^{3x} \cdot e^{-2x} + 5)\,dx = \int (e^x + 5)\,dx = \int e^x dx + \int 5\,dx = \ldots\ldots + \ldots\ldots + c$

b. $\int \frac{6^x}{3^x} dx = \int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln \ldots\ldots} + c$

c. $\int \sqrt[3]{27^x}\,dx = \int (27^x)^{\frac{1}{3}} dx = \int \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^x dx = \int 3^x\,dx = \ldots\ldots$

Calcola i seguenti integrali indefiniti, ricordando gli integrali notevoli delle funzioni esponenziali.

69 $\int 2^{x+1} dx$ $\left[\frac{2}{\ln 2} 2^x + c\right]$

70 $\int (e^{2x} \cdot e^{-x} + 1)\,dx$ $[e^x + x + c]$

71 $\int \frac{e^{3x} \cdot e^{2x}}{e^{4x}} dx$ $[e^x + c]$

72 $\int e^{2x+4} \cdot e^{-2x-3} dx$ $[ex + c]$

73 $\int (2^x + 3^x)\,dx$ $\left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + c\right]$

74 $\int \frac{4^{2x}}{4^{x+1}} dx$ $\left[\frac{4^x}{4 \ln 4} + c\right]$

75 $\int \frac{8^x}{4^x} dx$ $\left[\frac{2^x}{\ln 2} + c\right]$

76 $\int \left(\frac{2}{x} + 4e^x\right) dx$ $[4e^x + 2 \ln |x| + c]$

77 $\int \frac{8^x + 2^x}{2^x} dx$ $\left[\frac{4^x}{\ln 4} + x + c\right]$

78 $\int \frac{e^{2x} - e^x}{e^x} dx$ $[e^x - x + c]$

79 $\int 2^x \cdot 3^{2x}\,dx$ $\left[\frac{18^x}{\ln 18} + c\right]$

80 $\int 8^{\frac{x}{2}} \sqrt{2^x}\,dx$ $\left[\frac{4^x}{\ln 4} + c\right]$

81 $\int 4^q \cdot 2^{q+1}\,dq$ $\left[2 \cdot \frac{8^q}{\ln 8} + c\right]$

82 $\int 8^{2x+1} \cdot 2^x\,dx$ $\left[8 \cdot \frac{128^x}{\ln 128} + c\right]$

83 $\int \left(2^x \cdot 3^{2x} + 4^x \cdot \sqrt[3]{8^x}\right) dx$ $\left[\frac{18^x}{\ln 18} + \frac{8^x}{\ln 8} + c\right]$

84 $\int \left(\frac{3^{2x+3}}{3^x} - 9^x \cdot 3^{x+1}\right) dx$ $\left[\frac{27 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{3 \cdot 27^x}{\ln 27} + c\right]$

85 Videolezione $\int (3^x - 1)^2\,dx$ $\left[\frac{9^x}{\ln 9} - \frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} + x + c\right]$

86 $\int (2^x - 3^x)^2\,dx$ $\left[\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + c\right]$

87 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a. $\int (x + \cos x)\,dx$ b. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$ c. $\int \frac{1 - 3\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$ d. $\int (\sin^2 2x + \cos^2 2x)\,dx$

---

a. $\int (x + \cos x)\,dx = \int x\,dx + \int \cos x\,dx = \frac{x^2}{\ldots\ldots} + \sin x + c$

b. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} dx = 2\int \sin x\,dx = \ldots\ldots + c$

c. $\int \frac{1 - 3\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 3\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - 3\int dx = \tan x - \ldots\ldots + c$

d. $\int (\sin^2 2x + \cos^2 2x)\,dx = \int 1\,dx = \ldots\ldots$

Calcola i seguenti integrali indefiniti, ricordando gli integrali notevoli delle funzioni goniometriche.

88 $\int (x^2 - \sin x)\, dx$ $\quad \left[\cos x + \frac{1}{3}x^3 + c\right]$

89 $\int \frac{x \sin x + 1}{x}\, dx$ $\quad [-\cos x + \ln|x| + c]$

90 $\int (e^x - \sin x)\, dx$ $\quad [e^x + \cos x + c]$

91 $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \sin x\right) dx$ $\quad [-\cot x + \cos x + c]$

92 $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ $\quad [\sin x - \cos x + c]$

93 $\int (e^x - \cos x)\, dx$ $\quad [e^x - \sin x + c]$

94 $\int \frac{2 - 2\cos^2 x + \sin x}{\sin x}\, dx$ $\quad [-2\cos x + x + c]$

95 $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\, dx$ $\quad [2\sin x + c]$

96 $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\, dx$ $\quad [-\cot x - 2x + c]$

97 $\int \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx$ $\quad [\tan x + x + c]$

98 $\int \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\sin^2 x}\, dx$ $\quad [-\cot x + x + c]$

99 $\int \frac{\sin 2x - x\cos x}{\cos x}\, dx$ $\quad \left[-2\cos x - \frac{1}{2}x^2 + c\right]$

100 $\int (\tan^2 x + 3)\, dx$ $\quad [\tan x + 2x + c]$

101 $\int (\tan^2 x + \sin x)\, dx$ $\quad [\tan x - \cos x - x + c]$

102 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a. $\int \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}\, dx$ **b.** $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 4x^2}}\, dx$

a. Il «trucco» per risolvere l'integrale è sommare e sottrarre un numero opportuno al numeratore in modo da fare comparire al numeratore un addendo uguale al denominatore; ciò consente poi di calcolare l'integrale per decomposizione.

$$\int \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}\, dx = \underbrace{\int \frac{\overbrace{x^2 - 4 + 5}^{x^2+1} - 5}{x^2 + 1}\, dx}_{\text{sommiamo e sottraiamo 5 in modo da far comparire al numeratore un addendo uguale al denominatore}} = \int \frac{(x^2 + 1) - 5}{x^2 + 1}\, dx = \int \left(1 - \frac{5}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$= \int 1\, dx - 5\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = x - \dots\dots\dots + c$$

b. $$\int \frac{1}{\sqrt{4 - 4x^2}}\, dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \dots\dots\dots + c$$

Calcola i seguenti integrali indefiniti, ricordando gli integrali notevoli delle funzioni goniometriche inverse.

103 $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}x^2 + \arcsin x + c\right]$

104 $\int \frac{1}{\sqrt{9 - 9x^2}}\, dx$ $\quad \left[\frac{1}{3}\arcsin x + c\right]$

105 $\int \left(\frac{1}{2x^2 + 2} - \frac{1}{\sqrt{9 - 9x^2}}\right) dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{3}\arcsin x + c\right]$

106 $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}\, dx$ $\quad [2\arctan x + x + c]$

107 $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\, dx$ $\quad [x + \arctan x + c]$

108 $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$ $\quad [x - 2\arctan x + c]$

109 $\int \frac{2x^2}{x^2 + 1}\, dx$ $\quad [2x - 2\arctan x + c]$

110 $\int \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2}\right) dx$ $\quad [x - \arctan x + \arcsin x + c]$

111 $\int \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$ $\quad [3x - 4\arctan x + c]$

112 $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}\, dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}x^2 + \arctan x + c\right]$

Esercizi riassuntivi: gli integrali immediati

113 **Caccia all'errore.** Nel calcolo dei seguenti integrali sono stati commessi alcuni errori. Individuali e correggili.

a. $\int x^3\,dx = 3x^2 + c$

b. $\int (1+\cos x)\,dx = 1 - \sin x + c$

c. $\int \sin x\,dx = \cos x + c$

d. $\int 3^x\,dx = 3^x + c$

e. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$

f. $\int (x^2+1)^3\,dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$

Calcola i seguenti integrali indefiniti immediati.

114 $\int (x-1)^2(x+1)dx$ $\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c\right]$

115 $\int \left(x + \sqrt{4x}\right)dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c\right]$

116 $\int \left(\sin x - \sqrt{x}\right)dx$ $\left[-\cos x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c\right]$

117 $\int \frac{xe^x + e^{2x}}{e^x}dx$ $\left[e^x + \frac{1}{2}x^2 + c\right]$

118 $\int e^{2x-1}\cdot e^{1-x}\,dx$ $[e^x + c]$

119 $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ $\left[2\ln|x| + x - \frac{1}{x} + c\right]$

120 $\int \left(\frac{1}{3x^2+3} - \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\right)dx$ $\left[\frac{1}{3}\arctan x - \frac{1}{2}\arcsin x + c\right]$

121 $\int (x^2 + 2\sin x - e^x - 1)\,dx$ $\left[\frac{x^3}{3} - 2\cos x - e^x - x + c\right]$

122 $\int (x^2+1)^2\,dx$ $\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + c\right]$

123 $\int \frac{x^3+1}{x^2}dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c\right]$

124 $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x}dx$ $\left[\ln|x| + 3\sqrt[3]{x} + c\right]$

125 $\int \left(\frac{1}{x^2} + 2\cos x\right)dx$ $\left[2\sin x - \frac{1}{x} + c\right]$

126 $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x}dx$ $\left[\ln x + x + 4\sqrt{x} + c\right]$

127 $\int \left(x + \frac{1}{2x^2+2}\right)dx$ $\left[\frac{1}{2}(x^2 + \arctan x) + c\right]$

128 $\int \frac{1}{\sqrt{16-16x^2}}dx$ $\left[\frac{1}{4}\arcsin x + c\right]$

129 $\int \frac{x^2e^x+1}{x^2}dx$ $\left[e^x - \frac{1}{x} + c\right]$

130 $\int \frac{(x-2)^2}{x^2}dx$ $\left[x - \frac{4}{x} - 4\ln|x| + c\right]$

131 $\int \left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)dx$ $\left[9x - \frac{1}{2}x^2 + c\right]$

132 $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx$ $[x + 2\arctan x + c]$

133 $\int \frac{t^8+1}{t^9}dt$ $\left[\ln|t| - \frac{1}{8t^8} + c\right]$

134 $\int \frac{6^x+4^x}{2^x}dx$ $\left[\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2} + c\right]$

135 $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$ $[\tan x + \sin x + c]$

136 $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x}dx$ $\left[2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + c\right]$

137 $\int \left(\frac{1}{t}+1\right)\sqrt{t}\,dt$ $\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t} + 2\sqrt{t} + c\right]$

138 $\int \left(\frac{e^{3x-1}}{e^{2x-1}} + e^x\cdot e^{2-x}\right)dx$ $[e^x + xe^2 + c]$

139 $\int \left(\frac{1}{3x^2+3} - x^3\right)dx$ $\left[\frac{1}{3}\arctan x - \frac{1}{4}x^4 + c\right]$

140 $\int \left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)\sin\alpha\,d\alpha$ $[\cos\alpha + \alpha + c]$

141 $\int \sqrt[3]{u\sqrt{u}}\,du$ $\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} + c\right]$

142 $\int \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$ $[\tan x + x + c]$

143 $\int (\tan^2 x - 3\cos x)\,dx$ $[\tan x - 3\sin x - x + c]$

144 $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + c\right]$

145 $\int \frac{3\sin^2 x + 2\sin 2x}{\sin x}dx$ $[4\sin x - 3\cos x + c]$

146 ESERCIZIO GUIDATO

Tra le primitive della funzione $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$, determina quella il cui grafico passa per il punto di coordinate (1, 3).

- Calcola $\int\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)dx$ e verifica che la famiglia delle primitive della funzione f è:

$$F(x) = x + \frac{1}{x} + c$$

- Individua la primitiva cercata imponendo la condizione $F(1) = 3$. Questa condizione permette di ricavare $c = 1$, quindi la primitiva cercata è $F(x) = x + \frac{1}{x} + 1$.

147 Tra le primitive della funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$, determina quella il cui grafico passa per il punto di coordinate (2, 4). $\left[F(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{5}{2}\right]$

148 Tra le primitive della funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, determina quella il cui grafico passa per il punto di coordinate (1, 2). $\left[F(x) = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right]$

149 Tra le primitive della funzione $f(x) = e^x - 2x$, determina quella il cui grafico passa per il punto di coordinate (0, 3). $[F(x) = e^x - x^2 + 2]$

150 Tra le primitive della funzione $f(x) = \sin x - 2\cos x$, determina quella il cui grafico passa per il punto di coordinate $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. $[F(x) = -2\sin x - \cos x + 3]$

151 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo la funzione f che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f''(x) = x + 1, \qquad f'(1) = 0, \qquad f(0) = -1$$

- La derivata prima della funzione f è una primitiva di f''; perciò:

$$f'(x) = \int(x+1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

Imponendo la condizione $f'(1) = 0$, si ricava $c = -\frac{3}{2}$, quindi:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

- Analogamente al passo precedente:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}\right)dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + c$$

Imponendo la condizione $f(0) = -1$, si ricava $c = -1$, quindi:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$

152 Determina la funzione f che soddisfa le seguenti condizioni:

$f''(x) = x, \qquad f'(0) = 2, \qquad f(0) = 1$ $\left[f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 2x + 1\right]$

153 Determina la funzione f che soddisfa le seguenti condizioni:

$f''(x) = x^2 + x, \qquad f'(0) = 3, \qquad f(x) = \frac{1}{4}$ $\left[f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + 3x - 3\right]$

154 Determina la funzione f che soddisfa le seguenti condizioni:

$f''(x) = \sin x, \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\left[f(x) = x - \sin x + 2 - \frac{\pi}{2}\right]$

Realtà e modelli

155 **Diffusione dell'influenza**. In una grande città, il numero di individui contagiati dall'influenza durante l'inverno 2017/2018 è variato con una velocità (misurata in numero di contagiati/settimana) espressa con buona approssimazione dalla funzione:

$$f'(t) = 120t - 3t^2 \qquad \text{con} \qquad 0 \le t \le 40$$

dove t è il tempo (misurato in settimane) trascorso dall'inizio dell'epidemia (avvenuto in $t = 0$) e $t = 40$ indica il tempo a cui corrisponde la fine dell'epidemia.

a. Dopo quanto tempo dall'inizio dell'epidemia si è registrato il picco di nuovi casi a settimana?

b. Determina la funzione $f(t)$ che esprime il numero di individui che hanno contratto l'influenza dall'inizio dell'epidemia fino al tempo t; supponi che in $t = 0$ si fossero registrati 250 casi.

c. Individua quanti sono stati complessivamente i contagiati dall'influenza nella città presa in esame durante l'inverno 2017/2018. [**a.** Dopo 20 settimane; **b.** $f(t) = 60t^2 - t^3 + 250$; **c.** 32 250]

156 **Un'auto in frenata**. Un'auto che viaggia in moto rettilineo alla velocità di 25 m/s inizia a frenare all'istante $t = 0$ con una decelerazione costante $a = -5$ m/s^2.

a. Mediante opportune integrazioni, determina la legge oraria $s(t)$ del moto, supponendo $s(0) = 0$.

b. Determina la distanza che ha percorso l'auto dall'istante in cui inizia a frenare a quello in cui si arresta.

$\left[\mathbf{a.}\ s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 25t;\ \mathbf{b.}\ 62{,}5 \text{ m}\right]$

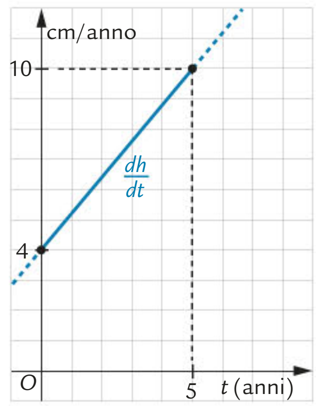
157 **Crescita di un albero**. La velocità di crescita di un arbusto durante i primi 5 anni dalla piantagione è ben modellizzata dalla funzione lineare il cui grafico è quello in figura, dove t è il tempo (misurato in anni), mentre $\frac{dh}{dt}$ è la velocità di crescita in cm/anno. Quando l'arbusto viene piantato ($t = 0$) ha un'altezza di 10 cm.

a. Determina la funzione $h(t)$ che esprime l'altezza dell'arbusto al tempo t.

b. Stabilisci l'altezza (in centimetri) dell'arbusto dopo 2 anni.

c. Determina dopo quanto tempo l'altezza dell'arbusto sarà superiore ai 15 cm. Esprimi la risposta in anni , mesi e giorni.

$\left[\mathbf{a.}\ h(t) = \frac{3}{5}t^2 + 4t + 10;\ \mathbf{b.}\ 20{,}4 \text{ cm};\ \mathbf{c.}\ \text{dopo 1 anno e 28 giorni (assumi il mese di 30 giorni)}\right]$



158 **Matematica e fisica** Un punto materiale si muove lungo una retta con un'accelerazione $a = 4t$ m/s^2. Scrivi l'equazione oraria del moto del punto, sapendo che dopo 2 s il punto ha percorso 6 m e la sua velocità è di 4 m/s.

$\left[s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 4t + \frac{26}{3}\right]$

3. Integrazione di funzioni composte e per sostituzione

Teoria p. 79

Esercizi introduttivi

Test

159 Quale dei seguenti integrali **non** è riconducibile alla forma $\int f'(x)[f(x)]^\alpha dx$?

A $\int 2x(x^2+1)^3 dx$ B $\int e^x\sqrt{e^x+1}\, dx$ C $\int x^2\sqrt[3]{x+1}\, dx$ D $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

160 Quale dei seguenti integrali **non** è della forma $\int f'(x) \sin f(x)\, dx$?

A $\int 3x^2 \sin x^3 dx$ B $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$ C $\int e^x \sin e^x dx$ D $\int 4x^2 \sin x^4 dx$

161 Quale dei seguenti integrali **non** è della forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$?

A $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ B $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ C $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$ D $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

162 Quale dei seguenti integrali **non** è riconducibile né alla forma $\int f'(x)[f(x)]^{\alpha} dx$ né alla forma $\int f'(x) \sin f(x) dx$?

A $\int x^3 \sin x^4 \, dx$ B $\int x^4 \sin x \, dx$ C $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ D $\int \sin x \cos^3 x \, dx$

163 Quale dei seguenti integrali **non** è riconducibile né alla forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ né alla forma $\int f'(x)[f(x)]^{\alpha} dx$, con $\alpha \neq -1$?

A $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ B $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ C $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ D $\int 3x^2\sqrt{1+x^3} \, dx$

ESERCIZI

Calcolo di integrali di funzioni composte

164 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a. $\int x^2\sqrt{x^3+1} \, dx$ **b.** $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ **c.** $\int \frac{1}{x \ln^4 x} dx$

Osserva che tutti gli integrali dati possono ricondursi alla forma $\int f'(x)[f(x)]^{\alpha} dx$.

a. $\int x^2\sqrt{x^3+1} \, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 (x^3+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}+1}}{.....} + c = ...$

b. $\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int \cos x \sin^3 x \, dx = ...$ **c.** $\int \frac{1}{x \ln^4 x} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^{-4} dx = ...$

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

165 $\int x^2(1+x^3)^4 dx$ $\left[\frac{1}{15}(x^3+1)^5+c\right]$

166 $\int x^2(x^3+1)^2 dx$ $\left[\frac{1}{9}(x^3+1)^3+c\right]$

167 $\int x^2(x^3+2)^3 dx$ $\left[\frac{1}{12}(x^3+2)^4+c\right]$

168 $\int x\sqrt{x^2+10} \, dx$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+10)^3}+c\right]$

169 $\int x^3\sqrt{x^4+1} \, dx$ $\left[\frac{1}{6}\sqrt{(x^4+1)^3}+c\right]$

170 $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx$ $\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+c\right]$

171 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+10}} dx$ $\left[\sqrt{x^2+10}+c\right]$

172 $\int \sin x \cos^3 x \, dx$ $\left[-\frac{1}{4}\cos^4 x+c\right]$

173 $\int x\sqrt{x^2+1} \, dx$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c\right]$

174 $\int e^x(e^x-1)^2 dx$ $\left[\frac{1}{3}(e^x-1)^3+c\right]$

175 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\ln x+1} \, dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+1)^3}+c\right]$

176 $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$ $\left[\frac{1}{6}\ln^6 x+c\right]$

177 $\int \sin x \cos^4 x \, dx$ $\left[-\frac{1}{5}\cos^5 x+c\right]$

178 $\int \cos x \sin^4 x \, dx$ $\left[\frac{1}{5}\sin^5 x+c\right]$

179 $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln^4 x+c\right]$

180 $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ $\left[-\frac{1}{\ln x}+c\right]$

181 $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ $\left[2\sqrt{\ln x}+c\right]$

182 Videolezione $\int (1+\cos x)(x+\sin x)^2 dx$ $\left[\frac{(x+\sin x)^3}{3}+c\right]$

183 $\int e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{(e^{2x}+1)^3}+c\right]$

184 $\int \frac{e^{3x+1}\cdot e^{-2x-1}}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ $\left[2\sqrt{e^x+1}+c\right]$

185 $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x}+c\right]$

186 $\int \frac{1}{\tan x\,\cos^2 x}\,dx$ $[\ln|\tan x|+c]$

187 $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x^{27}}}{x}\,dx$ $\left[\frac{27}{5}\sqrt[3]{\ln^5 x}+c\right]$

188 $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\arcsin^2 x+c\right]$

189 $\int \frac{\arctan^2 x}{2+2x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{6}\arctan^3 x+c\right]$

190 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ b. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$ c. $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\,dx$

Osserva che tutti gli integrali dati possono ricondursi alla forma $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx$.

a. $\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{3x^2}_{f'(x)}\,\underbrace{e^{x^3}}_{e^{f(x)}}\,dx = \frac{1}{3}e^{\dots\dots}+c$

b. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{f'(x)}\,\underbrace{e^{\tan x}}_{e^{f(x)}}\,dx = \dots\dots\dots + c$

c. $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{-2}{x^2}}_{f'(x)}\,\overbrace{e^{\frac{2}{x}}}^{e^{f(x)}}\,dx = \dots\dots\dots + c$

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

191 $\int e^{2x+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{2x+1}+c\right]$

192 $\int e^{-3x}\,dx$ $\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}+c\right]$

193 $\int x\,e^{x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{x^2}+c\right]$

194 $\int \sin x\,e^{\cos x}\,dx$ $[-e^{\cos x}+c]$

195 $\int t^3 e^{2t^4}\,dt$ $\left[\frac{1}{8}e^{2t^4}+c\right]$

196 $\int \cos x\,e^{\sin x}\,dx$ $[e^{\sin x}+c]$

197 Videolezione $\int 2^{1+x^3}x^2\,dx$ $\left[\frac{2^{1+x^3}}{3\ln 2}+c\right]$

198 $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ $\left[-e^{\frac{1}{x}}+c\right]$

199 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ $[2e^{\sqrt{x}}+c]$

200 $\int e^{x+e^x}\,dx$ $[e^{e^x}+c]$

201 $\int \frac{e^{\tan 2x}}{\cos^2 2x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{\tan 2x}+c\right]$

202 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a. $\int \frac{1}{2x+1}\,dx$ b. $\int \frac{e^x}{e^x+5}\,dx$ c. $\int \frac{\sin x}{\cos x+3}\,dx$

Osserva che tutti gli integrali dati possono ricondursi alla forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

a. $\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2}^{f'(x)}}{\underbrace{2x+1}_{f(x)}}\,dx = \frac{1}{2}\ln|\dots\dots\dots|+c$

b. $\int \frac{\overbrace{e^x}^{f'(x)}}{\underbrace{e^x+5}_{f(x)}}\,dx = \dots\dots\dots + c$

c. $\int \frac{\sin x}{\cos x+3}\,dx = -\int \frac{\overbrace{-\sin x}^{f'(x)}}{\underbrace{\cos x+3}_{f(x)}}\,dx = \dots\dots\dots + c$

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

203 $\displaystyle\int \frac{1}{1-2x}\,dx$ $\quad\left[-\frac{1}{2}\ln(1-2x)+c\right]$

204 $\displaystyle\int \frac{x}{3x^2+1}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{6}\ln(3x^2+1)+c\right]$

205 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$ $\quad[\ln(x^2+3x)+c]$

206 $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4x)+c\right]$

207 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{3}\ln(x^3+3x)+c\right]$

208 $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$ $\quad[\ln|x^2+x|+c]$

209 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+c\right]$

210 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+c\right]$

211 $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ $\quad[-\ln(1+e^{-x})+c]$

212 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+4x}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+4x)+c\right]$

213 $\displaystyle\int \tan x\,dx$ $\quad[-\ln|\cos x|+c]$

214 $\displaystyle\int \cot x\,dx$ $\quad[\ln|\sin x|+c]$

215 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$ $\quad[-\ln(1+\cos x)+c]$

216 $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x)+c\right]$

217 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x+1}\,dx$ $\quad[-\ln|\cos x+1|+c]$

218 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1|+c\right]$

219 $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ $\quad[\ln|\ln x|+c]$

220 $\displaystyle\int \frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\,dx$ $\quad[\ln|e^x+x^2|+c]$

221 **Videolezione** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+1}\,dx$ $\quad[\ln(\sin^2 x+1)+c]$

222 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}\,dx$ z $\quad[2\ln(1+\sqrt{x})+c]$

223 $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx$ $\quad[\ln|\arctan x|+c]$

224 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\,\tan x}\,dx$ $\quad[\ln|\tan x|+c]$

225 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a. $\displaystyle\int x^2\cos(x^3+1)\,dx$ **b.** $\displaystyle\int e^{2x}\sin e^{2x}\,dx$

Osserva che entrambi gli integrali dati possono ricondursi alla forma $\int f'(x)\cos f(x)\,dx$ o $\int f'(x)\sin f(x)\,dx$

a. $\displaystyle\int x^2\cos(x^3+1)\,dx=\frac{1}{3}\int \underbrace{3x^2}_{f'(x)}\underbrace{\cos(x^3+1)}_{\cos f(x)}\,dx=\frac{1}{3}\sin(\ldots\ldots\ldots)+c$

b. $\displaystyle\int e^{2x}\sin e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int \underbrace{2e^{2x}}_{f'(x)}\underbrace{\sin e^{2x}}_{\sin f(x)}\,dx=\ldots\ldots\ldots+c$

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

226 $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$ $\quad\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+c\right]$

227 $\displaystyle\int \cos 3x\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{3}\sin 3x+c\right]$

228 $\displaystyle\int x\sin x^2\,dx$ $\quad\left[-\frac{1}{2}\cos x^2+c\right]$

229 $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad[-2\cos\sqrt{x}+c]$

230 $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt$ $\quad[-\cos\ln t+c]$

231 $\displaystyle\int e^x\cos e^x\,dx$ $\quad[\sin e^x+c]$

232 $\displaystyle\int x\sin(x^2+1)\,dx$ $\quad\left[-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+c\right]$

233 $\displaystyle\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}\,dx$ $\quad[\tan e^x+c]$

234 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$ $\quad\left[-\sin\frac{1}{x}+c\right]$

235 $\displaystyle\int (1+2x)\sin(x+x^2)\,dx$ $\quad[-\cos(x+x^2)+c]$

236 $\displaystyle\int \frac{\sin(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx$ $\quad[-\cos(\tan x)+c]$

237 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti integrali indefiniti:

a. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ b. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

Osserva che entrambi gli integrali dati possono ricondursi alla forma:

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx \text{ o } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx$$

a. $$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{\overbrace{e^x}^{f'(x)}}{\underbrace{1+(e^x)^2}_{1+[f(x)]^2}}\,dx = \arctan(\ldots\ldots)+c$$

b. $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x}^{f'(x)}}{\underbrace{\sqrt{1-(x^2)^2}}_{\sqrt{1-[f(x)]^2}}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin(\ldots\ldots)+c$$

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

238 $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\arctan 2x + c\right]$

239 $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\arcsin 3x + c\right]$

240 $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\arcsin 2x + c\right]$

241 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ $[\arcsin e^x + c]$

242 $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\arctan x^2 + c\right]$

243 $\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$ $[\arctan \ln x + c]$

Calcolo di integrali per sostituzione

244 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola l'integrale $\int x(2x+1)^4\,dx$.

- Poni $2x+1=t$ e ricava x in funzione di t. Verifica che $dx=\frac{1}{2}dt$.
- Verifica che $\int x(2x+1)^4\,dx = \int \frac{t-1}{2}t^4\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int(t^5-t^4)\,dt$.
- Calcola $\frac{1}{4}\int(t^5-t^4)\,dt$.
- Ritorna alla variabile x e verifica che il risultato dell'integrale indefinito originario è:

$$\frac{1}{24}(2x+1)^6 - \frac{1}{20}(2x+1)^5 + c$$

Calcola i seguenti integrali eseguendo opportune sostituzioni.

245 $\int x\sqrt{x+2}\,dx$ $\left[\frac{2}{15}\sqrt{(x+2)^3}\,(3x-4)+c\right]$

246 $\int x(x-1)^5\,dx$ $\left[\frac{1}{42}(x-1)^6(6x+1)+c\right]$

247 $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1}+c\right]$

248 $\int x(x-1)^4\,dx$ $\left[\frac{1}{6}(x-1)^6+\frac{1}{5}(x-1)^5+c\right]$

249 Videolezione $\int x\sqrt[4]{x-1}\,dx$ $\left[\frac{4}{45}\sqrt[4]{(x-1)^5}\,(5x+4)+c\right]$

250 $\int x^2(x+1)^4\,dx$ $\left[\frac{1}{105}(x+1)^5(15x^2-5x+1)+c\right]$

251 $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$ $\left[\frac{3}{10}\sqrt[3]{(x+2)^2}\,(2x-1)+c\right]$

252 $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx$ $\left[\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}+c\right]$

253 $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ $[\arctan e^x + c]$

254 $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$ $\left[2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+c\right]$

255 **Metodi a confronto** Talvolta esistono più sostituzioni diverse che consentono il calcolo di un integrale. Calcola, per esempio, i seguenti integrali, eseguendo le due diverse sostituzioni indicate.

a. $\int x\sqrt{x+3}\,dx$ ponendo $\sqrt{x+3}=t$ oppure $x+3=u$

b. $\int x\sqrt[3]{x+4}\,dx$ ponendo $\sqrt[3]{x+4}=t$ oppure $x+4=u$

Esercizi riassuntivi: integrazione di funzioni composte e per sostituzione

256 **Caccia all'errore.** Nel calcolo dei seguenti integrali sono stati commessi alcuni errori. Individuali e correggili.

a. $\int \sin 2x\,dx = -\cos 2x + c$

b. $\int (x^2+1)^2\,dx = \frac{1}{2x}\int 2x(x^2+1)^2\,dx = \frac{1}{2x}\cdot\frac{(x^2+1)^3}{3}+c = \frac{(x^2+1)^3}{6x}+c$

c. $\int (e^{2x}+e^x)\,dx = e^{2x}+e^x+c$

d. $\int \sqrt{1-x}\,dx = \int (1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+c$

e. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{9}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+c$

Calcola i seguenti integrali.

257 $\int e^{2x}\cdot e^{x+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}e^{3x+1}+c\right]$

258 $\int \frac{1}{\sqrt{1-36x^2}}\,dx$ $\left[\frac{1}{6}\arcsin 6x+c\right]$

259 $\int e^x \sin(e^x+2)\,dx$ $[-\cos(e^x+2)+c]$

260 $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}+c\right]$

261 $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}+c\right]$

262 $\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\tan^3 x+c\right]$

263 $\int 2^{3r+1}\,dr$ $\left[\frac{2^{3r+1}}{3\ln 2}+c\right]$

264 $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln^4 x+c\right]$

265 $\int \frac{1}{3x-1}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln|3x-1|+c\right]$

266 $\int \sin x\cos^5 x\,dx$ $\left[-\frac{1}{6}\cos^6 x+c\right]$

267 $\int (2x+3)^4\,dx$ $\left[\frac{1}{10}(2x+3)^5+c\right]$

268 $\int \cos x\, e^{1-2\sin x}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}e^{1-2\sin x}+c\right]$

269 $\int \frac{e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}\,dx$ $\left[-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+c\right]$

270 $\int \frac{x^2}{x^3+4}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln|x^3+4|+c\right]$

271 $\int k\sqrt{k+4}\,dk$ $\left[\frac{2}{15}(3k-8)\sqrt{(k+4)^3}+c\right]$

272 $\int t^3\sqrt{1+t^4}\,dt$ $\left[\frac{1}{6}\sqrt{(t^4+1)^3}+c\right]$

273 $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+c\right]$

274 $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$ $[-\ln|\sin x+\cos x|+c]$

275 $\int x^3 e^{-x^4}\,dx$ $\left[-\frac{1}{4}e^{-x^4}+c\right]$

276 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+c\right]$

277 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$ $\left[\sqrt{x^2+5}+c\right]$

278 $\int (3x-1)^4\,dx$ $\left[\frac{1}{15}(3x-1)^5+c\right]$

279 $\int \frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$ $[2\theta-\tan\theta+c]$

280 $\int \frac{\ln x^7}{x}\,dx$ $\left[\frac{7}{2}\ln^2 x+c\right]$

281 $\int \sin 2x\cos x\,dx$ $\left[-\frac{2}{3}\cos^3 x+c\right]$

282 $\int \frac{4\sin x\cos x}{3\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx$ $\left[-\frac{1}{3}\cos 2x+c\right]$

ESERCIZI

283 $\displaystyle\int \frac{e^{3x+1}+e^{3x}}{e^{x+1}+e^{x}}dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{2x}+c\right]$

284 $\displaystyle\int \frac{x+1+\sqrt{4x+4}}{\sqrt{x+1}}dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2x+c\right]$

285 $\displaystyle\int \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $\left[2e^{1+\sqrt{x}}+c\right]$

286 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\arctan x}}{1+x^2}dx$ $\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{\arctan^4 x}+c\right]$

287 $\displaystyle\int \frac{\sin x+\sin 2x}{\sin x}dx$ $[2\sin x+x+c]$

288 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ $[\arctan e^x+c]$

Metodi a confronto

289 Calcola l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ in due modi:

a. per sostituzione, ponendo $x+1=t$;

b. osservando che $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ e procedendo poi con il calcolo di integrali immediati.

290 Calcola l'integrale $\int x\sqrt[3]{x-2}\,dx$ in due modi:

a. per sostituzione, ponendo $x-2=t$;

b. osservando che $x\sqrt[3]{x-2}=(x-2)\sqrt[3]{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{(x-2)^4}+2\sqrt[3]{x-2}$ e procedendo poi con il calcolo di integrali immediati.

291 Determina la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ tale che $F(e)=1$. $\left[F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+\frac{1}{3}\right]$

292 Determina la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ tale che $F(0)=1$. $\left[F(x)=\sqrt{x^2+4}-1\right]$

293 Determina la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)=e^x\sin e^x$ che ha come asintoto orizzontale sinistro la retta di equazione $y=2$. $[F(x)=3-\cos e^x]$

294 Determina la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+e}$ che ha come asintoto orizzontale sinistro l'asse x. $\left[F(x)=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+e)-\frac{1}{2}\right]$

295 Una funzione f è tale che $f''(x)=e^{2x-1}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$. Determina l'espressione analitica di f. $\left[f(x)=\frac{1}{4}e^{2x-1}-\frac{1}{2}x+3\right]$

296 Una funzione f è tale che $f''(x)=\tan^2 x$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$ e $f(0)=4$. Determina l'espressione analitica di f. $\left[f(x)=-\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2-x+4\right]$

297 **Realtà e modelli** **Raffreddamento dell'acqua.** Una pentola contenente acqua bollente alla temperatura di 100 °C viene posta a raffreddare in una stanza. La velocità (in °C/h) con cui decresce la temperatura dell'acqua è espressa dalla funzione:

$$f'(t)=-75e^{-t}$$

dove t è il tempo, misurato in ore, trascorso dall'istante $t=0$ in cui l'acqua viene posta a raffreddare.

a. Determina la funzione $f(t)$ che esprime la temperatura dell'acqua all'istante t.

b. Determina qual è la temperatura dell'acqua dopo 1 h e a quale velocità sta decrescendo la temperatura dell'acqua dopo 1 h.

c. Determina dopo quanto tempo la temperatura dell'acqua sarà la metà di quella iniziale. Esprimi il risultato in ore e minuti, arrotondato ai minuti.

[a. $f(t)=25+75e^{-t}$; b. circa 52,6 °C, circa –27,6 °C/h; c. 1 h e 6 min]

Matematica e fisica

298 Paolo inizia a correre lungo una strada rettilinea alle ore 18 ($t=0$) con una velocità decrescente (per la fatica) espressa in kilometri all'ora dalla funzione $v_P(t)=\frac{6}{t+1}$, essendo t il tempo (in ore) trascorso dalla partenza. Barbara inizia anch'essa a correre alle 18 ($t=0$), lungo la stessa strada di Paolo, ma 1 km più avanti rispetto al punto di partenza di Paolo. Barbara corre nello stesso verso di Paolo e la sua velocità è espressa in km/h dalla funzione $v_B(t)=\frac{3}{t+1}$, essendo t il tempo (in ore) trascorso dalla sua partenza.

a. Siano $s_P(t)$ ed $s_B(t)$ le funzioni che esprimono in funzione del tempo t la distanza (in kilometri) rispettivamente di Paolo e Barbara, dal punto in cui è partito Paolo; determina l'espressione analitica di tali funzioni.

b. Stabilisci se Paolo sorpassa Barbara e, in caso affermativo, dopo quanto tempo dalla sua partenza.

[**a.** $s_P(t)=6\ln(t+1)$, $s_B(t)=3\ln(t+1)+1$; **b.** dopo circa 23,7 minuti]

299 All'istante $t=0$ s, un corpo che si muove su una retta sta viaggiando alla velocità di 18 m/s e inizia a decelerare finché non si arresta, con una decelerazione (in m/s^2) che varia secondo la legge $a(t)=-\frac{1}{\sqrt{t+1}}$.

a. Determina la legge oraria $s(t)$ del moto, sapendo che $s(8)=200$.

b. Determina lo spazio che percorre il corpo dall'istante in cui inizia a frenare a quello in cui si arresta.

$\left[\mathbf{a.}\ s(t)=-\frac{4}{3}(t+1)\sqrt{t+1}+20t+76;\ \mathbf{b.}\ 648\text{ m}\right]$

4. Integrazione per parti

Teoria p. 82

Esercizi introduttivi

Test

300 Quale delle seguenti identità esprime il metodo di integrazione per parti?

A $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=f'(x)\cdot g'(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

B $\int f'(x)\cdot g'(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

C $\int f(x)\cdot g(x)\,dx=f(x)\cdot g'(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

D $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

301 Paolo imposta il calcolo dell'integrale $\int xe^{-x}dx$ come segue: $\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-\int(-e^{-x})\,dx$.
Quale fattore finito ha considerato?

302 Per calcolare $\int x^2\ln x\,dx$ quale fattore finito conviene scegliere?

A x B x^2 C $\ln x$ D $x\ln x$

303 Per calcolare $\int x^2e^x dx$ quale fattore finito conviene scegliere?

A x B x^2 C e^x D xe^x

304 Per calcolare quale dei seguenti integrali è utile utilizzare il metodo di integrazione per parti?

A $\int x\sin x\,dx$ B $\int \sin x\cos x\,dx$ C $\int x\sin x^2\,dx$ D $\int \sin x\cos^2 x\,dx$

Calcolo di integrali mediante il metodo di integrazione per parti

305 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti integrali:

a. $\int x\cos 2x\,dx$ **b.** $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ **c.** $\int \arcsin x\,dx$

---

a. Poni: $f(x)=x$ e $g'(x)=\cos 2x$, da cui:

$f'(x)=1$ e $g(x)=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x$

Ora calcola l'integrale: $\int \underbrace{x}_{f(x)}\ \underbrace{\cos 2x}_{g'(x)}\,dx=\underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{g(x)}-\int\underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{g(x)}\,dx=$ ....

$\left[\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+c\right]$

b. Poni:

$$f(x) = \ln x \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \frac{1}{x^2}$$

da cui:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$

Ora calcola l'integrale:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{g(x)}\,dx = \ldots\ldots\ldots \qquad \left[-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} + c\right]$$

c. Poni:

$$f(x) = \arcsin x \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 1$$

da cui:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \int 1\,dx = x$$

Ora calcola l'integrale:

$$\int \arcsin x\,dx = \int \underbrace{\arcsin x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\arcsin x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx = \ldots\ldots\ldots \qquad \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c\right]$$

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

306 $\int xe^{2x}dx$ $\quad \left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + c\right]$

307 $\int x\cos 2x\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c\right]$

308 $\int xe^{-x}dx$ $\quad [-e^{x}(x+1)+c]$

309 $\int \ln(2x-3)\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}(2x-3)\ln(2x-3) - x + c\right]$

310 $\int 3^x x\,dx$ $\quad \left[3^x\left(\frac{x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln^2 3}\right) + c\right]$

311 $\int x^2 \ln x\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c\right]$

312 $\int xe^{1-2x}\,dx$ $\quad \left[-\frac{1}{4}(2x+1)e^{1-2x} + c\right]$

313 $\int \ln(x+5)\,dx$ $\quad [(x+5)\ln(x+5) - x + c]$

314 $\int xe^{4x}\,dx$ $\quad \left[e^{4x}\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16}\right) + c\right]$

315 $\int \frac{t}{e^{2t}}\,dt$ $\quad \left[-\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} + c\right]$

316 $\int x\sin 3x\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}x\cos 3x + c\right]$

317 $\int \log_2 x\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{\ln 2}(x\ln x - x) + c\right]$

318 $\int (2x-1)e^x\,dx$ $\quad [e^x(2x-3)+c]$

319 $\int (x-2)\ln x\,dx$ $\quad \left[\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} + 2x + c\right]$

320 $\int (x^2-1)e^x\,dx$ $\quad [e^x(x^2-2x+1)+c]$

321 $\int x^2\sin x\,dx$ $\quad [(2-x^2)\cos x + 2x\sin x + c]$

322 $\int \arcsin x\,dx$ $\quad \left[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c\right]$

323 $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ $\quad \left[-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c\right]$

324 $\int \arctan\frac{1}{x}\,dx$ $\quad \left[x\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c\right]$

325 $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ $\quad [\ln|\cos x| + x\tan x + c]$

326 $\int \arctan 2x\,dx$ $\quad \left[x\arctan 2x - \frac{1}{4}\ln(4x^2+1) + c\right]$

327 $\int (x^2-2x)e^{-x}\,dx$ $\quad [-x^2e^{-x}+c]$

328 $\int \frac{\ln y^2}{y^2}\,dy$ $\quad \left[-\frac{2}{y}\ln|y| - \frac{2}{y} + c\right]$

329 $\int \ln^2 x\,dx$ $\quad [x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c]$

330 $\int \ln\frac{x}{x-2}\,dx$ $\quad \left[x\ln\frac{x}{x-2} - 2\ln\left|\frac{1}{x-2}\right| + c\right]$

331 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(*Suggerimento*: prendi come fattore finito x^2.) $\quad \left[\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1} + c\right]$

332 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo $\int e^x \cos x\, dx$.

—

- Applichiamo il metodo di integrazione per parti, scegliendo $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \cos x$.
  Dunque: $f'(x) = e^x$ e $g(x) \sin x$
  Otteniamo:
  $$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$
- Abbiamo ottenuto un nuovo integrale, $\int e^x \sin x\, dx$, che non appare né più facile né più difficile di quello di partenza. Proviamo ad applicare nuovamente il metodo di integrazione per parti prendendo:
  $$f(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \sin x$$
  Quindi: $f'(x) = e^x$ e $g(x) = -\cos x$
  Otteniamo:
  $$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$
- In definitiva abbiamo:
  $$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right) =$$
  $$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

Apparentemente siamo tornati allo stesso integrale da cui siamo partiti! Con un po' più di riflessione ci accorgiamo però di potere concludere; infatti, nella relazione ottenuta l'integrale compare all'ultimo membro preceduto dal *segno meno*; portandolo al primo membro otteniamo:

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

da cui, dividendo per 2 e aggiungendo la costante d'integrazione:

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x) + c$$

Nota Ogniqualvolta, applicando ripetutamente il metodo di integrazione per parti, si «ritorna all'integrale iniziale» si può utilizzare una tecnica simile a quella illustrata in questo esercizio.

Calcola i seguenti integrali, tenendo presente la tecnica presentata nell'esercizio svolto precedente.

333 $\int \sin(\ln x)\, dx$ $\left[\frac{1}{2}x \sin \ln x - \frac{1}{2}x \cos \ln x + c\right]$

334 $\int e^x \sin x\, dx$ $\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c\right]$

335 $\int e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) dt$ $\left[\frac{1}{2}e^t\left[\sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right] + c\right]$

336 $\int \cos \ln x\, dx$ $\left[\frac{1}{2}x \cos \ln x + \frac{1}{2}x \sin \ln x + c\right]$

Metodi a confronto

337 Calcola l'integrale $\int \sin^2 x\, dx$ in due modi:

a. integrando per parti con $f(x) = \sin x$ e $g'(x) = \sin x$ e applicando successivamente l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, come illustrato nell'esercizio svolto 332;

b. applicando la formula $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$. $\left[\dfrac{x - \sin x \cos x}{2} + c\right]$

338 Calcola l'integrale $\int \cos^2 x\, dx$ in tre modi:

a. integrando per parti e applicando successivamente l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, analogamente all'esercizio precedente;

b. applicando la formula $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$;

c. applicando immediatamente l'identità $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ e riconducendoti in tal modo al calcolo fatto nell'esercizio precedente.

Confronta i risultati e verifica che sono equivalenti. $\left[\dfrac{x + \sin x \cos x}{2} + c\right]$

339 I seguenti integrali possono essere calcolati sia eseguendo una sostituzione opportuna, sia per parti. Calcola ciascun integrale utilizzando entrambi i metodi.

a. $\int x\sqrt{2x+5}\,dx$ **b.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(*Suggerimento*: nel caso **b** poni $\sqrt{1+x^2}=t$ per risolvere l'integrale per sostituzione e poni $f(x)=x^2$ e $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ per risolvere l'integrale per parti.)

340 **Il metodo di integrazione per parti è sempre utile/ 1?** Occorre non «abusare» del metodo di integrazione per parti. Sebbene esso sia spesso utile per integrare il *prodotto* di funzioni, ci sono funzioni prodotto per cui il metodo per parti non è efficace oppure è più laborioso rispetto ai metodi visti nei paragrafi precedenti.
Per ciascuno dei seguenti integrali stabilisci se è opportuno utilizzare il metodo di integrazione per parti o se l'integrale è calcolabile con i metodi visti in precedenza. Calcola quindi gli integrali.

a. $\int x\,e^{-x^2}dx$ **b.** $\int x^2e^{-x}dx$ **c.** $\int x^3e^{x^4}dx$ $\left[\mathbf{a.}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c;\ \mathbf{b.}-(x^2+2x+2)e^{-x}+c;\ \mathbf{c.}\ \frac{1}{4}e^{x^4}+c\right]$

341 **Il metodo di integrazione per parti è sempre utile/ 2?** Svolgi un esercizio analogo al precedente con i seguenti integrali.

a. $\int x^2\sin x^3\,dx$ **b.** $\int x^3\sin x^2\,dx$ **c.** $\int \sin x\,e^{\cos x}dx$ $\left[\mathbf{a.}-\frac{1}{3}\cos x^3+c;\ \mathbf{b.}\ \frac{1}{2}\sin x^2-\frac{1}{2}x^2\cos x^2+c;\ \mathbf{c.}-e^{\cos x}+c\right]$

Applicazioni

342 Tra le primitive della funzione $f(x)=xe^{2x}$ individua quella per cui l'ordinata del punto di minimo è uguale a 1.
$\left[F(x)=e^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{4}\right]$

343 Tra le primitive della funzione $f(x)=\ln x^2$ determina quella il cui grafico passa per il punto di coordinate (1, 1).
$[F(x)=2x\ln|x|-2x+3]$

344 Tra le primitive della funzione $f(x)=x\sin x$ determina quella che interseca l'asse x nel punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$.
$[F(x)=-x\cos x+\sin x-1]$

345 Tra le primitive della funzione $f(x)=\arctan x$ determina quella per cui l'ordinata del punto di minimo è uguale a 1.
$\left[F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+1\right]$

346 Determina le primitive della funzione $f(x)=x\ln x$ i cui grafici non hanno punti d'intersezione con l'asse x.
$\left[F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c,\ \text{con}\ c>\frac{1}{4}\right]$

5. Integrazione di funzioni razionali frazionarie

Teoria p. 85

Esercizi introduttivi

Test

347 Qual è il risultato dell'integrale $\int \frac{1}{x-1}dx$?

A $\frac{1}{(x-1)^2}+c$ B $\ln|x-1|+c$ C $-\frac{1}{(x-1)^2}+c$ D $\ln\frac{1}{|x-1|}+c$

348 Qual è il risultato dell'integrale $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$?

A $\frac{1}{x-1}+c$ B $\frac{1}{2}\ln(x-1)^2+c$ C $\frac{3}{(x-1)^3}+c$ D $\frac{1}{1-x}+c$

349 Qual è il risultato dell'integrale $\int \frac{1}{x^2+25}dx$?

A $\arctan(x+25)+c$ B $5\arctan\frac{x}{5}+c$ C $\frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}+c$ D $\frac{1}{5}\arctan 5x+c$

350 Vero o falso?

a. $\dfrac{x(x^2+9)}{x^2-9}$ può essere espresso nella forma $\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+3}$, con $A, B \in \mathbf{R}$ V F

b. $\dfrac{x^2+9}{x(x^2-9)}$ può essere espresso nella forma $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{x+3}$, con $A, B, C \in \mathbf{R}$ V F

c. $\dfrac{x^2+9}{x^2(x+3)}$ può essere espresso nella forma $\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x+3}$, con $A, B \in \mathbf{R}$ V F

d. $\dfrac{x^2-9}{x(x^2+9)}$ può essere espresso nella forma $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2+9}$, con $A, B \in \mathbf{R}$ V F

e. $\dfrac{x^2-9}{(x^2+9)^2}$ può essere espresso nella forma $\dfrac{Ax+B}{x^2+9}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$, con $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

Il numeratore ha grado maggiore del denominatore

351 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x+2}\,dx$.

- Dividi x^3+1 per $x+2$ e verifica che:
  $Q(x)=x^2-2x+4, \qquad R(x)=-7$
- Ne segue che:
  $\dfrac{x^3+1}{x+2}=x^2-2x+4-\dfrac{7}{x+2}$
- Pertanto:
  $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x+2}\,dx=\int\left(x^2-2x+4-\frac{7}{x+2}\right)dx= \dots\dots$

$\left[\dfrac{x^3}{3}-x^2+4x-7\ln|x+2|+c\right]$

Calcola i seguenti integrali.

352 $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-1}{x-3}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{2}x^2-\ln|x-3|+c\right]$

353 $\displaystyle\int \frac{2x^2+x}{2x-1}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+\dfrac{1}{2}x^2+x+c\right]$

354 $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x-1}{2x+3}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+c\right]$

355 $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x+1}\,dx$ $\left[\ln|x+1|+\dfrac{1}{3}x^3+x+c\right]$

356 $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3-1}{x-2}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{4}x^4-\ln|x-2|+c\right]$

357 $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-x-1}{x+2}\,dx$ $\left[\ln|x+2|+\dfrac{1}{3}x^3-x+c\right]$

358 Videolezione $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+4x-1}{x^2-4x+4}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{2}x^2+c\right]$

359 $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2-x+2}{x^2-2x+1}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{x-1}+c\right]$

Il denominatore è di secondo grado e ha discriminante positivo

360 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx$.

- Osserva che $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$.
- Determina A e B in modo che $\dfrac{1}{x^2-5x+4}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-4}$ e verifica che $A=-\dfrac{1}{3}$, $B=\dfrac{1}{3}$.
- Pertanto:
  $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-4}\,dx= \dots\dots$

Calcola i seguenti integrali.

361 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+c\right]$

362 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{3}\ln|x|-\dfrac{1}{3}\ln|x+3|+c\right]$

363 $\int \frac{1}{x^2-2}dx$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+c\right]$

364 $\int \frac{1}{x^2+3x-4}dx$ $\left[\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{5}\ln|x+4|+c\right]$

365 $\int \frac{1}{x^2-4x+3}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+c\right]$

366 $\int \frac{1}{2x^2-x-1}dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|2x+1|+c\right]$

367 $\int \frac{2x+1}{x^2-4x}dx$ $\left[\frac{9}{4}\ln|x-4|-\frac{1}{4}\ln|x|+c\right]$

368 $\int \frac{x}{x^2-2x}dx$ $[\ln|x-2|+c]$

369 $\int \frac{2x+3}{x^2+4x-5}dx$ $\left[\frac{7}{6}\ln|x+5|+\frac{5}{6}\ln|x-1|+c\right]$

370 $\int \frac{x-7}{x^2+x-6}dx$ $[2\ln|x+3|-\ln|x+2|+c]$

---

371 **Videolezione** $\int \frac{x+3}{2x^2-x-1}dx$ $\left[\frac{4}{3}\ln|x-1|-\frac{5}{6}\ln|2x+1|+c\right]$

372 $\int \frac{x-1}{x^2+5x-14}dx$ $\left[\frac{8}{9}\ln|x+7|+\frac{1}{9}\ln|x-2|+c\right]$

Il denominatore è di secondo grado e ha discriminante nullo

373 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti integrali:

a. $\int \frac{1}{x^2+10x+25}dx$ **b.** $\int \frac{x+1}{x^2-6x+9}dx$

---

a. $\int \frac{1}{x^2+10x+25}dx = \int \frac{1}{(x+5)^2}dx = \ldots\ldots\ldots$

b. Osserva che $x^2-6x+9=(x-3)^2$ e trova A e B tali che $\frac{x+1}{x^2-6x+9}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}$.
Verificato che $A=1$, $B=4$, puoi scrivere:

$$\int \frac{x+1}{x^2-6x+9}dx = \int\left[\frac{1}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}\right]dx = \ldots\ldots$$

$\left[\mathbf{a.}-\frac{1}{x+5}+c; \mathbf{b.}\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+c\right]$

Calcola i seguenti integrali.

374 $\int \frac{1}{x^2+4x+4}dx$ $\left[-\frac{1}{x+2}+c\right]$

375 $\int \frac{1}{x^2-6x+9}dx$ $\left[\frac{1}{3-x}+c\right]$

376 $\int \frac{1}{4x^2-4x+1}dx$ $\left[\frac{1}{2(1-2x)}+c\right]$

377 $\int \frac{1}{4x^2-12x+9}dx$ $\left[\frac{1}{2(3-2x)}+c\right]$

378 **Videolezione** $\int \frac{1}{x^2+8x+16}dx$ $\left[-\frac{1}{x+4}+c\right]$

379 $\int \frac{2x+3}{x^2+6x+9}dx$ $\left[2\ln|x+3|+\frac{3}{x+3}+c\right]$

380 $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+1}dx$ $\left[2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c\right]$

381 $\int \frac{3x+1}{x^2-10x+25}dx$ $\left[3\ln|x-5|-\frac{16}{x-5}+c\right]$

382 $\int \frac{4x+3}{x^2+8x+16}dx$ $\left[4\ln|x+4|+\frac{13}{x+4}+c\right]$

383 $\int \frac{x+1}{4x^2-12x+9}dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln|2x-3|-\frac{5}{4(2x-3)}+c\right]$

384 $\int \frac{x}{x^2-4x+4}dx$ $\left[\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+c\right]$

385 $\int \frac{x-2}{9x^2+6x+1}dx$ $\left[\frac{1}{9}\ln|3x+1|+\frac{7}{9(3x+1)}+c\right]$

Il denominatore è di secondo grado e ha discriminante negativo

386 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti integrali:

a. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$ b. $\int \frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx$

a. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+\ldots}\,dx = \frac{1}{\ldots}\arctan\frac{\ldots}{\ldots}+c$

b. $\int \frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2-2}{x^2-2x+2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2}{x^2-2x+2}\,dx = \ldots\ldots - \int \frac{1}{(x-1)^2+\ldots}\,dx =$

$= \ldots\ldots$

$\left[\text{a. } \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+c;\ \text{b. } \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)-\arctan(x-1)+c\right]$

Calcola i seguenti integrali.

387 $\int \frac{1}{x^2+25}\,dx$ $\left[\frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}+c\right]$

388 $\int \frac{1}{x^2+5}\,dx$ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}}+c\right]$

389 $\int \frac{1}{x^2+16}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4}+c\right]$

390 $\int \frac{1}{4x^2+16}\,dx$ $\left[\frac{1}{8}\arctan\frac{x}{2}+c\right]$

391 $\int \frac{1}{9x^2+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\arctan 3x+c\right]$

392 $\int \frac{1}{4x^2+3}\,dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\frac{2x}{\sqrt{3}}+c\right]$

393 $\int \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx$ $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+c\right]$

394 $\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx$ $[\arctan(x+3)+c]$

395 $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c\right]$

396 $\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,dx$ $\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+c\right]$

397 $\int \frac{x+1}{x^2+4}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+c\right]$

398 $\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$ $[\arctan x+\ln(x^2+1)+c]$

399 $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}\,dx$ $[\ln(x^2+4x+5)-3\arctan(x+2)+c]$

400 **Videolezione** $\int \frac{x+1}{x^2-2x+3}\,dx$ $\left[\sqrt{2}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3)+c\right]$

401 $\int \frac{x-1}{x^2-3x+3}\,dx$ $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln(x^2-3x+3)+c\right]$

Il denominatore non è di secondo grado

402 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola $\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx$.

- Scomponi il denominatore della funzione integranda:

  $x^3+4x = x(x^2+4)$

- Determina A, B e C tali che:

  $\frac{1}{x^3+4x} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$

  e verifica che $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=0$.

- $\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \ldots\ldots$ $\left[\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)+c\right]$

Calcola i seguenti integrali.

403 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x^2-1|-\ln|x|+c\right]$

404 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$ $\left[\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c\right]$

405 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-2)^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{2(x-2)}+c\right]$

406 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-x^3}\,dx$ $\left[\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+c\right]$

407 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$ $\left[\frac{2}{5}\arctan x-\frac{1}{10}\ln(x^2+1)+\frac{1}{5}\ln|x+2|+c\right]$

408 Videolezione $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-3x^2+2x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x(x-2)^3|-2\ln|x-1|+c\right]$

409 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-16}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c\right]$

410 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{x}+c\right]$

411 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+4x^2+4}\,dx$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{2}+\frac{x}{4(x^2+2)}+c\right]$

412 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-8x^2+16}\,dx$ $\left[-\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\frac{x}{8(x^2-4)}+c\right]$

Esercizi riassuntivi: integrazione di funzioni razionali frazionarie

413 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti integrali:

a. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,dx$ b. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+4}\,dx$ c. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,dx$

Osserva che i tre integrali differiscono solo per il coefficiente numerico al denominatore, tuttavia le modalità di integrazione sono differenti.

a. Il trinomio x^2+4x+3 si scompone in $(x+1)(x+3)$, per cui devi cercare una decomposizione del tipo:

$$\frac{x-1}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

Verifica che $A=-1$ e $B=2$, quindi

$$\int \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,dx=-\int\frac{1}{x+1}\,dx+\int\frac{2}{x+3}\,dx=\ldots$$

b. Essendo $x^2+4x+4=(x+2)^2$, questa volta devi cercare una decomposizione del tipo:

$$\frac{x-1}{x^2+4x+4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}$$

Verifica che $A=1$ e $B=-3$, perciò

$$\int \frac{x-1}{x^2+4x+4}\,dx=\int\frac{1}{x+2}\,dx-\int\frac{3}{(x+2)^2}\,dx=\ldots$$

c. Poiché $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$, cerca inizialmente A e B di modo che risulti:

$$\frac{x-1}{x^2+4x+5}=\frac{A(2x+4)}{x^2+4x+5}+\frac{B}{(x+2)^2+1}$$

Verifica che $A=\frac{1}{2}$ e $B=-3$, quindi

$$\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx-\int\frac{3}{(x+2)^2+1}\,dx=\ldots$$

Calcola i seguenti integrali.

414 $\int \frac{1}{9x^2-6x+1}dx$ $\left[\frac{1}{3(1-3x)}+c\right]$

415 $\int \frac{1}{(2x-1)^3}dx$ $\left[-\frac{1}{4(2x-1)^2}+c\right]$

416 $\int \frac{x+2}{x^2-6x+9}dx$ $\left[\ln|x-3|-\frac{5}{x-3}+c\right]$

417 $\int \frac{x^4}{x^2-4}dx$ $\left[\frac{1}{3}x^3+4x+4\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c\right]$

418 $\int \frac{x}{x^2-4}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|+c\right]$

419 $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$ $[\ln|x-1|-\ln|x+1|+x+c]$

420 $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$ $[x-2\arctan x+c]$

421 $\int \frac{x^2+4x}{x^2+5x-6}dx$ $\left[-\frac{12}{7}\ln|x+6|+\frac{5}{7}\ln|x-1|+x+c\right]$

422 $\int \frac{x-1}{x^2+9}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+c\right]$

423 $\int \frac{x-2}{x^2-1}dx$ $\left[-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+1|+c\right]$

424 $\int \frac{x+4}{x^2+6x-7}dx$ $\left[\frac{3}{8}\ln|x+7|+\frac{5}{8}\ln|x-1|+c\right]$

425 $\int \frac{x-1}{x^2-6x+9}dx$ $\left[\ln|x-3|-\frac{2}{x-3}+c\right]$

426 $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}dx$ $[3\ln|x+2|-2\ln|x+1|+c]$

427 $\int \frac{1}{t^2+6t+10}dt$ $[\arctan(t+3)+c]$

428 $\int \frac{x}{4x^2-1}dx$ $\left[\frac{1}{8}\ln|4x^2-1|+c\right]$

429 $\int \frac{x}{x^2+4x+5}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)-2\arctan(x+2)+c\right]$

430 $\int \frac{x^3}{x^2-4x+3}dx$ $\left[\frac{27}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}x^2+4x+c\right]$

431 $\int \frac{1}{x^3+4x^2}dx$ $\left[\frac{1}{16}\ln|x+4|-\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{4x}+c\right]$

432 $\int \frac{x^2-1}{(x+2)^2}dx$ $\left[x-4\ln|x+2|-\frac{3}{x+2}+c\right]$

433 $\int \frac{x+2}{x^3+x}dx$ $[\arctan x-\ln(x^2+1)+2\ln|x|+c]$

434 $\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$ $\left[\frac{1}{2(1-x^2)}+c\right]$

435 $\int \frac{1}{(x^2-4)^2}dx$ $\left[-\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\frac{x}{8(x^2-4)}+c\right]$

436 $\int \frac{1}{x^3-4x^2}dx$ $\left[\frac{1}{16}\ln|x-4|-\frac{1}{16}\ln|x|+\frac{1}{4x}+c\right]$

437 $\int \frac{1}{x^3+4x}dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)+c\right]$

438 $\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x-4}dx$ $\left[x+\frac{4}{5}\ln|x-1|-\frac{9}{5}\ln|x+4|+c\right]$

439 $\int \frac{x^3+1}{x+2}dx$ $\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x-7\ln|x+2|+c\right]$

440 $\int \frac{1}{x^4+2x^2+1}dx$ $\left[\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+c\right]$

---

441 $\int \frac{1}{x^3+8}dx$ $\left[\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}(x^2-2x+4)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+c\right]$

442 $\int \frac{x^2-4}{(x^2+1)^2}dx$ $\left[-\frac{3}{2}\arctan x-\frac{5x}{2(x^2+1)}+c\right]$

443 $\int \frac{u^5}{u^4-1}du$ $\left[\frac{1}{4}\ln|u^2-1|-\frac{1}{4}\ln(u^2+1)+\frac{1}{2}u^2+c\right]$

444 $\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}dx$ $\left[\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c\right]$

Calcola i seguenti integrali, riconducibili mediante sostituzione o integrazione per parti a integrali di funzioni razionali.

445 $\int \frac{1}{1+e^x}dx$ $[x-\ln(1+e^x)+c]$

446 $\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}dx$ $\left[\ln\left|\sqrt{x+4}-2\right|-\frac{1}{2}\ln|x|+c\right]$

447 $\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx$ $\left[x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+c\right]$

448 $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$ $\left[\frac{x\ln x}{x+1}-\ln(x+1)+c\right]$

449 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}dx$ $\left[3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}+3\sqrt[3]{x}+c\right]$

450 $\int \frac{\arctan x}{x^2}dx$ $\left[-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln|x|+c\right]$

451 $\int \frac{\sin x}{2\cos^2 x-\cos x}dx$ $[\ln|\cos x|-\ln|2\cos x-1|+c]$

452 $\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx$ $[\ln|e^x-2|-\ln|e^x-1|+c]$

---

453 Determina la primitiva della funzione $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+4}$ il cui grafico interseca l'asse x nel punto di coordinate (2, 0).
$\left[F(x)=x-\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{8}-2\right]$

454 Determina la primitiva della funzione $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$ il cui grafico passa per il punto di coordinate (2, 1).
$\left[F(x)=2\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}+x-4\right]$

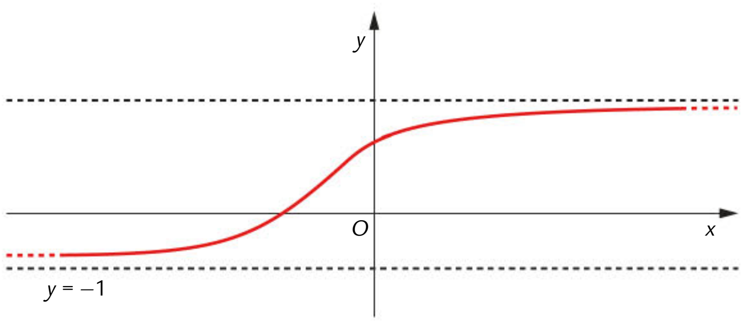
455 Sia $F(x)$ la primitiva della funzione $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2+1}$ il cui grafico passa per l'origine. Scrivi le equazioni degli asintoti di $F(x)$.
$\left[y=-\frac{3\pi}{4}, y=\frac{\pi}{4}\right]$

456 Siano a e k due numeri positivi. Indicata con $F(x)$ la funzione primitiva di $f(x)=\frac{1}{(ax)^2+k^2}$ il cui grafico passa per l'origine, determina l'immagine I di $F(x)$.
$\left[I=\left(-\frac{\pi}{2ak}, \frac{\pi}{2ak}\right)\right]$

457 Determina la primitiva della funzione $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$ il cui grafico ha come asintoto obliquo la retta di equazione $y=x+2$.
$\left[F(x)=\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+x+2\right]$

458 Determina la primitiva della funzione $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ il cui grafico ha un punto di minimo nell'origine.
$[F(x)=2\ln(e^x+1)-x-2\ln 2]$

459 **Interpretazione di grafici** Nella seguente figura è rappresentato il grafico di una primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$; in essa sono rappresentati, tratteggiati, anche gli asintoti di $F(x)$. Determina l'espressione analitica di $F(x)$.



$\left[F(x)=\arctan(x+1)+\frac{\pi}{2}-1\right]$

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

460 **Vero o falso?**

a. le funzioni $F_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $F_2(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$, $F_3(x) = \dfrac{-x-2}{x+1}$ ed $F_4(x) = \dfrac{5x+4}{x+1}$ sono tutte primitive della stessa funzione V F

b. i grafici delle primitive di una funzione $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ si possono trasformare gli uni negli altri per mezzo di traslazioni verticali V F

c. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)\,dx = f(x) + c$, con $c \in \mathbf{R}$ V F

d. $\displaystyle\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx = f(x) + c$ V F

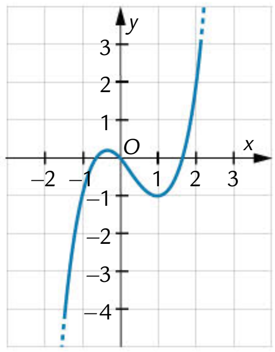
e. $\displaystyle\int \cos(\omega t + \varphi)\,dt = \sin(\omega t + \varphi) + c$ V F

f. l'integrale $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$ può essere risolto solo per parti V F

g. la funzione $F(x) = \ln(x^2+1) + 5\arctan x$ è l'unica primitiva di $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+1}$ il cui grafico passa per l'origine V F

Test

461 In figura è rappresentato il grafico di una primitiva di:



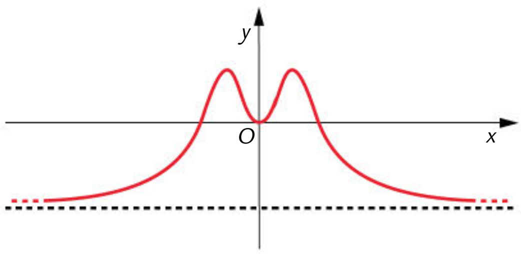
A $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

B $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

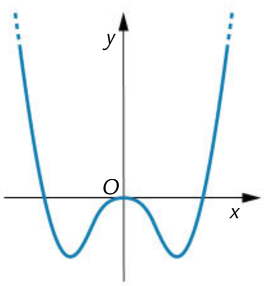
C $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

D $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

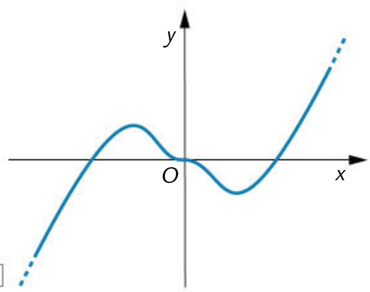
462 In figura è rappresentato il grafico di una funzione.



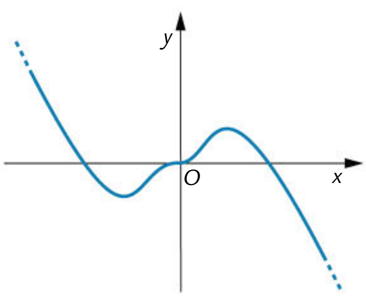
Quale tra i seguenti potrebbe essere il grafico di una sua primitiva?



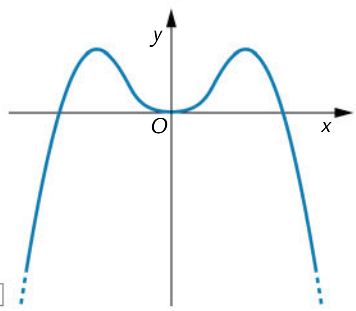
A



B



C



D

463 Le seguenti funzioni sono tutte primitive di $f(x)=\frac{4}{x}$ tranne una; quale?

A $4\ln|x|$ B $15+\ln x^4$ C $3+2\ln x^2$ D $10+\ln x^8$

464 Quale delle seguenti è una primitiva di $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$?

A $\ln(x^2+1)$ B $\frac{x-1}{(x^2+1)^2}$ C $\ln\sqrt{x^2+1}$ D $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

465 Quale tra le seguenti è una primitiva della funzione $f(x)=\sin x\cos^3 x$?

A $F(x)=\frac{3}{4}\cos^4 x$

B $F(x)=\frac{3}{4}\cos^4 x+\sin^4 x$

C $F(x)=\frac{3}{4}\cos^4 x+\sin^4 x+\sin^2 x$

D $F(x)=\frac{3}{4}\cos^4 x+\sin^4 x+\frac{1}{2}\sin^2 2x$

466 Per quali valori di a, b, c il polinomio $P(x)=ax^3+bx^2+cx$ è una primitiva di $Q(x)=12x^2+6x+1$?

A $a=6, b=3, c=4$ B $a=4, b=3, c=1$ C $a=2, b=3, c=4$ D $a=3, b=4, c=1$

467 Una sola delle seguenti uguaglianze è corretta; quale?

A $\int \sin k\,dx=-\cos k+c$

B $\int \sin k\,dx=\cos x+c$

C $\int \sin k\,dx=-\cos x+c$

D $\int \sin k\,dx=x\sin k+c$

A mente

Calcola i seguenti integrali.

468 $\int(\sin^2 3x+\cos^2 3x)\,dx$

469 $\int \frac{e^{12x}\cdot e^{-2x}}{e^{7x}}\,dx$

470 $\int \frac{\ln\sqrt{x+1}}{\ln(x+1)^3}\,dx$

471 $\int\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]dx$

472 $\int \frac{2\ln x^3-6\ln x+\ln e}{x}\,dx$

Calcola i seguenti integrali.

473 $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c\right]$

474 $\int \sqrt[3]{1+2x}\,dx$ $\left[\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x+1)^4}+c\right]$

475 $\int \frac{1}{4x+3}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln|4x+3|+c\right]$

476 $\int \frac{x}{x+6}\,dx$ $[-\ln|x+6|+x+c]$

477 $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ $[\tan x+x+c]$

478 $\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$ $\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c\right]$

479 $\int \frac{x}{4x^2-12x+9}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln|2x-3|-\frac{3}{4(2x-3)}+c\right]$

480 $\int(e^{10x-1}-e)\,dx$ $\left[\frac{1}{10}e^{10x-1}-ex+c\right]$

481 $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|2\sin x+1|+c\right]$

482 $\int \frac{1}{4x^2+4x+1}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2(2x+1)}+c\right]$

483 $\int \frac{x^2-4}{x+1}\,dx$ $\left[-3\ln|x+1|+\frac{1}{2}x^2-x+c\right]$

484 $\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx$ $\left[\frac{3}{28}(4x-3)\sqrt[3]{(x+1)^4}+c\right]$

485 $\int \frac{1}{\sqrt{x-4}}\,dx$ $[2\sqrt{x-4}+c]$

486 $\int(2u-1)(u-\sqrt{u})\,du$ $\left[\frac{2}{3}u^3-\frac{4}{5}u^2\sqrt{u}-\frac{1}{2}u^2+\frac{2}{3}u\sqrt{u}+c\right]$

487 $\int \frac{x^2-1}{x^2-3x-10}\,dx$ $\left[\frac{24}{7}\ln|x-5|-\frac{3}{7}\ln|x+2|+x+c\right]$

488 $\int \frac{x}{4x^2+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{8}\ln(4x^2+1)+c\right]$

489 $\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$ $\left[x-2\arctan\frac{x}{2}+c\right]$

490 $\int (x^3-1)^2\,dx$ $\left[\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{2}x^4+x+c\right]$

491 $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$ $\left[-\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}+c\right]$

492 $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^4}\,dx$ $\left[-\frac{1}{3(e^x+1)^3}+c\right]$

493 $\int \sin 3x\sqrt{1+\cos 3x}\,dx$ $\left[-\frac{2}{9}\sqrt{(1+\cos 3x)^3}+c\right]$

494 $\int \frac{e^{3y-1}}{e^{5y-4}}\,dy$ $\left[-\frac{1}{2}e^{3-2y}+c\right]$

495 $\int \frac{(x-1)^2}{x^2}\,dx$ $\left[-2\ln|x|+x-\frac{1}{x}+c\right]$

496 $\int x^4\cos x^5\,dx$ $\left[\frac{1}{5}\sin x^5+c\right]$

497 $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-9)^3}+c\right]$

498 $\int \frac{x^5+x^6+x^8}{x^7}\,dx$ $\left[\ln|x|+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}+c\right]$

499 $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ $\left[-e^{\frac{1}{x}}+c\right]$

500 $\int \frac{1}{\cos^2\theta\,\tan^3\theta}\,d\theta$ $\left[-\frac{1}{2\sin^2\theta}+c\right]$

501 $\int \cos x(2\sin x-1)\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+c\right]$

502 $\int \frac{x^2}{x^2-4x+5}\,dx$ $[3\arctan(x-2)+2\ln(x^2-4x+5)+x+c]$

503 $\int \frac{1}{x^2+5x-6}\,dx$ $\left[-\frac{1}{7}\ln|x+6|+\frac{1}{7}\ln|x-1|+c\right]$

504 $\int \frac{\sin(3\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ $\left[-\frac{2}{3}\cos(3\sqrt{x})+c\right]$

505 $\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\,dt$ $\left[\sqrt{t^2+4}+c\right]$

506 $\int (e^x+1)^2\,dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+c\right]$

507 $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx$ $\left[\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}x^2+c\right]$

508 $\int \frac{1-\sqrt[3]{x+2}}{x+2}\,dx$ $\left[\ln|x+2|-3\sqrt[3]{x+2}+c\right]$

509 $\int x(x+3)^{10}\,dx$ $\left[\frac{1}{12}(x+3)^{12}-\frac{3}{11}(x+3)^{11}+c\right]$

510 $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}+c\right]$

511 $\int \tan 4\theta\,d\theta$ $\left[-\frac{1}{4}\ln|\cos 4\theta|+c\right]$

512 $\int x^3\ln x\,dx$ $\left[\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+c\right]$

513 $\int x^4\ln x\,dx$ $\left[\frac{1}{5}x^5\ln x-\frac{1}{25}x^5+c\right]$

514 $\int \frac{\sqrt{2+\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{(2+\tan x)^3}+c\right]$

515 $\int \frac{x^2+4}{x+4}\,dx$ $\left[20\ln|x+4|+\frac{1}{2}x^2-4x+c\right]$

516 $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}+c\right]$

517 $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$ $[\arctan(x+1)+c]$

518 $\int e^{\sin t}\cos t\,dt$ $[e^{\sin t}+c]$

519 $\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,dx$ $\left[\frac{5}{4}\ln|x+3|-\frac{1}{4}\ln|x-1|+c\right]$

520 $\int \frac{x-2}{x^2+4x+4}\,dx$ $\left[\ln|x+2|+\frac{4}{x+2}+c\right]$

521 $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$ $\left[2\sqrt{\ln x}+c\right]$

522 $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+c\right]$

523 $\int \sin x\cos^4 x\,dx$ $\left[-\frac{1}{5}\cos^5 x+c\right]$

524 $\int \frac{x-1}{x+3}\,dx$ $[-4\ln|x+3|+x+c]$

525 $\int x^2e^{x^3}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}e^{x^3}+c\right]$

526 $\int xe^{3x}\,dx$ $\left[\frac{1}{9}(3x-1)e^{3x}+c\right]$

527 $\int \frac{7+\arctan x}{1+x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\arctan^2 x+7\arctan x+c\right]$

528 $\int \frac{6^x+12^x}{2^x}\,dx$ $\left[\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{6^x}{\ln 6}+c\right]$

529 $\int \frac{1}{x^2-6x+9}\,dx$ $\left[\frac{1}{3-x}+c\right]$

530 $\int \frac{1+2\cos x}{x+2\sin x}\,dx$ $[\ln|2\sin x+x|+c]$

531 $\int x\sin 3x\,dx$ $\left[-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c\right]$

532 $\int \frac{x^3}{10+x^4}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln(x^4+10)+c\right]$

533 $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right)+c\right]$

534 $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+c\right]$

535 $\int \frac{x}{x^2-a^2}\,dx, \quad a>0$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x^2-a^2|+c\right]$

536 $\int \frac{x^3}{x^2+9}\,dx$ $\left[-\frac{9}{2}\ln(x^2+9)+\frac{1}{2}x^2+c\right]$

537 $\int x\arctan x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+c\right]$

538 $\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$ $[\ln(e^x+4)+c]$

539 $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$ $[\ln|e^x-e^{-x}|+c]$

540 $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\arctan x^3+c\right]$

541 $\int \frac{1}{(3x+1)^3}\,dx$ $\left[-\frac{1}{6(3x+1)^2}+c\right]$

542 $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$ $[-\ln(\cos x+1)+c]$

543 $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6}\,dx$ $[\ln|x^2+5x+6|+c]$

544 $\int \frac{1}{y^2-y-12}\,dy$ $\left[\frac{1}{7}\ln|y-4|-\frac{1}{7}|y+3|+c\right]$

545 $\int x2^x\,dx$ $\left[2^x\left(\frac{x}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}\right)+c\right]$

546 $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$ $\left[\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+c\right]$

547 $\int x\sqrt[3]{e^x}\,dx$ $\left[\sqrt[3]{e^x}(3x-9)+c\right]$

548 $\int u^5\ln u^3\,du$ $\left[\frac{1}{2}u^6\ln u-\frac{1}{12}u^6+c\right]$

549 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\,dx$ $\left[-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+c\right]$

550 $\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}}\,dx$ $\left[2\ln\left(\sqrt{x}+2\right)+c\right]$

551 $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+c\right]$

552 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ $\left[2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c\right]$

553 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ $[\arcsin e^x+c]$

554 $\int (\sin x-1)^2\,dx$ $\left[-\frac{1}{4}\sin 2x+2\cos x+\frac{3}{2}x+c\right]$

555 $\int e^{2x}\sin x\,dx$ $\left[\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+c\right]$

556 $\int x^3\ln\sqrt{x}\,dx$ $\left[\frac{1}{8}x^4\ln x-\frac{1}{32}x^4+c\right]$

557 $\int \frac{(\ln x-1)^2}{x}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln^3 x-\ln^2 x+\ln x+c\right]$

558 $\int (\ln x-1)^2\,dx$ $[x\ln^2 x-4x\ln x+5x+c]$

559 $\int \frac{\sqrt[3]{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$ $\left[\frac{3}{4}\arctan x\sqrt[3]{\arctan x}+c\right]$

560 $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$ $\left[4\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+x-4\sqrt{x}+c\right]$

561 $\int (\tan x+2\cot x)^2\,dx$ $[-4\cot x+\tan x-x+c]$

562 $\int \frac{x}{x^4-4x^2+4}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2(x^2-2)}+c\right]$

563 $\int \frac{x^5}{(x^2-1)^2}\,dx$ $\left[\ln|x^2-1|-\frac{1}{2x^2-2}+\frac{1}{2}x^2+c\right]$

564 $\int x\sin x\cos x\,dx$ $\left[\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{2}x\sin^2 x-\frac{1}{4}x+c\right]$

565 **E se?** $\int \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\,dx$ con $n\in\mathbb{N}-\{0\}$

▶ Come cambierebbe la risposta se l'integrale da calcolare fosse $\int \frac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}}\,dx$? $\left[\frac{\arctan x^n}{n}+c;\ \frac{\ln(1+x^{2n})}{2n}+c\right]$

566 $\int \ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)dx$ $\left[x\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)+\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}x+c\right]$

567 $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\left[3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c\right]$

568 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$ $\left[-2\arctan\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+c\right]$

569 $\int \frac{1}{e^x-2e^{-x}+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+2}\right|+c\right]$

570 $\int \sqrt{e^x-2}\,dx$ $\left[2\sqrt{e^x-2}-2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x-2}{2}}+c\right]$

571 $\int \sin\sqrt{x}\,dx$ $\left[-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c\right]$

Realtà e modelli

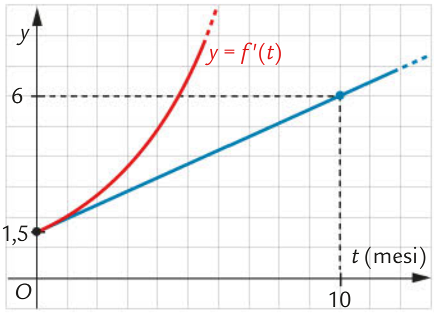
572 **Svuotamento di un serbatoio.** Un serbatoio per lo stoccaggio di acqua piovana è completamente pieno quando, nell'istante $t = 0$, viene aperta una valvola di scarico. L'acqua fuoriesce a una velocità, in litri/minuto, espressa dalla funzione:

$$Q'(t) = \frac{2}{5}(225 - t^2) \qquad \text{con } 0 \le t \le 15$$

a. Determina l'espressione analitica della funzione $Q(t)$ che esprime la quantità di acqua fuoriuscita dal serbatoio dopo t minuti dall'apertura della valvola, data l'ovvia condizione iniziale $Q(0) = 0$.
b. Sapendo che dopo 15 minuti dall'apertura della valvola il serbatoio risulta completamente svuotato, stabilisci la capacità del serbatoio.

$\left[\textbf{a. } Q(t) = 90t - \frac{2}{15}t^3; \textbf{ b. } 900 \text{ litri}\right]$

573 **Evoluzione di una popolazione di coccinelle.** Una popolazione di coccinelle sta crescendo a una velocità (in numero di esemplari/mese) espressa dalla funzione $f'(t)$ il cui grafico è quello in rosso in figura. La retta colorata in blu è quella tangente al grafico di $f'(t)$ nel punto di ascissa $t = 0$.



L'espressione analitica di $f'(t)$ è del tipo $f'(t) = ae^{bt}$ dove t è il tempo (misurato in mesi), trascorso dall'istante $t = 0$ in cui inizia l'osservazione della popolazione.
a. Determina i valori di a e di b, in base alle informazioni deducibili dal grafico.
b. Sapendo che la popolazione iniziale è di 5 coccinelle, determina la funzione $f(t)$ che esprime il numero di coccinelle della popolazione al tempo t.
c. Da quante coccinelle sarà composta la popolazione dopo 8 mesi?
d. Di quale percentuale cresce ogni mese la popolazione di coccinelle rispetto al mese precedente?

[**a.** $a = 1{,}5, b = 0{,}3$; **b.** $f(t) = 5e^{0{,}3t}$; **c.** circa 55 coccinelle; **d.** circa 35%]

574 Determina la primitiva della funzione $y = x^2 - 6x$ tale che l'ordinata del suo punto di flesso è 2.

$\left[y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 20\right]$

575 Determina la primitiva della funzione $y = 3x^2 + 3x$ tale che la tangente nel suo punto di flesso passa per il punto di coordinate (0, 1).

$\left[y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{8}\right]$

576 Determina la primitiva della funzione $y = \frac{x}{x-1}$ la cui tangente nel punto di ascissa 2 interseca l'asse y nel punto di coordinate (0, 4).

$[y = \ln|x-1| + x + 6]$

577 Determina la primitiva della funzione $y = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ che ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 2$.

$\left[y = \frac{2x^2+1}{x^2+1}\right]$

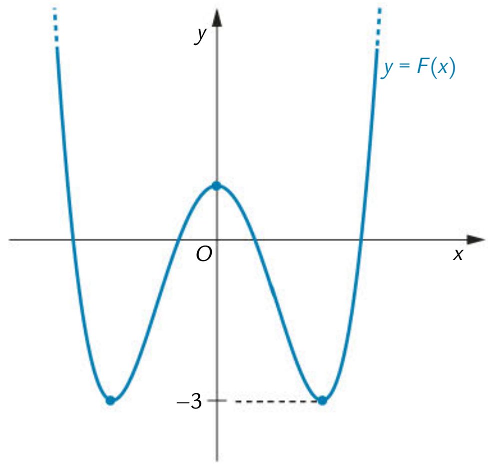
578 Determina la primitiva della funzione $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ tale che la tangente nel suo punto di flesso passa per il punto di coordinate (1, 2).
$\left[F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + \frac{9}{2}\right]$

579 Considera la funzione $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2}$.

a. Determina la sua primitiva $F(x)$ che ha come asintoto obliquo la retta di equazione $y = 2x + 1$.
b. Traccia il grafico della funzione $F(x)$.
c. Determina le equazioni delle rette tangenti al grafico di $F(x)$ nei suoi punti d'intersezione con l'asse x.

$\left[\textbf{a. } F(x) = 2x - \frac{3}{x} + 1; \textbf{ c. } y = 5x - 5,\ y = \frac{10}{3}x + 5\right]$

580 **Interpretazione di grafici** In figura è rappresentata una primitiva della funzione $f(x) = x^3 - 4x$. Determina l'equazione di tale primitiva.



$\left[F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1\right]$

581 Scrivi l'equazione della funzione che soddisfa le seguenti proprietà:
a. $f''(x) = 2x - 1$;
b. la retta tangente nel suo punto di ascissa 0 è parallela alla retta $y = -2x$;
c. $f(0) = 3$.

Tracciane quindi il grafico, scrivendo l'equazione della retta a esso tangente nel suo punto d'intersezione con l'asse x la cui ascissa è compresa tra 1 e 2.
$\left[y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3;\right.$ intersezioni con l'asse x per $x = \pm\sqrt{6} \vee x = \frac{3}{2}$, massimo per $x = -1$, minimo per $x = 2$, flesso per $x = \frac{1}{2}$; tangente: $\left. y = -\frac{5}{4}x + \frac{15}{8}\right]$

582 Risolvi i seguenti quesiti.
a. Determina la funzione $f(x)$ tale che:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$$

il cui grafico passa per il punto di coordinate $\left(1, \frac{1}{4}\right)$.
b. Traccia il grafico della funzione f ottenuta, determinando anche i punti di flesso.
c. Tra i rettangoli aventi due vertici sull'asse x e gli altri due vertici sul grafico di f, determina quello di area massima.

$\left[\textbf{a. } f(x) = \frac{1}{x^2 + 3};\right.$ **b.** asintoto: $y = 0$, massimo per $x = 0$ e flessi per $x = \pm 1$; **c.** il rettangolo avente un lato sulla retta di equazione $\left. y = \frac{1}{6}\right]$

583 Considera la funzione $f(x) = \frac{2 \ln x}{x}$.

a. Determina la sua primitiva $F(x)$ che passa per il punto di coordinate $(e, 0)$.
b. Traccia il grafico della funzione $F(x)$.
c. Determina per quale valore di a è possibile applicare il teorema di Rolle alla funzione $F(x)$ nell'intervallo $[a, e]$.
d. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di flesso.

$\left[\textbf{a. } F(x) = \ln^2 x - 1;\right.$ **b.** minimo per $x = 1$, flesso per $x = e$; **c.** $a = e^{-1}$; **d.** $\left. y = \frac{2}{e}x - 2\right]$

584 Una funzione f è tale che:

a. $f''(x) = \cos 2x$;

b. la tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{4}$ è orizzontale;

c. il grafico di f passa per l'origine.

Determina l'espressione analitica della funzione f.

$\left[f(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right]$

585 Determina la funzione che soddisfa le seguenti condizioni:

a. $f''(x) = \sin x - \cos 2x$;

b. il suo grafico passa per il punto di coordinate $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e ha ivi per tangente una retta parallela a quella di equazione $y = 2x$.

$\left[f(x) = -\frac{1}{2}\sin^2 x - \sin x + 2x + \frac{3}{2} - \pi\right]$

586 Tra le primitive della funzione $f(x) = \ln(x+2)$ determina la primitiva $F(x)$ tale che $\lim_{x \to -2^+} F(x) = 3$.

$[F(x) = (x+2)\ln(x+2) - x + 1]$

Argomentare e dimostrare

587 Luigi è perplesso; il metodo d'integrazione per parti sembra condurlo a una conclusione assurda; infatti dai seguenti calcoli:

$$\int 1\,dx = \int e^x e^{-x}\,dx = e^x e^{-x} - \int e^x(-e^{-x})\,dx = 1 + \int 1\,dx$$

segue $\int 1\,dx = 1 + \int 1\,dx$. Spiega a Luigi perché il risultato trovato non è contraddittorio.

588 Vito e Teresa non vengono a capo del problema seguente. Dovendo calcolare l'integrale indefinito di $\sin 2x$, il primo ottiene subito

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} + c$$

mentre la seconda, ricordando le formule di duplicazione, giunge a

$$\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x\,dx = \sin^2 x + c$$

Poiché $\sin^2 x \neq -\frac{\cos 2x}{2}$, si direbbe che uno dei due ha sbagliato: ma è proprio così? Spiega.

589 Determina la primitiva della funzione $f(x) = |2x - 4|$ il cui grafico passa per il punto di coordinate (1, 1).

$\left[F(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & x \geq 2 \\ 4x - x^2 - 2 & x < 2 \end{cases}\right]$

590 Determina la primitiva della funzione $f(x) = |e^{2x} - 1|$ il cui grafico passa per l'origine.

$\left[F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x} - x - \frac{1}{2} & x \geq 0 \\ x - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}\right]$

591 **Matematica e fisica** Barbara, alle ore 16 ($t = 0$) di un certo giorno, parte in bicicletta dal paese X, diretta a un paese Y distante 15 km; percorre una strada approssimativamente rettilinea e la sua velocità (decrescente a causa della fatica) è espressa in kilometri all'ora dalla funzione $v_B(t) = \frac{18}{(t+1)^2}$, essendo t il tempo (in ore) trascorso dalla partenza. Paolo, sempre alle 16 ($t = 0$), parte invece dal paese Y e si dirige verso il paese X lungo la stessa strada di Barbara. Anche Paolo viaggia in bicicletta, e la sua velocità è espressa in kilometri all'ora dalla funzione $v_P(t) = \frac{22}{(t+1)^2}$, essendo t il tempo (in ore) trascorso dalla partenza.

a. Sia $s_B(t)$ la funzione che esprime la distanza (in kilometri) percorsa da Barbara, in funzione del tempo t trascorso dalla partenza (quindi $s_B(0) = 0$): determina l'espressione analitica di $s_B(t)$.

b. Sia $s_P(t)$ la funzione che esprime la distanza (in kilometri) percorsa da Paolo, in funzione del tempo t trascorso dalla partenza (quindi $s_P(0) = 0$): determina l'espressione analitica di $s_P(t)$.

c. Stabilisci dopo quanto tempo dalla partenza Barbara e Paolo si incontreranno.

$\left[\textbf{a.}\ s_B(t) = 18 - \frac{18}{t+1};\ \textbf{b.}\ s_P(t) = 22 - \frac{22}{t+1};\ \textbf{c.}\ 36 \text{ min}\right]$

Esercizi più

592 **E se?** Sia $F(x)$ una funzione primitiva di $f(x) = \tan x$. Sapendo che $F(0) = 0$, puoi dedurre il valore $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

▸ Puoi dedurre anche il valore $F(\pi)$? $\left[\frac{\ln 2}{2}; \text{no}\right]$

Calcola i seguenti integrali.

593 $\int \frac{1}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x}\,dx$ $\left[-\frac{1}{5}\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|(x-2)(x^2+1)^2| + c\right]$

594 $\int \frac{1}{4\sin^2 x + \cos^2 x}\,dx$

(*Suggerimento*: dividi numeratore e denominatore per $\cos^2 x$.) $\left[\frac{1}{2}\arctan(2\tan x) + c\right]$

595 $\int xe^x \sin x\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}xe^x\cos x + \frac{1}{2}e^x\cos x + \frac{1}{2}xe^x\sin x + c\right]$

596 $\int x^2 \arcsin x\,dx$ $\left[\frac{1}{3}x^3\arcsin x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + c\right]$

597 $\int \frac{\cos 2x}{(2\sin x + 1)\cos x}\,dx$

(*Suggerimento*: poni $\sin x = t$.) $\left[\frac{1}{3}\ln|2\sin x + 1| + \frac{1}{6}\ln(1-\sin x) + \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) + c\right]$

Dalle gare

598 Calcola $\int \frac{1}{\ln(x^x e^x)}\,dx$.

(Calculus Competition 2000) $[\ln|1 + \ln x| + c]$

599 Calcola $\int \frac{1}{e^{2x} + 3e^x + 2}\,dx$.

(Calculus Competition 2006) $\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x+2}{e^{2x}+2e^x+1}\right) + \frac{1}{2}x + c\right]$

600 Calcola $\int \frac{\sqrt{x^2+25}}{x}\,dx$.

(Calculus Competition 2009) $\left[\sqrt{x^2+25} - 5\ln\frac{\sqrt{x^2+25}+5}{|x|} + c\right]$

601 A che cosa è uguale $\int \frac{\log_2 x}{x}\,dx$?

A $\frac{1}{2}(\log_2 x)^2 + C$

B $\frac{1}{2}(\log_2 x)\ln x + C$

C $\frac{1}{\ln 2}(\ln x)^2 + C$

D $\frac{1}{\ln 2}\log_2 x(\ln x)^2 + C$

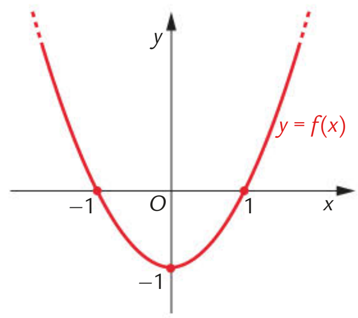
E Nessuno dei precedenti

(University of North Georgia, Mathematics Tournament, 2005)

L'integrale indefinito

1 Determina la primitiva $F(x)$ di $f(x)=4x^3-2x-1$ il cui grafico passa per il punto $P(1, 4)$.

2 Deducendoli dalle proprietà della funzione $f(x)$ in figura, traccia i grafici delle due primitive $F(x)$ e $G(x)$ di $f(x)$ che intersecano l'asse y rispettivamente nell'origine e nel punto di coordinate $(0, 2)$.



3 Calcola i tre integrali indefiniti seguenti, riconducibili a integrali immediati:

a. $\int (2x^3-1)^2\,dx$ **b.** $\int \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$ **c.** $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x}}\,dx$

4 Calcola i due integrali indefiniti seguenti, del tipo «quasi immediato»:

a. $\int x\sqrt{1+3x^2}\,dx$ **b.** $\int \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

5 Trova l'insieme delle primitive di ciascuna delle seguenti funzioni razionali:

a. $f(x)=\frac{x+1}{x^2+6x+8}$ **b.** $f(x)=\frac{x+1}{x^2+6x+9}$ **c.** $f(x)=\frac{x+1}{x^2+6x+10}$

Calcola i seguenti integrali.

6 $\int x^2 \ln x\,dx$

7 $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x}}\,dx$

8 Le velocità (misurate in numero di abitanti/anno) con cui è previsto che crescano le popolazioni di due città A e B nei prossimi 100 anni sono descritte con buona approssimazione dalle funzioni:

$P_A'(t)=80e^{0,01t}$ e $P_B'(t)=100e^{0,02t}$ con $0\le t\le 100$

dove t è il tempo (misurato in anni) trascorso dall'ultimo giorno del 2010 (corrispondente a $t=0$). Alla fine del 2010 la città A aveva una popolazione di 10 000 abitanti , mentre la città B aveva una popolazione di 7000 abitanti.

a. Determina le funzioni che esprimono il numero di abitanti delle due città A e B al tempo t.
b. Dopo quanti anni dalla fine del 2010 le due città avranno lo stesso numero di abitanti?

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	**Totale**
Punteggio massimo	1	1	0,5 · 3 = 1,5	0,75 · 2 = 1,5	0,75 · 3 = 2,25	1	1	0,75	10
Punteggio ottenuto									

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 389

Unità 3

Tema M

L'integrale definito

- Approfondimenti
- Figure animate
- Con GeoGebra
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

1. Dalle aree al concetto di integrale definito

COLLEGHIAMO I CONCETTI **Il problema del calcolo di un'area**

Nel corso dei tuoi studi hai incontrato varie volte il problema del calcolo dell'area di una superficie.

- A livello elementare il problema ti è stato introdotto in questi termini: fissato un quadratino come unità di misura per le aree, determinare l'area di una superficie significa contare quante volte il quadratino è contenuto in essa. Sulla base di questa idea intuitiva, però, è possibile determinare soltanto l'area dei rettangoli.
- Per poter determinare le aree dei poligoni in generale abbiamo dovuto ragionare in modo più fine. Abbiamo postulato che superfici equiscomponibili sono equivalenti e che l'area è additiva (cioè se una superficie è l'unione di due superfici disgiunte, la sua area è la somma delle aree delle due superfici). Sulla base di questi assiomi, siamo riusciti a dimostrare che ogni triangolo è equivalente a un opportuno rettangolo e a dedurre la formula per calcolare l'area di un triangolo. Abbiamo poi osservato che ogni poligono può essere scomposto nella somma di opportuni triangoli, risolvendo così completamente il problema della determinazione dell'area di un poligono.
- Anche quest'ultima via però si rivela inadeguata, per esempio, per calcolare l'area del cerchio (un cerchio infatti non è scomponibile in un numero finito di triangoli o rettangoli). Il problema del calcolo dell'area del cerchio è stato risolto con un ragionamento che fa ricorso all'idea delle *approssimazioni successive*: abbiamo considerato le aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio, assumendo come area del cerchio la misura cui tendono queste aree quando il numero dei lati dei poligoni cresce indefinitamente.
- Nel procedimento per dedurre l'area del cerchio abbiamo implicitamente utilizzato il concetto di *limite*, che abbiamo introdotto nel **Volume 4**. È proprio grazie a questo concetto che potremo ora compiere un ulteriore passo avanti, cioè dare una *definizione* abbastanza generale di area di una superficie piana, anche nel caso in cui essa abbia contorno curvilineo. Questa nuova definizione di area ci condurrà poi in modo naturale a introdurre un altro concetto fondamentale dell'analisi: quello di *integrale definito*.

Area come limite di una somma

◆ PROBLEMA

Consideriamo una funzione $y = f(x)$, continua e positiva (o nulla) nell'intervallo $[a, b]$. Come possiamo definire il concetto di area per la regione di piano, detta **trapezoide**, limitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$ (**Fig. 1**)?

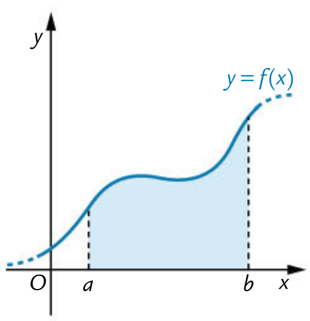


Figura 1

Ragioniamo in modo simile a quanto fatto per definire l'area del cerchio: così come allora l'area del cerchio era stata approssimata da opportuni poligoni, ora definiamo degli opportuni rettangoli, sommando l'area dei quali riusciremo ad approssimare ciò che intuitivamente riteniamo essere l'area del trapezoide.

A tale scopo consideriamo i punti:

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$$

che dividono l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini aventi la stessa ampiezza; tale ampiezza, che indichiamo con Δx, è evidentemente uguale a:

$$\frac{b-a}{n}$$

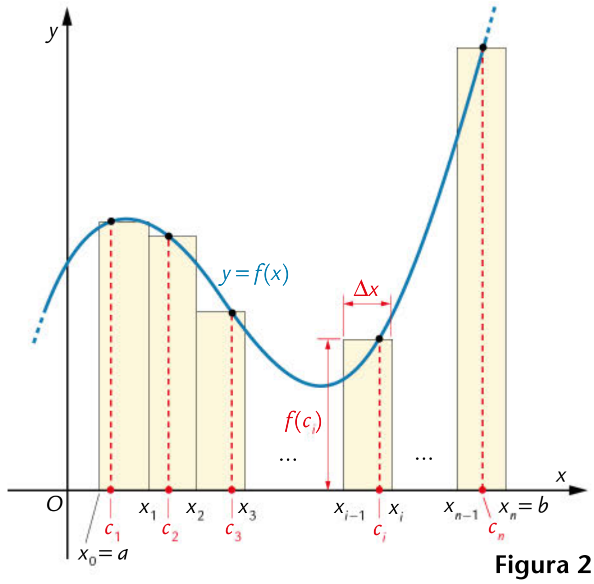


Figura 2

Figura animata
Area come limite di una somma

1. In ciascuno degli n intervallini

   $$[a = x_0, x_1]; [x_1, x_2]; [x_2, x_3]; ...; [x_{n-1}, x_n = b]$$

   scegliamo arbitrariamente un punto:

   $$c_1 \in [a, x_1]; c_2 \in [x_1, x_2]; ...; c_n \in [x_{n-1}, b]$$

   e consideriamo gli n rettangoli che hanno come base ciascuno degli intervallini e altezza di misura uguale al valore della funzione nel punto c_i scelto nell'intervallo considerato (**Fig. 2**).
   La somma delle aree di questi rettangoli è:

   $$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad [1]$$

   Tale somma costituirà, al crescere di n, un'approssimazione via via sempre migliore di quella che riteniamo intuitivamente essere l'area del trapezoide.
2. Immaginiamo ora di fare crescere indefinitamente il valore di n. Si potrebbe dimostrare che il limite della somma [1] per $n \to +\infty$ *esiste* ed è *finito* ed è indipendente dalla scelta dei punti c_i; è ragionevole assumere questo limite come **area** del trapezoide individuato dalla funzione $y = f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

Gli strumenti dell'analisi ci hanno quindi consentito di fare un ulteriore passo avanti verso la definizione del concetto di area per classi sempre più ampie di superfici; abbiamo adesso potuto *definire* l'area di un *trapezoide* come *limite* di una somma.

Il concetto di integrale definito

Il procedimento poc'anzi seguito per definire l'area di un trapezoide può essere ripetuto anche nel caso in cui la funzione abbia segno qualunque nell'intervallo $[a, b]$ (ferma restando l'ipotesi di continuità), svincolandoci dal significato geometrico. Si arriva così a definire un nuovo fondamentale concetto dell'analisi, quello di **integrale definito**, che si applica a svariate situazioni: non solo al calcolo di aree, ma anche a quello di volumi, lunghezze, velocità, masse, momenti, baricentri, lavoro di forze...
Vediamo brevemente i passi per giungere alla definizione di *integrale definito.*

1. Definiamo il concetto di **somma di Riemann** (la generalizzazione della «somma delle aree dei rettangoli» vista poc'anzi).

Con GeoGebra
Somma di Riemann e integrali

DEFINIZIONE | **Somma di Riemann**

Sia f: $[a, b] \to \mathbf{R}$. Consideriamo i punti:

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$$

che suddividono l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli aventi la stessa ampiezza, uguale a:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Scelto in ciascuno degli n intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario c_i, chiamiamo **somma di Riemann** della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ la somma:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

2. Se f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, si potrebbe dimostrare che $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ **esiste finito** ed **è indipendente dalla scelta dei punti** c_i. Ha senso quindi dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE | Integrale definito

Sia f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Si chiama **integrale definito** della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ il $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$, essendo S_n una somma di Riemann della funzione f nell'intervallo $[a, b]$. L'integrale definito della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ viene indicato con il simbolo:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

che si legge «integrale da a a b di $f(x)$ in dx».

OSSERVA

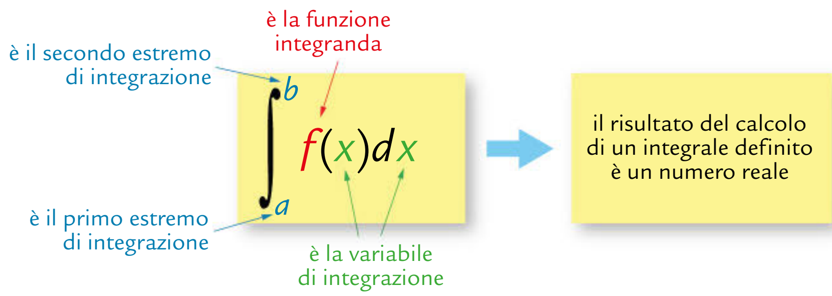
1. La notazione $\int_a^b$ deriva da quella di sommatoria:

- la lettera greca Σ è diventata una «S» allungata;
- l'addendo $f(c_i)\,\Delta x$ è divenuto $f(x)\,dx$ nel passaggio al limite che fa diventare la misura Δx infinitesima.

2. La variabile di integrazione è «muta», nel senso che il valore dell'integrale non dipende da essa; per esempio:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

Nel seguente schema è illustrata la nomenclatura relativa al simbolo di integrale definito:



Con GeoGebra Interpretazione geometrica dell'integrale definito

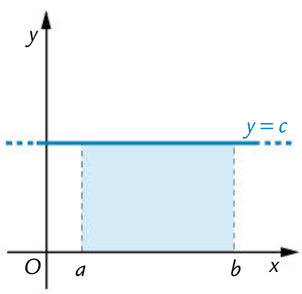


Figura 3

Interpretazione geometrica dell'integrale definito

Come abbiamo visto, se f è una funzione *positiva* (o nulla) in $[a, b]$, l'integrale definito della funzione f in $[a, b]$ rappresenta l'*area* del trapezoide individuato dalla funzione f in tale intervallo. Per esempio, nel caso elementare in cui f è la funzione costante $y = c$, con $c > 0$ (**Fig. 3**), l'integrale definito $\int_a^b c\,dx$ rappresenta l'area di un rettangolo in cui la base misura $b - a$ e l'altezza misura c. Pertanto:

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$$

Nel caso in cui f abbia segno qualunque, l'integrale si può interpretare come una somma di **aree con segno**. Per esempio, nel caso in **Fig. 4** si ha:

$$\int_0^b f(x)\,dx = \text{area di } S_1 - \text{area di } S_2 + \text{area di } S_3$$

In particolare, per simmetria (**Fig. 5**), possiamo dedurre per esempio che:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

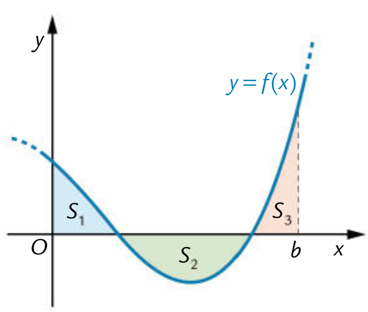


Figura 4

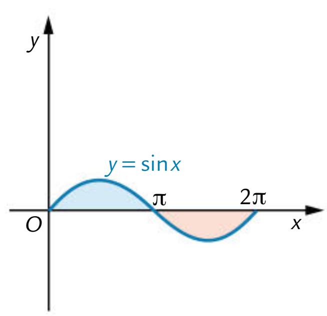


Figura 5

In base al significato di integrale definito come «area con segno», è immediato dedurre le seguenti proprietà, relative a funzioni *pari* o *dispari* (sempre supponendo le funzioni continue):

- se f è *pari* e $a > 0$, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ **(Fig. 6)**
- se f è *dispari* e $a > 0$, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ **(Fig. 7)**

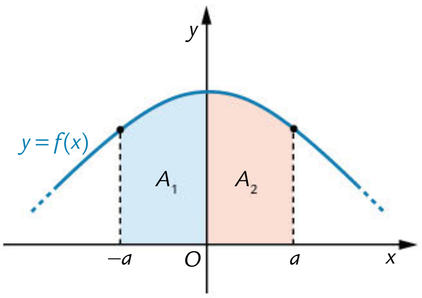


Figura 6 **Integrale definito di una funzione pari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine.**

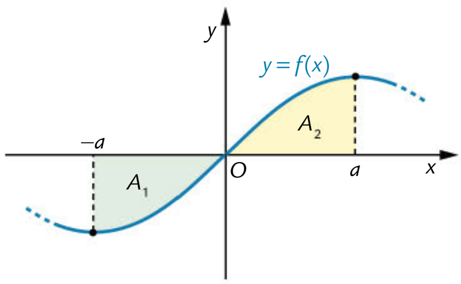


Figura 7 **Integrale definito di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine.**

Esercizi p. 164

2. Proprietà dell'integrale definito e teorema del valore medio

Proprietà dell'integrale definito

Nel paragrafo precedente abbiamo illustrato il concetto di *integrale definito* per una funzione continua f nell'intervallo $[a, b]$. Nel dare questa definizione abbiamo assunto implicitamente che sia $a < b$; tuttavia il simbolo $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ viene definito anche quando $a \geq b$, ponendo per convenzione:

$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Caso in cui i due estremi di integrazione sono uguali

e, supposto $a > b$:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

Caso in cui l'estremo inferiore di integrazione è maggiore dell'estremo superiore

Il simbolo $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, se f è una funzione continua in un intervallo I, resta pertanto definito per ogni $a, b \in I$.
Sulla base delle definizioni date, si possono dimostrare le seguenti proprietà dell'integrale definito, che ci limitiamo a enunciare e commentare.

PROPRIETÀ | Linearità dell'integrale definito

Siano f e g due funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$; allora:

a. $\int_{a}^{b} [f(x) + g(x)]\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} g(x)\,dx$

b. $\int_{a}^{b} k\,f(x)\,dx = k\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ per ogni $k \in \mathbf{R}$

ESEMPIO

$$\int_{1}^{2}(x^2 + 3x)\,dx = \int_{1}^{2} x^2 dx + \int_{1}^{2} 3x\,dx = \int_{1}^{2} x^2 dx + 3\int_{1}^{2} x\,dx$$

PROPRIETÀ | Additività rispetto all'intervallo di integrazione

Per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$ risulta:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Questa proprietà ha una semplice interpretazione geometrica nel caso in cui $f(x) \geq 0$ e $a < c < b$: l'area del trapezoide limitato dal grafico della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ è la somma delle aree dei trapezoidi limitati da f in $[a, c]$ e $[c, b]$ (**Fig. 8**).

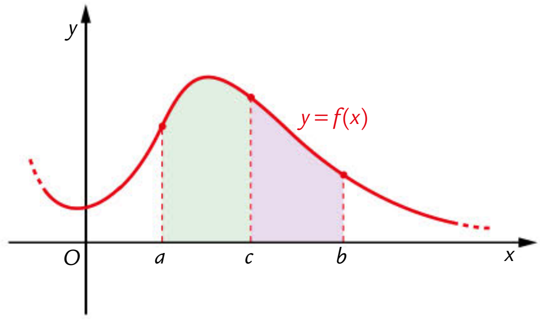


Figura 8

ESEMPIO

$$\int_0^6 x^3 dx = \int_0^2 x^3 dx + \int_2^6 x^3 dx$$ **Scegliendo $c = 2$**

OSSERVA

Dalla [2] segue anche che, se $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

PROPRIETÀ | Monotonia rispetto alla funzione integranda

Se f e g sono due funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$ e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \qquad [2]$$

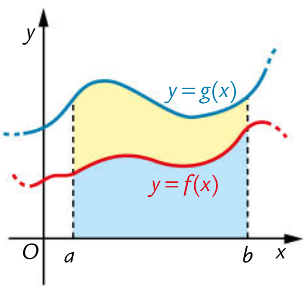


Figura 9 **Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, l'area del trapezoide limitato dalla funzione f nell'intervallo $[a, b]$ è minore o uguale all'area del trapezoide limitato dalla funzione g nello stesso intervallo.**

L'interpretazione geometrica della [2] per due funzioni non negative f e g è illustrata nella **Fig. 9**.

Da quest'ultima proprietà segue in particolare che:

- se $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- vale la disuguaglianza:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad [3]$$

Infatti, essendo $f(x) \leq |f(x)|$ ed $f(x) \geq -|f(x)|$ in $[a, b]$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq -\int_a^b |f(x)|\,dx$$

che, insieme, equivalgono alla [3].

ESEMPI Utilizzo della proprietà di monotonia degli integrali definiti

Dimostriamo la seguente disuguaglianza:

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx \leq \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$$

Se $x \geq 1$, allora $x^2 \geq x$, quindi, passando ai reciproci: $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$.

Dalla [2] segue allora: $\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx \leq \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$.

Valore medio

Sappiamo che la media aritmetica $\overline{x}$ di n numeri $x_1, x_2, ..., x_n$ è data da:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \qquad [4]$$

Ci poniamo ora il seguente problema: data una funzione f: $[a, b] \to \mathbf{R}$, continua in $[a, b]$, vogliamo definire una *media* di tutti i valori assunti dalla funzione nell'intervallo $[a, b]$. La formula [4] non è immediatamente generalizzabile, perché la funzione f assume *infiniti* valori al variare di x in $[a, b]$. Ragioniamo allora come segue.
Cominciamo dividendo l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli di estremi $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$, aventi ciascuno ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Come in precedenza, se l'ampiezza Δx è molto piccola, i valori assunti da f nell'i-esimo intervallo, $[x_{i-1}, x_i]$, saranno approssimativamente costanti (poiché f è continua); possiamo dunque approssimarli con $f(c_i)$, essendo c_i un punto arbitrariamente scelto in $[x_{i-1}, x_i]$.
Calcoliamo ora la media di $f(c_1), f(c_2), ..., f(c_n)$:

$$\frac{f(c_1) + ... + f(c_n)}{n} \qquad [5]$$

Poiché $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, e perciò $n = \frac{b-a}{\Delta x}$, la [5] equivale a:

$$\frac{f(c_1) + ... + f(c_n)}{\frac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}[f(c_1)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x] = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad [6]$$

È ragionevole assumere come *media* dei valori assunti dalla funzione f nell'intervallo $[a, b]$ il limite della [6] per $n \to +\infty$. All'ultimo membro della [6] si riconosce una somma di Riemann della funzione f nell'intervallo $[a, b]$; ne deriva pertanto la seguente definizione.

DEFINIZIONE | Valore medio di una funzione

Data una funzione f, continua nell'intervallo $[a, b]$, definiamo **valore medio** della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ il numero:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad [7]$$

Il seguente teorema garantisce che, per una funzione f continua in $[a, b]$, esiste sempre almeno un punto di $[a, b]$ in cui f assume il suo valore medio.

TEOREMA 1 | Teorema del valore medio per gli integrali (o della media integrale)

Se f è continua in $[a, b]$, esiste un numero $c \in [a, b]$ tale che $f(c)$ è uguale al valore medio della funzione in $[a, b]$, ossia tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{cioè} \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Con GeoGebra
Teorema del valore medio per gli integrali

DIMOSTRAZIONE

Poiché f è continua in $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass essa è dotata di minimo m e di massimo M in $[a, b]$, vale a dire:

$$m \le f(x) \le M \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

Ne segue:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx \quad \text{ossia:} \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Dividendo per $b - a$, otteniamo:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Vediamo così che il valore medio della funzione f in $[a, b]$ è compreso tra il minimo e il massimo di f in $[a, b]$. Essendo f continua in $[a, b]$, il teorema dei *valori intermedi* garantisce allora l'esistenza di un punto $c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

VISUALIZZIAMO I CONCETTI | **Interpretazione geometrica del teorema del valore medio**

L'interpretazione geometrica del teorema precedente, valida per funzioni *non negative*, è illustrata in **Fig. 10**: il teorema afferma l'esistenza di un punto c per cui il rettangolo avente base $b - a$ e altezza $f(c)$ ha la stessa area del trapezoide individuato dalla funzione f nell'intervallo $[a, b]$.

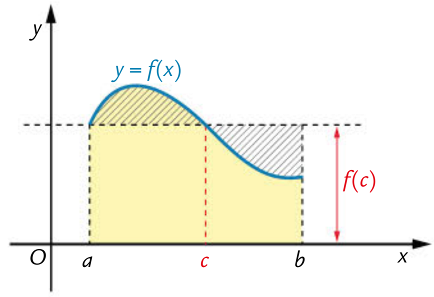


Figura 10 **Interpretazione geometrica del teorema del valore medio per gli integrali: le aree delle due parti indicate con il tratteggio sono uguali.**

Esercizi p. 165

3. Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo

Definizione di funzione integrale

Supponiamo che f sia una funzione continua in un intervallo $[a, b]$; per ogni $x \in [a, b]$ la funzione f è continua nell'intervallo $[a, x]$, quindi possiamo definire l'integrale di f su $[a, x]$:

$$\int_a^x f(t)\,dt \qquad [8]$$

Questo integrale, una volta fissato a, dipende unicamente dalla variabile x; pertanto è possibile definire una nuova funzione, detta **funzione integrale**, che associa a ogni $x \in [a, b]$ il valore dell'integrale **[8]**.

Con GeoGebra
Funzione integrale

DEFINIZIONE | Funzione integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$; si chiama **funzione integrale** di f (relativa al punto a) la funzione $F: [a, b] \to \mathbf{R}$ definita da:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad [9]$$

Se f è *positiva* (o *nulla*) si può interpretare geometricamente la funzione integrale (**Fig. 11**) come «funzione area», cioè come funzione che associa a ogni $x \in [a, b]$ l'area del trapezoide individuato dalla funzione f nell'intervallo $[a, x]$.

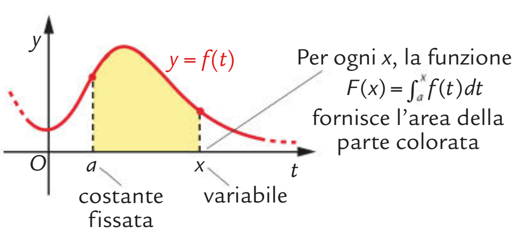
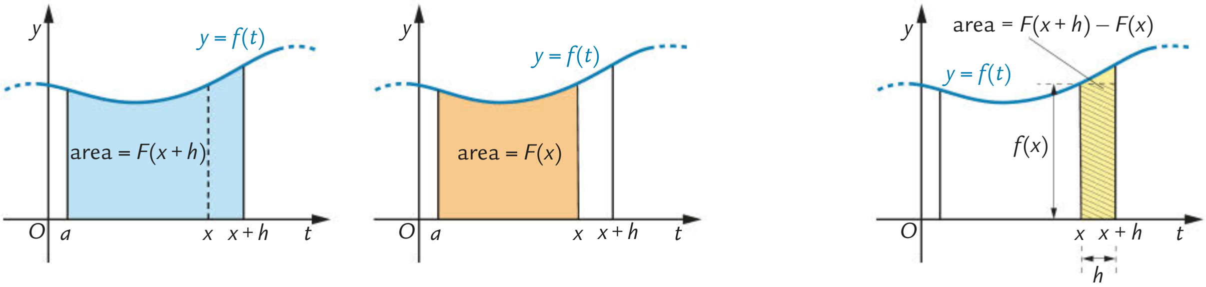


Fig. 11 **Interpretazione geometrica della funzione integrale se la funzione integranda è positiva (o nulla).**

Teorema fondamentale del calcolo

Qual è la *derivata* della funzione integrale [9]? Per scoprire la risposta, ragioniamo dapprima in modo intuitivo, nel caso particolare di una funzione positiva. Osserva la **Fig. 12** e leggi le didascalie relative.



a. **L'area della parte colorata in azzurro è uguale al valore assunto dalla funzione integrale di *f* in *x* + *h*, cioè a *F*(*x* + *h*).**

b. **L'area della parte colorata in arancione è uguale al valore assunto dalla funzione integrale di *f* in *x*, cioè a *F*(*x*).**

c. **L'area della parte colorata in giallo è data dalla differenza *F*(*x* + *h*) − *F*(*x*). Quanto più *h* è piccolo, tanto più tale area sarà ben approssimata dal rettangolo (evidenziato dal tratteggio) di base *h* e altezza *f*(*x*). Pertanto, se *h* è piccolo: *F*(*x* + *h*) − *F*(*x*) ≃ *hf*(*x*).**

Figura 12

Dalla relazione $F(x+h) - F(x) \simeq hf(x)$ segue (per $h \neq 0$):

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \simeq f(x) \qquad [10]$$

e l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più h è piccolo. Al limite, quando h tende a zero, ci aspettiamo che valga l'uguaglianza:

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}}_{F'(x) \text{ per definizione di derivata}} = f(x)$$

da cui segue:

$$F'(x) = f(x)$$

Queste considerazioni intuitive portano dunque a congetturare che la *derivata* della funzione integrale di una funzione f sia *la funzione f stessa*.
Questo importante risultato può essere effettivamente dimostrato in generale.

TEOREMA 2 | Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$ ed F: $[a, b] \to \mathbf{R}$ la funzione integrale associata a f (relativa al punto a), definita da:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Allora la funzione F è derivabile (quindi anche continua) in $[a, b]$, e risulta:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

OSSERVA

La funzione integrale ha un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda: se *f* è continua, allora *F* è derivabile, con derivata continua.

DIMOSTRAZIONE

Abbiamo:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \qquad \text{Definizione di derivata}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_a^x f(t)dt} + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \cancel{\int_a^x f(t)\, dt}\right] = \qquad \text{Additività rispetto all'intervallo di integrazione}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

PER LA PRECISIONE

Considerando l'intervallo $[x, x+h]$ abbiamo implicitamente supposto $h > 0$; se fosse $h < 0$ l'intervallo da considerare sarebbe $[x+h, x]$, ma il ragionamento non cambierebbe.

Osserviamo ora che, per il teorema del valor medio, $\int_x^{x+h} f(x)\,dt = h \cdot f(c_h)$, essendo c_h un punto opportuno appartenente all'intervallo $[x, x+h]$.
Possiamo allora concludere la nostra catena di uguaglianze come segue:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} f(c_h) =$$ **Osservando che** $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\cdot h \cdot f(c_h) = f(c_h)$

$$= f(\lim_{h\to 0} c_h) =$$ **Per la continuità della funzione** f

$$= f(x)$$ **Per il teorema del confronto sui limiti, da** $x \le c_h \le x+h$ **segue** $c_h \to x$ **per** $h \to 0$

ESEMPI Derivate di funzioni integrali

Calcoliamo la derivata delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \int_{-1}^{x} e^{-t^2}\,dt$ **b.** $g(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$

a. In base al **Teorema 2**, possiamo immediatamente concludere che $f'(x) = e^{-x^2}$.

b. Non si tratta di una vera e propria funzione integrale poiché il secondo estremo di integrazione non è x ma x^2; precisamente, considerata la funzione integrale:

$$h(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$$

la funzione $g(x)$ data è ottenuta da $h(x)$ per composizione con la funzione quadrato $g(x) = h(x^2)$. Per calcolare la derivata della funzione $g(x)$ dobbiamo allora applicare il teorema di derivazione delle funzioni composte; tenendo presente che per il **Teorema 2** è:

$$h'(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$$

abbiamo: $g'(x) = (x^2)' \cdot h'(x^2) = 2x \cdot \frac{e^{x^2}}{x^4+1} = \frac{2xe^{x^2}}{x^4+1}$

L'importanza del **Teorema 2** apparirà ancora più chiara nel prossimo paragrafo quando, tramite esso, ricaveremo una formula fondamentale per il calcolo di un integrale definito.

Le funzioni integrali come primitive

Esistono funzioni le cui primitive **non** sono funzioni **elementari**, ossia **non** sono esprimibili combinando le funzioni potenza, esponenziali, logaritmiche, goniometriche con un numero finito di operazioni (algebriche o di composizione o di inversione). Esempi di questo tipo sono le seguenti funzioni:

$$e^{-x^2} \quad \frac{e^x}{x} \quad \frac{\sin x}{x} \quad \frac{\cos x}{x} \quad \frac{1}{\ln x} \quad \sin x^2 \quad \cos x^2$$

Sebbene le primitive di queste funzioni non siano elementari, tali primitive certamente esistono in tutti gli intervalli dove le funzioni sono continue in base al **Teorema 2**: sono le loro funzioni integrali.
Alcune di queste primitive hanno importantissime applicazioni e sono utilizzate così di frequente da avere nomi propri; per esempio, la **funzione degli errori** (o di **Gauss**):

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

che ha un ruolo fondamentale in probabilità e statistica.
Anche le funzioni integrali non elementari (come la funzione di Gauss) si possono studiare e di esse si può tracciare il grafico, analogamente a quelle elementari.

Esercizi p. 168

4. Calcolo di integrali definiti e loro applicazioni

Calcolo dell'integrale definito

La definizione di integrale definito vista nel **Paragrafo 1**, in generale, **non** si presta al suo calcolo effettivo, perché conduce a operazioni troppo complesse. Perciò il calcolo di un integrale definito avviene di solito sulla base del seguente teorema, che recupera la nozione di *primitiva* di una funzione, data nell'**Unità 2**.

TEOREMA 3 | Calcolo di un integrale definito

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e sia $F(x)$ una sua qualsiasi **primitiva** in $[a, b]$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad [11]$$

DIMOSTRAZIONE

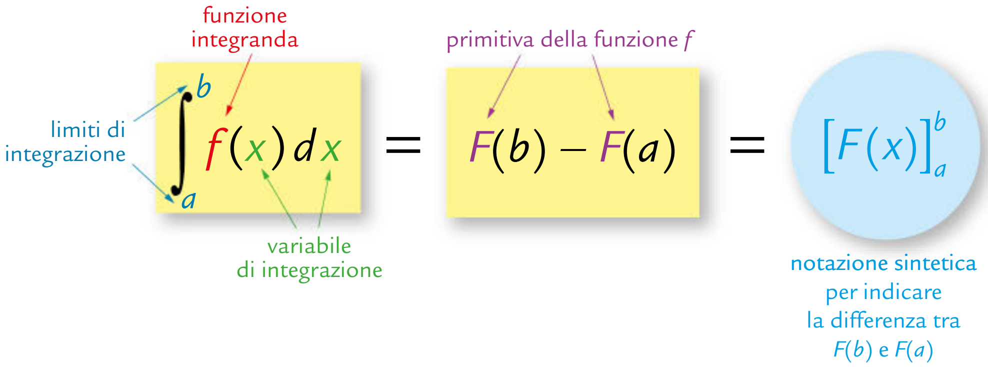
Sappiamo (**Teorema 2**) che la funzione integrale (relativa al punto a) della funzione $f(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ stessa e quindi qualsiasi altra primitiva $F(x)$ di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ deve differire dalla funzione integrale per una costante $c \in \mathbf{R}$. Sarà dunque:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$$

Abbiamo allora:

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t)\,dt + c\right) - \left(\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} + c\right) = \underbrace{\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx}_{\text{essendo ininfluente la variabile di integrazione}}$$

Tenendo conto che per indicare la differenza $F(b) - F(a)$ si usa di solito il simbolo $[F(x)]_a^b$, possiamo così schematizzare il **Teorema 3**:



SCRITTURE ALTERNATIVE

Talvolta, invece della scrittura $[F(x)]_a^b$ si trova la scrittura equivalente $F(x)|_a^b$.

Nell'applicazione della formula **[11]** la scelta della primitiva è indifferente; per semplicità si sceglie di solito la primitiva avente costante di integrazione nulla.

ESEMPI Calcolo di integrali definiti

Calcoliamo:

a. $\int_0^1 x^2\,dx$ **b.** $\int_2^5 \sqrt{x-1}\,dx$

a. In base alla **[11]** abbiamo subito:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

b. $\int_2^5 \sqrt{x-1}\,dx = \int_2^5 (x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 = \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

Calcolo di un integrale definito tramite cambiamenti di variabile

Supponiamo di voler calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ e che per il calcolo di una primitiva di $f(x)$ sia utile effettuare la sostituzione $x = g(t)$ (con g continua e invertibile). In tal caso conviene esprimere anche gli estremi di integrazione a e b in termini della nuova variabile t, in modo da trasformare l'integrale dato in un nuovo integrale *definito* in t. Quest'ultimo integrale potrà poi essere calcolato direttamente, senza il ritorno alla variabile x (come accadeva invece per gli integrali *indefiniti*). Il procedimento apparirà più chiaro dal prossimo esempio.

ESEMPIO Calcolo di un integrale definito con il metodo di sostituzione

Calcoliamo l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

- Poniamo $e^x = t$, da cui $x = \ln t$ e $dx = \frac{1}{t}\,dt$.
- Stabiliamo a quale intervallo di integrazione in t corrisponde l'intervallo di integrazione in x:

  $x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1$ **Ricorda che $t = e^x$**

  $x = 1 \Rightarrow t = e^1 = e$

  quindi all'intervallo [0, 1] corrisponde, nella nuova variabile t, l'intervallo $[1, e]$.
- L'integrale definito assegnato si può dunque trasformare nel seguente integrale definito in t, che calcoliamo senza più ritornare alla variabile x:

$$\int_1^e \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= [\ln|t| - \ln|t+1|]_1^e = \ln e - \ln(e+1) - \ln 1 + \ln 2 =$$
$$= 1 - \ln(e+1) + \ln 2$$

Variazione di una grandezza in un intervallo

Abbiamo visto nel **Volume 4**, **Unità 5**, che se $f(t)$ è la funzione che esprime come varia una grandezza in funzione del tempo t, allora $f'(t)$ esprime la *velocità istantanea* di variazione della grandezza. Viceversa, se è nota la funzione $f'(t)$ ma **non** conosciamo la funzione $f(t)$, possiamo trovare la variazione della grandezza (cioè di quanto è aumentata o diminuita) in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ calcolando l'*integrale definito* di $f'(t)$ in tale intervallo; infatti, per il **Teorema 3**:

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(t) = \underbrace{f(t_2) - f(t_1)}_{\text{variazione subita da } f(t) \text{ nell'intervallo } [t_1,\, t_2]}$$

ESEMPIO Variazione subita da una grandezza in un intervallo di tempo

Una coltura di cellule cresce alla velocità (in numero di cellule/ora) espressa dalla funzione $N'(t) = 80e^{-\frac{1}{10}t}$, con $t \geq 0$. Di quante cellule cresce la coltura nelle prime 2 ore?

In base a quanto appena osservato, nelle prime 2 ore la coltura cresce di un numero di cellule espresso dall'integrale:

$$\int_0^2 80e^{-\frac{1}{10}t}\,dt = \left[-800e^{-\frac{1}{10}t}\right]_0^2 = -800e^{-\frac{1}{5}} + 800 \simeq 145$$

La coltura è cresciuta dunque di circa 145 cellule nelle prime 2 ore.

COLLEGHIAMO I CONCETTI **Primitive, integrali indefiniti e definiti, funzioni integrali**

È bene soffermarci a riflettere sui concetti che abbiamo via via introdotto e sulle loro reciproche relazioni.

- I concetti di integrale indefinito, integrale definito e funzione integrale sono distinti e non vanno confusi:
  - l'integrale *indefinito* di una funzione f, $\int f(x)\,dx$, è un *insieme di funzioni*: l'insieme di tutte le primitive della funzione f;
  - l'integrale *definito* di una funzione f in un intervallo $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$, è un *numero*, che è stato definito come limite delle somme di Riemann della funzione f relative all'intervallo $[a, b]$;
  - una funzione integrale è, appunto, una *funzione*.
- Il teorema fondamentale del calcolo integrale mette in evidenza le reciproche relazioni tra i precedenti concetti:
  - il calcolo di un integrale *definito* può essere fatto evitando il ricorso alle somme di Riemann, ma passando attraverso il calcolo del corrispondente integrale *indefinito* in modo da individuare una *primitiva* $F(x)$ della funzione integranda che consenta di utilizzare la formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

  - definendo la funzione integrale associata a una funzione f, possiamo costruire una *primitiva* di f anche quando quest'ultima non è calcolabile in modo elementare.

Esercizi p. 171

5. Applicazioni geometriche degli integrali definiti

In questo paragrafo presentiamo le più importanti applicazioni *geometriche* del concetto di integrale definito: il calcolo delle aree e dei volumi.

Il calcolo delle aree

Nel **Paragrafo 1** abbiamo visto che $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'**area con segno** della regione di piano (trapezoide) limitata dal grafico della funzione $y = f(x)$ e dall'asse x nell'intervallo $[a, b]$ (**Figg. 13** e **14**).

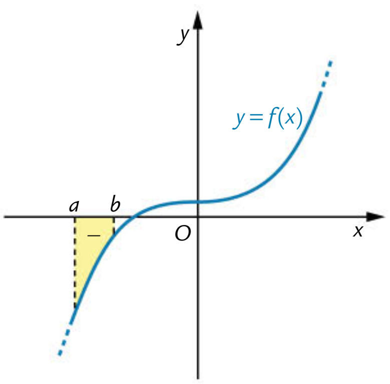


Figura 13 L'integrale definito della funzione *f* nell'intervallo [*a*, *b*] è uguale all'opposto dell'area della regione colorata in giallo.

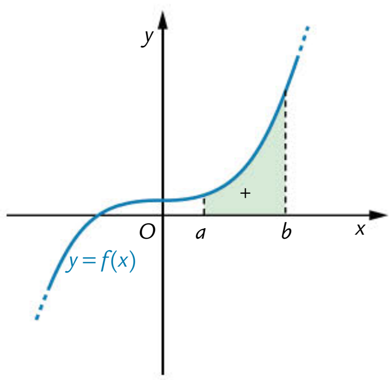


Figura 14 L'integrale definito della funzione *f* nell'intervallo [*a*, *b*] è uguale all'area della regione colorata in verde.

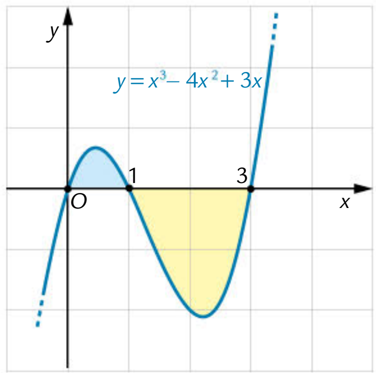
Già questa prima osservazione consente di calcolare le aree di molte regioni di piano, come mostriamo nel prossimo esempio.

ESEMPIO Area della regione di piano limitata dal grafico di una funzione e dall'asse x

Determiniamo l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ e dall'asse x.

- **Tracciamo il grafico della funzione e individuiamo la regione di cui dobbiamo calcolare l'area**

Un breve studio della funzione $y = f(x)$ consente di tracciare il suo grafico qualitativo. Da esso ci rendiamo conto che la regione di cui dobbiamo calcolare l'area, limitata dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse, è quella colorata. Osserviamo che, ai fini del problema che vogliamo risolvere, non serve stabilire le ascisse dei punti di estremo relativo o di flesso della funzione, mentre è indispensabile determinare le *ascisse* dei punti d'intersezione del suo grafico con l'asse x, che in questo caso sono: $x = 0$, $x = 1$ e $x = 3$.



- **Calcoliamo l'area**

Osserviamo che nell'intervallo $(0, 1)$ la funzione è *positiva*, quindi l'area della regione colorata in azzurro è data da $\int_0^1 f(x)\,dx$. Nell'intervallo $(1, 3)$ invece la funzione è *negativa*, quindi l'area della regione colorata in giallo è data da: $-\int_1^3 f(x)\,dx$. In definitiva, l'area della regione richiesta è uguale a:

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{37}{12}$$

Ci poniamo ora il problema di determinare l'area della regione piana limitata dai grafici di *due* funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$. Se le due funzioni sono tali che $f(x) \geq g(x) \geq 0$ nell'intervallo $[a, b]$, è immediato osservare che tale area è la differenza tra l'area del trapezoide individuato da f nell'intervallo $[a, b]$ e l'area del trapezoide individuato da g nell'intervallo $[a, b]$ (**Fig. 15**).

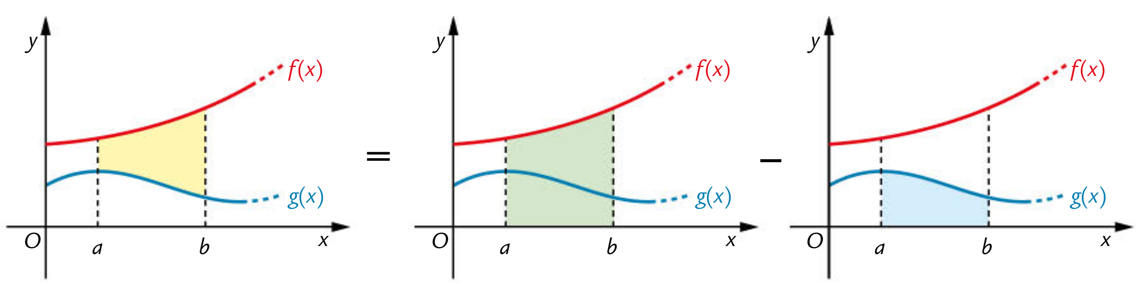


Figura 15

Pertanto, l'area cercata risulta espressa in questo caso dalla formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

La formula vale anche se le due funzioni f e g **non** sono positive, purché nell'intervallo $[a, b]$ sia sempre $f(x) \geq g(x)$. Infatti esiste sempre una *traslazione* di vettore $\vec{v}(0,\ k)$ che trasforma due funzioni continue in $[a, b]$ in due funzioni positive; le due funzioni traslate (**Fig. 16**) avranno equazioni:

$$y = f(x) + k \quad \text{e} \quad y = g(x) + k$$

e l'area della regione delimitata dai loro grafici nell'intervallo $[a, b]$ (uguale all'area delimitata dalle due funzioni originarie poiché la traslazione è un'isometria) sarà data ancora da:

$$\int_a^b [f(x)+k]\,dx - \int_a^b [g(x)+k]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

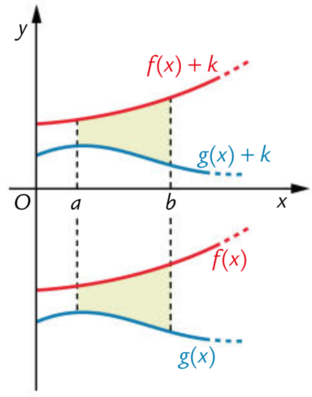


Figura 16

PROPRIETÀ | **Area della regione limitata dal grafico di due funzioni**

Siano f e g due funzioni continue in $[a, b]$, tali che $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora l'**area** della regione di piano limitata dai grafici di f e di g nell'intervallo $[a, b]$ è data da:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Con GeoGebra
Area della regione limitata dal grafico di due funzioni

ESEMPI Area della regione di piano limitata dal grafico di due funzioni

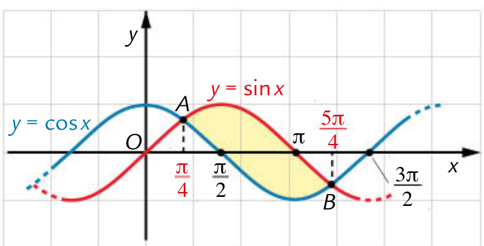
Siano A e B i due punti d'intersezione, nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$, delle due curve $y = f(x) = \sin x$ e $y = g(x) = \cos x$. Calcoliamo l'area della regione di piano limitata dagli archi delle due curve aventi come estremi A e B.

- **Tracciamo i grafici delle funzioni e individuiamo le coordinate dei loro punti d'intersezione**

Tracciando i grafici delle due funzioni seno e coseno, ci rendiamo conto che la regione di piano di cui dobbiamo calcolare l'area è quella colorata in figura. Determiniamo le ascisse dei due punti d'intersezione:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases} \Rightarrow \quad \sin x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Ne deduciamo che le ascisse dei due punti d'intersezione nell'intervallo $[0, 2\pi]$ sono $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$.



- **Calcolo dell'area**

Tenendo conto che nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ il grafico della funzione seno è «al di sopra» di quello della funzione coseno (quindi $f(x) \geq g(x)$), l'area della regione colorata sarà data da:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

PER SAPERNE DI PIÙ **Aree limitate dai grafici di più funzioni**

Per calcolare l'area di una regione di piano limitata dai grafici di **più di due** funzioni è possibile ragionare similmente a quanto visto nel caso di *due* funzioni, aggiungendo e sottraendo le aree di opportuni trapezoidi. Sulla base di queste considerazioni si potrebbe dimostrare la validità della seguente *regola pratica* per determinare l'area della regione di piano limitata dai grafici di $f_1, f_2, ..., f_n$: si fissa sul contorno della regione di cui si vuole calcolare l'area il verso di percorrenza **orario** e, partendo da uno qualunque dei punti d'intersezione di $f_1, f_2, ..., f_n$, si calcola la somma degli integrali che hanno, ciascuno, come funzione integranda quella della curva sulla quale ci si sposta e come estremi di integrazione l'ascissa del punto di partenza e l'ascissa del successivo punto d'intersezione.

Per esempio, l'area della regione colorata in **Fig. 17**, partendo dal punto di ascissa a, è data da:

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^d f_2(x)\,dx + \int_d^c f_3(x)\,dx + \int_c^a f_4(x)\,dx$$

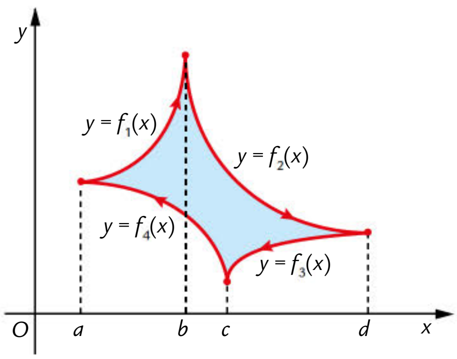


Figura 17

Il calcolo dei volumi

Consideriamo un solido limitato da due piani perpendicolari all'asse x, passanti rispettivamente per i punti di coordinate $(a, 0)$ e $(b, 0)$. Supponiamo inoltre di conoscere l'area $S(x)$ della sezione del solido ottenuta conducendo il piano perpendicolare all'asse x, passante per il punto di coordinate $(x, 0)$ (**Fig. 18**). Vogliamo definire il concetto di *volume* di un solido di questo tipo e calcolarlo.

Consideriamo anzitutto i punti $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ che dividono $[a, b]$ in n intervalli, ciascuno di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, e suddividiamo il solido in n «fette», ciascuna di «spessore» uguale a Δx, conducendo i piani perpendicolari all'asse x passanti per i punti $x_0, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n$ (**Fig. 19**). Scegliamo quindi in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario c_i. Nell'ipotesi che Δx sia **infinitesimo**, è lecito pensare di approssimare ogni «fetta» in cui il solido è stato suddiviso con un *cilindro* avente come altezza Δx e basi equivalenti alla **sezione** del solido ottenuta con il piano passante per $(c_i, 0)$.

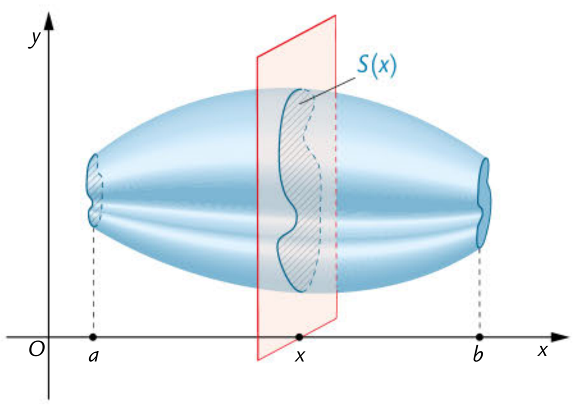


Figura 18

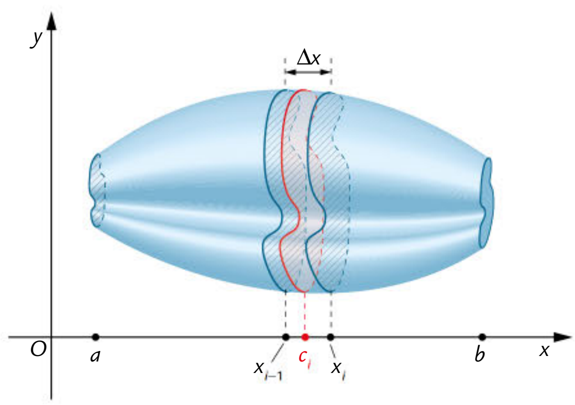


Figura 19

Il volume di questo cilindro è $S(c_i)\,\Delta x$ e la somma dei volumi delle varie «fette» è data da:

$$S(c_1)\Delta x + S(c_2)\Delta x + \ldots + S(c_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x \qquad [12]$$

Possiamo definire **volume** del solido originario il limite della somma [12] quando $n \to +\infty$. Poiché la [12] è una somma di Riemann della funzione $S(x)$ relativa all'intervallo $[a, b]$, il suo limite per $n \to +\infty$ è l'integrale definito della funzione $S(x)$ in tale intervallo. È ragionevole quindi la seguente definizione.

RICORDA
Stiamo supponendo che la sezione del solido con il piano perpendicolare all'asse x passante per $(x, 0)$ abbia area espressa dalla funzione $S(x)$. Perciò l'area della sezione ottenuta con il piano passante per $(c_i, 0)$ è $S(c_i)$.

DEFINIZIONE | Volume di un solido

Consideriamo un solido limitato da due piani perpendicolari all'asse x, che intersecano l'asse x stesso nei punti di ascissa a e b. Sia inoltre $S(x)$ l'area della sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare all'asse x passante per $(x, 0)$; allora il **volume** V del solido è dato dalla formula:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \qquad [13]$$

PER LA PRECISIONE
Prenderemo in considerazione casi in cui $S(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$, in modo che sia garantita l'esistenza dell'integrale [13].

ESEMPIO Calcolo del volume di un solido con il metodo delle sezioni

Determiniamo il volume del solido che ha come base il segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione $x = y^2 - 4$ e dall'asse y, le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi.

Una visualizzazione del solido di cui vogliamo calcolare il volume è rappresentata in **Fig. 20**.

Con GeoGebra
Volume di un solido

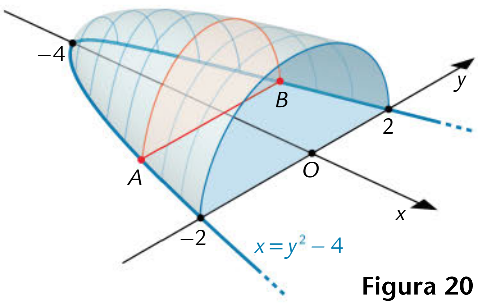


Figura 20

▶ **1° passo Calcolo dell'area di una sezione**

Per poter applicare la formula [13] dobbiamo anzitutto determinare l'*area* della sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare all'asse x e passante per il punto di coordinate $(x, 0)$.

In base a quanto affermato dal testo del problema, tale sezione è un *semicerchio*; indichiamo con AB il suo diametro (**Fig. 21**). Risolvendo l'equazione $x = y^2 - 4$ rispetto a y si ricava:

$$y = \pm\sqrt{x+4}$$

quindi le coordinate di A e B sono $(x, \pm\sqrt{x+4})$ (**Fig. 21**).

Il raggio del semicerchio di diametro AB è allora:

$$r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}(2\sqrt{x+4}) = \sqrt{x+4}$$

e l'area del semicerchio è:

$$S(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}(x+4)$$

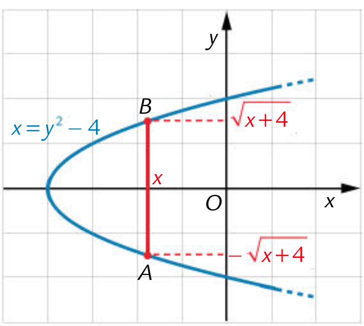


Figura 21

▶ **2° passo Calcolo del volume del solido**

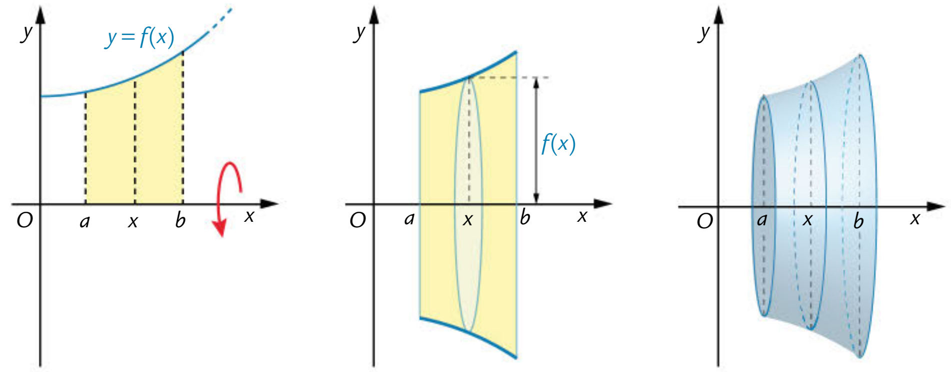
Il volume del solido, in base alla [13], è allora:

$$V = \int_{-4}^{0} \frac{\pi}{2}(x+4)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{0} = 4\pi$$

Approfondimento
Volume del tronco di piramide e del tronco di cono

Soffermiamo infine la nostra attenzione sui **solidi di rotazione**.

Consideriamo il trapezoide limitato nell'intervallo $[a, b]$ dal grafico di una funzione $y = f(x)$, che supponiamo positiva o nulla (**Fig. 22a**); facendo ruotare tale trapezoide in un giro completo intorno all'asse x si ottiene un solido, le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono cerchi (**Figg. 22b** e **c**).



a. Facciamo ruotare il trapezoide colorato intorno all'asse *x*.

b. Le sezioni con piani perpendicolari all'asse *x* del solido che si ottiene sono cerchi.

c. Solido ottenuto dalla rotazione.

Figura 22

Per determinare il volume del solido basta allora applicare la **[13]**, tenendo conto che l'area $S(x)$ della sezione del solido con il piano passante per $(x, 0)$ è data da:

$S(x) = \pi\,[f(x)]^2$ **La sezione è un cerchio di raggio *f*(*x*) (Fig. 22b)**

Con GeoGebra
Volume di un solido di rotazione

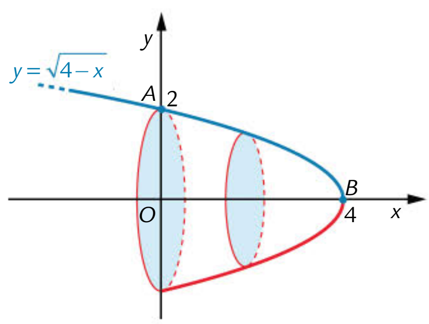
Il volume V del solido può dunque essere espresso dalla formula:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx \qquad [14]$$

ESEMPIO Calcolo del volume di un solido di rotazione

Consideriamo la regione finita di piano limitata dagli assi cartesiani e dal grafico della funzione $y = \sqrt{4-x}$. Determiniamo il volume del solido che si ottiene facendo ruotare tale regione in un giro completo intorno all'asse x.

- Il grafico della funzione $y = \sqrt{4-x}$ si può tracciare facilmente (è un arco di parabola); interseca gli assi cartesiani nei punti $A(0, 2)$, $B(4, 0)$.
- Il solido di cui vogliamo calcolare il volume è quello generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte di piano limitata dagli assi cartesiani e dall'arco $\overset{\frown}{AB}$. In base alla **[14]**, il volume del solido è:



$$V = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{4-x}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 (4-x)\,dx = \pi\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

Vale una formula analoga alla **[13]** nel caso che le sezioni che si considerano siano ottenute con piani perpendicolari **all'asse** y. Se $S(y)$ è l'area della generica sezione passante per il punto di coordinate $(0, y)$, il volume del solido è:

$$V = \int_a^b S(y)\,dy$$

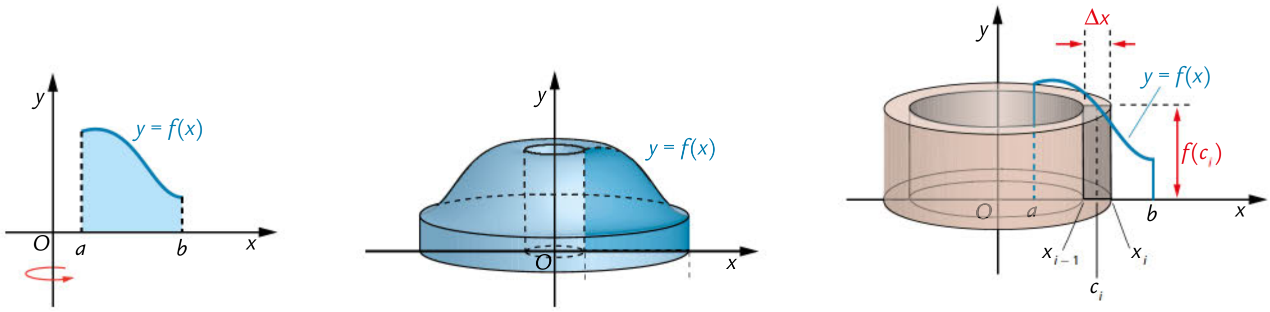
Analogamente, il volume del solido generato dalla rotazione intorno **all'asse** y del trapezoide limitato dalla curva di equazione $x = f(y)$ per $a \le y \le b$ è dato dalla formula:

$$V = \pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy \qquad [15]$$

IN UN ALTRO MODO **Il volume di un solido di rotazione con il metodo dei gusci cilindrici**

Data una funzione *non negativa* di equazione $y = f(x)$, consideriamo il trapezoide delimitato dal suo grafico nell'intervallo $[a, b]$ (**Fig. 23a**) e il solido generato da una rotazione completa intorno all'asse y di tale trapezoide (**Fig. 23b**). È possibile giungere a una formula che consente di calcolare il volume di tale solido integrando rispetto alla variabile x (anziché rispetto alla variabile y). Il ragionamento è esposto qui di seguito.

1. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e scegliamo un punto c_i in ogni intervallino $[x_{i-1}, x_i]$, esattamente come abbiamo fatto per approssimare l'area del trapezoide come somma delle aree di opportuni rettangoli. Il rettangolo di base $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ e altezza $f(c_i)$, nella rotazione intorno all'asse y, genera un «guscio cilindrico» (**Fig. 23c**).



a **b** **c**

Figura 23

Immaginiamo ora di «tagliare e srotolare» tale guscio cilindrico (**Fig. 24**). Il volume del guscio cilindrico può essere approssimato (nell'ipotesi che Δx sia molto piccolo) dal volume del parallelepipedo avente altezza $f(c_i)$, profondità Δx e restante dimensione di misura uguale alla lunghezza della circonferenza di raggio c_i. Dunque il volume del guscio cilindrico è approssimativamente $(2\pi c_i) f(c_i)\, \Delta x$.

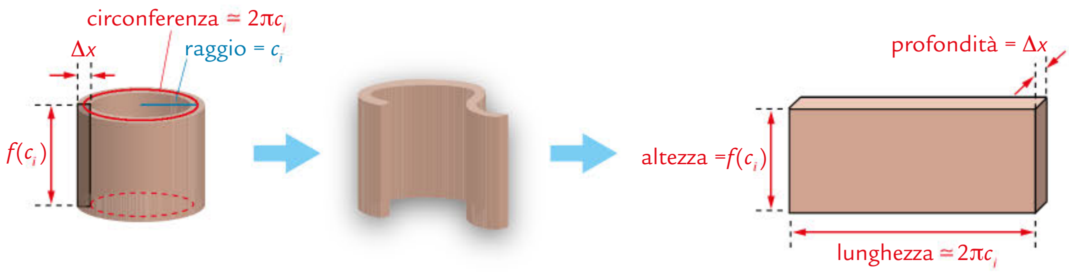


Figura 24

2. Nella rotazione intorno all'asse y, i vari rettangoli di basi $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ e altezza $f(c_i)$ (per $i = 1, 2, ..., n$) generano vari gusci cilindrici; la somma dei volumi di tutti questi gusci è una buona approssimazione del volume V del solido generato dalla rotazione del trapezoide intorno all'asse y: è ragionevole assumere che V sia uguale al limite di tale somma quando $n \to +\infty$ (**Fig. 25**).

Figura 25

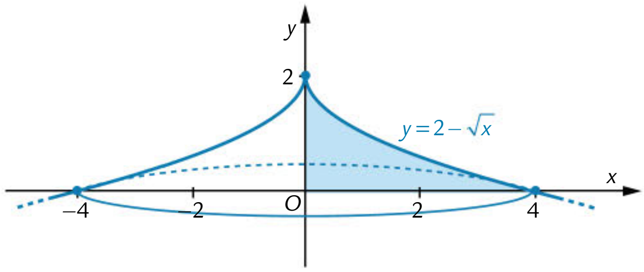
In definitiva:

$$V = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (2\pi c_i)\, f(c_i) \Delta x}_{\text{somma di Riemann relativa alla funzione } (2\pi x) f(x) \text{ nell'intervallo } [a,\, b]} = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx} \qquad [16]$$

Il vantaggio della formula [16] è che **non** richiede di esplicitare l'equazione della funzione rispetto alla variabile x, nei casi in cui ciò non è possibile o non è conveniente.

ESEMPIO Solido generato da una rotazione intorno all'asse y

Consideriamo la parte di piano limitata dal grafico della funzione $y = 2 - \sqrt{x}$ e dagli assi cartesiani. Qual è il volume del solido generato dalla rotazione completa di tale regione di piano intorno all'asse y?



1° modo

Esplicitiamo l'equazione della funzione rispetto alla variabile x:

$$y = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - y \Rightarrow x = (2-y)^2, \quad \text{con } y \le 2$$

Ora possiamo applicare la [15]; il volume V richiesto è dato da:

$$V = \pi\int_0^2 (2-y)^4\,dy \underbrace{=}_{\text{ponendo } 2-y=u} -\pi\int_2^0 u^4\,du = \pi\int_0^2 u^4\,du = \pi\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

2° modo

Utilizzando il metodo dei gusci cilindrici abbiamo:

$$V = 2\pi\int_0^4 x\underbrace{(2-\sqrt{x})}_{f(x)}\,dx = 2\pi\left[x^2 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{32\pi}{5}$$

Approfondimento
Lunghezza di un arco di curva e area di una superficie di rotazione

Esercizi p. 178

6. Applicazioni del concetto di integrale definito alle scienze e alla tecnica

In questo paragrafo presentiamo alcuni esempi delle innumerevoli applicazioni del concetto di *integrale definito*.

Posizione, velocità e accelerazione

Sappiamo che se $s(t)$ è la legge oraria di un punto materiale in un moto rettilineo, allora la velocità del punto in quell'istante è la derivata di $s(t)$, ossia:

$$v(t) = s'(t)$$

Ne segue che:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt = \overbrace{s(t_2) - s(t_1)}^{\text{variazione della posizione del punto, ovvero spostamento subìto dal punto}}$$

Perciò lo *spostamento* subìto da un punto che si muove su una retta con velocità $v(t)$ nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è dato dall'integrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \qquad [17]$$

Se $v(t) \ge 0$, l'integrale [17] esprime lo *spazio effettivamente percorso* dal punto; in caso contrario, per determinare quest'ultimo bisogna tenere conto delle inversioni di moto, perciò occorre integrare il *valore assoluto* della funzione $v(t)$, cioè calcolare:

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt \qquad [18]$$

ESEMPIO Calcolo dello spazio percorso

Un punto materiale si muove lungo l'asse x con una velocità espressa dalla legge $v(t) = t^2 - 3t + 2$ (misurata in metri al secondo). Determiniamo:

a. lo spostamento del punto nell'intervallo di tempo compreso tra 1 e 4 s;
b. lo spazio percorso dal punto nell'intervallo di tempo compreso tra 1 e 4 s.

a. In base a quanto abbiamo detto lo spostamento del punto è dato dall'integrale:

$$\int_1^4 (t^2 - 3t + 2)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right]_1^4 = \frac{9}{2}$$

Dunque il punto si è spostato di 4,5 m verso destra.

b. Osserviamo che $v(t) = (t-1)(t-2)$, quindi nell'intervallo $[1, 4]$ risulta $v(t) \le 0$ per $1 \le t \le 2$ e $v(t) \ge 0$ per $2 \le t \le 4$. Ciò significa che il punto si è mosso «sia in avanti sia indietro»; dunque per calcolare lo spazio totale da esso percorso nell'intervallo $[1, 4]$ dobbiamo utilizzare la **[18]**:

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = \int_1^2 -v(t)\,dt + \int_2^4 v(t)\,dt =$$

$$= \int_1^2 -(t^2 - 3t + 2)\,dt + \int_2^4 (t^2 - 3t + 2)\,dt =$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 2t\right]_1^2 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right]_2^4 = \frac{29}{6} \simeq 4{,}83$$

Concludiamo che complessivamente il punto ha percorso, nell'intervallo preso in considerazione, circa 4,83 m.

Se è nota la funzione che esprime l'accelerazione $a(t)$ di un punto materiale in funzione del tempo, l'integrale definito della funzione $a(t)$ sull'intervallo $[t_1, t_2]$ esprime la *variazione di velocità* che ha subìto il punto in tale intervallo; ricordando che $a(t) = v'(t)$ abbiamo infatti:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} v'(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

variazione subita da $v(t)$ nell'intervallo $[t_1, t_2]$

Quantità di carica

Nel **Volume 4**, **Unità 5**, abbiamo visto che l'intensità di corrente che circola in un conduttore all'istante t, ossia l'intensità di corrente istantanea, è la derivata della funzione $q(t)$ che esprime la quantità di carica in funzione di t, ossia: $i(t) = q'(t)$. Ne segue che:

$$\int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} q'(t)\,dt = q(t_2) - q(t_1)$$

Perciò, per determinare la quantità Q di carica che attraversa la sezione di un conduttore nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ basta utilizzare la formula:

$$\boxed{Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt}$$

ESEMPIO Calcolo della quantità di carica

In un circuito l'intensità di corrente, misurata in ampere (A), varia con la legge $i(t) = 6t^2 + 2t$; qual è la quantità di carica in coulomb (C) che attraversa una sezione del circuito nei primi due secondi dopo la sua chiusura?

Utilizzando la precedente formula con $t_1 = 0$ e $t_2 = 2$, abbiamo:

$$Q = \int_0^2 (6t^2 + 2t)\,dt = \left[2t^3 + t^2\right]_0^2 = 20 \text{ C}$$

Lavoro di una forza

Consideriamo una forza avente per direzione costante una retta, che scegliamo come asse delle ascisse, e supponiamo che l'intensità della forza sia espressa, in funzione dell'ascissa x del punto di applicazione della forza, da una funzione continua $F(x)$. Vogliamo calcolare il lavoro L compiuto dalla forza nello spostamento dal punto di ascissa a al punto di ascissa b.
A tale scopo, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli aventi estremi $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$, ciascuno di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
Se l'ampiezza Δx è molto piccola, i valori assunti da $F(x)$ nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ saranno praticamente costanti (dal momento che stiamo supponendo la funzione $F(x)$ continua); possiamo dunque approssimare l'intensità della forza nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ con $F(c_i)$, essendo c_i un punto arbitrariamente scelto in tale intervallo.
Il *lavoro* compiuto dalla forza nell'intervallo i-esimo sarà allora:

$$F(c_i)\,\Delta x$$

e la somma dei lavori in tutti gli intervalli in cui è stato suddiviso $[a, b]$ risulterà:

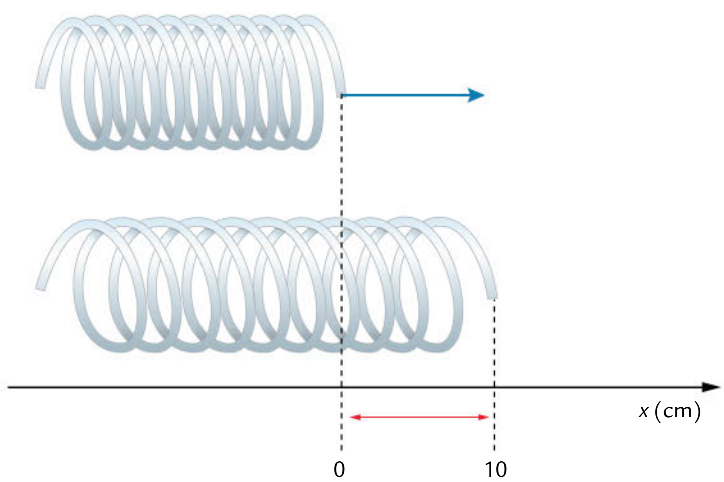
$$\sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x \qquad [19]$$

È ragionevole a questo punto assumere che il lavoro L compiuto dalla forza $F(x)$ nello spostamento da $x = a$ a $x = b$ sia il limite della [19] per $n \to +\infty$. Poiché la [19] è una somma di Riemann della funzione $F(x)$, passando al limite otteniamo un integrale definito, quindi:

$$L = \int_a^b F(x)\,dx$$

ESEMPIO Lavoro di una forza variabile

Consideriamo una molla, avente costante di elasticità $k = 300$ N/m, riferita a un sistema di ascisse rispetto al quale la molla è in posizione di riposo quando il suo secondo estremo coincide con l'origine. Qual è il lavoro necessario per allungare la molla di 10 cm dalla posizione di equilibrio?



In base alla *legge di Hooke*, la molla esercita una forza di richiamo $\vec{F} = -k\vec{x}$ quando viene allungata di x unità. Per allungare la molla dobbiamo dunque esercitare una forza contraria, di intensità kx.
Trasformati i centimetri in metri (per esprimere il lavoro in joule), il lavoro necessario per allungare la molla sarà dato da:

$$\int_0^{0,1} kx\,dx = 300\int_0^{0,1} x\,dx = 300\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{0,1} = 1{,}5 \text{ J}$$

Esercizi p. 193

7. Funzioni integrabili e integrali impropri

Le funzioni integrabili

Nell'esporre il concetto di integrale definito di una funzione f in un intervallo $[a, b]$ abbiamo supposto, per semplicità, che la funzione f fosse *continua*: la continuità di f infatti è condizione sufficiente perché l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ (inteso come limite per $n \to \infty$ di una somma di Riemann della funzione) *esista finito* e sia un numero reale ben definito.
In realtà l'esistenza dell'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ può essere provata per classi di funzioni più ampie della classe delle funzioni continue. Infatti, convenuto di chiamare **integrabile** in $[a, b]$ una funzione f per cui esiste $\int_a^b f(x)\,dx$, si potrebbe dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 4 | Integrabilità di una funzione

Sia f una funzione **definita** e **limitata** in $[a, b]$. Allora la funzione f è **integrabile** se è verificata una qualsiasi delle seguenti condizioni:
- f è crescente (o decrescente) in $[a, b]$;
- f è continua in $[a, b]$;
- f presenta in $[a, b]$ un numero finito di punti di singolarità eliminabili o di punti di salto.

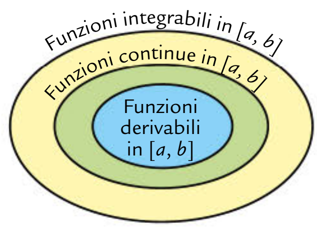


Figura 26 **Relazioni di inclusione tra gli insiemi delle funzioni continue, derivabili e integrabili in un intervallo $[a, b]$.**

Sostanzialmente, quindi, *quasi* tutte le funzioni *limitate* in un intervallo $[a, b]$ sono integrabili. Il «quasi» richiama l'attenzione sul fatto che esistono delle eccezioni (*vedi* il prossimo esempio), ma esse riguardano soltanto funzioni «particolari», con cui comunemente non si lavora.

ESEMPIO Funzione non integrabile

Verifichiamo che la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$, detta funzione di Dirichlet, non è integrabile in $[0, 1]$.

Consideriamo la suddivisione dell'intervallo $[0, 1]$ in n intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ di uguale ampiezza $\frac{1}{n}$, con $i = 1, \ldots, n$.
Le somme di Riemann ottenute scegliendo in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto c_i *razionale* sono uguali a:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \frac{1}{n}\cdot n = 1 \qquad f(c_i) = 1 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n$$

quindi tendono a 1 per $n \to +\infty$.
Le somme di Riemann ottenute scegliendo in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto c_i *irrazionale* sono uguali a:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0 \qquad f(c_i) = 0 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n$$

quindi tendono a 0 per $n \to +\infty$. Poiché abbiamo trovato due somme di Riemann che hanno limite *diverso* per $n \to +\infty$, la funzione **non** è integrabile in $[0, 1]$.

Chiarito che l'integrale definito di una funzione in un intervallo $[a, b]$ esiste per la maggioranza delle funzioni definite e *limitate* in $[a, b]$, l'ulteriore passo che resta da fare è quello di estendere, se possibile, la definizione di integrale definito al caso di funzioni *illimitate* in $[a, b]$ o definite su *intervalli illimitati*. Si parla in questi casi di integrali **impropri** o **generalizzati**.

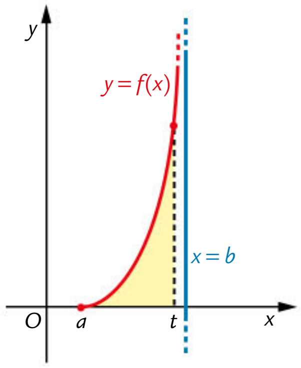


Figura 27 **Interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione illimitata per $x = b$: l'integrale corrisponde al limite per $t \to b^-$ dell'area del trapezoide colorato.**

Integrali impropri su intervalli limitati

Consideriamo una funzione f, continua in $[a, b)$ ma non in $x = b$; ciò accade per esempio se $x = b$ è un asintoto verticale per la funzione, cioè se:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$$

L'integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ viene definito nel modo più naturale possibile: si integra tra a e t, con $t < b$, e poi si passa al limite per $t \to b^-$; si pone cioè:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \qquad [20]$$

L'interpretazione geometrica di questa definizione è data in **Fig. 27**.
Se il limite **[20]** esiste finito, allora si dice che f è **integrabile in senso improprio** (o **generalizzato**) in $[a, b]$ e che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ è **convergente**. Se il limite **[20]** è $+\infty$ oppure $-\infty$, l'integrale si dice **divergente**. Se infine il limite non esiste, allora si dice che l'integrale **non esiste**.
Analogamente, se f è continua in $(a, b]$ ma non in $x = a$, poniamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx \qquad [21]$$

Infine, se f non è continua in $x = c$, con $a < c < b$, poniamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad [22]$$

e diciamo che l'integrale al primo membro della **[22]** *converge* se e solo se convergono *entrambi* gli integrali al secondo membro; in caso contrario diremo che l'integrale al primo membro **non** esiste in senso improprio (o generalizzato).

ESEMPI Integrali impropri relativi a funzioni illimitate

Calcoliamo i seguenti integrali, se convergono:

a. $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ **b.** $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{1}{x-2}\,dx$

a. Osserviamo anzitutto che l'integrale è *improprio* perché la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ non è definita in $x = 1$, dove presenta un asintoto verticale.
In base alla **[21]** abbiamo:

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t \to 1^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t \to 1^+} \left[2\sqrt{x-1}\right]_t^5 = \lim_{t \to 1^+} \left(4 - 2\sqrt{t-1}\right) = 4$$

Dunque l'integrale dato è *convergente* e vale 4. Poiché la funzione integranda è positiva, possiamo interpretare l'integrale geometricamente come area della regione di piano limitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette $x = 1$ e $x = 5$ (**Fig. 28**); nota che si tratta di una regione di piano *illimitata*, ma di area *finita*.

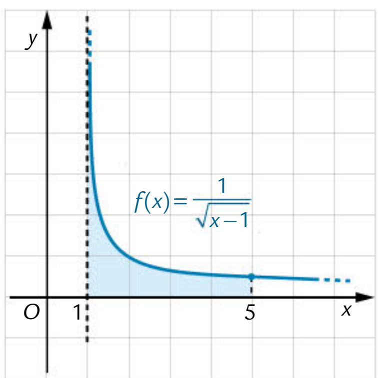


Figura 28

b. Anche in questo caso l'integrale è *improprio* perché la funzione integranda non è definita nel punto $x = 2$, *interno* all'intervallo di integrazione $[-1, 3]$, dove la funzione presenta un asintoto verticale (**Fig. 29**). In base alla definizione [22], con $c = 2$, abbiamo:

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x-2}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{x-2}\,dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{x-2}\,dx \qquad [23]$$

L'integrale dato sarà convergente se e solo se sono convergenti *entrambi* gli integrali a secondo membro della [23]. Abbiamo però che:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t\to 2^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t\to 2^-} \left[\ln|x-2|\right]_{-1}^{t} =$$

$$= \lim_{t\to 2^-} (\ln|t-2| - \ln 3) = -\infty$$

Ciò è sufficiente per concludere che l'integrale di partenza non esiste in senso improprio.

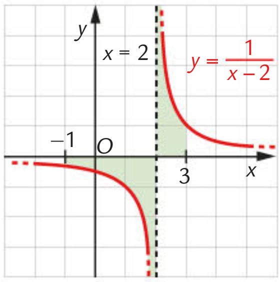


Figura 29

Integrali impropri su intervalli illimitati

Consideriamo una funzione f, continua in $[a, +\infty)$. L'integrale di f in $[a, +\infty)$ viene definito similmente al caso precedente: si integra tra a e t, con $t > a$, e poi si passa al limite per $t \to +\infty$ (**Fig. 30**); si pone cioè:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,dx \qquad [24]$$

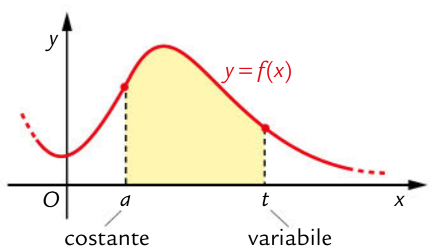


Figura 30 Interpretazione geometrica di un integrale nell'intervallo $[a, +\infty)$: l'integrale corrisponde al limite per $t \to +\infty$ dell'area del trapezoide colorato.

Se il limite [24] esiste finito, allora si dice che f è **integrabile in senso improprio** (o **generalizzato**) in $[a, +\infty)$ e che l'integrale $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ è **convergente**. Se il limite [24] è $+\infty$ oppure $-\infty$, l'integrale si dice **divergente**. Se infine il limite non esiste, allora si dice che l'integrale **non esiste.**
Analogamente, se f è continua in $(-\infty, b]$ si pone:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx \qquad [25]$$

Infine, se f è continua in $\mathbf{R}$, si pone:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad [26]$$

dove $c \in \mathbf{R}$ è un punto arbitrariamente scelto. L'integrale al primo membro della [26] si dice *convergente* se e solo se convergono *entrambi* gli integrali al secondo membro; in caso contrario diremo che l'integrale al primo membro **non** esiste in senso improprio (o generalizzato).

RIFLETTI

Nella [26] la scelta del punto c è arbitraria nel senso che, in forza della proprietà di additività rispetto all'intervallo di integrazione, il valore dell'integrale improprio è indipendente dalla scelta di c. Verificalo per esercizio.

ESEMPI Integrali impropri relativi a intervalli illimitati

Calcoliamo i seguenti integrali, se convergono:

a. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ **b.** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ **c.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **d.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

a. In base alla definizione **[24]** abbiamo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}[-e^{-x}]_0^t = \lim_{t\to+\infty}(1-e^{-t}) = 1$$

dunque l'integrale è *convergente*. L'interpretazione geometrica è la seguente: la regione di piano limitata dal grafico della funzione, dall'asse y e dall'asse x è *illimitata* ma ha area *finita*, uguale a 1 (**Fig. 31**).

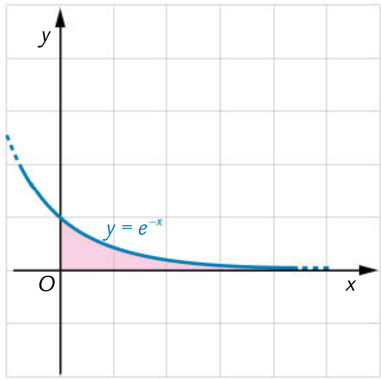


Figura 31

b. In base alla definizione **[24]** abbiamo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\big[\ln|x|\big]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\ln|t| = +\infty$$

L'integrale è *divergente*. La regione di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$ è *illimitata* e ha area *infinita* (**Fig. 32**).

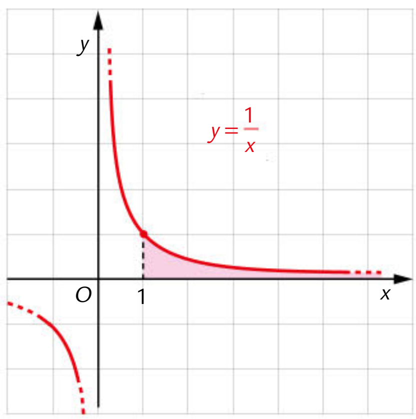


Figura 32

c. In base alla definizione **[26]** abbiamo, scegliendo $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \qquad [27]$$

Calcoliamo ora separatamente i due integrali al secondo membro della **[27]**:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to-\infty}[\arctan x]_t^0 =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(-\arctan t) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Inoltre:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}[\arctan x]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\arctan t = \frac{\pi}{2}$$

Poiché entrambi gli integrali convergono, anche l'integrale di partenza *converge* e risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

In alternativa, osservando che la funzione integranda è *pari*, si sarebbe potuto procedere così:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

L'interpretazione geometrica è la seguente: la regione limitata dal grafico della funzione e dall'asse x è *illimitata* ma ha area *finita*, uguale a π (**Fig. 33**).

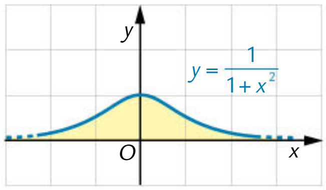


Figura 33

d. In base alla definizione, scegliendo $c = 0$, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

e l'integrale al primo membro converge se e solo se convergono *entrambi* gli integrali al secondo membro. Risulta tuttavia:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = +\infty$$

Ciò è sufficiente a concludere che l'integrale dato **non** esiste in senso improprio, *secondo la definizione data*.

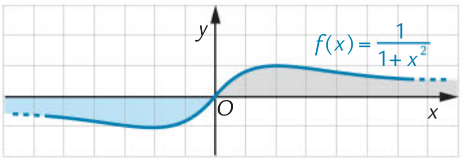


Figura 34

Analizzando il grafico della funzione integranda (**Fig. 34**) e riconoscendo che è *dispari*, il risultato ottenuto potrebbe lasciare perplessi: verrebbe naturale pensare che l'integrale considerato debba essere *nullo* (così come è nullo l'integrale di qualunque funzione continua dispari su un intervallo limitato e simmetrico rispetto all'origine). In effetti, avremmo ottenuto come risultato 0, se avessimo definito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Tuttavia una definizione di integrale improprio di questo tipo porterebbe a delle *contraddizioni* (*vedi* la rubrica sottostante): di qui il motivo della definizione data, che richiede invece di valutare *separatamente* i due integrali sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

PER SAPERNE DI PIÙ **Che cosa giustifica le definizioni di integrali impropri date?**

Come abbiamo anticipato alla fine dell'esempio precedente, la seguente definizione di integrale improprio su **R**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx \qquad [28]$$

porterebbe a delle *contraddizioni*. Per esempio, l'integrale della funzione $f(x) = x$ su **R**, secondo la [28], risulterebbe uguale a 0; tuttavia, se traslassimo la funzione $f(x) = x$ di una unità verso destra (lasciando quindi *inalterate* le aree limitate dal grafico della funzione sopra e sotto l'asse x) e calcolassimo l'integrale della funzione $f_1(x) = x - 1$ su **R** sempre secondo la [28], otterremo come risultato $-\infty$, con evidente contraddizione. Motivazioni analoghe giustificano la bontà delle definizioni di integrali impropri che abbiamo adottato nel caso di intervalli *limitati* (definizioni in base alle quali, per esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ **non** è integrabile nell'intervallo $[-1, 1]$, sebbene si tratti di una funzione dispari, integrata su un intervallo simmetrico rispetto all'origine).

Criteri di integrabilità

Sussistono alcuni criteri per stabilire se un integrale improprio è convergente o divergente senza dover calcolare l'integrale stesso. Ci limitiamo a enunciare due teoremi paragonabili ai teoremi del confronto per il calcolo dei limiti.

TEOREMA 5 | Primo teorema del confronto

Siano f e g funzioni continue in $[a, b)$, illimitate per $x \to b^-$.

a. Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, b)$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ è convergente, allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente e risulta:

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

b. Se $f(x) \geq g(x)$ in $[a, b)$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ è divergente, allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ è divergente.

Un criterio analogo vale se f è continua in $(a, b]$ e illimitata per $x \to a^+$.

TEOREMA 6 | Secondo teorema del confronto

Siano f e g funzioni continue in $[a, +\infty)$.

a. Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, +\infty)$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ è convergente, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente e risulta:

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

b. Se $f(x) \geq g(x)$ in $[a, +\infty)$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ è divergente, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è divergente.

Un criterio analogo vale se l'intervallo in cui f e g sono continue è $(-\infty, a]$.

Approfondimento
Altri criteri di integrabilità

ESEMPI Utilizzo dei criteri del confronto

a. Dimostriamo che $\int_0^1 \frac{5 - \sin x}{x}\,dx$ è divergente.

La funzione integranda non è continua in $x = 0$ dove presenta un asintoto verticale (perché?). Per ogni $x \in (0, 1]$ risulta $5 - \sin x \geq 4$, quindi $\frac{5 - \sin x}{x} \geq \frac{4}{x}$.
Poiché:

$$\int_0^1 \frac{4}{x}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{4}{x}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \left[4 \ln|x|\right]_t^1 = \lim_{t \to 0^+} \left(-4 \ln|t|\right) = +\infty$$

l'integrale $\int_0^1 \frac{4}{x}\,dx$ è divergente, dunque per il **Teorema 5** anche l'integrale $\int_0^1 \frac{5 - \sin x}{x}\,dx$ diverge.

b. Dimostriamo che $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente.

Per ogni $x \geq 1$ risulta $x^2 \geq x$, quindi: $-x^2 \leq -x$, da cui $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

Poiché:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t e^{-x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^t = \lim_{t \to +\infty} \left(-e^{-t} + e^{-1}\right) = e^{-1}$$

l'integrale $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ è convergente. In base al **Teorema 6** possiamo concludere che anche $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente e risulta:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{1}{e}$$

Esercizi p. 196

8. Integrazione numerica

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, esistono alcune funzioni le cui primitive **non** sono elementari. Per calcolare l'integrale definito di una funzione di questo tipo, per esempio per calcolare $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ non è possibile avvalersi del teorema fondamentale del calcolo (dal momento che non è possibile individuare una primitiva elementare di e^{-x^2}); si ricorre perciò a dei metodi approssimati. In questo paragrafo illustriamo i più comuni di questi metodi.

Il metodo dei rettangoli

Supponiamo che f sia una funzione continua e non negativa nell'intervallo $[a, b]$ e proponiamoci di determinare un'approssimazione dell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
Gli estremi degli intervallini sono:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad ..., \quad x_n = b$$

Detto c_i il punto medio dell'intervallino $[x_{i-1}, x_i]$, il modo più elementare di approssimare l'integrale definito della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ è quello di approssimare l'area che esso rappresenta con la somma delle aree dei rettangoli di base Δx e altezze $f(c_i)$ (**Fig. 35**).

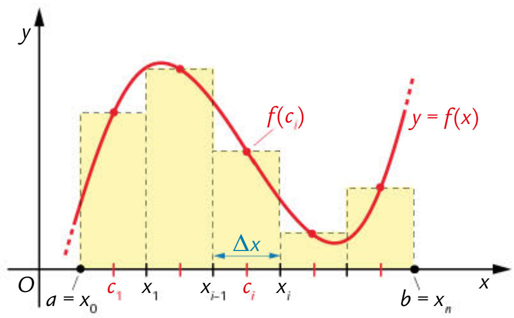


Figura 35 Approssimazione di un integrale definito con il metodo dei rettangoli.

Figura animata
Approssimazione di un integrale definito con il metodo dei rettangoli

Si giunge così alla seguente formula, valida anche per funzioni di segno qualunque.

FORMULA | Metodo dei rettangoli

Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Vale la seguente formula di approssimazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \Delta x\,[f(c_1) + f(c_2) + ... + f(c_n)] \qquad [29]$$

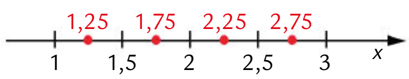
dove: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $c_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ punto medio di $[x_{i-1}, x_i]$, $x_i = a + i\Delta x$

ESEMPIO Approssimazione di un integrale con il metodo dei rettangoli

Approssimiamo $\int_1^3 e^{-x^2}dx$ con il metodo dei rettangoli, applicato con $n = 4$.

Dividiamo l'intervallo $[1, 3]$ in 4 intervallini di ampiezza $\Delta x = \dfrac{3-1}{4} = 0{,}5$.

Gli estremi degli intervallini e i loro punti medi sono rappresentati in figura.



Utilizzando i punti medi (colorati in rosso) otteniamo:

$$\int_1^3 e^{-x^2}dx \simeq \underbrace{0{,}5}_{\Delta x}\cdot[f(\underbrace{1{,}25}_{c_1}) + f(\underbrace{1{,}75}_{c_2}) + f(\underbrace{2{,}25}_{c_3}) + f(\underbrace{2{,}75}_{c_4})] = \qquad \text{Formula [29]}$$

$$= 0{,}5 \cdot [e^{-(1{,}25)^2} + e^{-(1{,}75)^2} + e^{-(2{,}25)^2} + e^{-(2{,}75)^2}] \simeq 0{,}13$$

Il metodo dei trapezi

L'area del trapezoide definito dalla funzione f (continua e non negativa) nell'intervallo $[a, b]$ può, in alternativa, essere approssimata con la somma delle aree dei trapezi rappresentati in **Fig. 36**.

Figura animata
Approssimazione di un integrale definito con il metodo dei trapezi

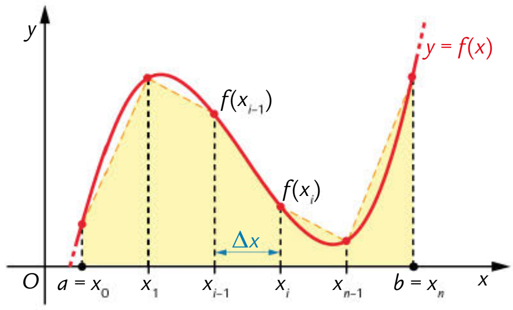


Figura 36 Approssimazione di un integrale definito con il metodo dei trapezi.

Consideriamo per esempio il trapezio avente come altezza l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$; la sua area sarà uguale a:

$$\frac{1}{2}\Delta x[f(x_{i-1})+f(x_i)]$$

Sommando le aree di tutti i trapezi otteniamo:

$$\frac{1}{2}\Delta x[f(x_0)+f(x_1)]+\frac{1}{2}\Delta x[f(x_1)+f(x_2)]+\ldots+\frac{1}{2}\Delta x[f(x_{n-1})+f(x_n)]=$$

$$=\frac{1}{2}\Delta x\,[f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+f(x_n)]=$$

ciascuno dei termini
$f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_{n-1})$
compare due volte nella somma

$$=\frac{1}{2}\Delta x\,[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Se ne deduce la formula seguente, valida anche per funzioni di segno qualunque.

SUGGERIMENTO
Osserva la sequenza dei coefficienti nella formula relativa al metodo dei trapezi:

1, 2, 2, ..., 2, 1

FORMULA | Il metodo dei trapezi

Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Vale la seguente formula di approssimazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\Delta x\,[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)] \qquad [30]$$

dove:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}, \quad x_i=a+i\Delta x$$

ESEMPIO Approssimazione di un integrale con il metodo dei trapezi

Approssimiamo $\int_1^3 e^{-x^2}dx$ con il metodo dei trapezi, applicato con $n = 4$.

Dividiamo l'intervallo [1, 3] in 4 intervallini di ampiezza:

$$\Delta x=\frac{3-1}{4}=0{,}5$$

Gli estremi degli intervallini che si vengono a determinare (e che servono per l'applicazione della formula dei trapezi) sono rappresentati in figura.

Osserva che si tratta dello stesso integrale e della stessa suddivisione dell'intervallo considerati nel precedente esempio (svolto con il metodo dei *rettangoli*). Ora, però, sono gli *estremi* degli intervallini, **non** i loro *punti medi*, che servono per il calcolo approssimato.
Utilizzando tali punti otteniamo:

$$\int_1^3 e^{-x^2}dx \simeq \frac{1}{2}\cdot\underbrace{0{,}5}_{\Delta x}\cdot[f(\underbrace{1}_{x_0})+2f(\underbrace{1{,}5}_{x_1})+2f(\underbrace{2}_{x_2})+2f(\underbrace{2{,}5}_{x_3})+f(\underbrace{3}_{x_4})]= \qquad \text{Formula [30]}$$

$$=0{,}25\cdot[e^{-(1)^2}+2e^{-(1{,}5)^2}+2e^{-(2)^2}+2e^{-(2{,}5)^2}+e^{-(3)^2}]\simeq 0{,}15$$

Il metodo delle parabole

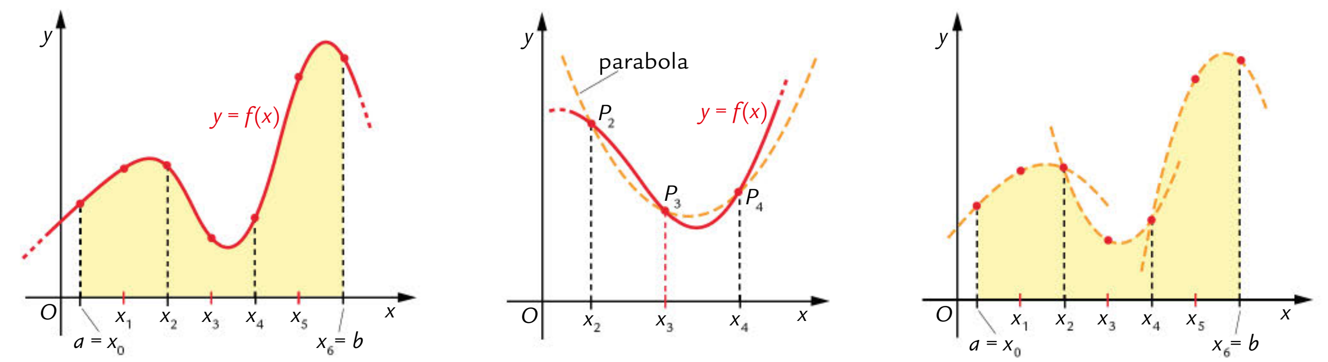
Un metodo più raffinato per approssimare un integrale definito si basa sull'idea di approssimare il grafico della funzione integranda f tramite archi di parabola.

1. Consideriamo come al solito i punti $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ che suddividono l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli di uguale ampiezza, ma supponiamo questa volta che n sia **pari**. Consideriamo quindi gli intervalli:

   $[x_0, x_2], [x_2, x_4], ..., [x_{n-2}, x_n]$

   i quali, per costruzione, hanno come *punti medi* $x_1, x_3, ..., x_{n-1}$ (**Fig. 37a**, con $n = 6$).
2. Fissiamo l'attenzione, per esempio, sull'intervallo $[x_2, x_4]$: il grafico della funzione f in questo intervallo può essere approssimato dall'arco di parabola (con asse verticale) passante per i punti P_2, P_3, P_4 di ascisse x_2, x_3, x_4 (**Fig. 37b**). Un'analoga approssimazione può essere compiuta in ciascuno degli altri intervalli.
3. L'area del trapezoide definito dalla funzione f nell'intervallo $[a, b]$ può essere approssimata dalla somma delle aree dei trapezoidi individuati dagli archi di parabola di cui al punto precedente (**Fig. 37c**).

Figura animata
Approssimazione di un integrale definito con il metodo delle parabole



a. **Vogliamo approssimare l'area del trapezoide limitato dal grafico di $y = f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$. Suddiviso l'intervallo $[a, b]$ tramite i punti $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_6 = b$ consideriamo i tre intervalli: $[x_0, x_2], [x_2, x_4], [x_4, x_6]$ che hanno come *punti medi* rispettivamente x_1, x_3, x_5.**

b. **«Zoom» sull'intervallo $[x_2, x_4]$. L'arco del grafico della funzione in questo intervallo può essere approssimato dall'arco della parabola con asse verticale passante per i punti:**
$P_2(x_2, f(x_2))$
$P_3(x_3, f(x_3))$
$P_4(x_4, f(x_4))$

c. **Possiamo approssimare la funzione con un arco di parabola in ciascuno dei tre intervalli**
$[x_0, x_2], [x_2, x_4], [x_4, x_6]$
quindi assumere come approssimazione dell'integrale definito di f nell'intervallo $[a, b]$ la somma delle aree dei tre trapezoidi individuati dai tre archi di parabola.

Figura 37

Fissando l'attenzione, per esempio, sull'intervallo $[x_2, x_4]$ e detta $y = P(x)$ l'equazione della parabola che passa per i punti P_2, P_3, P_4, è possibile dimostrare che:

$$\int_{x_2}^{x_4} P(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

SUGGERIMENTO

Osserva la sequenza dei coefficienti nella formula relativa al metodo delle parabole:

1, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 2, 4, 1

Il primo e l'ultimo coefficiente sono sempre degli 1; il secondo e il penultimo coefficiente sono sempre dei 4; i restanti coefficienti sono costituiti alternativamente da 2 e 4.

Una formula analoga vale negli altri intervalli, perciò la somma delle aree dei trapezoidi limitati da tutti gli archi di parabola è uguale a:

$$\frac{1}{3}\Delta x[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+\frac{1}{3}\Delta x[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+\ ...$$

ciascuno dei termini $f(x_2)$, $f(x_4)$, ..., $f(x_{n-2})$ compare due volte nella somma

$$+\frac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]=$$

$$=\frac{1}{3}\Delta x[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Se ne deduce la seguente formula.

FORMULA | Metodo delle parabole (o di Simpson)

Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Vale la seguente formula di approssimazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{1}{3}\Delta x[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+...+$$
$$+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)] \qquad [31]$$

dove: n è pari, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+i\Delta x$

ESEMPIO Approssimazione di un integrale con il metodo delle parabole

Approssimiamo l'integrale:

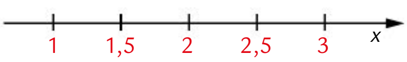
$$\int_1^3 e^{-x^2}dx$$

con il metodo delle parabole, applicato con $n = 4$.

Dividiamo l'intervallo [1, 3] in 4 intervallini di ampiezza:

$$\Delta x=\frac{3-1}{4}=0{,}5$$

Gli estremi degli intervallini che si vengono a determinare (e che servono per l'applicazione della formula delle parabole) sono rappresentati in figura.



Osserva che si tratta ancora dello stesso integrale analizzato nei due esempi precedenti. I punti che servono per la stima con il metodo delle *parabole* sono gli stessi utilizzati per la stima con il metodo dei *trapezi*; ciò che cambia sostanzialmente è il diverso «peso» attribuito ai valori assunti dalla funzione in corrispondenza dei punti in cui è stato suddiviso l'intervallo originario.
Utilizzando tali punti otteniamo:

$$\int_1^3 e^{-x^2}dx \simeq \frac{1}{3}\cdot\underbrace{0{,}5}_{\Delta x}\cdot[f(\underbrace{1}_{x_0})+4f(\underbrace{1{,}5}_{x_1})+2f(\underbrace{2}_{x_2})+4f(\underbrace{2{,}5}_{x_3})+f(\underbrace{3}_{x_4})]= \qquad \text{Formula [31]}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot[e^{-(1)^2}+4e^{-(1{,}5)^2}+2e^{-(2)^2}+4e^{-(2{,}5)^2}+e^{-(3)^2}]\simeq 0{,}14$$

Confrontando le approssimazioni dell'integrale ottenute tramite i metodi dei rettangoli, dei trapezi e delle parabole (rispettivamente 0,13; 0,15; 0,14) con il valore esatto dell'integrale (che risulta 0,1393...) osserviamo che il metodo delle parabole è quello che fornisce la stima migliore. Non si tratta di un fatto casuale, ma di un risultato prevedibile in base ai teoremi che presenteremo nel prossimo sottoparagrafo.

La valutazione degli errori commessi

I seguenti teoremi permettono di stimare gli errori che si commettono nell'approssimazione di un integrale definito con i metodi visti.
Puoi facilmente comprenderne l'importanza: fissato preliminarmente l'errore massimo che si è disposti ad accettare, è essenziale sapere quanto finemente suddividere l'intervallo di integrazione per assicurarsi la precisione voluta.

TEOREMA 7 | Valutazione dell'errore nel metodo dei rettangoli e dei trapezi

Siano E_R e E_T gli errori che si commettono approssimando $\int_a^b f(x)\,dx$ rispettivamente con il metodo dei rettangoli e il metodo dei trapezi relativo a n suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$.
Se la funzione f ha derivata seconda continua nell'intervallo $[a, b]$ e K è una costante tale che $|f''(x)| \leq K$ per ogni $x \in [a, b]$, allora risulta:

a. $|E_R| \leq \dfrac{K(b-a)^3}{24n^2}$

b. $|E_T| \leq \dfrac{K(b-a)^3}{12n^2}$

TEOREMA 8 | Valutazione dell'errore nel metodo delle parabole

Sia E_P l'errore che si commette approssimando $\int_a^b f(x)\,dx$ con il metodo delle parabole relativo a n suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$.

Se la funzione f ha derivata quarta continua nell'intervallo $[a, b]$ ed M è una costante tale che $|f^{(4)}(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, allora risulta:

$$|E_P| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

ATTENZIONE!
Gli errori di cui si parla nei Teoremi 7 e 8 sono errori dovuti al tipo di approssimazione realizzata; non sono da confondere con gli «errori macchina», cioè con gli errori di arrotondamento insiti nei processi di calcolo dei computer e dei dispositivi elettronici.

Nel caso del metodo dei rettangoli e del metodo dei trapezi, la stima dell'errore è inversamente proporzionale al *quadrato* di n; nel metodo delle parabole, invece, essa è inversamente proporzionale alla *quarta* potenza di n: ciò conferma che, a parità del valore di n, il metodo delle parabole fornisce una stima più accurata di quella fornita dagli altri due metodi.

Vedremo negli esercizi come si possano utilizzare i precedenti teoremi per stabilire a priori il numero n di parti in cui suddividere l'intervallo $[a, b]$ per essere certi di ottenere un'approssimazione dell'integrale con un errore minore o uguale a un numero prefissato.

Esercizi p. 201

Percorso delle idee

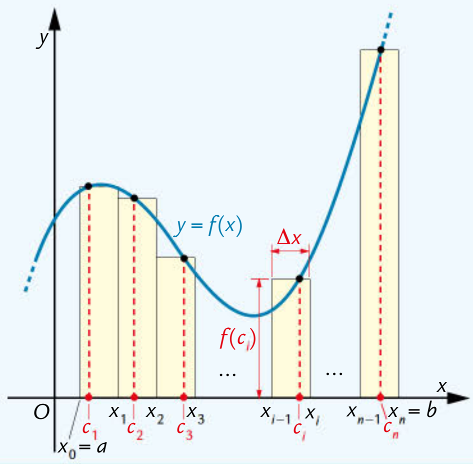
L'integrale definito

Integrale definito

Sia $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua.
Considerati i punti: $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ che suddividono $[a, b]$ in n intervalli di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e preso in ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un arbitrario punto c_i, si pone:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Integrale definito di } f \text{ in } [a,\,b]} = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x}_{\text{Somma di Riemann di } f \text{ in } [a,\,b]}$$

Si può dimostrare che il limite è indipendente dalla suddivisione di $[a, b]$ e dalla scelta dei punti c_i.



Proprietà

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b [kf(x) + hg(x)]\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + h\int_a^b g(x)\,dx$ **Linearità**
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ **Additività**
- $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ **Monotonia**

Teorema del valore medio

Sia f una funzione continua in $[a, b]$; allora esiste un numero $c \in [a, b]$ tale che $f(c)$ è uguale al valore medio di f in $[a, b]$ cioè tale che:

$$f(c) = \boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Valore medio della funzione f in $[a, b]$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$ ed $F: [a, b] \to \mathbf{R}$ la funzione integrale associata a f (relativa al punto a), definita da:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Allora la funzione F è derivabile (quindi anche continua) in $[a, b]$, e risulta:

$F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$

Calcolo di un integrale definito

funzione integranda

primitiva della funzione f

limiti di integrazione

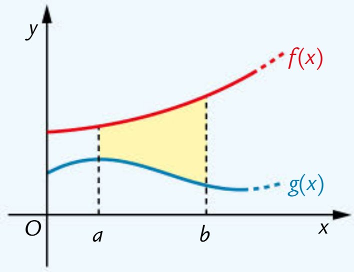
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

variabile di integrazione

Calcolo di aree

L'area della regione di piano limitata nell'intervallo $[a, b]$ dai grafici di due funzioni continue f e g tali che $f(x) \geq g(x)$ è data dall'integrale:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

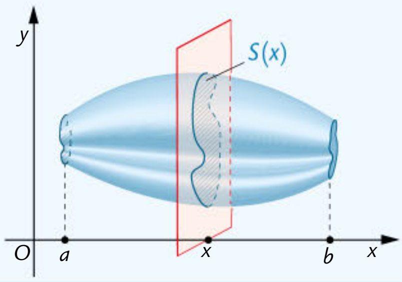


Calcolo di volumi

Metodo delle sezioni

Consideriamo un solido limitato da due piani perpendicolari all'asse x passanti per $(a, 0)$ e $(b, 0)$, tale che l'area della sezione del solido con il piano perpendicolare all'asse x passante per $(x, 0)$ sia espresso dalla funzione $S(x)$.
Allora il volume V del solido è dato dall'integrale:

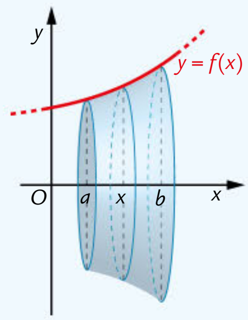
$$V = \int_a^b S(x)\, dx$$



Solidi di rotazione

Consideriamo il solido generato da una rotazione completa intorno all'asse x del trapezoide limitato dal grafico di una funzione continua f nell'intervallo $[a, b]$.
Allora il volume V del solido è dato da:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$



Applicazioni in fisica

Velocità e spostamento

Se la velocità di un punto materiale in moto rettilineo è espressa dalla funzione $v(t)$, lo spostamento subìto dal punto nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è dato dall'integrale:

$$\int_{t_2}^{t_1} v(t)\, dt$$

Più in generale, se $f'(t)$ è la funzione che esprime la velocità istantanea con cui varia una grandezza $f(t)$, la variazione subita dalla grandezza nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è data dall'integrale:

$$\int_{t_2}^{t_1} f'(t)\, dt$$

Lavoro

Consideriamo una forza avente come direzione l'asse x e intensità espressa dalla funzione $F(x)$, essendo x l'ascissa del punto di applicazione della forza.
Il lavoro compiuto dalla forza per uno spostamento dal punto di ascissa a al punto di ascissa b è dato dall'integrale:

$$\int_a^b F(x)\, dx$$

Esercizi

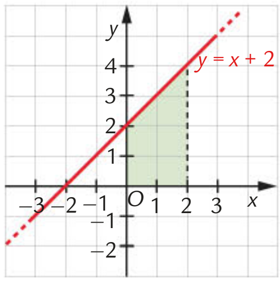
1. Dalle aree al concetto di integrale definito

Teoria p. 130

Esercizi introduttivi

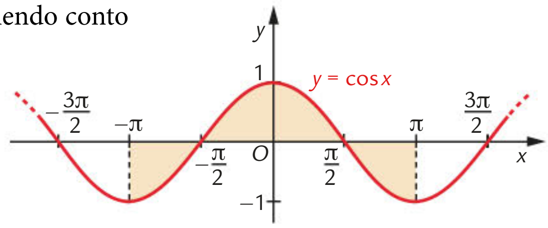
Test

1 Ricordando il significato geometrico di integrale definito e tenendo conto della figura stabilisci quanto vale $\int_0^2 (x+2)\,dx$:



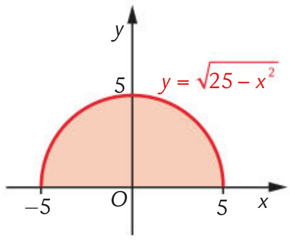
A 2
B 4
C 6
D 8

2 Ricordando il significato geometrico di integrale definito e tenendo conto della figura stabilisci quanto vale $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$:



A 0
B 1
C 2
D 4

3 Ricordando il significato geometrico di integrale definito e tenendo conto della figura stabilisci quanto vale $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$:



A $\frac{5\pi}{2}$ C $\frac{15\pi}{2}$
B $\frac{7\pi}{2}$ D $\frac{25\pi}{2}$

4 **Vero o falso?**

a. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$ V F

b. $\int_{-4}^{-1} 5\,dx$ è un numero negativo V F

c. $\int_{-3}^{-1} 1\,dx = -2$ V F

d. $\int_{-3}^{3} x^4\,dx = 2\int_0^3 x^4\,dx$ V F

e. $\int_{-3}^{3} (x^4+x^3)\,dx = 0$ V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

5 **Vero o falso?**

a. se f è una funzione continua su $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ è il limite per $n \to +\infty$ di una somma di Riemann della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ V F

b. se f è una funzione continua su $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta un numero reale V F

c. se f è una funzione continua su $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ fornisce l'area della regione limitata dal grafico della funzione $y = f(x)$, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$ V F

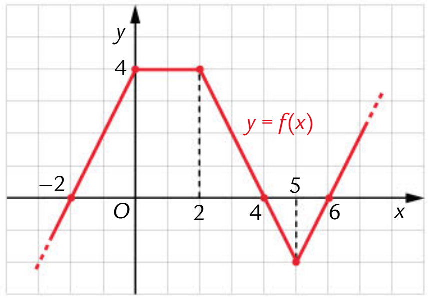
d. se f è una funzione dispari, continua su $[-a, a]$, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ V F

e. se f è una funzione pari, continua su $[-a, a]$, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

Calcolo di un integrale definito in base al significato geometrico

6 In riferimento alla funzione $y = f(x)$ il cui grafico è mostrato in figura, calcola i valori dei seguenti integrali, interpretandoli in termini di aree con segno.



a. $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$

b. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

c. $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

d. $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$

e. $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$

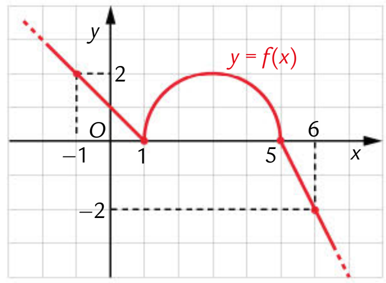
f. $\int_{4}^{6} f(x)\,dx$

g. $\int_{5}^{7} f(x)\,dx$

h. $\int_{0}^{6} f(x)\,dx$

[a. 1; b. 7; c. 8; d. 8; e. 3; f. −2; g. 0; h. 10]

7 In riferimento alla funzione $y = f(x)$ il cui grafico è mostrato in figura, calcola i valori dei seguenti integrali, interpretandoli in termini di aree con segno. Nell'intervallo [1, 5] il grafico è una semicirconferenza.



a. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

b. $\int_{1}^{5} f(x)\,dx$

c. $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

d. $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$

e. $\int_{5}^{6} f(x)\,dx$

f. $\int_{1}^{6} f(x)\,dx$

g. $\int_{0}^{6} f(x)\,dx$

h. $\int_{-1}^{6} f(x)\,dx$

$\left[\text{a. } 2;\ \text{b. } 2\pi;\ \text{c. } \frac{1}{2}+\pi;\ \text{d. } \frac{1}{2}+2\pi;\ \text{e. } -1;\ \text{f. } 2\pi-1;\ \text{g. } 2\pi-\frac{1}{2};\ \text{h. } 2\pi+1\right]$

Calcola il valore dei seguenti integrali, interpretandoli geometricamente in termini di aree con segno, dopo avere tracciato il grafico della funzione integranda.

8 $\int_{2}^{7} 3\,dx$ [15]

9 $\int_{1}^{4} (x+1)\,dx$ $\left[\frac{21}{2}\right]$

10 $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$ $\left[\frac{9\pi}{2}\right]$

11 $\int_{-1}^{2} (2x+1)\,dx$ [6]

12 $\int_{-3}^{2} |x|\,dx$ $\left[\frac{13}{2}\right]$

13 $\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$ [4π]

14 $\int_{-3}^{3} (1-|x|)\,dx$ [−3]

15 $\int_{-2}^{4} |1-|x||\,dx$ [6]

2. Proprietà dell'integrale definito e teorema del valore medio

Teoria p. 133

Esercizi introduttivi

16 **Vero o falso?**

Siano f e g due funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$.

a. $\int_{a}^{b} [f(x)+2g(x)]\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + 2\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ V F

b. $\int_{a}^{b} x\,f(x)\,dx = x\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ V F

c. $\int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx = 0$ V F

d. $\int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \cdot \int_{a}^{b} g(x)\,dx$ V F

e. se $f(x) \ge g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge \int_{a}^{b} g(x)\,dx$ V F

f. se $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 0$, allora $f(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$ V F

[3 affermazioni vere e 3 false]

ESERCIZI

Test

17 Sapendo che $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$ e $\int_2^3 f(x)\,dx = 4$, stabilisci quanto vale $\int_0^3 f(x)\,dx$.

A 7 B 1 C -1 D -7

18 Se f è una funzione continua e positiva per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora $\int_{-4}^{-5} f(x)\,dx$:

A è positivo
B è negativo
C è nullo
D le informazioni date non sono sufficienti per stabilirne il segno

19 Quale delle seguenti disuguaglianze è *falsa*?

A $\int_0^1 \sin^4 x\,dx \geq 0$

C $\int_{-17}^{-7} (2 - \sin^3 x)\,dx \geq 0$

B $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx \geq 0$

D $\int_1^0 e^{-x^2}\,dx \leq 0$

Proprietà degli integrali definiti

20 ESERCIZIO GUIDATO

Sapendo che:

$$\int_0^1 f(x) = 2,\ \int_0^2 f(x) = 3,\ \int_2^5 f(x) = 8$$

calcola, se possibile, il valore dei seguenti integrali.

a. $\int_0^5 f(x)\,dx$ **b.** $\int_1^2 f(x)\,dx$ **c.** $\int_2^0 f(x)\,dx$ **d.** $\int_1^5 f(x)\,dx$

---

a. $\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots$

b. $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots$

c. $\int_2^0 f(x)\,dx = -\int_{\ldots}^{\ldots} f(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots$

d. $\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \ldots\ldots\ldots$ [**a.** 11; **b.** 1; **c.** -3; **d.** 9]

21 Sapendo che:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 3, \quad \int_1^3 f(x)\,dx = 4, \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 6$$

calcola, se possibile, il valore dei seguenti integrali.

a. $\int_3^5 f(x)\,dx$ **b.** $\int_0^3 f(x)\,dx$ **c.** $\int_5^0 f(x)\,dx$ **d.** $\int_1^2 f(x)\,dx$

[**a.** 2; **b.** 7; **c.** -9; **d.** non determinabile con le informazioni date]

22 Riscrivi l'espressione $\int_0^7 f(x)\,dx + \int_{-3}^0 f(x)\,dx + \int_7^5 f(x)\,dx$ sotto forma di un unico integrale.

23 Sia f una funzione continua in $\mathbf{R}$ e *pari*, tale che $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx = 22$ e $\int_0^8 f(x)\,dx = 10$. Calcola il valore dei seguenti integrali.

a. $\int_0^{10} f(x)\,dx$ **b.** $\int_{-10}^{10} x\,f(x)\,dx$ **c.** $\int_8^{10} f(x)\,dx$ [**a.** 11; **b.** 0; **c.** 1]

24 Sia f una funzione continua in $\mathbf{R}$ e *dispari*, tale che $\int_0^5 f(x)\,dx = 7$ e $\int_0^{10} f(x)\,dx = 13$. Calcola il valore dei seguenti integrali.

a. $\int_5^{10} f(x)\,dx$ **b.** $\int_{-7}^7 x^2\,f(x)\,dx$ **c.** $\int_{-10}^{-5} f(x)\,dx$ **d.** $\int_{-10}^5 f(x)\,dx$ [**a.** 6; **b.** 0; **c.** -6; **d.** -6]

25 Qual è il massimo valore possibile di $\int_0^4 f(x)\,dx$ se $f(x) \le \frac{1}{2}$ per ogni $x \in [0, 4]$?

26 Qual è il minimo valore possibile di $\int_2^6 f(x)\,dx$ se $f(x) \ge \frac{3}{2}$ per ogni $x \in [2, 6]$?

Sfruttando il teorema del confronto, dimostra le seguenti disuguaglianze.

27 $\int_1^3 x^3\,dx \le \int_1^3 x^4\,dx$

28 $12 \le \int_0^4 \sqrt{9+x^2}\,dx \le 20$

(*Suggerimento*: osserva che $3 \le \sqrt{9+x^2} \le 5$ in $[0, 4]$.)

29 $\int_0^1 x^3\,dx \ge \int_0^1 x^4\,dx$

30 $\frac{\pi}{6} \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \le \frac{\pi}{3}$

31 $0 \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

Valore medio

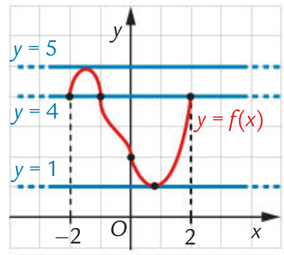
32 **Vero o falso?** Riferisciti alla figura.

a. il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-2, 2]$ è 0, perché l'intervallo $[-2, 2]$ è simmetrico rispetto all'origine V F

b. il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-2, 2]$ è certamente compreso tra 1 e 5 V F

c. il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-2, 0]$ è maggiore di 2 V F

d. il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-2, 2]$ è 4, perché $f(-2) = f(2) = 4$ V F



[2 affermazioni vere e 2 false]

33 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo il valore medio M della funzione $f(x) = 1 - |x|$ nell'intervallo $[-1, 2]$. Successivamente, determiniamo il numero (i numeri) $c \in [-1, 2]$ per cui risulta $f(c) = M$.

Per calcolare l'integrale $\int_{-1}^2 f(x)dx$ è sufficiente ricordare il significato geometrico dell'integrale definito in termini di aree con segno:

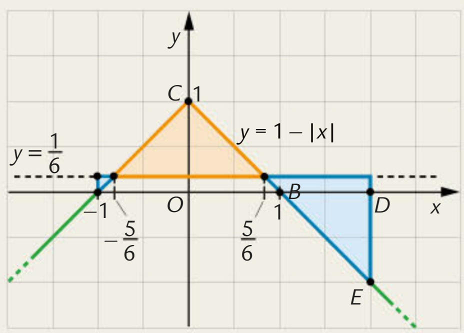
$$\int_{-1}^2 (1-|x|)\,dx = \text{area }(ABC) - \text{area }(BDE) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pertanto: $M = \dfrac{\frac{1}{2}}{2-(-1)} = \dfrac{1}{6}$

Il teorema della media integrale assicura l'esistenza di almeno un $c \in [-1, 2]$ per cui $f(c) = \frac{1}{6}$. Infatti:

$$1 - |c| = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad |c| = \frac{5}{6} \quad \Leftrightarrow \quad c = \pm\frac{5}{6}$$

La figura illustra il significato geometrico del teorema: nell'intervallo $[-1, 2]$ l'area della regione colorata in arancione «al di sopra» della retta $y = \frac{1}{6}$ è uguale all'area della regione colorata in azzurro «al di sotto» di quest'ultima.



Dopo avere tracciato il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo indicato, determina il valore medio M di $f(x)$ e i valori di c appartenenti all'intervallo per cui risulta $f(c) = M$.

34 $f(x) = 2x + 3$ $[1, 3]$ $[M = 7;\ c = 2]$

35 $f(x) = \cos x$ $[-\pi, \pi]$ $\left[M = 0;\ c = \pm\frac{\pi}{2}\right]$

36 $f(x) = -x - 1$ $[-2, 1]$ $\left[M = -\frac{1}{2};\ c = -\frac{1}{2}\right]$

37 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $[-1, 1]$ $\left[M = \frac{\pi}{4};\ c = \pm\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}\right]$

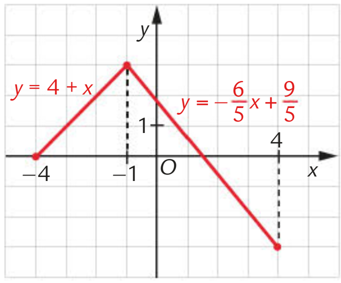
38 Calcola il valore medio, nell'intervallo [–2, 2], della seguente funzione definita a tratti:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 & -2\le x\le -1\\ \sqrt{1-x^2} & -1<x<1\\ 2-2x & 1\le x\le 2\end{cases}$$

$\left[\frac{\pi}{8}\right]$

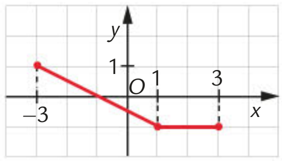
Interpretazione di grafici

39 Determina il valore medio della funzione rappresentata, nell'intervallo [–4, 4].



$\left[\frac{9}{16}\right]$

40 Determina il valore medio della funzione rappresentata, nell'intervallo [–3, 3].



$\left[-\frac{1}{3}\right]$

3. Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo

Teoria p. 136

Esercizi introduttivi

41 Data la funzione $F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{e^t}{t^2+1}dt$, quanto vale $F'(0)$?

A -1
B 0
C 1
D 2

42 Quale delle seguenti è la derivata della funzione $F(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,dt$?

A $F'(x)=\sin x^2$
B $F'(x)=\cos x^2$
C $F'(x)=2x\cos x^2$
D $F'(x)=3x^2\sin x^6$

43 Quale delle seguenti funzioni è la primitiva $F(x)$ di $f(x)=e^{-x^2}$ tale che $F(1)=0$?

A $F(x)=\int_{-1}^{x} e^{-t^2}dt$
B $F(x)=\int_{1}^{x} e^{-t^2}dt$
C $F(x)=\int_{-1}^{x+1} e^{-t^2}dt$
D $F(x)=\int_{1}^{x-1} e^{-t^2}dt$

44 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Quale delle funzioni seguenti **non** è una primitiva di f?

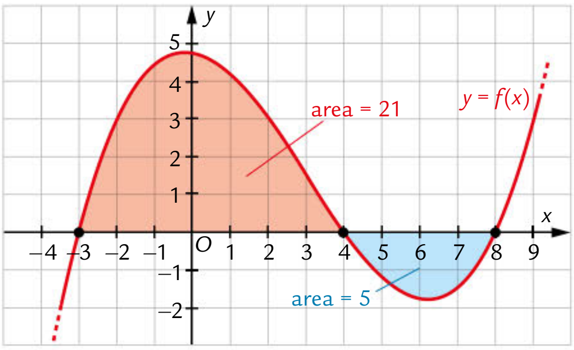
A $\int_0^x f(x)\,dx$
B $\int_{-3}^x f(x)\,dx$
C $\int_x^0 f(x)\,dx$
D $-\int_x^1 f(x)\,dx$

Interpretazione di grafici

45 Sia f la funzione il cui grafico è quello in figura; considera le funzioni:

$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$

$G(x) = \int_{4}^{x} f(t)\,dt$



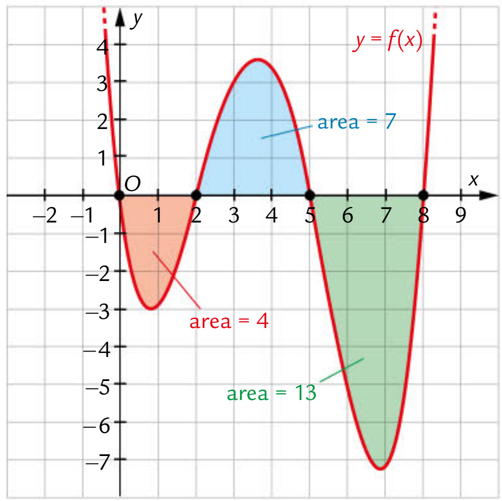
Tenendo conto dei dati annotati in figura determina:

a. $F(-3)$ **b.** $F(4)$ **c.** $F(8)$
d. $G(-3)$ **e.** $G(4)$ **f.** $G(8)$

46 Sia f la funzione il cui grafico è quello in figura; considera le funzioni:

$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

$G(x) = \int_{2}^{x} f(t)\,dt$



Tenendo conto dei dati annotati in figura determina:

a. $F(2)$ **b.** $F(5)$ **c.** $F(8)$
d. $G(2)$ **e.** $G(5)$ **f.** $G(8)$

Derivate di funzioni integrali

47 ESERCIZIO GUIDATO

Senza determinare l'espressione analitica delle seguenti funzioni, calcola la derivata prima:

a. $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,dt$ **b.** $g(x) = \int_0^{2x} \frac{1}{1+t^4}\,dt$ **c.** $z(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+t^4}\,dt$

---

a. Si tratta di una funzione integrale, quindi la derivata è la funzione integranda, valutata per $t = x$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

b. Osserva che la funzione g si può ottenere come funzione *composta* della funzione f del punto **a**; precisamente $g(x) = f(2x)$, quindi:

$$g'(x) = D[f(2x)] = (2x)' \cdot f'(2x) = \dots\dots\dots$$

c. Si può scrivere:

$$z(x) = \int_x^0 \frac{1}{1+t^4}\,dt + \int_0^{2x} \frac{1}{1+t^4}\,dt = -\int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,dt + \int_0^{2x} \frac{1}{1+t^4}\,dt = -f(x) + g(x)$$

essendo f e g le due funzioni dei punti precedenti. Quindi:

$$z'(x) = -f'(x) + g'(x) = \dots\dots\dots$$

Senza determinare l'espressione analitica delle seguenti funzioni, calcola la derivata prima.

48 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ $\quad[f'(x) = e^{-x^2}]$

49 $f(x) = \int_{-1}^{2x} e^{-t^2}\,dt$ $\quad[f'(x) = 2e^{-4x^2}]$

50 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t^4+1}\,dt$ $\quad\left[f'(x) = \frac{2x}{x^8+1}\right]$

51 $f(x) = \int_2^{3x} \sin t^2\,dt$ $\quad[f'(x) = 3\sin 9x^2 - \sin x^2]$

52 $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\cos t^2\,dt$ $[f'(x)=3x^2\cos x^6-2x\cos x^4]$

53 $f(x)=\int_{x}^{x+1}\frac{1}{t^4+4}dt$ $\left[f'(x)=\frac{1}{(x+1)^4+4}-\frac{1}{x^4+4}\right]$

54 $f(x)=\int_{2x}^{0}\arctan t\,dt-\int_{0}^{x^2}\arctan t^2\,dt$ $[f'(x)=-2x\arctan x^4-2\arctan 2x]$

55 $f(x)=\int_{x}^{0}\arctan t\,dt+\int_{0}^{2x}\frac{1}{1+t^4}dt$ $\left[f'(x)=-\arctan x+\frac{2}{1+16x^4}\right]$

56 Data la funzione $f(x)=-1+\int_{1}^{x}(\ln^2 t+2)e^{-t^2}dt$, determina l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x=1$. $\left[y=\frac{2}{e}x-\frac{2}{e}-1\right]$

57 Data la funzione $f(x)=\int_{-\pi}^{2x}t\cos^3 t\,dt$, determina l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x=\frac{\pi}{2}$. $[y=-2\pi x+\pi^2]$

58 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^4 t\,dt}{x^5}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e sono soddisfatte tutte le ipotesi per applicare il teorema di de l'Hôpital, quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^4 t\,dt}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{5x^4}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4}_{\to 1}=\frac{1}{5}$$

Calcola i seguenti limiti.

59 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^3 t\,dt}{x^4}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

60 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

61 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x e^{t^3}dt}{x^4}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

62 $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^3}{t^4+1}dt\right)$ $[0]$

63 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt}{x^2}$ $[1]$

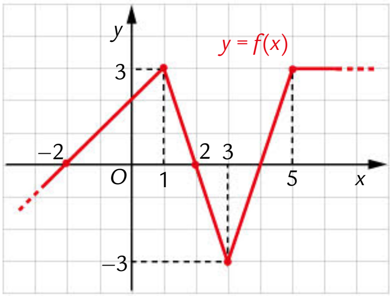
64 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{2x}^{3x}\sqrt{1+t^2}\,dt}{x^3}$ $[+\infty]$

65 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^{2x}\frac{t^3+1}{t^4+2}dt}{\ln x^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

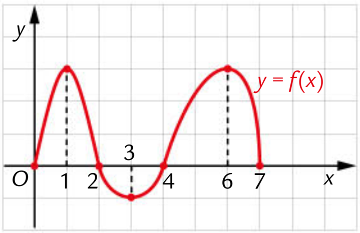
66 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}(\cos t^2-1)\,dt}{x^{15}}$ $\left[-\frac{1}{10}\right]$

Grafici di funzioni integrali

67 Considera la funzione f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ di cui è stato tracciato il grafico in figura. Traccia un grafico qualitativo della funzione $y=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$.



68 Considera la funzione f: $[0, 7]\to\mathbf{R}$ di cui è stato tracciato il grafico in figura. Traccia un grafico qualitativo della funzione $y=\int_{1}^{x}f(t)\,dt$.



4. Calcolo di integrali definiti e loro applicazioni

Teoria p. 139

Calcolo di integrali definiti

Test

69 Qual è il valore dell'integrale $\int_2^4 f'(x)\,dx$, supponendo che f sia continua, $f(4) = 8$ ed $f(2) = 5$?

A 2 B 3 C 4 D Le informazioni sono insufficienti per stabilirlo

70 Qual è il valore dell'integrale $\int_0^{\pi} \pi\,dx$?

A π B $\dfrac{\pi^2}{2}$ C π^2 D Nessuno dei precedenti

Calcola i seguenti integrali definiti.

71 $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$ $\left[-\frac{4}{3}\right]$

72 $\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4}\,dx$ $\left[\frac{7\pi}{24}\right]$

73 $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

74 **E se?** $\int_0^1 e^{2-x}\,dx$

▶ Cambierebbe la risposta se l'integrale da calcolare fosse $\int_0^1 e^{2-x}\,dt$? $[e^2 - e \text{ sì, } e^{2-x}]$

75 $\int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx$ $[\ln 3]$

76 $\int_0^2 (t-1)(t+2)\,dt$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

77 $\int_2^4 \frac{1}{x^2-1}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}\right]$

78 $\int_{-1}^1 e^{2t+2}\,dt$ $\left[\frac{1}{2}(e^4-1)\right]$

79 $\int_0^1 (e^{2x} - e^x)\,dx$ $\left[\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}\right]$

80 $\int_0^2 \frac{x}{2x^2+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln 3\right]$

81 $\int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - 3\right)dx$ $[-2]$

82 $\int_1^4 \frac{x-4}{\sqrt{x}}\,dx$ $\left[-\frac{10}{3}\right]$

83 $\int_0^4 (2^{x+1} - 3)\,dx$ $\left[\frac{30}{\ln 2} - 12\right]$

84 $\int_2^6 \frac{x+2}{x}\,dx$ $[2\ln 3 + 4]$

85 $\int_{-1}^1 (4e^{2x} + 3\sin x)\,dx$ $[2(e^2 - e^{-2})]$

86 $\int_{-2}^2 x(x^2+2)^3\,dx$ $[0]$

87 $\int_0^1 e^{-3x}\cdot e^x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}(1-e^{-2})\right]$

88 $\int_2^3 e^{3-x}\,dx$ $[e-1]$

89 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2x + 3\cos x)\,dx$ $\left[\frac{2}{9}\pi^2 + \frac{3}{2}\right]$

90 $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

91 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+9}\,dx$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

92 $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt{x+9}}\,dx$ $[2]$

93 $\int_0^2 \frac{x^2}{9-x^3}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\ln 3\right]$

94 $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{3x}{1+x^2}\,dx$ $\left[\frac{3}{2}\ln 6\right]$

95 $\int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ $\left[\arctan 4 - \frac{\pi}{4}\right]$

96 $\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin 2x\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

97 $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ $[1]$

98 $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx$ $[2\ln 2 - 1]$

99 $\int_{-2}^0 \frac{x}{x+4}\,dx$ $[2 - 4\ln 2]$

100 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

101 $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}(1-e^{-1})\right]$

102 $\int_1^4 \frac{x^3+x^2}{x^4}\,dx$ $\left[2\ln 2 + \frac{3}{4}\right]$

103 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

104 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

105 $\int_0^2 \frac{x-1}{x+2} dx$ $[2 - 3\ln 2]$

106 $\int_1^4 \left(\frac{x^2-1}{x}\right) dx$ $\left[\frac{15}{2} - 2\ln 2\right]$

107 $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x+4}} dx$ $[2]$

108 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ $[1]$

109 $\int_1^e \ln x\, dx$ $[1]$

110 $\int_0^a (a^2 - x^2) dx, \quad a \in \mathbf{R}$ $\left[\frac{2}{3}a^3\right]$

111 $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$ $[\pi]$

112 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2u\, du$ $[1]$

113 $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \quad a \in \mathbf{R}^+$ $\left[\frac{1}{3}a^3\right]$

114 **E se?** $\int_{-a}^{a} \frac{1}{x^2 + a^2} dx$, con $a > 0$

▶ Cambierebbe la risposta se $a < 0$? $\left[\frac{\pi}{2a}\right]$

115 $\int_e^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$ $[2\sqrt{3} - 2]$

116 $\int_{-1}^0 \arctan x\, dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right]$

117 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2} dx$ $[\ln(2+e) - \ln 3]$

118 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$ $[1]$

119 $\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$ $\left[\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}\right]$

120 $\int_0^{\pi} x \sin 2x\, dx$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

121 $\int_0^1 \frac{x-2}{x^2 + 3x + 2} dx$ $[4\ln 3 - 7\ln 2]$

122 $\int_2^4 \frac{1}{x^2 + 2x} dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}\right]$

123 $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln 5\right]$

124 $\int_{-1}^2 t\sqrt{5 + t^2}\, dt$ $[9 - 2\sqrt{6}]$

125 $\int_{-1}^1 x e^{x+1} dx$ $[2]$

126 $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ $[e - \sqrt{e}]$

127 $\int_1^4 \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$ $[1 + \ln 4]$

128 $\int_{-1}^2 \frac{u^2 + 1}{u + 2} du$ $\left[10\ln 2 - \frac{9}{2}\right]$

129 $\int_{-3}^3 \frac{1}{x^2 + 9} dx$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

130 $\int_e^{e^2} x \ln x\, dx$ $\left[\frac{1}{4}(3e^4 - e^2)\right]$

131 $\int_{\pi}^{2\pi} \sin 2x \cos x\, dx$ $\left[-\frac{4}{3}\right]$

132 $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + 2x} dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}\right]$

133 $\int_1^e x(\ln x + 1)\, dx$ $\left[\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right]$

134 $\int_0^{\frac{1}{2}} 4xe^{-2x}\, dx$ $[1 - 2e^{-1}]$

135 $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

136 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$ $\left[\frac{\pi}{8}\right]$

137 $\int_0^1 \frac{x}{1 + x^4} dx$ $\left[\frac{\pi}{8}\right]$

138 $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ $\left[2 - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right]$

139 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx$ $[\pi]$

140 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \alpha\, d\alpha$ $\left[1 - \frac{\pi}{4}\right]$

141 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$ $[4 - 2\sqrt{2}]$

142 $\int_2^4 \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$ $\left[3\ln 3 + \frac{32}{3}\right]$

143 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

144 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ $\left[\frac{\pi^2}{9}\right]$

145 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan^2 x}{x^2 + 1} dx$ $\left[\frac{\pi^3}{81}\right]$

146 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin 2x\, dx$ $\left[-\frac{\pi}{4}\right]$

A mente

147 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\cos x}{1+x^2}\,dx$

148 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

149 $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2-x^5)\,dx$

150 $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x\sin^2 x}{x^2+1}\,dx$

151 $\displaystyle\int_{0}^{4} x\,|x-2|\,dx$ $[8]$

152 $\displaystyle\int_{0}^{2} (x^2-1)e^x\,dx$ $[e^2-1]$

153 $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2+3x+1)e^{1-x}\,dx$ $[-12]$

154 $\displaystyle\int_{2}^{4} x\ln(x-1)\,dx$ $\left[\frac{15}{2}\ln 3-4\right]$

155 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3}{x^2-4}\,dx$ $\left[2\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right]$

156 $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{4x}{x^2+4x+3}\,dx$ $\left[2\ln\frac{125}{81}\right]$

157 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+1}{e^{|x|}}\,dx$ $[2-3e^{-1}]$

158 $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x^2-1|\,dx$ $[8]$

159 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\,dx$ $\left[\sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}\right]$

160 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 x\cos^2 x}\,dx$ $\left[1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

161 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin 2x}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln 6\right]$

162 $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 dx$ $\left[\frac{8}{3}-2\ln 3\right]$

163 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}-e^x}{e^{|x|}}\,dx$ $\left[e+\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{3e^3}-\frac{13}{6}\right]$

164 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left|x^2-2|x|\right|\,dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

165 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{|x^2-1|}{x^2+1}\,dx$ $[\pi-2]$

166 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3+2x^2+x+2}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{10}+\frac{1}{10}\ln\frac{9}{8}\right]$

167 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\arctan x\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$

168 $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1}\,dx$ $\left[1-2\ln\frac{3}{2}\right]$

169 $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}\,dx$ $\left[\frac{11}{3}\right]$

170 $\displaystyle\int_{-\pi}^{2\pi} x\,|\sin x|\,dx$ $[3\pi]$

Determina per quale o quali valore/i del parametro è vera ciascuna delle seguenti uguaglianze.

171 $\displaystyle\int_{-k}^{k} (3x^2-2x)\,dx=8$ $[k=\sqrt[3]{4}]$

172 $\displaystyle\int_{0}^{1} [x^3-kx^2+(2k-1)x+k]\,dx=\frac{7}{12}$ $\left[k=\frac{1}{2}\right]$

173 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} [(2k-3)\sin x+k\cos x]\,dx=\sqrt{2}$ $[k=2]$

174 $\displaystyle\int_{2}^{2\sqrt{3}} \frac{k+1}{x^2+4}\,dx=\frac{\pi}{6}$ $[k=3]$

175 $\displaystyle\int_{1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x+3}}\,dx=2$ $[k=6]$

176 $\displaystyle\int_{1}^{4} \left[(k-1)x^2+2kx-\frac{k+1}{\sqrt{x}}\right]dx=-6$ $\left[k=\frac{1}{2}\right]$

177 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} (k\sin x-\sqrt{3}\cos x)\,dx=5$ $[k=2]$

178 $\displaystyle\int_{-k}^{k} \frac{1}{4+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$ $[k=2]$

179 $\displaystyle\int_{0}^{k} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx=1$ $[k=\ln(2e-1)]$

180 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{kx^2+1}}\,dx=1$ $[k=-1]$

181 $\displaystyle\int_{a}^{2a} \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\ln 2$ $\left[a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

182 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{3\pi}{4k}} \sin(kx)\cos^4(kx)\,dx=\sqrt{2}\,k$ $\left[k=\pm\frac{\sqrt{5}}{10}\right]$

183 $\displaystyle\int_{0}^{k} \frac{k-1}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx=\frac{\pi}{2}$ $[k=2]$

184 $\displaystyle\int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{\ln(kx)}{x}\,dx=\frac{1}{2}$ $\left[k=\pm\frac{1}{\sqrt{e}}\vee k=\pm\sqrt{e}\right]$

ESERCIZI

Argomentare e dimostrare

185 Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Barbara afferma: «Se risulta $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, allora $f(x) \geq 0$». Paolo non è d'accordo con Barbara: «Ti stai sbagliando: la tua affermazione è falsa, è vero il viceversa!». Alessandro dissente con entrambi: «Entrambe le vostre affermazioni sono false». Chi ha ragione? Giustifica adeguatamente la risposta, fornendo se necessario opportuni controesempi.

186 Siano f e g due funzioni derivabili in $[a, b]$. Barbara afferma: «Se risulta $\int_a^b f'(x)\,dx \geq \int_a^b g'(x)\,dx$, allora è anche $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$». Paolo non è d'accordo con Barbara: «Ti stai sbagliando: la tua affermazione è falsa, è vero il viceversa!». Alessandro dissente con entrambi: «Entrambe le vostre affermazioni sono false». Chi ha ragione? Giustifica adeguatamente la risposta, fornendo se necessario opportuni controesempi.

Calcolo di integrali definiti per sostituzione

187 **Test.** Eseguendo nell'integrale $\int_{-7}^2 x\sqrt{x+7}\,dx$ la sostituzione $\sqrt{x+7} = t$, si trova che l'integrale dato equivale a:

A $\int_{-7}^2 t(t^2-7)\,dt$

B $\int_0^3 t(t^2-7)\,dt$

C $\int_{-7}^2 2t^2(t^2-7)\,dt$

D $\int_0^3 2t^2(t^2-7)\,dt$

188 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^4}dx$, eseguendo un'opportuna sostituzione.

- Poni $x+1=t$, da cui $x=t-1$ e $dx=dt$.
- Osserva che:
  – se $x=0$ allora $t=$ ....
  – se $x=1$ allora $t=$ ....
- Pertanto: $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^4}dx = \int_1^2 \frac{t-1}{t^4}dt =$ .... $\left[\frac{1}{12}\right]$

Calcola i seguenti integrali definiti, eseguendo opportune sostituzioni.

189 $\int_{-1}^3 x\sqrt{x+1}\,dx$ $\left[\frac{112}{15}\right]$

190 $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

191 $\int_0^1 x(x-1)^4\,dx$ $\left[\frac{1}{30}\right]$

192 $\int_0^2 \frac{x}{(x+1)^5}dx$ $\left[\frac{2}{27}\right]$

193 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ $\left[2-\frac{\pi}{2}\right]$

194 Videolezione $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$ $\left[\frac{14}{3}\right]$

195 $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$ $\left[2+\ln\frac{3}{2}\right]$

196 $\int_{-1}^7 x\sqrt[3]{x+1}\,dx$ $\left[\frac{300}{7}\right]$

197 $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ $[4-2\ln 3]$

198 $\int_{-1}^0 \frac{1}{e^x+1}dx$ $[\ln(e+1)-\ln 2]$

199 $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ $\left[\arctan 2-\frac{\pi}{4}\right]$

200 $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx$ $\left[2-\frac{4}{e}\right]$

201 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ $\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

202 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}dx$ $\left[1-\frac{3}{4}\ln 3\right]$

Argomentare e dimostrare

203 Supposto che f sia una funzione continua in $\mathbb{R}$ e che $\int_0^6 f(x)\,dx = 4$, stabilisci se è possibile calcolare il valore dei seguenti integrali e, in caso affermativo, determinalo:

a. $\int_0^{12} f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ **b.** $\int_0^2 f(3x)\,dx$ $\left[\mathbf{a.}\,8;\ \mathbf{b.}\,\frac{4}{3}\right]$

204 Supposto che f sia una funzione continua in $\mathbb{R}$ e che $\int_0^8 f(x)\,dx = 6$, stabilisci se è possibile calcolare il valore dei seguenti integrali e, in caso affermativo, determinalo:

a. $\int_0^4 f(2x)\,dx$ **b.** $\int_0^4 f\left(\frac{x}{3}\right)dx$ [**a.** 3; **b.** non calcolabile con le informazioni date]

205 Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$ e *pari*, tale che $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$. Calcola il valore dei seguenti integrali:

a. $\int_{-4}^4 f(x)\,dx$

b. $\int_{-3}^3 x\,f(x)\,dx$

c. $\int_0^2 x\,f(x^2)\,dx$ $\left[\mathbf{a.}\,14;\ \mathbf{b.}\,0;\ \mathbf{c.}\,\frac{7}{2}\right]$

206 Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$ e *pari*, tale che $\int_0^{27} f(x)\,dx = 12$. Calcola il valore dei seguenti integrali:

a. $\int_{-27}^{27} f(x)\,dx$

b. $\int_{-5}^5 x^3\,f(x)\,dx$

c. $\int_{-3}^3 x^2\,f(x^3)\,dx$ [**a.** 24; **b.** 0; **c.** 8]

Applicazioni al concetto di valore medio

207 **ESERCIZIO GUIDATO**

Considera la funzione $f(x) = \sqrt{x}$. Determina il suo valore medio M nell'intervallo [0, 4] e stabilisci per quale $c \in [0, 4]$ risulta $f(c) = M$.

- In base alla definizione, il valore medio M è:

$$M = \frac{\int_0^4 \sqrt{x}\,dx}{4-0} = \ldots\ldots$$

- Il teorema della media integrale garantisce l'esistenza di un numero $c \in [0, 4]$ per cui $f(c) = M$. Per trovare il valore di c richiesto devi quindi risolvere l'equazione $\sqrt{c} = \ldots\ldots$ In definitiva, $c = \ldots\ldots$

Di ciascuna funzione calcola il valore medio M nell'intervallo indicato a fianco. Successivamente, determina il numero c appartenente all'intervallo considerato per cui risulta $f(c) = M$.

208 $f(x) = x^3 - 1$ [1, 2] $\left[M = \frac{11}{4};\ c = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}\right]$

209 $f(x) = 3x^2 - x$ [1, 3] $\left[M = 11;\ c = \frac{1+\sqrt{133}}{6}\right]$

210 $f(x) = e^x$ [0, 2] $\left[M = \frac{e^2-1}{2};\ c = \ln\left(\frac{e^2-1}{2}\right)\right]$

211 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ [1, 9] $\left[M = \frac{1}{2};\ c = 4\right]$

212 $f(x) = \sqrt{x}$ [1, 9] $\left[M = \frac{13}{6};\ c = \frac{169}{36}\right]$

213 $f(x) = xe^{-2x^2}$ [0, 4] $\left[\frac{1-e^{-32}}{16}\right]$

214 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ [2, 8] $\left[\frac{\ln 13}{12}\right]$

215 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ [0, 1] [ln 2]

216 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ [−1, 1] $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

217 $f(x) = \sin^2 x \cos x$ $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ $\left[-\frac{2}{3\pi}\right]$

218 $f(x) = xe^{-x}$ [0, 4] $\left[\frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-4}\right]$

Una funzione è detta *a media nulla* in un dato intervallo se il suo valore medio è 0. Determina (se esistono) gli eventuali valori del parametro reale *k* per cui le funzioni seguenti sono a media nulla nell'intervallo indicato.

219 $f(x) = -x^2 + kx + 1$ $[0, 2]$ $\left[k = \frac{1}{3}\right]$

220 $f(x) = e^{2x} + kx^2$ $[0, 1]$ $\left[k = \frac{3}{2}(1 - e^2)\right]$

221 $f(x) = 1 + k\cos x$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left[k = -\frac{\pi}{2}\right]$

222 $f(x) = x^2 + kx$ $[-2, 2]$ $[\nexists k \in \mathbf{R}]$

223 $f(x) = x^3 + kx$ $[-2, 2]$ $[\forall k \in \mathbf{R}]$

Realtà e modelli

224 **E se?** La temperatura (in gradi Celsius) in una città varia in un giorno secondo la legge $T(t) = 14 - 8\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, essendo t il tempo, misurato in ore, trascorso dalla mezzanotte. Qual è la temperatura media nell'intera giornata (cioè nelle 24 ore)?

▸ E se più generalmente fosse $T(t) = A - B\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, dove A e B sono due costanti? [14 °C; A °C]

225 **Prezzo di un bene.** Il prezzo di un certo bene (in euro al kilogrammo) nei cinque anni dall'inizio del 2009 alla fine del 2013 è bene interpretato dalla funzione:

$$p(t) = 20 + 0{,}3t + 3e^{2-0{,}1t} \qquad \text{con } 0 \le t \le 60$$

essendo t il tempo (misurato in mesi) trascorso dal 1° gennaio 2009.

a. Determina l'anno e il mese in cui il prezzo del bene, nel periodo considerato, è stato minimo.

b. Determina qual è stato il prezzo medio del bene nei primi due anni. [**a.** Agosto 2010; **b.** circa 32 euro]

226 **Popolazione di una città.** Si è stabilito un modello matematico secondo il quale la popolazione di una città, nei prossimi 20 anni, crescerà alla velocità (in unità/anno) espressa dalla funzione:

$$v(t) = 500 + \frac{600t}{20 + t^2}$$

Stabilisci, in base al modello in esame:

a. di quante unità crescerà la popolazione tra il quinto e il decimo anno;

b. qual è la velocità media di crescita della popolazione nei 20 anni in cui il modello è supposto valido.

[**a.** 2794 unità (arrotondando a un numero intero); **b.** 546 unità/anno (arrotondando a un numero intero)]

227 **Matematica ed elettronica** Considera una corrente alternata di intensità $i(t) = I_M \sin\omega t$.

a. Determina il periodo T della funzione $i(t)$.

b. Calcola l'intensità efficace i_e della corrente alternata, ricordando che i_e^2 è il valore medio della funzione $i^2(t)$ sull'intervallo $[0, T]$. $\left[\mathbf{a.}\ T = \frac{2\pi}{\omega};\ \mathbf{b.}\ i_e = \frac{\sqrt{2}}{2}I_M\right]$

Applicazioni al concetto di funzione integrale

Determina l'espressione analitica delle seguenti funzioni integrali.

228 $F(x) = \int_{2\pi}^{x} \sin t\, dt$ $[F(x) = 1 - \cos x]$

229 $F(x) = \int_{4}^{x} \sqrt{t}\, dt$ $\left[F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{16}{3}\right]$

230 $F(x) = \int_{e}^{\sqrt{x}} \frac{1}{t}dt$, con $x > e^2$ $\left[F(x) = \frac{1}{2}\ln x - 1\right]$

231 $F(x) = \int_{1}^{x^2} \frac{1}{t^3}dt$, con $x > 1$ $\left[F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^4}\right]$

232 $F(x) = \int_{1}^{x} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}dt$ $\left[F(x) = -2\arctan x + x + \frac{\pi}{2} - 1\right]$

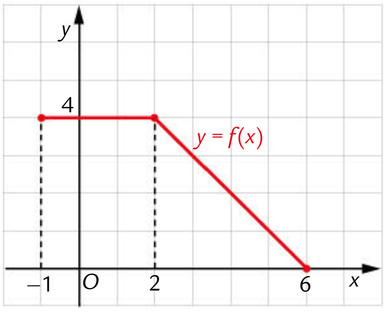
233 $F(x) = \int_{0}^{x} \ln(t^2 + 1)\, dt$ $[F(x) = 2\arctan x + x\ln(x^2 + 1) - 2x]$

234 $F(x) = \int_1^x \frac{t}{t^2+1}dt$ $\left[F(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{2}\right]$

235 $F(x) = \int_{-1}^x \arctan t\, dt$ $\left[F(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$

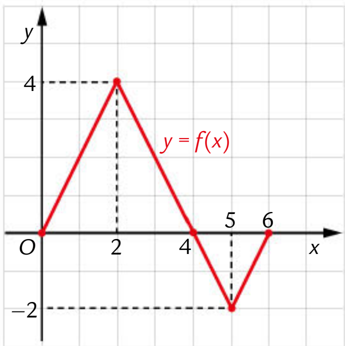
Interpretazione di grafici

236 Determina l'espressione analitica della funzione $F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt$, con $x \in [-1, 6]$, essendo f: $[-1, 6] \to \mathbf{R}$ la funzione di cui è tracciato il grafico in figura.



$\left[F(x) = \begin{cases} 4x+4 & -1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2+6x+2 & 2 < x \le 6 \end{cases}\right]$

237 Determina l'espressione analitica della funzione $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, con $x \in [0, 6]$, essendo f: $[0, 6] \to \mathbf{R}$ la funzione di cui è tracciato il grafico in figura.



$\left[F(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2 \\ -x^2+8x-8 & 2 < x \le 5 \\ x^2-12x+42 & 5 < x \le 6 \end{cases}\right]$

238 Determina gli zeri della funzione $f(x) = 2 + \int_0^x (4t^3 - 6t)\,dt$. $\left[\pm 1, \pm\sqrt{2}\right]$

239 Determina gli zeri della funzione $f(x) = \int_0^x (2e^{2t} - 3e^t)\,dt$. [0, ln 2]

Variazione di una grandezza in un intervallo

Realtà e modelli

240 ESERCIZIO GUIDATO

Una cisterna viene riempita di acqua a una velocità, in litri al minuto, espressa dalla funzione $v(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t}$, dove t è il tempo, espresso in minuti.

a. Quanta acqua è stata immessa nella cisterna dopo 1 ora e 40 minuti dall'inizio dell'operazione ($t = 0$ corrisponde all'istante in cui si inizia a immettere acqua nella cisterna)?

b. Se all'inizio la cisterna era vuota e per riempirla occorrono 5000 litri, quanto tempo sarà necessario per riempirla? Esprimi il risultato in ore e minuti, arrotondando ai minuti.

---

a. Sia $f(t)$ la funzione che esprime quanti litri di acqua ci sono nella cisterna all'istante t; il numero di litri di acqua immessi dopo 1 ora e 40 minuti (cioè dopo 100 minuti) dall'inizio dell'operazione è dato dalla differenza $f(100) - f(0)$. Poiché $f'(t) = v(t)$, abbiamo che:

$$f(100) - f(0) = \int_0^{100} f'(t)dt = \int_0^{100} \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = ...$$

b. Il tempo incognito x richiesto è quello per cui risulta:

$$\int_0^x \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = 5000$$

[**a.** 1000 litri; **b.** 4 ore e 52 minuti]

241 **Riempimento di un recipiente.** Un recipiente, inizialmente vuoto, viene riempito di acqua a una velocità di $1 + t^2$ litri all'ora, essendo t il tempo (in ore) trascorso da quando si è iniziato a riempire il recipiente. Dopo 3 ore, quanta acqua conterrà il recipiente? [12 litri]

242 **Crescita di una popolazione di insetti.** Una popolazione di insetti cresce alla velocità di $20 + 6t + 3t^2$ insetti al giorno, essendo t (in giorni) il tempo trascorso dall'inizio dell'osservazione dalla popolazione di insetti. Da quanti insetti sarà formata la popolazione dopo 4 giorni, assumendo che per $t = 0$ ci siano 18 insetti? [210]

243 **Concentrazione di un farmaco nel sangue.** In seguito alla somministrazione di un farmaco, la concentrazione massima del principio attivo nel sangue del paziente (misurata in grammi/centimetro cubo) risulta C_0. Da questo istante ($t = 0$) in poi la concentrazione inizia a decrescere, con una velocità espressa dalla funzione:

$$C'(t) = -C_0 k e^{-kt}$$

dove t è il tempo, misurato in ore, e k è una costante positiva che dipende dalla velocità di eliminazione della sostanza dal sangue e quindi dipende sia dalla particolare sostanza sia dal metabolismo del paziente.

a. Scrivi la formula che esprime di quanto varia la concentrazione del farmaco nel sangue del paziente nei primi 30 minuti dopo il raggiungimento della massima concentrazione.

b. Se un paziente elimina la metà del farmaco in 4 ore, quanto tempo sarà necessario per eliminare il 90% del farmaco? Esprimi il risultato in ore e minuti, arrotondando ai minuti. $\left[\textbf{a.}\, C_0\left(e^{-\frac{k}{2}} - 1\right); \textbf{b.}\, 13 \text{ ore e } 17 \text{ minuti}\right]$

244 **Raffreddamento di una bottiglia.** Una bottiglia di acqua, alla temperatura di 24 °C, viene posta in frigorifero alle ore 15. La temperatura dell'acqua decresce da quel momento con una velocità (in gradi Celsius/ora) espressa dalla funzione:

$$v(t) = -6e^{-0,6t}$$

dove t è il tempo (misurato in ore) e $t = 0$ è l'istante in cui la bottiglia viene posta in frigorifero.

a. Di quanto decresce la temperatura dell'acqua dalle 15 alle 18?

b. Quale sarà la temperatura dell'acqua alle ore 20?

[**a.** Di circa 8,3 °C; **b.** circa 14,5 °C]

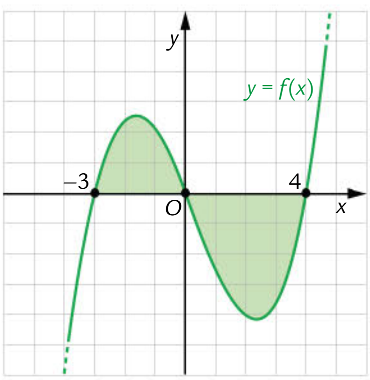
5. Applicazioni geometriche degli integrali definiti

Teoria p. 141

Esercizi introduttivi

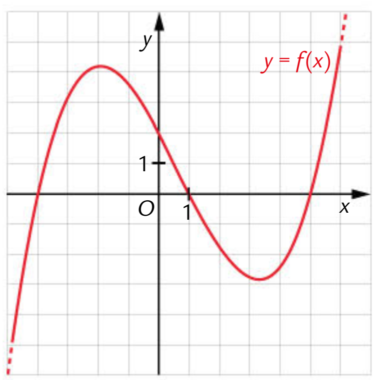
Interpretazione di grafici

245 Scrivi una somma algebrica di integrali che esprima, l'area della regione colorata in figura.



246 Rappresenta nella figura qui sotto la parte di piano la cui area è data dall'espressione:

$$\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx + \int_5^6 f(x)\,dx$$



Test

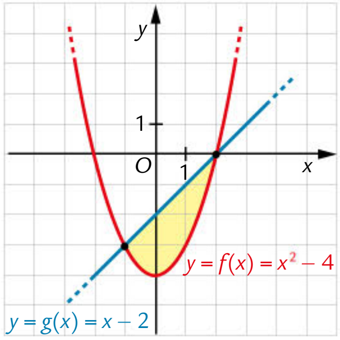
247 Per calcolare l'area della regione colorata in figura, quale integrale occorre calcolare?

A $\int_{-1}^{2}[f(x)-g(x)]\,dx$

B $\int_{-1}^{2}[g(x)-f(x)]\,dx$

C $\int_{-1}^{2}[f(x)+g(x)]\,dx$

D $\int_{2}^{-1}[g(x)-f(x)]\,dx$



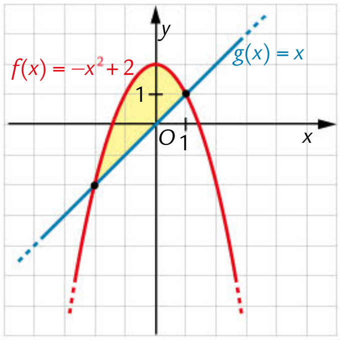
248 Per calcolare l'area della regione colorata in figura, quale integrale occorre calcolare?

A $\int_{-2}^{1}[f(x)-g(x)]\,dx$

B $\int_{-2}^{1}[g(x)-f(x)]\,dx$

C $\int_{-2}^{1}[f(x)+g(x)]\,dx$

D $\int_{1}^{-2}[f(x)-g(x)]\,dx$



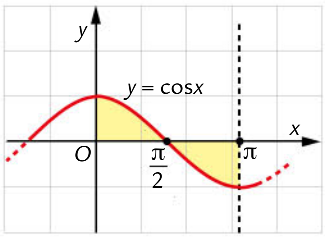
249 Per calcolare l'area della regione colorata in figura, quale integrale occorre calcolare?

A $\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$

B $2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

C $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx$

D $2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx$



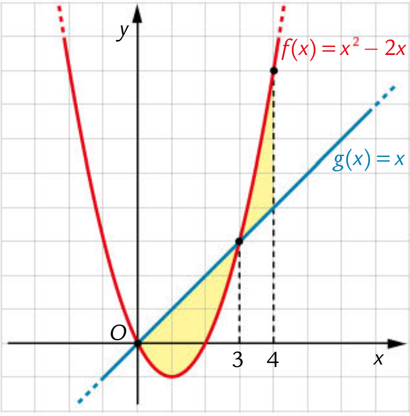
250 Per calcolare l'area della regione colorata in figura, quale integrale occorre calcolare?

A $\int_{0}^{4}[f(x)-g(x)]\,dx$

B $\int_{0}^{4}[g(x)-f(x)]\,dx$

C $\int_{0}^{3}[f(x)-g(x)]\,dx+\int_{3}^{4}[g(x)-f(x)]\,dx$

D $\int_{0}^{3}[g(x)-f(x)]\,dx+\int_{3}^{4}[f(x)-g(x)]\,dx$



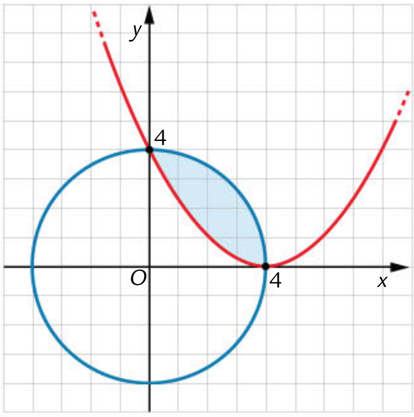
251 Nella figura la circonferenza ha centro nell'origine e raggio 4, la parabola ha vertice in (4, 0) e passa per il punto (0, 4). Senza utilizzare il calcolo integrale e senza determinare le equazioni delle due curve, stabilisci quanto vale l'area della regione di piano colorata in figura.

A $4\pi + \frac{16}{3}$

B $4\pi - \frac{16}{3}$

C $4\pi + \frac{8}{3}$

D $4\pi - \frac{8}{3}$



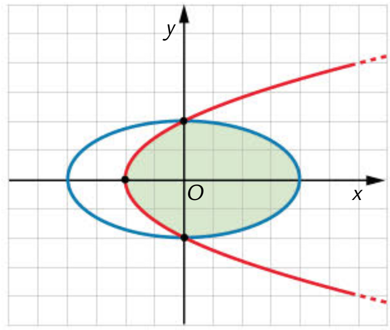
252 Nella figura l'ellisse ha semiassi di misure 4 e 2, la parabola ha vertice in (–2, 0) e interseca l'asse y in (0, –2) e in (0, 2). Senza utilizzare il calcolo integrale e senza determinare le equazioni delle due curve, stabilisci quanto vale l'area della regione di piano colorata in figura.

A $4\pi + \frac{16}{3}$

B $4\pi - \frac{16}{3}$

C $4\pi + \frac{8}{3}$

D $4\pi - \frac{8}{3}$



253 Considera il trapezoide limitato dal grafico della funzione $y = x^2 + 1$ e dall'asse x nell'intervallo [0, 2]. Per calcolare il volume del solido generato dalla rotazione di questo trapezoide intorno all'asse x, quale integrale occorre calcolare?

A $\pi\int_0^2 (x^2+1)\,dx$

B $\int_0^2 (x^2+1)^2\,dx$

C $\pi\int_0^2 (x^2+1)^2\,dx$

D Nessuno dei precedenti

254 Considera il trapezoide limitato dal grafico della funzione $y = x^2 + 1$ e dall'asse x nell'intervallo [0, 2]. Quale delle seguenti formule fornisce il volume del solido generato dalla rotazione di questo trapezoide intorno all'asse y?

A $\pi\int_0^2 \left(\sqrt{y-1}\right)^2 dy$

B $20\pi - \pi\int_0^2 \left(\sqrt{y-1}\right)^2 dy$

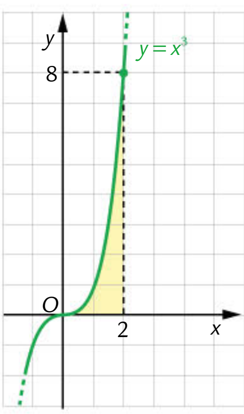
C $\pi\int_1^5 \left(\sqrt{y-1}\right)^2 dy$

D $20\pi - \pi\int_1^5 \left(\sqrt{y-1}\right)^2 dy$

255 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio di un solido il cui volume è dato dall'integrale $\pi\int_0^3 y\,dy$. Qual è il volume del solido? $\left[\frac{9\pi}{2}\right]$

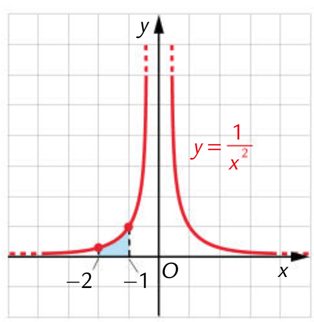
Esercizi sul calcolo delle aree

256 Determina l'area della regione colorata in figura.



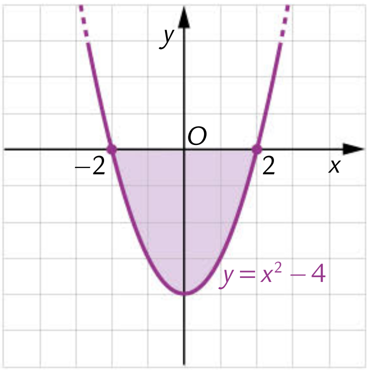
[4]

257 Determina l'area della regione colorata in figura.



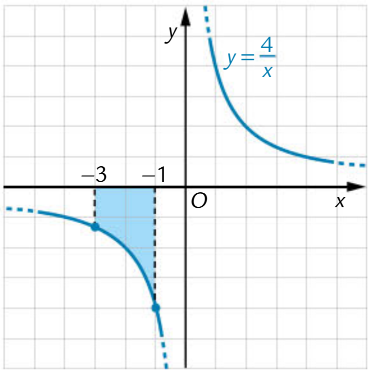
$\left[\frac{1}{2}\right]$

258 Determina l'area della regione colorata in figura.



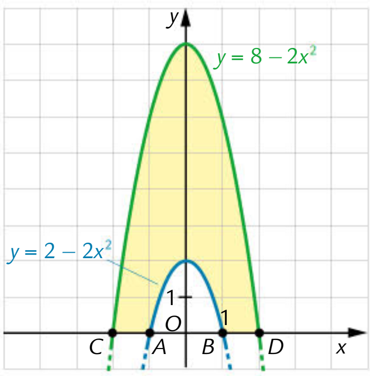
$\left[\frac{32}{3}\right]$

259 Determina l'area della regione colorata in figura.



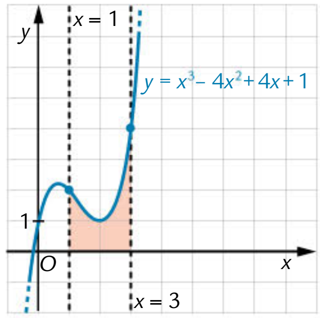
[4 ln 3]

260 Determina l'area della regione di piano colorata in figura, limitata dall'asse x e dagli archi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ delle parabole di equazioni $y = 2 - 2x^2$ e $y = 8 - 2x^2$.



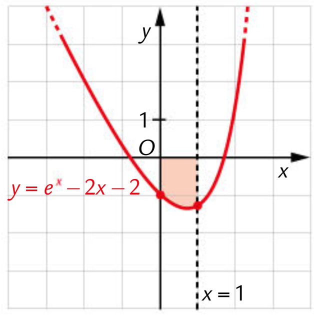
$\left[\frac{56}{3}\right]$

261 Calcola l'area della regione finita di piano che è rappresentata in figura, limitata dal grafico della funzione $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = 3$.



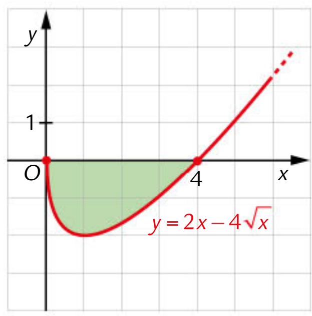
$\left[\frac{10}{3}\right]$

262 Calcola l'area della regione finita di piano rappresentata in figura, limitata dal grafico della funzione $y = e^x - 2x - 2$, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = 1$.



$[4 - e]$

263 Calcola l'area della regione finita di piano rappresentata in figura, limitata dal grafico della funzione $y = 2x - 4\sqrt{x}$ e dall'asse x.



$\left[\frac{16}{3}\right]$

Determina l'area della regione finita di piano limitata dai grafici delle funzioni di cui è data l'equazione e dall'asse x.

264 $y = 4 - x^2$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

265 $y = x^2 - 4x + 3$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

266 $y = 2x^2 - x - 3$ $\left[\frac{125}{24}\right]$

267 $y = x^3 - 2x^2$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

268 $y = x^3 - 4x$ [8]

269 $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ $\left[\frac{71}{6}\right]$

270 $y = \sin 2x$, con $0 \le x \le \pi$ [2]

271 $y = \sin \frac{x}{2}$, con $0 \le x \le 2\pi$ [4]

Determina l'area della regione finita di piano limitata dalle curve di cui è data l'equazione.

272 $y=x^2$ $\quad y=-x^2+2$ $\quad \left[\frac{8}{3}\right]$

273 $y=-x^2-2x$ $\quad y=x$ $\quad \left[\frac{9}{2}\right]$

274 $y=\frac{8}{x}$ $\quad y=6-x$ $\quad [6-8\ln 2]$

275 $y=\frac{4}{x+2}$ $\quad y=-x+3$ $\quad \left[\frac{15}{2}-8\ln 2\right]$

276 $x=y^2-2y$ $\quad x-y=0$ $\quad \left[\frac{9}{2}\right]$

277 $x=-y^2-2y+3$ $\quad x-y+1=0$ $\quad \left[\frac{125}{6}\right]$

278 $y=1-\cos x$ $\quad y=\cos x$, con $0\le x\le \pi$ $\quad \left[\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}\right]$

---

279 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalla parabola di equazione $y=x^2-4x+3$ e dalla retta di equazione $y=x+3$. $\left[\frac{125}{6}\right]$

280 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalla parabola di equazione $y=x^2-4x+4$ e dalla parabola di equazione $y=-x^2+4$. $\left[\frac{8}{3}\right]$

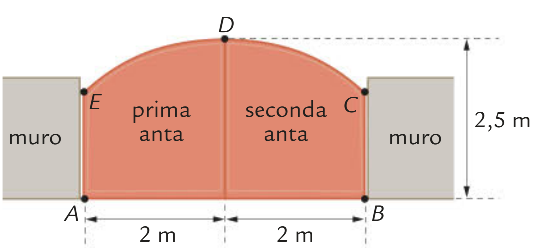
281 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalla parabola di equazione $y=x^2-2x-3$ e dalla retta di equazione $y=x+1$. $\left[\frac{125}{6}\right]$

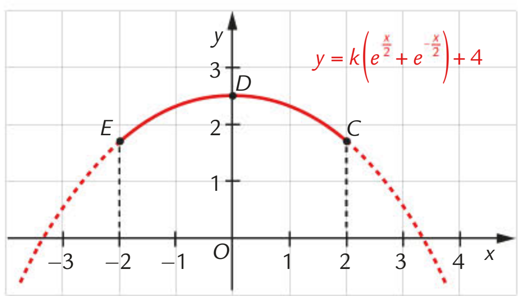
282 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalla parabola di equazione $y=x^2-4x+5$ e dalla parabola di equazione $y=-x^2+3x$. $\left[\frac{9}{8}\right]$

283 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $y=x^3+2x^2-8x$ e dall'asse x. $\left[\frac{148}{3}\right]$

284 Determina l'area della regione finita di piano limitata dal grafico di $y=e^x$, dall'asse y e dalla retta di equazione $y=2$. $[2\ln 2-1]$

285 **Realtà e modelli** **Cancello a due ante.** Si sta progettando un cancello a due ante. Quando il cancello è chiuso, la sua superficie anteriore ha la forma rappresentata nella figura a sinistra. Il contorno di tale superficie è costituito dal segmento AB, dai due segmenti BC e AE (entrambi perpendicolari ad AB) e dall'arco $\overset{\frown}{CE}$. Quest'ultimo, nel sistema di riferimento indicato nella figura a destra (dove l'unità di misura su entrambi gli assi è il metro), può essere modellizzato con buona approssimazione dal grafico di una funzione di equazione del tipo $y=k\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)+4$, dove $-2\le x\le 2$ e k è un parametro da determinare.





a. Determina il valore di k, in base alle informazioni in figura.
b. Sapendo che i punti E e C si trovano a un'altezza da terra che risulta l'80% dell'altezza del muro, stabilisci l'altezza del muro, arrotondando il risultato al centimetro.
c. La superficie del cancello andrà dipinta con una vernice che viene venduta in latte da 5 litri. Sapendo che in media è necessario 1 litro di pittura per dipingere una superficie di 0,2 m^2, qual è il minimo numero di latte di vernice necessarie per dipingere completamente la superficie anteriore delle due ante del cancello?

$\left[\text{a. } k=-\frac{3}{4}; \text{ b. } 2 \text{ m e } 11 \text{ cm; c. } 9 \text{ latte}\right]$

286 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dai grafici delle funzioni $y = e^{2x}$, $y = e^x$ e dalla retta di equazione $x = 1$. $\left[\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right]$

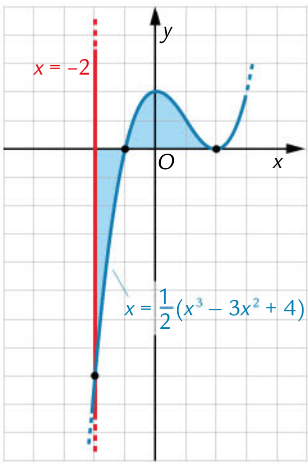
287 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $y = \frac{2x-4}{x-3}$ e dagli assi cartesiani. $[4 - 2\ln 3]$

288 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $y = 2 - \sqrt{x}$ e dagli assi cartesiani. $\left[\frac{8}{3}\right]$

289 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $y = \ln x$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = e$. $[1]$

290 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $y = \frac{3x-12}{x-3}$, dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 8x - 10$ e dalla retta di equazione $x = 4$. $\left[3\ln 3 + \frac{10}{3}\right]$

291 Calcola l'area della regione di piano colorata nella figura, limitata dal grafico della funzione $y = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 4)$, dalla retta avente equazione $x = -2$ e dall'asse x.



$\left[\frac{27}{4}\right]$

292 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dai grafici delle funzioni $y = \sqrt{2x}$, $y = \sqrt{6-x}$ e dall'asse x. $[8]$

293 Dopo aver trovato le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione $y = -\frac{4}{x}$ nei suoi punti A e B, rispettivamente di ascissa 1 e 4, determina l'area del triangolo mistilineo ABC, essendo C il punto d'intersezione delle due rette tangenti. $\left[A(1, -4), B(4, -1), \text{tangenti: } y = 4x - 8,\ y = \frac{1}{4}x - 2, C\left(\frac{8}{5}, -\frac{8}{5}\right); \text{Area} = 8\ln 2 - \frac{24}{5}\right]$

294 Scrivi l'equazione della retta r passante per l'origine O e il punto $A(4, 2)$ e l'equazione della retta t passante per $B(8, 1)$ e parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante. Sia C l'intersezione delle due rette e D l'intersezione tra t e l'asse delle x. Calcola l'area delle due parti in cui il triangolo ODC è diviso dall'iperbole di equazione $xy = 8$. $\left[A_1 = 9 - 8\ln 2,\ A_2 = \frac{9}{2} + 8\ln 2\right]$

295 Calcola l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione $y = x^3 + 3x^2$ e dalla retta di equazione $y = x + 3$. $[8]$

296 **Videolezione** Dopo aver tracciato il grafico della funzione $y = x^4 - 2x^2 + 1$, calcola l'area della regione finita di piano limitata da tale grafico e dall'asse x. $\left[\frac{16}{15}\right]$

297 Calcola l'area della superficie limitata dal grafico della funzione $y = \dfrac{x^3+4x}{x^2+1}$, dal suo asintoto obliquo e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = 3$. $\left[\dfrac{3}{2}\ln 5\right]$

298 Determina l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $y = x^3 - 2x + 4$, dalla retta tangente nel suo punto di flesso e dalla retta di equazione $x = 1$. $\left[\text{Tangente: } y = 4 - 2x;\ \text{Area} = \dfrac{1}{4}\right]$

299 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $y = \sqrt{|x+4|}$ e dalla retta di equazione $y = 2$. $\left[\dfrac{16}{3}\right]$

300 Data la funzione $y = \sqrt{|x-2|}$, sia P il punto d'intersezione del suo grafico con l'asse y. Determina l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione e dalla retta parallela all'asse x passante per P. $\left[\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right]$

301 Traccia il grafico della funzione $y = 2\sin^2 x - \sin x$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi$ e determina l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione e dall'asse x. $\left[\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 2\right]$

302 Traccia il grafico della funzione $y = \sin 2x + \cos x$ nell'intervallo $-\pi \le x \le \pi$ e determina l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione e dall'asse x, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. [5]

303 Determina l'area della regione di piano che rappresenta le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ |x|\, y \le 4 \end{cases}$$

[8 ln 2]

304 Determina l'area della regione di piano che rappresenta le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} -\pi \le x \le \pi \\ \dfrac{1}{8} \le y \le \sin^3 x \end{cases}$$

$\left[\dfrac{3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{12}\right]$

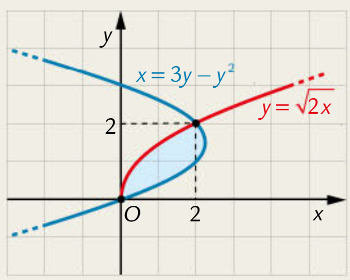
305 Calcola l'area della regione di piano che rappresenta le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \tan^3 x \le y \le 1 \end{cases}$$

$\left[\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right]$

306 **ESERCIZIO SVOLTO**

Calcoliamo l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve di equazioni $x = 3y - y^2$ e $y = \sqrt{2x}$.



- Rappresentiamo la parabola (avente asse parallelo all'asse x) di equazione $x = 3y - y^2$ e il grafico della funzione $y = \sqrt{2x}$ (una semiparabola). Dalla figura si vede che le due curve hanno in comune due punti: l'origine e il punto di coordinate (2, 2) (si può facilmente verificare questo risultato algebricamente risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni).
- Per il calcolo dell'area ci si imbatte in un problema: l'equazione $y = \sqrt{2x}$ è esplicita rispetto alla variabile y, mentre l'equazione della parabola, $x = 3y - y^2$, è esplicita rispetto alla variabile x. Per procedere nel calcolo dobbiamo esplicitare entrambe le equazioni rispetto a x o rispetto a y. In questo caso è più facile esplicitare anche la prima equazione, $y = \sqrt{2x}$, rispetto a x; infatti:

$$y = \sqrt{2x} \Rightarrow 2x = y^2 \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}$$

- Ora possiamo impostare il calcolo dell'area, integrando rispetto a y; l'area richiesta sarà espressa da:

$$\int_0^2 \left[(3y - y^2) - \frac{y^2}{2}\right] dy$$

- Svolgendo il calcolo si trova che l'area richiesta vale 2.

307 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalla parabola di equazione $x = y^2$ e dalla curva di equazione $y = x^3$. $\left[\frac{5}{12}\right]$

308 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalle parabole di equazioni $x = y^2$ e $y = \frac{1}{8}x^2$. $\left[\frac{8}{3}\right]$

309 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalla parabola di equazione $x = \frac{1}{2}y^2$ e dalla sua simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. $\left[\frac{4}{3}\right]$

310 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalle parabole di equazioni $x = y^2 - 2y$ e $y = \frac{1}{3}x^2$. [6]

311 Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalle curve di equazioni $x = -(y-2)^2$ e $y = \sqrt{x+4}$. $\left[\frac{8}{3}\right]$

Esercizi sul calcolo delle aree con parametri

312 Verifica che l'area della regione di piano limitata dalla curva $y = \frac{1}{x}$, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = 2a$, con $a > 0$, è costante. [Area = ln 2]

313 Determina per quali valori di m l'area del segmento parabolico individuato dalla retta di equazione $y = mx$ e dalla parabola di equazione $y = x^2$ è 36. $[m = \pm 6]$

314 Determina per quale valore di a il grafico della funzione di equazione $y = x^3 - a^2x$, con $a > 0$, forma con l'asse x una regione di piano di area uguale a 8. $[a = 2]$

315 Sia $k > 0$. Determina k in modo che l'area della regione finita di piano limitata dai grafici delle funzioni $y = e^{kx}$ e $y = e^{-2kx}$ e dalla retta di equazione $y = \frac{1}{e}$ sia uguale a $3\left(1 - \frac{1}{e}\right)$. $\left[k = \frac{1}{2}\right]$

316 Considera la regione finita di piano limitata dai grafici delle due funzioni $y = \ln x$, $y = -2\ln x$ e dalla retta di equazione $x = k$, con $0 < k < 1$. Esprimi in funzione di k l'area $A(k)$ di tale regione di piano e calcola il limite cui tende $A(k)$ quando $k \to 0^+$. Interpreta geometricamente il risultato ottenuto. $[A(k) = 3(k\ln k - k + 1);\ 3]$

317 Data la funzione $y = \sin(kx)$, con $k > 0$, determina per quale valore di k l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione e dall'asse x in un intervallo di ampiezza uguale al periodo della funzione vale 8. $\left[k = \frac{1}{2}\right]$

318 Considera la regione di piano definita dal sistema: $\begin{cases} y \le k\sin x \\ y \ge k\sqrt{3}\cos x, \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$ con $k > 0$

Determina per quale valore di k l'area di tale regione di piano è uguale a 20. $[k = 5]$

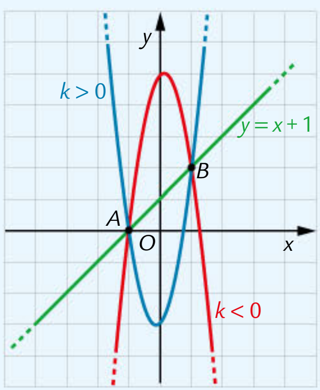
319 **ESERCIZIO GUIDATO**

Data la parabola di equazione $y = kx^2 + x + 1 - k$, verifica che per ogni valore reale di k passa per i due punti $A(-1, 0)$ e $B(1, 2)$. Determina per quali valori di k la parabola individua con la retta AB un segmento parabolico di area $\frac{16}{3}$.

- Verifica che le coordinate di A e B soddisfano l'equazione della parabola.
- Come puoi vedere dalla figura, dove sono state rappresentate due parabole, una corrispondente a un valore *positivo* di k e l'altra corrispondente a un valore *negativo*, la posizione della parabola rispetto alla retta varia al variare del parametro: tra A e B, la parabola si trova «al di sotto» della retta se $k > 0$ e «al di sopra» se $k < 0$. Non potendo stabilire la posizione della parabola rispetto alla retta poiché essa varia al variare del parametro, devi introdurre nella formula per il calcolo dell'area un *valore assoluto*. L'area del segmento parabolico sarà espressa da:

$$\left|\int_{-1}^{1}[(kx^2 + x + 1 - k) - (x+1)]dx\right|$$

Imponendo che tale area sia $\frac{16}{3}$ otterrai un'equazione contenente un valore assoluto. $[k = \pm 4]$

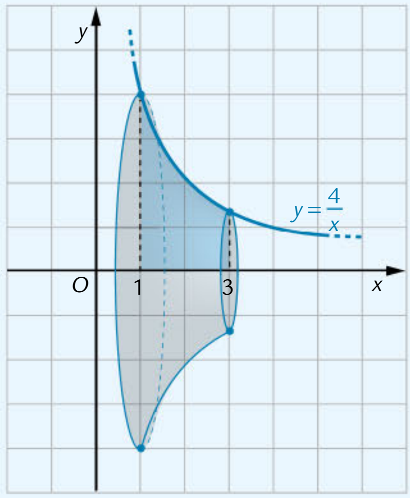


320 Data la parabola di equazione $y = kx^2 + \left(4k + \frac{1}{2}\right)x + 2$, verifica che per ogni valore reale di k essa passa per i due punti $A(-4, 0)$ e $B(0, 2)$. Determina quindi i valori di k per cui la parabola individua con la retta AB un segmento parabolico di area $\frac{64}{3}$. $[k = \pm 2]$

Calcolo di volumi di solidi di rotazione

321 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x del trapezoide limitato dal grafico della funzione $y = \frac{4}{x}$ e dalle rette $x = 1$ e $x = 3$.



- Osserva il grafico in figura.
  Il volume del solido è dato dall'integrale:

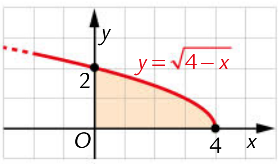
$$\pi\int_1^3 [f(x)]^2\, dx = \pi\int_1^3 \frac{16}{x^2}dx$$

- Calcolando tale integrale, troverai che il volume del solido è:

$$\text{Volume} = \frac{32\pi}{3}$$

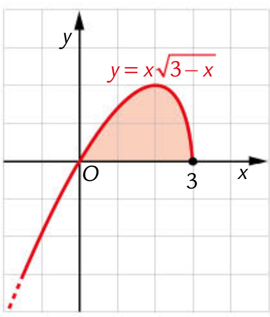
Calcola il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte di piano colorata in figura.

322



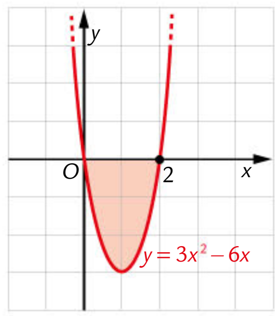
$[8\pi]$

323



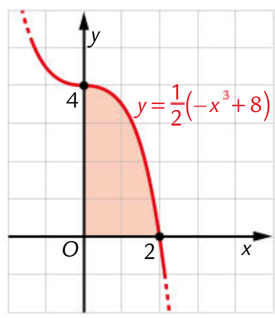
$\left[\frac{27\pi}{4}\right]$

324



$\left[\frac{48\pi}{5}\right]$

325



$\left[\frac{144\pi}{7}\right]$

Calcola i volumi dei solidi generati dalla rotazione intorno all'asse x della regione finita di piano limitata dai grafici delle curve di cui è data l'equazione.

326 $y = \sqrt{x+1}$ $\quad x = 0 \quad x = 3 \quad y = 0$ $\quad \left[\frac{15\pi}{2}\right]$

327 $y = 4 - x^2$ $\quad y = 0$ $\quad \left[\frac{512\pi}{15}\right]$

328 $y = \frac{1}{x}$ $\quad x = 1 \quad x = 2 \quad y = 0$ $\quad \left[\frac{\pi}{2}\right]$

329 $y = e^x$ $\quad x = -2 \quad x = 0 \quad y = 0$ $\quad \left[\frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})\right]$

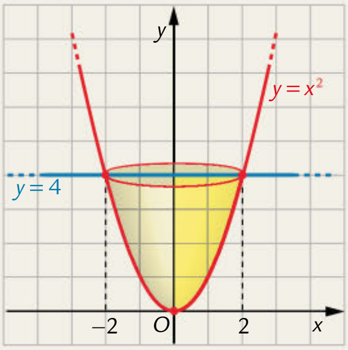
330 $y = \cos x$ $\quad x = -\pi \quad x = \pi \quad y = 0$ $\quad [\pi^2]$

331 ESERCIZIO SVOLTO

Consideriamo la regione finita di piano limitata dalla parabola di equazione $y = x^2$, dall'asse y e dalla retta di equazione $y = 4$. Determiniamo il volume del solido generato da una rotazione completa di questa regione intorno all'asse y.

1° modo

- Rappresentando le curve indicate si vede che la regione da considerare è quella colorata in giallo in figura.



- Poiché la rotazione avviene intorno all'asse y, anche l'integrazione andrà effettuata *rispetto alla variabile y*.
- Anzitutto esplicitiamo l'equazione $y = x^2$ rispetto a y:

$$x = \pm\sqrt{y}$$

- Il solido di cui vogliamo calcolare il volume si ottiene considerando il trapezoide limitato dall'arco di parabola di equazione $x = \sqrt{y}$ (l'arco contenuto nel primo quadrante) e dall'asse y nell'intervallo $[0, 4]$ e facendolo ruotare intorno all'asse y. Pertanto il suo volume sarà:

$$\pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\int_0^4 y\,dy = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

2° modo

- Determiniamo inizialmente, con la formula dedotta dal metodo dei gusci cilindrici, il volume V_1 del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y della regione di piano limitata dal grafico della funzione $y = x^2$ e dall'asse x nell'intervallo $[0, 2]$:

$$V_1 = 2\pi\int_0^2 x\cdot x^2\,dx = 2\pi\int_0^2 x^3\,dx = 2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$$

- Il volume V del solido richiesto è la differenza tra il volume V_2 del cilindro di raggio 2 e altezza 4 e V_1:

$$V = V_2 - V_1 = 16\pi - 8\pi = 8\pi$$

Calcola i volumi dei solidi generati dalla rotazione intorno all'asse y della regione finita di piano limitata dai grafici delle curve di cui è data l'equazione.

332 $y = x^2$ $\quad y = x$ $\quad \left[\frac{\pi}{6}\right]$

333 $y = \frac{1}{x}$ $\quad x = 1$ $\quad x = 2$ $\quad y = 0$ $\quad [2\pi]$

334 $y = \sqrt[3]{x}$ $\quad x = 1$ $\quad y = 0$ $\quad \left[\frac{6\pi}{7}\right]$

335 $y = x^2 - 1$ $\quad x = 0$ $\quad y = 0$ $\quad \left[\frac{\pi}{2}\right]$

336 $y = \ln x$ $\quad x = 0$ $\quad y = 0$ $\quad y = 1$ $\quad \left[\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)\right]$

337 $y = e^x$ $\quad x = 0$ $\quad x = 1$ $\quad y = 0$ $\quad [2\pi]$

---

338 **Videolezione** Considera la regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $y = \sqrt{4 - x}$ e dagli assi cartesiani. Determina il volume del solido generato da tale regione in una rotazione completa intorno all'asse x. $[8\pi]$

339 Considera il segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Determina il volume del solido ottenuto dalla rotazione di questo segmento parabolico intorno all'asse x. $\left[\frac{2\pi}{15}\right]$

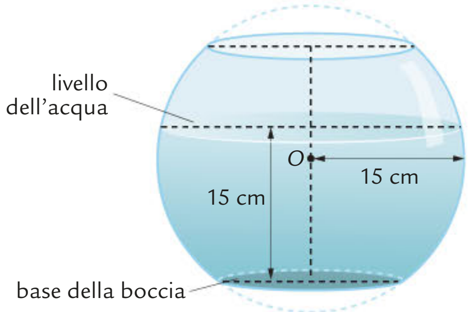
340 Data la parabola di equazione $y = 5x^2$, considera la regione finita di piano limitata dalla parabola, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = a$, con $a > 0$. Determina per quale valore di a il volume del solido generato dalla rotazione completa di tale regione di piano intorno all'asse x è uguale a 160π. $[a = 2]$

341 Considera la regione finita di piano limitata dai grafici delle due curve di equazioni $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$. Determina il volume del solido ottenuto dalla rotazione di questa regione di piano intorno all'asse y. $\left[\frac{3\pi}{10}\right]$

342 Determina il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse x della regione finita di piano limitata dalle parabole di equazioni $y = \frac{1}{3}x^2$ e $y = -x^2 + 4x$. $\left[\frac{126\pi}{5}\right]$

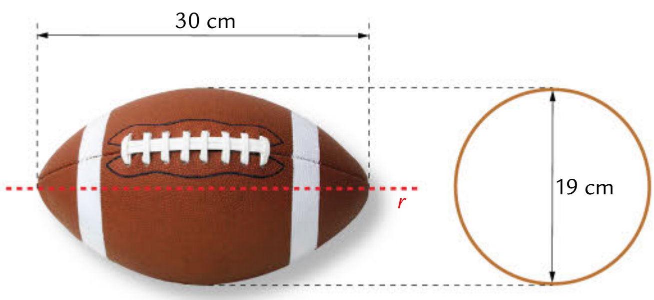
Realtà e modelli

343 **L'acquario.** Un acquario ha la forma di una calotta sferica a due basi.



La calotta appartiene a una sfera di raggio 15 cm e la base dell'acquario è un cerchio di raggio 9 cm. Se il livello dell'acqua nell'acquario è a 15 cm dal fondo, quanti litri di acqua sono contenuti nell'acquario?
Risolvi il problema tramite il calcolo di un opportuno integrale. [Circa 8,8 litri]

344 **Pallone da rugby.** La superficie del pallone da rugby in figura si può pensare ottenuta dalla rotazione di una semiellisse di un giro completo intorno alla retta *r*. Le sezioni della superficie del pallone tramite piani perpendicolari alla retta *r* sono dunque circonferenze, di cui quella di massima lunghezza ha diametro 19 cm. Calcola il volume del pallone da rugby, tenendo conto dei dati in figura.



[1805π cm$^3 \simeq 5671$ cm^3]

345 Considera la regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $y=\sqrt{4-x}$ e dagli assi cartesiani. Determina il volume del solido generato da tale regione in una rotazione completa intorno all'asse *y*. $\left[\dfrac{256\pi}{15}\right]$

346 Dopo aver rappresentato il grafico della funzione $y=x\sqrt{9-x^2}$, calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse *x* della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione e dall'asse *x* stesso. $\left[\dfrac{324\pi}{5}\right]$

347 Tra le parabole con asse parallelo all'asse *y* che intersecano l'asse *x* nei due punti $O(0, 0)$ e $A(4, 0)$, determina:

a. la parabola γ_1 che passa per il punto $(2, 4)$; **b.** la parabola γ_2 che passa per il punto $(2, 2)$.

Considera la regione di piano limitata dai grafici di γ_1 e γ_2. Determina il volume del solido ottenuto dalla rotazione di questa regione di piano intorno all'asse *x*. $\left[\textbf{a. } \gamma_1 : y=-x^2+4x; \textbf{ b. } \gamma_2 : y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x; \text{ volume}=\dfrac{128\pi}{5}\right]$

348 Data la circonferenza di centro $O(0, 0)$ e raggio 4, determina il volume del solido generato da una rotazione completa intorno all'asse *x* del settore circolare, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalla circonferenza, dall'asse *x* e dalla retta passante per l'origine che forma un angolo di 60° con il semiasse positivo delle ascisse. $\left[\dfrac{64\pi}{3}\right]$

349 Dopo avere tracciato il grafico della funzione $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}}$, trova il volume del solido generato da una rotazione completa intorno all'asse *x* del trapezoide delimitato dal grafico della funzione, dall'asse *x* e dalle rette di equazioni $x=3$ e $x=5$. $\left[\left(2+7\ln\dfrac{4}{5}\right)\pi\right]$

350 Considera la regione finita di piano limitata dai grafici delle funzioni $y = x^2 + 1$ e $y = \sqrt{3x+1}$. Determina il volume del solido generato da una rotazione completa di tale regione di piano:

a. intorno all'asse x; **b.** intorno all'asse y. $\left[\mathbf{a.}\ \frac{19\pi}{30};\ \mathbf{b.}\ \frac{59\pi}{270}\right]$

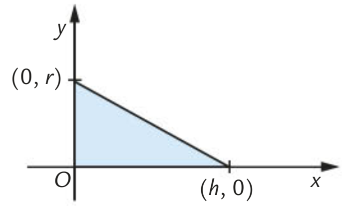
351 Considera la regione di piano limitata dal grafico della funzione $y = \sin x$ e dall'asse x per $0 \le x \le \pi$. Determina il volume del solido generato dalla rotazione di questa regione di piano:

a. intorno all'asse x; **b.** intorno all'asse y. $\left[\mathbf{a.}\ \frac{\pi^2}{2};\ \mathbf{b.}\ 2\pi^2\right]$

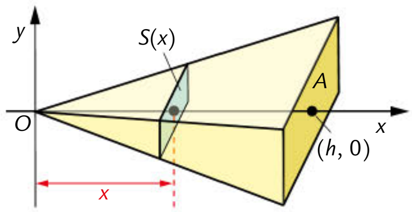
Collegamenti **Integrali e formule dei volumi dei solidi notevoli**

352 **Volume della sfera.** Pensando una sfera di raggio r come il solido ottenuto dalla rotazione del semicerchio limitato dalla semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ intorno al diametro, verifica, mediante il calcolo integrale, che il suo volume è $\frac{4}{3}\pi r^3$.

353 **Volume del cono.** Pensando un cono, il cui raggio di base è r e la cui altezza è h, come solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x del triangolo in figura, verifica mediante il calcolo integrale che il suo volume è $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.



354 **Volume della piramide.** Considerata una piramide avente altezza h e base di area A, disponiamola come in figura.



a. Esprimi in funzione di x e di A l'area $S(x)$ della sezione della piramide rappresentata, ottenuta con un piano parallelo alla base.

b. Utilizzando il metodo delle sezioni, ovvero calcolando l'integrale $\int_0^h S(x)\,dx$, ritrova la nota formula che fornisce il volume della piramide.

355 **Volume dell'ellissoide.** Il solido generato da una rotazione della regione di piano racchiusa dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > 0$ e $b > 0$ intorno a uno dei suoi assi di simmetria si chiama **ellissoide**. Verifica che:

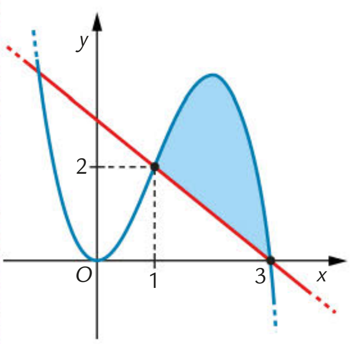
a. in una rotazione intorno all'asse x si ottiene un ellissoide di volume $\frac{4}{3}\pi ab^2$;

b. in una rotazione intorno all'asse y si ottiene un ellissoide di volume $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Esercizi riassuntivi: calcolo di aree e volumi

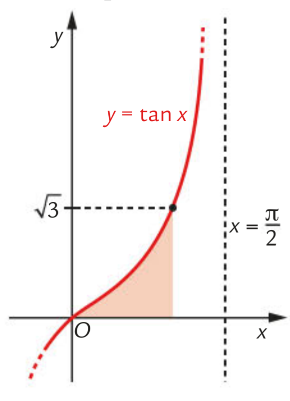
Interpretazione di grafici

356 In figura è rappresentato il grafico di una cubica di equazione del tipo $y = -x^3 + kx^2$ e quello di una retta. Dopo avere determinato il valore di k e l'equazione della retta, calcola l'area della parte colorata.



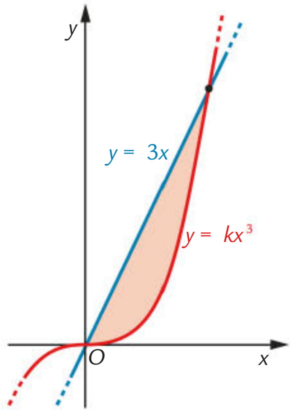
$[k = 3,\ y = 3 - x,\ \text{area} = 4]$

357 Qual è l'area della parte colorata?



$[\ln 2]$

358 L'area della parte colorata in figura, limitata dal grafico della funzione $y = kx^3$ e dalla retta di equazione $y = 3x$, è uguale a 3. Qual è il valore di k?



$\left[k = \frac{3}{4}\right]$

359 Traccia i grafici delle due funzioni $y = \frac{4}{1+x^2}$ e $y = 2x^2$, quindi determina l'area della regione finita di piano da essi delimitata. $\left[2\pi - \frac{4}{3}\right]$

360 Considera la funzione $y = x\sqrt{x+4}$. Tracciane il grafico (tralascia lo studio di y'') e considera la regione di piano limitata da quest'ultimo e dall'asse x.

a. Determina l'area della regione.

b. Determina il volume del solido che si ottiene dalla rotazione completa della regione intorno all'asse x.

$\left[\mathbf{a.}\ \frac{128}{15};\ \mathbf{b.}\ \frac{64}{3}\pi\right]$

361 Considera la funzione $f(x) = x^3$.

a. Tracciane il grafico.

b. Scrivi l'equazione della retta r, tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1.

c. Determina l'area della regione finita di piano limitata dal grafico di f e dalla retta r.

$\left[\mathbf{b.}\ y = 3x - 2;\ \mathbf{c.}\ \frac{27}{4}\right]$

362 Considera la funzione $y = \frac{4}{1+x^2}$.

a. Tracciane il grafico.

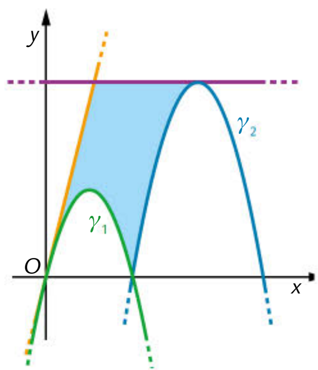
b. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa 1.

c. Determina l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione e dalla retta tangente.

$[\mathbf{b.}\ y = 4 - 2x;\ \mathbf{c.}\ \pi - 3]$

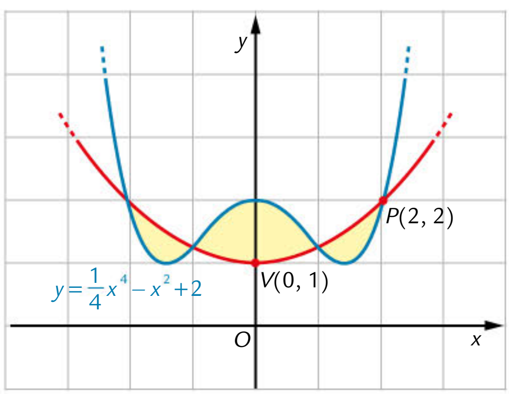
363 Determina per quali valori di k il valore dell'integrale $\int_k^2 \frac{3x}{(x^2-1)^2}\,dx$ è uguale all'area del segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione $y = -x^2 - 5x - 4$ e dall'asse x. $\left[k = \pm\sqrt{\frac{13}{10}}\right]$

364 Determina l'area del quadrilatero mistilineo rappresentato in figura, che è limitato dalla parabola γ_1 di equazione $y = -x^2 + 4x$, dalla parabola γ_2 di equazione $y = -x^2 + 14x - 40$, dalla tangente a γ_1 nell'origine e dalla tangente a γ_2 nel vertice.



$\left[\frac{581}{24}\right]$

365 Calcola l'area della regione di piano colorata in figura, limitata dal grafico della funzione $y = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2$ e dalla parabola avente asse verticale con vertice in $V(0, 1)$ e passante per $P(2, 2)$.



$\left[\text{Parabola: } y = \frac{1}{4}x^2 + 1;\ \text{Area} = 2\right]$

366 Trova l'area della regione finita di piano limitata dai grafici delle funzioni $y = x^4 - 4x^2 + 4$ e $y = x^4 - 2x^2 + 1$. $[2\sqrt{6}]$

367 Verifica che l'area della regione di piano limitata dall'asse x, dal grafico della funzione $y=(x-1)e^x$ e dalle rette parallele all'asse y passanti rispettivamente per il punto di flesso e per il punto di minimo della funzione è maggiore dell'area della regione, contenuta nel quarto quadrante, limitata dal grafico della funzione e dagli assi cartesiani. [La prima area è uguale a $2-3e^{-1}$; la seconda è uguale a $e-2$; si verifica che $2-3e^{-1}>e-2$]

368 Considera la funzione $y=\dfrac{e^x}{e^x+2}$.

a. Tracciane un grafico probabile.

b. Determina l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione, dall'asse x, dall'asse y e dalla retta di equazione $x=\ln 4$.

[a. Funzione strettamente crescente, avente come asintoti $y=1$ (per $x\to+\infty$) e $y=0$ (per $x\to-\infty$); b. $\ln 2$]

369 Considera la funzione esponenziale f di equazione $y=e^{\frac{x}{2}}$.

a. Determina l'equazione della funzione g, simmetrica di f rispetto alla retta $y=1$.

b. Determina il punto A in cui il grafico di g interseca l'asse x.

c. Determina l'area della regione finita di piano limitata dai grafici di f, di g e dalla retta parallela all'asse y passante per A.

$\left[\text{a. } y=2-e^{\frac{x}{2}};\ \text{b. } A(2\ln 2, 0);\ \text{c. } 4-4\ln 2\right]$

370 Considera la funzione logaritmica f di equazione $y=\ln x$.

a. Determina l'equazione della funzione g, simmetrica di f rispetto alla retta $x=1$.

b. Determina il punto A in cui il grafico di g interseca l'asse y.

c. Determina l'area della regione finita di piano limitata dai grafici di f, di g e dalla retta parallela all'asse x passante per A.

[a. $y=\ln(2-x)$; b. $A(0, \ln 2)$; c. $2-2\ln 2$]

371 Considera la funzione $y=\sin^2 x+\cos x\cdot\sin x$.

a. Determina il suo periodo T.

b. Tracciane il grafico nell'intervallo $[0, T]$.

c. Calcola l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione e dall'asse x.

$\left[\text{a. } T=\pi;\ \text{c. } \dfrac{\pi}{4}+1\right]$

372 Considera:

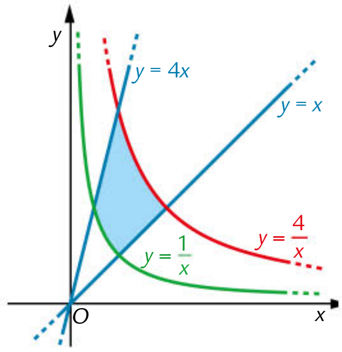
a. la circonferenza γ che ha centro nell'origine e raggio 2;

b. la parabola con asse parallelo all'asse y che ha vertice nel punto in cui la circonferenza interseca il semiasse positivo delle x, passante per il punto in cui la circonferenza interseca il semiasse positivo delle y.

Determina le aree delle due parti in cui la parabola divide il cerchio che ha come frontiera la circonferenza γ.

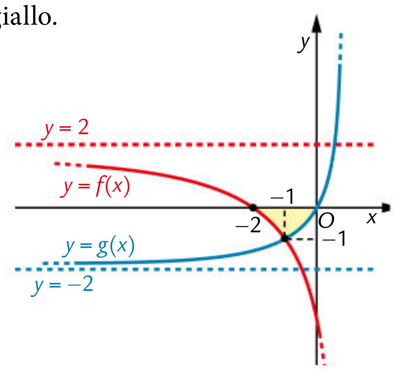
$\left[\pi-\dfrac{4}{3};\ 3\pi+\dfrac{4}{3}\right]$

373 Calcola l'area della regione di piano colorata in figura, limitata dai due rami nel primo quadrante delle curve di equazioni $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{4}{x}$ e dalle due rette di equazioni $y=x$, $y=4x$.



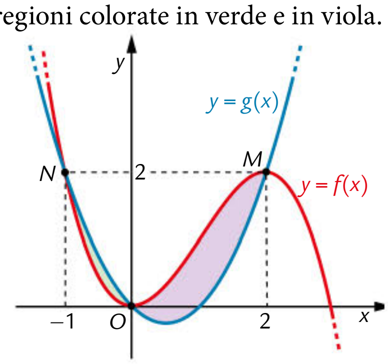
[$3\ln 2$]

374 Le funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$ hanno come grafici due iperboli equilatere; di ciascuna iperbole è rappresentato in figura un ramo e un asintoto orizzontale. Determina, in base ai dati in figura, le espressioni analitiche di $y=f(x)$ e $y=g(x)$ e calcola l'area della regione colorata in giallo.



$\left[f(x)=\dfrac{2x+4}{x-1}, g(x)=-\dfrac{2x}{x-1};\ \text{Area}=2\ln\dfrac{27}{16}\right]$

375 In figura sono riportati i grafici delle due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$. La funzione $y=f(x)$ è polinomiale di terzo grado e ha un minimo nell'origine e un massimo in $M(2, 2)$, mentre la funzione $y=g(x)$ rappresenta una parabola con asse verticale, che ha in comune con il grafico di $y=f(x)$ i tre punti M, N e O. Determina le espressioni analitiche di $y=f(x)$ e $y=g(x)$ e calcola le aree delle due regioni colorate in verde e in viola.



$\left[f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2, g(x)=x^2-x;\ \text{Area verde}=\dfrac{5}{24};\ \text{Area viola}=\dfrac{4}{3}\right]$

ESERCIZI

376 Considera la funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2} & x\le -2\\ x^2 & -2<x<2\\ \dfrac{b}{x} & x\ge 2\end{cases}$

a. Determina a e b in modo che sia continua in **R**.

b. Traccia il grafico della funzione, in corrispondenza dei valori di a e b determinati.

c. Calcola l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione f, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x=-4$ e $x=4$. $\left[\mathbf{a.}\ a=16,\ b=8;\ \mathbf{b.}\ \dfrac{28}{3}+8\ln 2\right]$

377 Considera la funzione $y = x(|x| - 2)$. Tracciane il grafico e determina l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione e dall'asse x. $\left[\dfrac{8}{3}\right]$

378 Considera la funzione $f(x) = e^{-2x} + 4e^{-x}$.

a. Studiala e tracciane il grafico.

b. Considera la regione finita di piano limitata dal grafico della funzione, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = a$, con $a > 0$. Determina per quale valore di a l'area di tale regione di piano è uguale a $\dfrac{19}{8}$. [**b.** $a = \ln 2$]

379 Considera l'iperbole di equazione $y=\dfrac{4}{x}$ e la regione di piano **D** limitata dal grafico dell'iperbole, dall'asse x, dalla retta di equazione $x = 1$ e dalla retta di equazione $x = k$, con $k > 1$. Determina per quale valore di k il solido che si ottiene da una rotazione completa della regione **D** intorno all'asse x ha volume uguale al solido che si ottiene da una rotazione completa della regione **D** intorno all'asse y. [$k = 2$]

380 Determina l'equazione della parabola, avente asse parallelo all'asse y e concavità rivolta verso il basso, che interseca l'asse x nell'origine O e nel punto $A(3, 0)$, tale che il segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse x, in una rotazione completa intorno all'asse x stesso, generi un solido di volume $\dfrac{9\pi}{10}$. $\left[y=-\dfrac{1}{3}x^2+x\right]$

381 Determina l'equazione dell'ellisse che ha due vertici in $(\pm 2, 0)$ e in una rotazione completa intorno all'asse y genera un solido di volume 16π. $\left[\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\right]$

Collegamenti **Problemi di massimo e minimo riguardanti aree e volumi**

382 Data la parabola di equazione $y = ax^2 + (a^2 - 1)x - a$, determina per quali valori di a il segmento parabolico individuato dalla parabola e dall'asse x ha area minima. Determina infine l'area della regione finita di piano individuata dalle due parabole corrispondenti ai valori di a trovati. (*Suggerimento*: per esprimere l'area del segmento parabolico utilizza il teorema di Archimede.) $\left[a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \text{Area}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right]$

383 Determina per quale valore di $a > 0$ l'area della regione di piano limitata dall'asse x, dal grafico della funzione $y=x+\dfrac{1}{x}$ e dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = a + 2$ è minima. $\left[a=\sqrt{2}-1\right]$

384 Considera la parabola di equazione $y = (x + 2)(x - 4)$ e la retta di equazione $y = kx + 2$. Esprimi, in funzione di k, l'area $A(k)$ del segmento parabolico limitato dalla retta e dalla parabola. Per quale valore di k l'area di tale segmento parabolico è minima? [$k = -2$]

385 Considera la funzione $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ e la regione di piano limitata dal suo grafico, dall'asse x e dalle due rette di equazioni $x = a$ e $x = a + 2$, con $a \ge 0$. Esprimi, in funzione di a, l'area $S(a)$ di tale regione di piano e determina per quale valore di a si ottiene la regione di piano di area massima. $\left[S(a)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a^2+4a+5}{a^2+1};\ a=\sqrt{2}-1\right]$

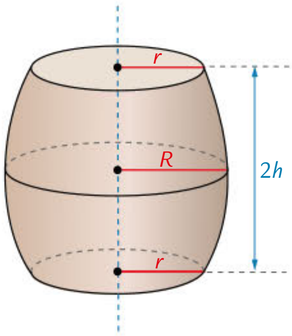
386 Considera la funzione $y = e^{-x}$ e la regione di piano limitata dal suo grafico, dall'asse x e dalle due rette di equazioni $x = a$ e $x = 2a$, con $a \ge 0$. Esprimi, in funzione di a, il volume $V(a)$ del solido che si ottiene ruotando tale regione di piano di 360° intorno all'asse x. Per quale valore di a si ottiene il solido di volume massimo? $\left[V(a)=\dfrac{\pi}{2}(e^{-2a}-e^{-4a});\ a=\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$

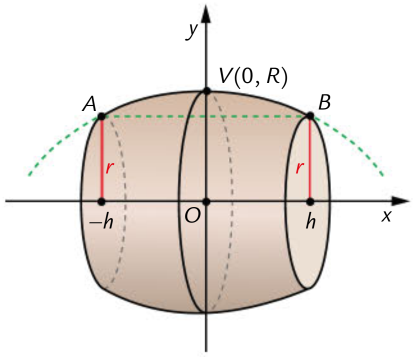
387 **Matematica e storia** Alcuni pionieri dell'analisi matematica, come Keplero e Newton, cercarono delle soluzioni a un problema antichissimo, di cui si era occupato già Archimede: il problema del calcolo del volume di una botte di vino. Keplero, in particolare, se ne occupò nell'opera *Nova stereometria doliorum* del 1615. Supponiamo che la botte abbia altezza $2h$, che sia delimitata inferiormente e superiormente da cerchi di raggio r e che la sezione mediana della botte sia un cerchio di raggio R. Tra le varie soluzioni proposte per il calcolo del volume, una si basa sul seguente modello geometrico: assunto un sistema di riferimento come quello nella figura qui sotto a destra, si considera la parabola che ha vertice in $V(0, R)$ e che passa per i punti $A(-h, r)$ e $B(h, r)$ e si immagina la botte come generata da una rotazione completa intorno all'asse x della regione di piano limitata dalla parabola, dall'asse x e dalle rette $x = -h$ e $x = h$.

a. Determina l'equazione della parabola.

b. Verifica che il volume della botte è espresso dalla formula: $V = \dfrac{2\pi h}{15}(3r^2 + 4rR + 8R^2)$.

c. Supposto $r = 30$ cm, $R = 40$ cm, $h = 0{,}5$ m, quanti litri di vino può contenere approssimativamente la botte?





[**a.** $y = \dfrac{r-R}{h^2}x^2 + R$; **c.** circa 425,2 litri]

6. Applicazioni del concetto di integrale definito alle scienze e alla tecnica

Teoria p. 148

Problemi relativi al moto

388 In un moto rettilineo la velocità di un punto materiale, in metri al secondo, è espressa in funzione del tempo dalla legge $v(t) = t^2 + 2t + 3$. Determina lo spazio percorso nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti $t_1 = 1$ s e $t_2 = 4$ s. [45 m]

389 Un punto materiale che all'istante $t = 0$ s si trova nell'origine del sistema di riferimento si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità $v = 3 + 2t$ per ogni $t \geq 0$, con il tempo misurato in secondi e lo spazio in metri. Calcola con gli strumenti dell'analisi matematica la distanza percorsa dal punto materiale nei primi 5 s. [$s = 40$ m]

390 Un punto materiale che all'istante $t = 0$ s si trova nell'origine del sistema di riferimento si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $a = -1{,}5$ m/s^2. Determina l'espressione della velocità istantanea, sapendo che all'istante $t = 4$ s la velocità è $v = 15$ m/s. Calcola inoltre, sempre con gli strumenti dell'analisi matematica, la distanza percorsa dal punto materiale nei primi 5 s. [$v = 21 - 1{,}5t$; $s = 86{,}3$ m]

391 Un punto materiale si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $a = 8$ m/s^2. All'istante $t = 0$ s il punto materiale si trova a 3 m dall'origine del sistema di riferimento nel verso positivo e ha velocità iniziale $v_0 = 7$ m/s. Determina, con gli strumenti dell'analisi matematica, l'espressione della legge del moto e rappresenta graficamente le tre leggi che danno rispettivamente la velocità, l'accelerazione e la posizione del punto materiale. [$s = 4t^2 + 7t + 3$]

392 In un moto rettilineo l'accelerazione di un punto materiale, in metri al secondo quadrato, è espressa in funzione del tempo dalla legge $a(t) = t^2 - 2t + 3$. Determina la velocità dopo 9 secondi dall'istante iniziale $t_0 = 0$ s, sapendo che nell'istante iniziale è $v_0 = 5$ m/s. [194 m/s]

393 Sapendo che la legge con cui varia nel tempo la velocità di un punto materiale P che si muove su una retta è $v(t) = (t + 1)e^{-t}$, determina la legge oraria, sapendo che nell'istante $t = 1$ s il punto ha percorso 1 m. [$s(t) = 1 + 3e^{-1} - e^{-t}(t + 2)$]

394 Un oggetto, con velocità iniziale nulla, accelera con accelerazione costante uguale a 10 m/s^2. Trova il valore medio della velocità nei primi 12 s. [60 m/s]

395 Un punto materiale si muove lungo una retta con velocità espressa dalla legge $v(t) = t^2 - 5t + 4$ (misurata in metri al secondo). Determina:

a. lo spostamento del punto nell'intervallo di tempo compreso tra 0 e 6 s;

b. lo spazio complessivamente percorso dal punto nell'intervallo di tempo compreso tra 0 e 6 s. [**a.** 6 m; **b.** 15 m]

396 Una particella, lasciata libera in un campo di forze che la respinge, è soggetta a un'accelerazione che varia nel tempo con legge $a(t) = \frac{\lambda}{(\tau + t)^2}$, con $\lambda = 10$ m e $\tau = 2$ s. Supponendo che inizialmente la particella sia ferma, quanto varrà la sua velocità v dopo 10 s? Quale distanza ha percorso la particella nei primi 10 s? [$v \simeq 4{,}2$ m/γ; circa 32 m]

397 **Realtà e modelli** **Tempo di frenata.** Un particolare sistema frenante montato su di un veicolo sperimentale consente di diminuire la velocità secondo una legge del tipo $v(t) = v_0(1 - kt^3)$, dove v_0 è la velocità iniziale e k una costante ($k = 10^{-3}$ s^{-3}). Durante una prova su strada il veicolo viene portato alla velocità di 30 m/s, dopodiché si mette in azione il freno. Calcola lo spazio Δs di frenata. [Il tempo di arresto è $t = 10$ s, per cui $\Delta s = 225$ m]

Problemi relativi a lavoro ed energia

398 Un punto materiale si muove su una retta, su cui è stato fissato un sistema di ascisse, a causa di una forza la cui intensità (in newton) è legata all'ascissa x (in m) del punto dalla legge $F(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$. Determina il lavoro compiuto dalla forza quando il punto si sposta dall'origine al punto di ascissa 8 m. [2,4 J]

399 Calcola il lavoro necessario per allungare una molla, di costante elastica uguale a 800 N/m, da 10 a 15 cm. [5 J]

400 La distanza tra due sfere di masse, rispettivamente, m ed M (in kilogrammi) è r_1 (in metri). Ricordando che tra le due masse agisce la forza di gravitazione $\vec{F}$, di intensità $F = G\frac{Mm}{r^2}$, dove $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, verifica che il lavoro (in joule) necessario per allontanare le due sfere, in modo da portarle a una distanza $r_2 > r_1$, è uguale a $GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

401 Una forza applicata a una molla di costante elastica $k = 25$ N/m la allunga di 10 cm. Calcola il lavoro fatto dalla forza per allungare la molla. [0,125 J]

Matematica e chimica

402 Una trasformazione isoterma alla temperatura di 323 K fa passare 2 moli di gas perfetto dal volume iniziale $V_i = 10$ dm^3 al volume finale $V_f = 15$ dm^3. Calcola il lavoro L compiuto dal gas durante la trasformazione.

$$\left[L = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = 5371 \cdot \ln 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{J}\right]$$

403 Tre moli di gas perfetto subiscono un'espansione isoterma alla temperatura di 300 K, passando da un volume iniziale di 2 litri a un volume finale di 5 litri. Calcola il lavoro che tale sistema compie sull'ambiente esterno durante la trasformazione.

$$\left[L = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \simeq 6{,}8 \cdot 10^3\,\text{J}\right]$$

404 Il calore specifico molare a volume costante di un gas è dato dall'espressione:

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V = A + BT + CT^2$$

dove U è l'energia interna, T la temperatura assoluta, A, B e C tre costanti che valgono rispettivamente 29 J/K, $8 \cdot 10^{-4}$ J/K^2 e $1{,}7 \cdot 10^{-6}$ J/K^3.

Calcola la variazione di energia interna di una mole di gas per una trasformazione a volume costante in cui la temperatura passa da 100 K a 200 K. [$\Delta U \simeq 2916$ J]

405 Il calore specifico molare (in cal/(K·mol)) a pressione costante di un certo gas è dato dall'espressione $C_p = 8 + 7 \cdot 10^{-4} T + 5 \cdot 10^{-6} T^2$, dove T è la temperatura assoluta. Considera una mole di tale gas; calcola la quantità di calore che occorre somministrare al gas affinché esso, a pressione costante, passi dalla temperatura di 300 K alla temperatura di 400 K. [886,17 cal/mol]

Problemi relativi a correnti, campi elettrici e campi magnetici

Matematica ed elettronica

406 In un circuito l'intensità i di corrente, misurata in ampere, è espressa in funzione del tempo t, misurato in secondi, dalla relazione $i(t) = 1 - e^{-2t}$. Calcola la quantità di carica che attraversa una sezione del circuito nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti $t_1 = 1$ s e $t_2 = 4$ s. [Circa 2,93 C]

407 In un circuito l'intensità i di corrente, misurata in ampere, è espressa in funzione del tempo t, misurato in secondi, dalla relazione $i(t) = 2 + 0{,}5t$. Calcola la quantità di carica che attraversa una sezione del circuito nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti $t_1 = 2$ s e $t_2 = 6$ s. [16 C]

408 Calcola la quantità di carica elettrica che attraversa la sezione di un circuito elettrico tra gli istanti di tempo $t_1 = 2$ s e $t_2 = 3$ s se la corrente che scorre nel circuito (misurata in ampere) varia nel tempo con la legge:

$$i = 6t^2 + 4t + 1$$ [$q = 49$ C]

409 Una lampada ha una resistenza $R = 500\ \Omega$. Essa è alimentata da una tensione che varia secondo la legge $V = V_0 \sin(2\pi f t)$, dove $V_0 = 325$ V ed $f = 50$ Hz. La potenza consumata (in joule al secondo) è $P = \frac{V^2}{R}$. Se la lampada resta accesa 4 ore, qual è l'energia (in joule) che consuma complessivamente? [Circa $1{,}52 \cdot 10^6$ J]

410 Determina l'energia dissipata per effetto Joule in un circuito di resistenza $R = 8\ \Omega$, percorso da una corrente alternata i la cui intensità, misurata in ampere, è $i(t) = 80 \sin 300\pi t$ nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t_0 = 0$ s a $t_1 = \frac{1}{10}$ s. [2560 J]

411 La f.e.m. indotta in un circuito elettrico (misurata in volt) varia nel tempo secondo la legge f.e.m. $= -3e^{2t}$. Determina la variazione $\Delta\Phi(\vec{B})$ del flusso del campo magnetico tra gli istanti $t_1 = 1$ s e $t_2 = 3$ s.

$$\left[\Delta\Phi(\vec{B}) = \frac{3}{2}(e^6 - e^2)\ \text{Wb}\right]$$

412 Calcola il valore medio dell'intensità di una corrente alternata i, espressa in funzione del tempo dalla legge $i(t) = k \sin \omega t$, in un intervallo di tempo uguale alla prima metà del suo periodo. $\left[\frac{2k}{\pi}\right]$

413 In un circuito, alimentato da un generatore che eroga una tensione $V = 100$ V, è presente una resistenza che viene fatta aumentare nel tempo con una legge lineare del tipo $R(t) = R_0 + kt$, dove $R_0 = 100\ \Omega$ e $k = 0{,}1\ \Omega$/s. Calcola la carica Q che attraversa una sezione del circuito nei primi 3 minuti di passaggio della corrente. [$Q \simeq 165{,}5$ C]

414 Un circuito è alimentato da un generatore che eroga una tensione vaiabile nel tempo secondo la legge $V(t) = V_0 e^{kt}$, dove $V_0 = 10$ V e $k = 0{,}01\ \text{s}^{-1}$. Assumendo che la resistenza del circuito sia $R = 50\ \Omega$, calcola l'energia E dissipata dalla corrente nei primi 10 minuti. [$E \simeq 8 \cdot 10^4$ J]

---

415 Una sfera liquida di raggio $R = 0{,}5$ m è carica in modo uniforme con carica positiva pari a $Q = 10^{-3}$ C. Al suo interno è presente una carica puntiforme $q = 10^{-6}$ C, anch'essa positiva, che si muove da un punto distante 20 cm dal centro a un punto distante 40 cm. Calcola il lavoro compiuto dalla forza elettrica.
(*Suggerimento*: ricorda che il campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica all'interno della sfera è $E = k_0 \frac{Q}{R^3} r$.) [$L \simeq 4{,}3$ J]

416 Data una sfera di raggio $R = 20$ cm, inizialmente recante una carica positiva $q_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ C, calcola il lavoro L necessario per portare su di essa un'ulteriore carica di $3 \cdot 10^{-5}$ C.
(*Suggerimento*: ricorda che il potenziale di una sfera carica è pari a $V = k_0 \frac{q}{R}$.) [$L = 4725$ J]

417 Una carica $q_1 = +2$ C è posta nel vuoto inizialmente a una distanza $d_1 = 50$ cm da una carica $q_2 = +4$ C fissa nell'origine del sistema di riferimento. Determina il lavoro che la forza elettrostatica deve fare per spostare la carica q_1 dalla distanza iniziale $d_1 = 50$ cm alla distanza $d_2 = 100$ cm lungo la retta congiungente le due cariche. [$71{,}9 \cdot 10^9$ J]

Problemi relativi al calcolo di masse e baricentri

418 La densità lineare (misurata in kilogrammi per metro) di una sbarra lunga 4 m è espressa dalla funzione $\rho(x) = 5 + 6\sqrt{x}$, essendo x la distanza in metri da uno dei due estremi della sbarra. Calcola la massa totale della sbarra. [52 kg]

419 La densità lineare (misurata in kilogrammi per metro) di una sbarra lunga 3 m è espressa dalla funzione $\rho(x) = \frac{12}{(x+1)^2}$, essendo x la distanza in metri da uno dei due estremi della sbarra. Calcola la massa totale della sbarra. [9 kg]

Si dimostra che il baricentro G della parte di piano cartesiano limitata dall'asse x e dal grafico di una funzione positiva di equazione $y = f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ è il punto di coordinate:

$$x_G = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)dx \qquad y_G = \frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

essendo A l'area del trapezoide limitato dal grafico della funzione f nell'intervallo $[a, b]$. Tenendo conto di queste formule e del fatto che, se una regione di piano ammette un asse di simmetria, il baricentro giace su tale asse, risolvi i seguenti problemi.

420 Determina il baricentro del triangolo di vertici $A(0, 6)$, $B \equiv O(0, 0)$ e $C(3, 0)$. Ritrova poi il risultato con le note formule di geometria analitica per il calcolo del baricentro di un triangolo. [(1, 2)]

421 Determina il baricentro del triangolo di vertici $A(0, 4)$, $B = O(0, 0)$ e $C(6, 0)$. Ritrova poi il risultato con le note formule di geometria analitica per il calcolo del baricentro di un triangolo. $\left[\left(2, \frac{4}{3}\right)\right]$

422 Determina il baricentro del semicerchio limitato dalla semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{4 - x^2}$. $\left[\left(0, \frac{8}{3\pi}\right)\right]$

423 Determina il baricentro del semicerchio limitato dalla semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{9 - x^2}$. $\left[\left(0, \frac{4}{\pi}\right)\right]$

424 Determina il baricentro del trapezoide limitato dal grafico della funzione $y = \frac{4}{x}$ e dall'asse x nell'intervallo $[1, 4]$. $\left[\left(\frac{3}{2\ln 2}, \frac{3}{4\ln 2}\right)\right]$

425 Determina il baricentro del trapezoide limitato dal grafico della funzione $y = \frac{6}{x}$ e dall'asse x nell'intervallo $[2, 6]$. $\left[\left(\frac{4}{\ln 3}, \frac{1}{\ln 3}\right)\right]$

426 Determina il baricentro del segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione $y = 4 - x^2$ e dall'asse x. $\left[\left(0, \frac{8}{5}\right)\right]$

427 Determina il baricentro del segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione $y = 1 - x^2$ e dall'asse x. $\left[\left(0, \frac{2}{5}\right)\right]$

7. Funzioni integrabili e integrali impropri

Teoria p. 151

Esercizi introduttivi

Test

428 Quale dei seguenti integrali è improprio?

A $\int_0^1 \frac{1}{2x+1}dx$ B $\int_1^2 \ln x\, dx$ C $\int_0^1 \frac{1}{2x-1}dx$ D $\int_0^1 \frac{x}{e^x}dx$

429 Quale dei seguenti integrali **non** è improprio?

A $\int_0^1 \frac{1}{\ln x}dx$ B $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ C $\int_1^2 \frac{1}{\ln x}dx$ D $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx$

430 Quale dei seguenti integrali converge?

A $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ B $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ C $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ D $\int_0^1 \frac{1}{x^3}dx$

431 Quale dei seguenti integrali converge?

A $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ B $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ C $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ D $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$

432 **Vero o falso?**

Siano f e g due funzioni positive e continue in $[a, +\infty)$.

a. se $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty)$ e $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge V F

b. se $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty)$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge V F

c. se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]\,dx$ converge V F

d. se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, allora anche $\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]\,dx$ diverge V F

e. se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, allora anche $\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]\,dx$ diverge V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

433 **E se?** Secondo Giovanni, il valore dell'integrale $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,dx$ è 0, essendo la funzione integranda dispari e l'intervallo d'integrazione simmetrico rispetto all'origine. Secondo Monica, invece, l'integrale dato è improprio e non convergente. Uno dei due è in errore: chi? Spiega.

▶ Cambierebbe la risposta se la funzione integranda fosse $\frac{x}{4-x^2}$?

Calcolo di integrali impropri

434 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti integrali, se convergenti:

a. $\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ **b.** $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

a. Osserva che la funzione integranda è continua in $(0, 1]$ ma presenta un asintoto verticale per $x = 0$, poiché $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = +\infty$. Pertanto:

$$\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_t^1 = \ldots\ldots$$

Troverai che l'integrale dato diverge.

b. Si tratta di un integrale su un intervallo illimitato. Osservato che la funzione integranda è continua in $[e, +\infty)$, possiamo scrivere:

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_e^t \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_e^t \frac{1}{x}(\ln x)^{-3}\,dx = \lim_{t\to+\infty} [\ldots\ldots]_e^t = \ldots\ldots$$

Se svolgi correttamente i calcoli, troverai che il valore dell'integrale è $\frac{1}{2}$.

Calcola i seguenti integrali, se convergenti.

435 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ [Diverge]

436 $\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$ $\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\right]$

437 $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

438 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

439 $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ [ln 2]

440 $\int_0^3 \frac{1}{x^2-9}\,dx$ [Diverge]

441 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

442 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln 3\right]$

443 $\int_0^{+\infty} (x-2)e^{-x}\,dx$ [−1]

444 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4}\,dx$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

445 $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

446 $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$ $[2\sqrt{2}]$

447 $\int_{-1}^0 \ln(x+1)\,dx$ $[-1]$

448 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

449 $\int_0^1 \ln x\,dx$ $[-1]$

450 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ [Diverge]

451 $\int_0^1 \frac{1+x^3}{x}\,dx$ [Diverge]

452 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ $[1]$

453 $\int_0^1 \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$ [Diverge]

454 $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ $[e^{-1}]$

455 $\int_0^1 x^2 \ln x\,dx$ $\left[-\frac{1}{9}\right]$

456 $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$ [Diverge]

457 $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x\,dx$ $[2]$

458 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$ $[\ln 2]$

459 $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$ $[2]$

460 $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ $[\sqrt{3}]$

461 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ [Diverge]

462 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$ [Diverge]

463 $\int_0^{e^3} \ln x^2\,dx$ $[4e^3]$

464 $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ $\left[-\frac{\pi}{4}\right]$

465 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(2+x)}\,dx$ $\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right]$

466 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ $\left[\frac{3}{32}\pi^2\right]$

467 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{3}\right]$

468 $\int_0^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ $[2\ln 3]$

469 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

470 $\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

471 $\int_{-\infty}^0 \cos x\, e^x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

472 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

473 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ $[\pi]$

474 $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{|4-x^2|}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$

---

475 Determina per quale valore di a risulta:

$\int_{-1}^a \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 4$ $[a=3]$

476 Determina per quali valori di a risulta:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi$ $\left[a=\pm\frac{1}{2}\right]$

---

477 Stabilisci per quali valori del parametro reale α l'integrale $\int_0^1 x^\alpha \ln x\,dx$ converge e, per tali valori di α, calcola l'integrale. $\left[\alpha>-1,\ -\frac{1}{(\alpha+1)^2}\right]$

478 Stabilisci per quali valori del parametro reale α l'integrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,dx$ converge e, per tali valori di α, calcola l'integrale. $\left[\alpha>1;\ \frac{1}{\alpha-1}\right]$

479 Determina per quale valore di k l'integrale $\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{k}{2x+1}\right)dx$ converge. In corrispondenza di questo valore di k, calcola l'integrale. $[k=2;\ -\ln 2]$

480 Determina per quale valore di k l'integrale $\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{2x^2+1}-\frac{k}{x+4}\right)dx$ converge. In corrispondenza di questo valore di k, calcola l'integrale. $\left[k=\frac{1}{2};\ \frac{5}{4}\ln 2\right]$

Criteri di convergenza

481 ESERCIZIO SVOLTO

Studiamo la convergenza dei seguenti integrali:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x^2}\,dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3+\sin x}{x}\,dx$

a. La funzione integranda è continua in $[1, +\infty)$. Poiché $e^{-x} \le 1$ per ogni $x \ge 0$, sarà $1 + e^{-x} \le 2$ per ogni $x \ge 0$. Ne segue che:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x^2}\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$$

Poiché $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ converge, per i teoremi del confronto sugli integrali impropri converge anche l'integrale di partenza.

b. Osserviamo che la funzione integranda presenta un asintoto verticale per $x = 0$. Poiché $\sin x \ge -1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, ne segue che $3 + \sin x \ge 2$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Ma allora:

$$\int_0^1 \frac{3+\sin x}{x}\,dx \ge \int_0^1 \frac{2}{x}\,dx$$

Poiché $\displaystyle\int_x^1 \frac{2}{x}\,dx$ diverge, per i teoremi del confronto sugli integrali impropri diverge anche l'integrale di partenza.

Argomentare e dimostrare

482 Dimostra, applicando i criteri di integrabilità per gli integrali impropri, che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3+e^{-x}}{x}\,dx$ diverge.

483 Dimostra, applicando i criteri di integrabilità per gli integrali impropri, che $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ converge.

484 Dimostra, applicando i criteri di integrabilità per gli integrali impropri, che $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{x^2}\,dx$ diverge.

485 Dimostra, applicando i criteri di integrabilità per gli integrali impropri, che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^4+1}\,dx$ converge e che risulta $\displaystyle\frac{\pi}{12} \le \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^4+1}\,dx \le \frac{\pi}{6}$.

486 **E se?** Dimostra, applicando i criteri di integrabilità per gli integrali impropri, che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4-3\cos x}{x}\,dx$ diverge.

▸ Cambierebbe la risposta se il denominatore, invece di essere x, fosse $\sqrt{x}$? E se fosse x^2?

487 Dimostra, applicando i criteri di integrabilità per gli integrali impropri, che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4-3\sin^2 x}{x^3}\,dx$ converge e che risulta $\displaystyle\frac{1}{2} \le \int_1^{+\infty} \frac{4-3\sin^2 x}{x^3}\,dx \le 2$.

Applicazioni al calcolo di aree e volumi

488 Determina l'area della regione di piano limitata dall'asse x, dalla retta $x = \frac{1}{2}$ e dal grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2}$ per $x \ge \frac{1}{2}$. [2]

489 Stabilisci se l'area della regione di piano contenuta nel primo quadrante, limitata dal grafico della funzione $y = \dfrac{x}{x^2+4}$ e dall'asse x, è finita o infinita. [Infinita]

490 Considera la regione dei punti del piano le cui coordinate (x, y) soddisfano il sistema: $\begin{cases} x \ge 0 \\ 0 \le y \le e^{-x} \end{cases}$
a. Determina la sua area.
b. Determina il volume del solido ottenuto da una sua rotazione completa intorno all'asse x. $\left[\text{a. } 1; \text{ b. } \frac{\pi}{2}\right]$

491 Considera la regione dei punti del piano le cui coordinate (x, y) soddisfano il sistema: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$
a. Determina la sua area.
b. Verifica che il volume del solido ottenuto da una sua rotazione completa intorno all'asse x è infinito. [a. 2]

492 Determina a e b in modo che la funzione:

$$y = \begin{cases} -x^2 + ax + b & x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in **R**. Traccia quindi il grafico della funzione e determina l'area della regione del primo quadrante limitata dal suo grafico, dall'asse x e dall'asse y. $\left[a = 0,\ b = 2;\ \text{Area} = \dfrac{8}{3}\right]$

493 Determina a e b, con $a > 0$, in modo che il grafico della funzione $y = \left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2}\right)^2$ intersechi l'asse x nel punto di coordinate $(2, 0)$ e l'area della regione di piano limitata dalla parte di esso con $x \geq 2$ e dall'asse x sia uguale a $\dfrac{3}{2}$. Traccia quindi il grafico della funzione in corrispondenza dei valori di a e b trovati.
[$a = 3$, $b = -6$; la funzione corrispondente a questi valori di a e b ha come asintoti $x = 0$ e $y = 0$, un minimo per $x = 2$ e un massimo per $x = 4$]

494 Traccia il grafico della funzione $y = xe^{1-x^2}$ e determina l'area della regione di piano limitata dal suo grafico e dall'asse x. [Area $= e$]

495 Determina l'area della regione di piano contenuta nel terzo quadrante limitata dal grafico della funzione $y = \ln(x + 1)$, dall'asse x e dalla retta che è asintoto verticale per la funzione. [1]

496 Determina l'area della regione dei punti del piano le cui coordinate (x, y) soddisfano il sistema: $\begin{cases} y \leq 1 \\ y \geq |e^x - 1| \end{cases}$ [$2 \ln 2$]

497 Dopo avere tracciato il grafico della funzione: $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}$

a. determina l'area della regione di piano limitata dal suo grafico, dall'asse x e dal suo asintoto;
b. verifica che il volume del solido ottenuto da una rotazione completa intorno all'asse x della regione di piano di cui al punto precedente è infinito.

(*Suggerimento*: per il calcolo dell'integrale può essere utile razionalizzare il numeratore.) [**a.** 2π]

498 Considera la regione illimitata di piano, contenuta nel primo quadrante, limitata dall'asse x e dal grafico della funzione $y = xe^{-x}$. Determina:

a. la sua area;
b. il volume del solido che si ottiene da una sua rotazione completa intorno all'asse x. $\left[\textbf{a.}\ 1;\ \textbf{b.}\ \dfrac{\pi}{4}\right]$

499 Considera la regione illimitata di piano, contenuta nel quarto quadrante, limitata dall'asse y, dall'asse x e dal grafico della funzione $y = \ln x$. Determina:

a. la sua area;
b. il volume del solido che si ottiene da una sua rotazione completa intorno all'asse x;
c. il volume del solido che si ottiene da una sua rotazione completa intorno all'asse y. $\left[\textbf{a.}\ 1;\ \textbf{b.}\ 2\pi;\ \textbf{c.}\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

500 **Matematica e fisica** Indichiamo con M, R, rispettivamente la massa e il raggio della Terra. La Terra esercita una forza gravitazionale di intensità $F(r) = \dfrac{GMm}{r^2}$ su un oggetto di massa m, il cui baricentro è posto a una distanza r dal centro della terra (essendo G la costante di gravitazione universale).

a. Verifica che il lavoro L (in joule) necessario per portare un oggetto posto sulla superficie della Terra infinitamente lontano da essa è uguale a $\dfrac{GMm}{R}$.
b. Un oggetto di massa m, lanciato dalla superficie della Terra con velocità iniziale v_0, esce dal campo gravitazionale terrestre se la sua energia cinetica è almeno uguale al lavoro necessario per portare l'oggetto infinitamente lontano dalla Terra: tenendo conto di ciò e del risultato ottenuto al punto **a**, verifica che $v_0 \geq \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$.
c. Utilizzando i risultati ottenuti nei punti precedenti, calcola il lavoro necessario per portare un satellite di 1000 kg infinitamente lontano dalla Terra e la sua velocità di fuga dalla superficie terrestre (cioè la minima velocità con cui deve essere lanciato il satellite dalla Terra per uscire dal campo gravitazionale). [**c.** $L \simeq 6{,}26 \cdot 10^{10}$ J; $v_{\text{fuga}} \simeq 11{,}2$ km/s]

8. Integrazione numerica

Teoria p. 157

Esercizi introduttivi

501 **Vero o falso?**

a. il metodo delle parabole non può essere applicato se l'intervallo d'integrazione è suddiviso in un numero *dispari* di sottointervalli V F

b. la stima dell'errore commesso approssimando l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ con il metodo dei rettangoli è direttamente proporzionale all'ampiezza dell'intervallo $[a, b]$ V F

c. la stima dell'errore commesso approssimando l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ con il metodo dei trapezi è inversamente proporzionale al numero n di sottointervalli di $[a, b]$ V F

d. la formula studiata per stimare l'errore commesso con il metodo dei trapezi non è applicabile all'integrale $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

Argomentare e dimostrare

502 Sia $f(x)$ una funzione *dispari* e continua in $[-1, 1]$. Elisa ha notato che, qualunque sia il metodo (dei rettangoli, dei trapezi o delle parabole) scelto per approssimare l'integrale $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ e qualunque sia il numero n relativo alla suddivisione dell'intervallo, si ottiene sempre il valore *esatto* dell'integrale, cioè il numero 0. Elisa ha ragione? Come lo spieghi?

503 Sia $f(x)$ una qualsiasi funzione polinomiale di terzo grado e $[a, b]$ un qualsiasi intervallo. Giustamente Mirko afferma che, qualunque sia il numero n (pari) relativo alla suddivisione dell'intervallo $[a, b]$, il metodo delle parabole fornisce sempre il valore *esatto* dell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$. Come è giunto a tale conclusione?

504 Corinne afferma che è possibile applicare il metodo dei rettangoli per determinare valori approssimati dell'integrale $\int_0^1 e^x \sqrt[3]{x}\,dx$ ma che non è possibile avvalersi della formula studiata per stimare gli errori commessi. Spiega perché Corinne ha ragione.

Calcolo approssimato di integrali

Determina il valore approssimato dei seguenti integrali definiti, applicando il metodo dei rettangoli e suddividendo l'intervallo di integrazione in tre parti.

505 $\int_0^3 x^2\,dx$ $\left[\frac{35}{4}\right]$

506 $\int_0^6 e^{-x^2}\,dx$ $[2e^{-1} + 2e^{-9} + 2e^{-25}]$

507 $\int_0^\pi \sin x\,dx$ $\left[\frac{2\pi}{3}\right]$

508 $\int_2^4 \ln x\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\ln\frac{77}{3}\right]$

Determina il valore approssimato dei seguenti integrali definiti, applicando il metodo dei trapezi e suddividendo l'intervallo di integrazione in tre parti.

509 $\int_0^3 x^2\,dx$ $\left[\frac{19}{2}\right]$

510 $\int_0^6 e^{-x^2}\,dx$ $[2e^{-4} + 2e^{-16} + e^{-36} + 1]$

511 $\int_0^\pi \sin x\,dx$ $\left[\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right]$

512 $\int_2^4 \ln x\,dx$ $\left[\frac{11}{3}\ln 2 + \frac{2}{3}\ln\frac{5}{9}\right]$

Determina il valore approssimato dei seguenti integrali definiti, applicando il metodo delle parabole e suddividendo l'intervallo di integrazione in quattro parti.

513 $\int_0^3 x^2\,dx$ [9]

514 $\int_0^6 e^{-x^2}\,dx$ [Circa 0,711]

515 $\int_0^\pi \sin x\,dx$ $\left[\pi\left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

516 $\int_1^5 \ln x\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln 45 + 4\ln 2\right]$

Stima degli errori

517 ESERCIZIO GUIDATO

Determina n intero in modo che, suddividendo l'intervallo di integrazione in n parti e applicando il metodo dei trapezi, si ottenga un'approssimazione dell'integrale $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ con un errore minore o uguale a 10^{-3}.

- Considerata la funzione $f(x) = e^{-x^2}$, verifica che $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.
- Traccia un grafico probabile della funzione $|f''(x)|$ e verifica che risulta $|f''(x)| \leq 2$ per ogni $x \in [0, 2]$. Pertanto l'errore E che si commette approssimando l'integrale mediante il metodo dei trapezi con n suddivisioni, risulta:
  $$|E| \leq \frac{2(2-0)^3}{12n^2} \text{ ossia } |E| \leq \frac{4}{3n^2}$$
- Affinché sia $\frac{4}{3n^2} \leq 10^{-3}$ deve essere $n \geq$ ..... Il minimo valore di n che soddisfa quest'ultima disuguaglianza è $n = 37$.

518 Considera l'integrale $\int_0^1 \sin x^2\, dx$.

a. Sia $f(x) = \sin x^2$; verifica che $|f''(x)| \leq 6$ per ogni $x \in [0, 1]$.
b. Verifica che, applicando il metodo dei rettangoli all'integrale dato con n suddivisioni dell'intervallo di integrazione, si ottiene un'approssimazione dell'integrale con un errore minore o uguale a $\frac{1}{4n^2}$.
c. Determina per quali valori di n l'approssimazione di cui al punto precedente è affetta da un errore minore o uguale a un centesimo. [$n \geq 5$]

519 Considera l'integrale $\int_{-1}^1 \cos x^2\, dx$.

a. Deduci la seguente stima dell'errore nel metodo dei rettangoli (in funzione del numero n di sottointervalli):
$|E_R| \leq \frac{2}{n^2}$ (non è la miglior stima possibile, ma è sufficiente per lo scopo)
b. Trova il numero minimo n di sottointervalli che assicurano un errore minore di 10^{-3}. [b. $n = 45$]

520 Considera l'integrale $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx$.

a. Verifica che il suo valore *esatto* è $\frac{4-\pi}{2}$.
b. Posto $f(x) = \tan^2 x$, verifica che $f''(x) = 2(1+\tan^2 x)(1+3\tan^2 x)$ e deduci che $|f''(x)| \leq 16$ per ogni $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.
c. Calcola il valore approssimato dell'integrale applicando il metodo dei trapezi con $n = 4$ suddivisioni dell'intervallo.
d. Sfruttando il punto **b**, valuta l'errore (teorico) massimo di tale metodo, controllando che $|E_T| \leq \frac{\pi^3}{96}$.
e. Verifica infine che l'errore commesso rientra nella stima massima teorica prevista dal teorema studiato.

521 Si vuole calcolare, con il metodo delle parabole, l'integrale $\int_0^1 x^3\, dx$.

a. Sfruttando il teorema relativo alla valutazione dell'errore nel metodo delle parabole, spiega perché, qualunque sia il numero n (pari) di intervallini che suddividono $[0, 1]$, il metodo di Simpson fornisce sempre il valore *esatto* dell'integrale dato.
b. Verifica per via diretta la correttezza della precedente affermazione, nel caso $n = 4$.

522 Si vuole stimare l'integrale $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$.

a. Posto $f(x) = \frac{e^x}{x}$, verifica (con gli strumenti del calcolo differenziale) che $e \leq f(x) \leq \frac{e^2}{2}$ per ogni $x \in [1, 2]$ e deduci che $e \leq \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{e^2}{2}$.
b. Verifica che $f''(x) = \frac{e^x}{x^3}(x^2 - 2x + 2)$ e deduci che $|f''(x)| \leq 2e^2$ per ogni $x \in [1, 2]$ (non si tratta della migliore stima possibile, ma è sufficiente per i nostri scopi).
c. Verifica che l'errore commesso nell'approssimare l'integrale dato con il metodo dei rettangoli relativo a $n = 100$ suddivisioni dell'intervallo è minore di 10^{-4}.

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

Test

523 A che cosa è uguale $\int_4^8 \frac{1}{x}\,dx$?

A $\ln 2$ C $\ln 6$

B $\ln 4$ D Nessuna delle altre risposte

524 Ricordando il significato geometrico di integrale, puoi dire che $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ è uguale a:

A $\frac{\pi}{2}$ C $\frac{3\pi}{2}$

B π D nessuna delle altre risposte

525 Se $0 \le f(x) \le 5$ allora è certamente vero che:

A $0 \le \int_1^3 f(x)\,dx \le 7$ C $0 \le \int_1^3 f(x)\,dx \le 9$

B $0 \le \int_1^3 f(x)\,dx \le 8$ D $0 \le \int_1^3 f(x)\,dx \le 10$

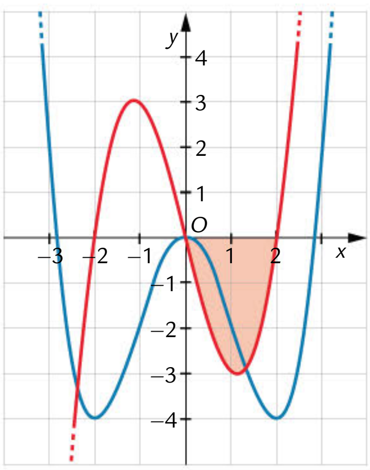
526 Nella figura sono rappresentati il grafico di una funzione e quello di una sua primitiva. Il grafico della funzione colorata in rosso passa per l'origine e per i punti di coordinate $(\pm 2, 0)$; il grafico della funzione colorata in blu passa per l'origine e per i punti di coordinate $(\pm 2, -4)$. Che cosa si può dire dell'area della regione colorata in rosso?

A È uguale a 3,5

B È uguale a 4

C È uguale a 4,5

D Per stabilirlo, occorre conoscere le espressioni analitiche delle due funzioni



527 Quale dei seguenti integrali dà come risultato un numero negativo?

A $\int_0^1 (e^x - 1)\,dx$ C $\int_1^2 (x^2 - 1)\,dx$

B $\int_1^2 (\ln x - 1)\,dx$ D $\int_0^1 (1 - x^3)\,dx$

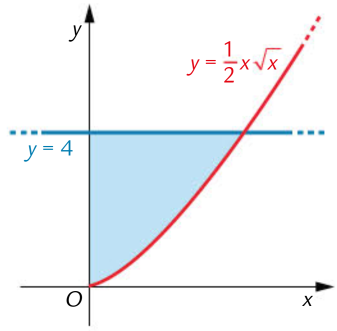
528 L'area della regione rappresenta nella figura vale:

A 9,2

B 9,4

C 9,6

D 9,8



529 Quanto vale il volume del solido che si ottiene ruotando di un giro completo intorno all'asse x la regione di piano rappresentata nella figura dell'Esercizio 528?

A 46π C 50π

B 48π D Nessuna delle altre risposte

530 Data la funzione $f(x) = x(1-x)$, il suo valore medio m nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e il punto $x = c$ in cui essa assume valore uguale al valor medio sono:

A $m = \frac{1}{24}, c = \frac{6+\sqrt{30}}{12}$

B $m = \frac{1}{24}, c = \frac{6-\sqrt{30}}{12}$

C $m = \frac{1}{6}, c = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

D $m = \frac{1}{6}, c = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

531 L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos(\omega t + \varphi)\,dt$ è uguale a zero se e solo se:

A $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ C $\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$

B $\varphi = k\pi$ D $\omega = k\pi$

532 Una popolazione di batteri cresce a una velocità (in unità/giorno) espressa dalla funzione:

$$v(t) = \frac{100}{1 + 0{,}25t}$$

dove t è il tempo, espresso in giorni, e $t = 0$ è l'istante di inizio dell'osservazione. Di quante unità cresce la popolazione nei primi 4 giorni?

A Di circa 184 unità

B Di circa 277 unità

C Di circa 352 unità

D I dati non sono sufficienti per stabilirlo

533 Data la funzione $f(x)=(x+1)e^{-x}$, che cosa possiamo dire dell'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$?

A Diverge a $+\infty$ B Diverge a $-\infty$ C Converge a 0 D Converge a 2

534 Data la funzione $f(x)=\int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$, qual è l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa 1?

A Non è possibile calcolare l'integrale con tecniche elementari, per cui non si può trovare l'equazione della retta tangente

B La retta tangente ha equazione $y=2e(x-1)$

C La retta tangente ha equazione $y=e(x-1)$

D La retta tangente ha equazione $y=2e(x-1)+1$

A mente

Calcola il valore dei seguenti integrali.

535 $\int_0^1 x^4\,dx$

536 $\int_{-9}^9 x\sin x^2\,dx$

537 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

538 $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

539 $\int_{-2}^7 (\sin^2 3x+\cos^2 3x)\,dx$

540 $\int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2}\,dx$

541 $\int_{-8}^8 \frac{x}{x^4+1}\,dx$

542 $\int_1^2 \frac{3^{2x+1}\cdot 3^{-2x-1}}{x}\,dx$

Calcola i seguenti integrali definiti.

543 $\int_1^2 \frac{x^3+x+1}{x^2}\,dx$ $[2+\ln 2]$

544 $\int_{-1}^1 \frac{x^3+x^2}{x^2+1}\,dx$ $\left[2-\frac{\pi}{2}\right]$

545 $\int_0^1 (x-1)^2(x+1)\,dx$ $\left[\frac{5}{12}\right]$

546 $\int_1^4 \frac{(2x-1)^2}{x}\,dx$ $[2\ln 2+18]$

547 $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x^2}\,dx$ $\left[\frac{3}{2}-2\ln 2\right]$

548 $\int_0^1 \sqrt{x}\,(x-1)^2\,dx$ $\left[\frac{16}{105}\right]$

549 $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

550 $\int_1^2 \frac{\ln x^2}{x}\,dx$ $[9]$

551 $\int_{-6}^0 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ $[6-2\sqrt{3}]$

552 $\int_1^2 \frac{1}{x^2-9}\,dx$ $\left[-\frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}\right]$

553 $\int_0^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{25x^2+9}$ $\left[\frac{\pi}{60}\right]$

554 $\int_{-1}^4 \frac{x+4}{x^2+4}\,dx$ $[\pi+\ln 2]$

555 $\int_0^1 xe^{1-2x}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}(e-3e^{-1})\right]$

556 $\int_1^9 \frac{x}{\sqrt{10-x}}\,dx$ $\left[\frac{68}{3}\right]$

557 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin 2x+\cos x)\,dx$ $[0]$

558 $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx$ $[9]$

559 $\int_3^4 x\sqrt{x-3}\,dx$ $\left[\frac{12}{5}\right]$

560 $\int_0^{\ln 2} e^x(e^x-1)^2\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

561 $\int_e^{e^2} \ln x\,dx$ $[e^2]$

562 $\int_0^2 \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}\,dx$ $[2-3\ln 3]$

563 $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

564 $\int_{-2}^1 f(x)\,dx$, dove $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ e^{2x} & x>0 \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2}(e^2-1)\right]$

565 $\int_1^4 f(x)\,dx$, dove $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x} & 0<x<2 \\ \frac{4}{x^2} & x\ge 2 \end{cases}$ $[2\ln 2+1]$

566 $\int_{-2}^2 |x^2-3x-4|\,dx$ $\left[\frac{49}{3}\right]$

567 $\int_{-2}^4 |x^2-2x-3|\,dx$ $\left[\frac{46}{3}\right]$

Calcola i seguenti integrali generalizzati.

568 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ $[\pi]$

569 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \sqrt[3]{e^x}\,dx$ $[3]$

570 $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ [Diverge]

571 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-2x^2}\,dx$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

572 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln 5\right]$

573 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{\pi}{2x}\,dx$ $\left[\frac{2}{\pi}\right]$

574 $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x^3\,dx$ $[-3]$

575 $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ $[2(1-e^{-2})]$

576 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^3e^{-x^4}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

577 $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-8x+16}}\,dx$ $[3]$

578 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x}\,dx$ [Diverge]

579 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx$ $[\ln 2]$

---

580 Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$ e pari, tale che: $\int_1^3 f(x)dx = 4$ e $\int_{-3}^1 f(x)dx = 7$

Quanto vale $\int_0^1 f(x)\,dx$? $\left[\frac{3}{2}\right]$

581 Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$ e dispari, tale che: $\int_2^8 f(x)dx = 14$ e $\int_2^6 f(x)dx = 5$

Quanto vale $\int_{-6}^8 f(x)\,dx$? $[9]$

582 Sia f una funzione con le seguenti proprietà:

a. $f''(x) = -12x$ **b.** $f'(-1) = -3$ **c.** $\int_{-1}^2 f(x)\,dx = -18$

Determina l'espressione analitica della funzione f. $[f(x) = -2x^3 + 3x - 5]$

583 Sia f una funzione polinomiale con le seguenti proprietà:

a. $f''(x) = 24x - 6$ **b.** $f'(1) = 6$ **c.** $\int_1^2 f(x)\,dx = 10$

Determina l'espressione analitica della funzione f. $[f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2]$

584 Determina a e b in modo che risulti $\displaystyle\int_a^b e^{-2x}\,dx = \frac{3}{8}$ e $\displaystyle\int_0^{2b} e^{-2x}\,dx = \frac{15}{32}$. $[a = 0,\ b = \ln 2]$

585 Determina k in modo che risulti $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+k}{x^4}\,dx = 5$. $[k = 12]$

586 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{x}} & 0 < x < 4 \\ \dfrac{b}{(x-2)^2} & x \geq 4 \end{cases}$, determina a e b in modo che sia continua in tutto $\mathbb{R}$ e risulti:

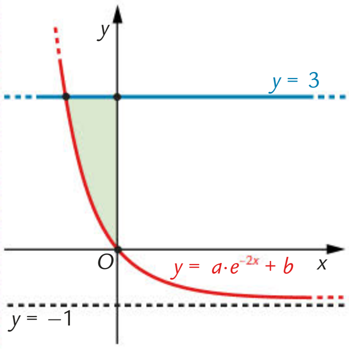
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 20$ $[a = 4,\ b = 8]$

587 Considera la funzione: $f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2x} (3t^2 - a)\,dt & x < 0 \\ e^x + 2x + b & x \geq 0 \end{cases}$. Determina a e b in modo che f sia derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

$\left[a = -\frac{3}{2},\ b = -1\right]$

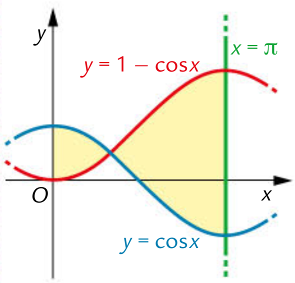
Interpretazione di grafici

588 La curva rappresentata in rosso in figura ha equazione del tipo $y = a \cdot e^{-2x} + b$ e il suo asintoto orizzontale è la retta tratteggiata. Individua i valori di a e di b, quindi calcola l'area della parte colorata.



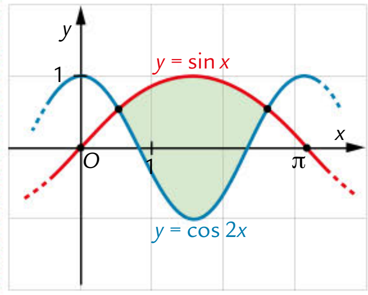
$\left[a = 1, b = -1, 4\ln 2 - \frac{3}{2}\right]$

589 Determina l'area della regione di piano colorata in figura.



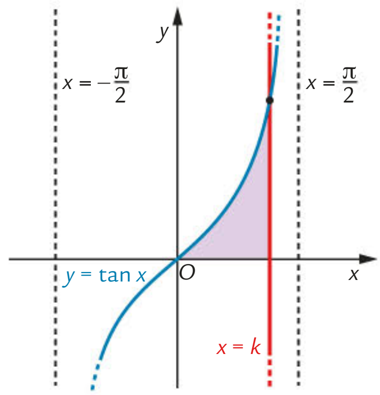
$\left[\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right]$

590 Determina l'area della regione di piano colorata in figura.



$\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

591 Per quale valore di k l'area della parte colorata è uguale a 1?



$\left[k = \arccos\left(\frac{1}{e}\right)\right]$

Problemi

592 Considera la parabola di equazione $y = ax^2 + 2x$.

a. Determina a in modo che sia concava e che l'area del segmento parabolico limitato da essa e dalla bisettrice del primo e del terzo quadrante sia $\frac{1}{6}$.

b. In corrispondenza del valore di a trovato, determina la corda del segmento parabolico parallela all'asse x di lunghezza massima.

[**a.** $a = -1$; **b.** la corda individuata dalla retta di equazione $y = \frac{3}{4}$]

593 Considera la funzione $y = x + a + \dfrac{b}{x+1}$.

a. Determina a e b in modo che abbia come asintoto obliquo la retta di equazione $y = x - 2$ e presenti un punto di massimo relativo per $x = -3$.

b. Traccia il grafico della funzione.

c. Sia $k > 0$. Determina l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione, dal suo asintoto obliquo, dall'asse y e dalla retta di equazione $x = k$.

d. Stabilisci per quale valore di k l'area di cui al punto precedente è uguale a 16.

[**a.** $a = -2$, $b = 4$; **b.** massimo in $(-3, -7)$, minimo in $(1, 1)$; **c.** $4\ln(k+1)$; **d.** $k = e^4 - 1$]

594 Considera la funzione $y = f(x) = \dfrac{1 + kx^2}{x^2}$.

a. Determina k in modo che abbia come asintoto orizzontale la retta $y = -1$.

In corrispondenza del valore di k trovato:

b. traccia il grafico della funzione ottenuta, indicando con A e B (con $x_A < x_B$) i suoi punti d'intersezione con l'asse x;

c. scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione f in A e B, indicando con C e D, rispettivamente, gli ulteriori punti che tali rette hanno in comune con il grafico di f;

d. determina l'area del quadrilatero mistilineo $ABCD$.

$\left[\textbf{a. } k = -1; \textbf{ b. } A(-1, 0), B(1, 0); \textbf{ c. } \text{tangente in } A\text{: } y = 2x + 2, \text{ tangente in } B\text{: } y = -2x + 2, C\left(\frac{1}{2}, 3\right), D\left(-\frac{1}{2}, 3\right); \textbf{ d. } 4\right]$

595 Considera la funzione $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ e sia $y = F(x)$ la sua primitiva tangente all'asse x in un punto di ascissa positiva.

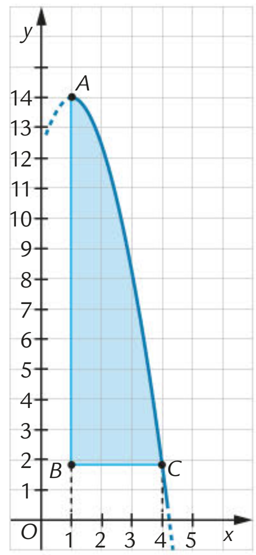
a. Determina l'equazione di $y = F(x)$.

b. Traccia il grafico delle due funzioni $y = f(x)$ e $y = F(x)$.

c. Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve. $\left[\mathbf{a.}\ y = x + \dfrac{1}{x} - 2;\ \mathbf{c.}\ 3\sqrt{2} - 3 - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

Realtà e modelli

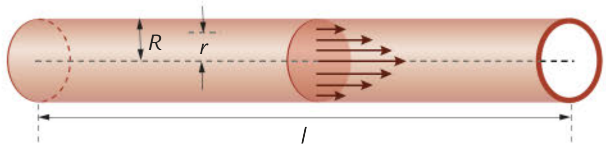
596 **La barca a vela.** Si sta progettando la vela di una piccola imbarcazione. Il modello geometrico della vela è rappresentato dalla regione colorata in figura, limitata dal segmento AB (verticale), dal segmento BC (orizzontale) e dall'arco $\overset{\frown}{AC}$ della curva di equazione $y = 15 - x^2 + 2\ln x$. I punti B e C hanno rispettivamente ascissa 1 e 4 e l'unità di misura su entrambi gli assi corrisponde a 1 m.
La vela sarà costruita con un materiale avente un peso di 250 grammi al metro quadrato e il progetto sarà approvato a condizione che il peso della vela sia al massimo di 5,5 kg. Ritieni che il progetto sarà approvato? [No: la vela ha un peso di circa 5,94 kg]



597 **Velocità del sangue.** Gli studi di emodinamica hanno permesso di determinare la funzione che esprime la velocità del sangue, considerato come un fluido omogeneo e viscoso, in un vaso sanguigno che si può localmente approssimare con un cilindro cavo di raggio R e lunghezza l. La velocità del sangue dipende dalla distanza r dall'asse del vaso sanguigno ed è espressa dalla funzione:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2),\ \text{con } 0 \le r \le R$$

dove η è il coefficiente di viscosità del sangue e Δp è la differenza di pressione tra gli estremi del vaso sanguigno considerato che causa il movimento del sangue nel vaso stesso.



a. Determina il valore medio v_m della funzione $v(r)$ nell'intervallo $0 \le r \le R$.

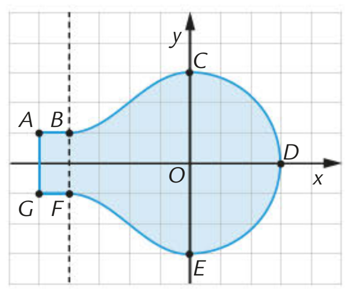
b. In quali punti del vaso la velocità del sangue è massima? E qual è il valore di tale velocità massima v_M? A quale percentuale della velocità massima v_M corrisponde la velocità media v_m? $\left[\mathbf{a.}\ v_m = \dfrac{\Delta p R^2}{6\eta l};\ \mathbf{b.}\ v_M = \dfrac{\Delta p R^2}{4\eta l},\ \text{circa } 66{,}7\%\right]$

598 **Una lampadina.** La sezione di una lampadina a basso consumo, ottenuta tramite un piano passante per il suo asse di rotazione, è modellizzata con buona approssimazione dal grafico in figura. Le coordinate di tutti i punti indicati sono numeri interi e l'unità di misura, su entrambi gli assi, corrisponde a 1 cm.
La parte della curva situata nel semipiano in cui $y \ge 0$ è costituita:

– da un segmento nel tratto tra A e B;

– dal grafico di una funzione di equazione del tipo $y = a + b\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$ nel tratto tra B e C;

– da un quarto di circonferenza nel tratto tra C e D.



a. Determina i valori di a e b.

b. Determina l'equazione della funzione $y = f(x)$ il cui grafico è costituito dalla parte di curva situata nel semipiano in cui $y \ge 0$.

c. Ruotando la figura rappresentata intorno all'asse x, si ottiene il modello geometrico della lampadina (come figura solida). Qual è il volume della lampadina? Arrotonda il risultato al centimetro cubo.

$$\left[\mathbf{a.}\ a = 2, b = 1;\ \mathbf{b.}\ y = \begin{cases} 1 & -5 \le x \le -4 \\ 2 + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) & -4 \le x \le 0 \\ \sqrt{9 - x^2} & 0 \le x \le 3 \end{cases};\ \mathbf{c.}\ 37\pi\ \text{cm}^3 \simeq 116\ \text{cm}^3\right]$$

599 **Matematica ed elettronica** Considera la funzione $y = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$.

a. Traccia il grafico della funzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

b. Supposto che y rappresenti l'intensità di corrente, espressa in ampere, che percorre un filo e x il tempo, espresso in secondi, calcola la quantità di carica che attraversa una sezione del filo tra gli istanti $x = \dfrac{3\pi}{2}$ e $x = 2\pi$.

$\left[\text{a. min}\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{max}\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{flessi: }\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ e } \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right); \text{b. } \ln 2 \text{ C}\right]$

600 Considera la funzione $y = (x - 2)e^x$.

a. Tracciane il grafico.

b. Considera la regione finita di piano limitata dal grafico della funzione e dagli assi cartesiani e calcola la sua area.

c. Considera il solido ottenuto da una rotazione completa intorno all'asse x della regione di piano di cui al punto precedente e calcola il suo volume. $\left[\text{a. Asintoto: } y = 0 \text{ (sinistro), min } (1, -e), \text{ flesso: } (0, -2); \text{b. } e^2 - 3; \text{c. } \frac{\pi}{4}(e^4 - 13)\right]$

601 Considera la funzione $y = x - 2 + e^{1-x}$.

a. Tracciane il grafico.

b. Determina l'area $S(a)$ della regione di piano limitata dal grafico della funzione, dal suo asintoto obliquo e dalle rette di equazioni $x = 0$ e $x = a$, con $a > 0$.

c. Calcola il limite cui tende $S(a)$ per $a \to +\infty$ e interpreta geometricamente il risultato ottenuto.

$[\text{a. Asintoto: } y = x - 2 \text{ (destro); min } (1, 0); \text{b. } e - e^{1-a}; \text{c. } e]$

602 Considera la funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x (4t^3 - 12t)\,dt$.

a. Determina l'espressione analitica della funzione.

b. Traccia il grafico della funzione, determinando in particolare i due punti di flesso F_1 ed F_2.

c. Determina l'area della regione finita di piano limitata dal grafico di f e dal segmento che congiunge F_1 ed F_2.

$\left[\text{a. } f(x) = x^4 - 6x^2; \text{b. } F_1(-1, -5), F_2(1, -5); \text{c. } \frac{32}{5}\right]$

Esercizi *più*

603 Considera la funzione $f(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt[3]{t}\, e^{-t}\, dt$.

Senza cercare di determinare la sua espressione analitica, risolvi i seguenti quesiti.

a. Giustifica perché il dominio della funzione è **R**.

b. Stabilisci se la funzione ammette asintoti orizzontali.

c. Calcola e studia la derivata prima. La funzione f è derivabile in **R**?

d. Calcola e studia la derivata seconda. La funzione f è derivabile due volte in **R**?

e. Traccia un grafico qualitativo della funzione.

f. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa 1.

g. Calcola $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

$\left[\text{b. Ammette asintoto orizzontale per } x \to +\infty; \text{c. minimo per } x = 0; \text{d. flesso per } x = \frac{1}{3}; \text{f. } y = \frac{1}{e}(x - 1); \text{g. } \frac{1}{2}e^{-1}\right]$

Dalle gare

604 Calcola $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{t^3 + 1}\, dt - x}{x^4}$.

(Calculus Competition, Youngstown University 2011) $\left[\frac{1}{8}\right]$

605 Determina il valore positivo di a tale che la parabola di equazione $y = x^2 + 1$ divida il rettangolo i cui vertici hanno coordinate $(0, 0)$; $(a, 0)$; $(0, a^2 + 1)$; $(a, a^2 + 1)$ in due parti equivalenti. $[a = \sqrt{3}]$

(Harvard-MIT, Mathematics Tournament 2002)

606 Trova l'area della regione dei punti del piano che rappresenta le soluzioni della disequazione:

$$x^6 - x^2 + y^2 \leq 0$$

(Harvard-MIT, Mathematics Tournament 2004) $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

607 Per quale valore di $a > 1$ l'integrale $\displaystyle\int_a^{a^2} \frac{1}{x} \ln \frac{x - 1}{32}\, dx$ assume valore minimo? $[a = 3]$

(Harvard-MIT, Mathematics Tournament 2003)

608 Verifica che $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^x}{e^{\pi - x} + e^x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

(Calculus Competition, Youngstown University 2010)

L'integrale definito

Calcola i seguenti integrali definiti (immediati).

1 $\int_1^2 \frac{x^3+x+1}{x^2}\,dx$

2 $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

Calcola i seguenti integrali definiti (per sostituzione e per parti).

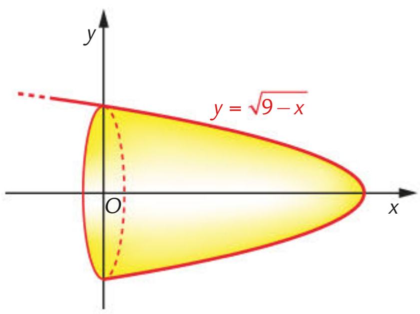
3 $\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{x+5}}\,dx$

4 $\int_1^2 xe^{2-x}\,dx$

5 Stabilisci per quale valore del parametro a la funzione $f(x) = ax^2 + 2x - 3$ ha media nulla nell'intervallo [1, 3].

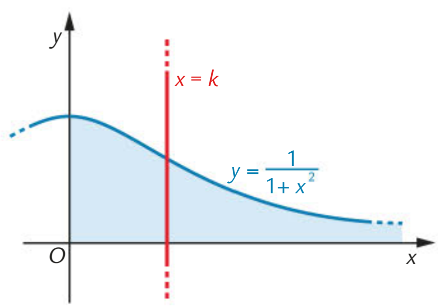
6 Traccia nel piano cartesiano le due parabole di equazioni $y = -x^2 - 4x$ e $y = x^2 + 2x$, quindi determina l'area della regione finita da esse delimitata.

7 Calcola il volume del solido ottenuto da una rotazione completa intorno all'asse x della parte *finita* di piano limitata dal grafico della funzione $y = \sqrt{9-x}$ e dagli assi cartesiani.



8 Un punto materiale si muove lungo una retta, su cui è stato fissato un sistema di ascisse misurate in metri, soggetto a una forza f la cui intensità, espressa in newton, è legata all'ascissa del punto secondo la legge $f(x) = (3x-1)^2$. Determina il lavoro compiuto dalla forza quando il punto si sposta dall'origine al punto di ascissa 1 m.

9 Considera la regione *illimitata* di piano delimitata, nel primo quadrante, dal grafico della funzione $y = \frac{1}{1+x^2}$ e dagli assi cartesiani. Determina per quale valore di k la retta di equazione $x = k$ suddivide tale regione di piano in due parti aventi la stessa area.



Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Totale
Punteggio massimo	0,75	0,75	1	1	1,25	0,5 + 0,75 = 1,25	1,25	1,25	1,5	10
Punteggio ottenuto										

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 390

Unità 4

Tema M

Equazioni differenziali

- Approfondimenti
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

1. Introduzione alle equazioni differenziali

Consideriamo il seguente problema.

◆ **PROBLEMA**

Sia data una popolazione:
- che vive in un ambiente isolato (ovvero si entra nella popolazione solo per nascita e si esce solo per morte), in cui le risorse sono illimitate (ovvero l'ambiente fornisce costantemente tutte le risorse necessarie agli individui);
- non in competizione con altre popolazioni;
- in cui tutti gli individui hanno la stessa capacità di riprodursi e la stessa probabilità di morire.

Come si può costruire un modello che descriva, in funzione del tempo, l'evoluzione del numero di individui della popolazione?

Indichiamo con $N(t)$ il numero di individui della popolazione al tempo t e consideriamo un intervallo di tempo $[t, t+h]$; la variazione del numero di individui della popolazione tra t e $t+h$ è espressa dalla differenza:

$$N(t+h)-N(t)$$

Poiché abbiamo supposto che l'ambiente sia isolato, questa variazione può esprimersi anche come differenza tra il numero di individui nati e il numero di individui morti nell'intervallo considerato. Supponendo che l'intervallo di tempo sia piccolo, è ragionevole ritenere che il numero di nuovi nati sia proporzionale al numero di individui al tempo t (cioè a $N(t)$) e all'ampiezza dell'intervallo (cioè ad h), ossia che sia uguale a:

$$\alpha hN(t)$$

dove α è una costante positiva, dipendente dalla popolazione presa in esame.
Analogamente, il numero di morti nell'intervallo $[t, t+h]$ sarà ragionevolmente:

$$\beta N(t)h$$

dove β è una costante positiva, anch'essa dipendente dalla popolazione presa in esame.
Possiamo quindi scrivere:

$$\underbrace{N(t+h)-N(t)}_{\substack{\text{variazione del numero}\\ \text{di individui nell'intervallo}\\ [t,\ t+h]}} = \underbrace{\alpha hN(t)}_{\substack{\text{numero di nati}\\ \text{nell'intervallo}\\ [t,\ t+h]}} - \underbrace{\beta hN(t)}_{\substack{\text{numero di morti}\\ \text{nell'intervallo}\\ [t,\ t+h]}} = (\alpha-\beta)\, hN(t) \qquad [1]$$

Ponendo $\alpha-\beta=k$ (con k costante reale arbitraria) e dividendo il primo e l'ultimo membro della [1] per h, otteniamo:

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h}=kN(t) \qquad [2]$$

Questo modello, valido sotto l'ipotesi che l'intervallo di tempo $[t, t+h]$ sia piccolo, sarà a maggior ragione valido se $h \to 0$; facendo tendere $h \to 0$ la [2] diviene:

$$N'(t)=kN(t) \qquad [3]$$

La [3] è una relazione che coinvolge sia la funzione $N(t)$ sia la sua derivata $N'(t)$: essa è un esempio di **equazione differenziale**.

DEFINIZIONE | **Equazione differenziale**

Un'**equazione differenziale** è un'equazione in cui l'incognita è una funzione, e in cui compaiono una o più derivate della funzione incognita.

Nella [3] l'incognita è ovviamente $N(t)$. Salvo avviso contrario, d'ora in avanti, indicheremo la funzione incognita di un'equazione differenziale con la lettera y e supporremo che y sia funzione della variabile x.
Si dice **ordine** di un'equazione differenziale l'ordine massimo di derivazione che vi compare. Per esempio, la [3] è del primo ordine, mentre l'equazione $y'' = y' + 1$ è del secondo ordine.

DEFINIZIONE | **Soluzione di un'equazione differenziale**

Si dice **soluzione** (o **curva integrale**) di un'equazione differenziale di ordine n in un intervallo I una *funzione* derivabile n volte in I e soddisfacente l'equazione differenziale per ogni $x \in I$.

In generale le soluzioni di un'equazione differenziale sono *infinite*.

ESEMPIO

Le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = 2x$ sono le primitive della funzione $f(x) = 2x$ e sono espresse, al variare di $c \in \mathbf{R}$, dall'equazione:

$$y = x^2 + c$$

detta *integrale generale* dell'equazione differenziale. Le soluzioni sono dunque *infinite* e ciascuna è individuata da un valore diverso di c. Tra le infinite soluzioni dell'equazione differenziale se ne può individuare una *particolare*, richiedendo che sia soddisfatta una ulteriore condizione. Per esempio, se vogliamo che il grafico della soluzione passi per il punto di coordinate $(2, 7)$, allora si trova che $c = 3$, cui corrisponde l'*integrale particolare* $y = x^2 + 3$.

ATTENZIONE!
In alcuni casi particolari accade che qualche soluzione dell'equazione differenziale non sia rappresentata dalla formula dell'integrale generale; queste soluzioni sono dette integrali singolari.

Le definizioni introdotte nell'esempio possono essere così generalizzate:

- si dice **integrale generale** di un'equazione differenziale una formula che assegna, al variare di uno o più parametri, le soluzioni dell'equazione differenziale;
- si dice **integrale particolare** una particolare soluzione dell'equazione differenziale ottenuta dall'integrale generale imponendo alcune condizioni iniziali.

Esercizi p. 228

2. Equazioni differenziali del primo ordine

In questo paragrafo studiamo alcune particolari classi di equazioni differenziali del **primo ordine**:

- le equazioni differenziali *lineari*;
- le equazioni differenziali *a variabili separabili*;
- particolari equazioni differenziali riconducibili alle precedenti mediante sostituzioni opportune.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

DEFINIZIONE | **Equazione differenziale lineare del primo ordine**

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice **lineare** quando si può scrivere nella forma:

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad [4]$$

essendo y la funzione incognita e $a(x)$, $b(x)$ due funzioni assegnate, continue in un intervallo I.

Una soluzione dell'equazione [4] è una funzione derivabile in I, che soddisfa l'equazione per ogni $x \in I$. Sussiste il seguente teorema.

CASO PARTICOLARE

Nel caso in cui nell'equazione $y' = a(x)y + b(x)$ la funzione $b(x)$ sia costante e uguale a 0, l'equazione si dice **omogenea** e il suo integrale generale, come si può dedurre dalla [5], è semplicemente:

$y = ce^{A(x)}$

TEOREMA 1 | Integrale generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine

L'integrale generale dell'equazione $y' = a(x)y + b(x)$ è espresso dalla formula:

$$y = e^{A(x)}\int e^{-A(x)}b(x)\,dx \qquad [5]$$

essendo $A(x)$ una primitiva della funzione $a(x)$.

DIMOSTRAZIONE

Il punto chiave per giungere all'integrale generale dell'equazione [4] è moltiplicare i suoi due membri per il cosiddetto *fattore integrante*, $e^{-A(x)}$, essendo $A(x)$ una primitiva della funzione $a(x)$ (la moltiplicazione è lecita perché $e^{-A(x)} \neq 0$). Otteniamo così l'equazione:

$$e^{-A(x)}y' = a(x)e^{-A(x)}y + e^{-A(x)}b(x)$$

ossia:

$$e^{-A(x)}y' - a(x)e^{-A(x)}y = e^{-A(x)}b(x) \qquad [6]$$

In questo modo il primo membro dell'equazione [6] può essere interpretato come la derivata di $e^{-A(x)}y$; infatti, ricordando che y è una funzione di x e applicando le regole di derivazione del prodotto e delle funzioni composte, abbiamo:

$$\mathrm{D}(e^{-A(x)}y) = e^{-A(x)}y' - A'(x)e^{-A(x)}y = e^{-A(x)}y' - a(x)e^{-A(x)}y$$

Integrando i due membri della [6] abbiamo allora:

$$e^{-A(x)}y = \int e^{-A(x)}b(x)dx$$

da cui infine, moltiplicando entrambi i membri per $e^{A(x)}$:

$$y = e^{A(x)}\int e^{-A(x)}b(x)dx$$

La formula [5] va letta con attenzione: si potrebbe dimostrare che la scelta della primitiva $A(x)$ di $a(x)$ è ininfluente, quindi in pratica si può scegliere la primitiva con costante nulla (tralasciando dunque la costante di integrazione); la costante di integrazione va invece considerata nel calcolo dell'integrale indefinito $\int e^{-A(x)}b(x)\,dx$.

ALTRE NOTAZIONI

L'equazione differenziale dell'esempio a fianco potrebbe venire assegnata anche in una delle seguenti forme:

- $y'(x) = y(x)\sin x + \sin x$
- $\dfrac{dy}{dx} = y\sin x + \sin x$

ESEMPIO Risoluzione di un'equazione differenziale lineare del primo ordine

Risolviamo l'equazione differenziale: $y' = y\sin x + \sin x$.

- **Identifichiamo le funzioni $a(x)$ e $b(x)$**

$$a(x) = \sin x \quad \text{e} \quad b(x) = \sin x$$

- **Cerchiamo una primitiva di $a(x)$**

Come detto poc'anzi, scegliamo la primitiva con costante di integrazione nulla:

$$A(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x$$

- **Scriviamo l'integrale generale dell'equazione differenziale**

In base alla formula [5], l'integrale generale dall'equazione è dato da:

$$y = e^{-\cos x}\int e^{\cos x}\sin x\,dx$$

ossia:

$$y = e^{-\cos x}(-e^{\cos x} + c)$$

che equivale a:

$$y = -1 + ce^{-\cos x}$$ Integrale generale dell'equazione data

Equazioni differenziali a variabili separabili

DEFINIZIONE | Equazione differenziale a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice **a variabili separabili** quando la derivata prima della funzione incognita può scriversi come prodotto di una funzione della sola variabile indipendente x e di una funzione nella sola incognita y, cioè quando l'equazione può scriversi nella forma:

$$y' = a(x)\,b(y) \qquad [7]$$

dove $a(x)$ e $b(y)$ si suppongono due funzioni continue in opportuni intervalli.

OSSERVA

Se $b(y)$ non è un polinomio di primo grado, le equazioni differenziali a variabili separabili sono equazioni differenziali **non** *lineari*.

Esempi	Controesempi
$y' = y^2 - 1$ si può scrivere nella forma $y' = 1 \cdot (y^2 - 1)$, quindi è a variabili separabili con: $a(x) = 1$ e $b(y) = y^2 - 1$	$y' = xy^2 - 1$ **non** è un'equazione differenziale a variabili separabili.
$y' = xy^2$ è un'equazione differenziale a variabili separabili, con: $a(x) = x$ e $b(y) = y^2$	$y' = x + y^2$ **non** è un'equazione differenziale a variabili separabili.
$y' = e^{x+y}$, essendo equivalente a $y' = e^x \cdot e^y$, è un'equazione differenziale a variabili separabili, con: $a(x) = e^x$ e $b(y) = e^y$	$y' = e^x + e^y$ **non** è un'equazione differenziale a variabili separabili.

Per determinare le soluzioni di un'equazione differenziale a variabili separabili si procede così:

1. si controlla anzitutto se esistono soluzioni dell'equazione algebrica $b(y) = 0$: se $\overline{y}$ è una soluzione di quest'ultima equazione, allora la funzione costante $y = \overline{y}$ è una soluzione dell'equazione differenziale [7] (infatti il primo membro si annulla perché la derivata di una funzione costante è zero e il secondo membro si annulla perché $\overline{y}$ è una soluzione dell'equazione $b(y) = 0$);
2. supposto $b(y) \neq 0$, si rappresenta la derivata y' tramite la notazione di Leibniz:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

in modo da riscrivere la [7] nella forma:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\,b(y)$$

poi, procedendo in modo puramente formale, si «separano» le variabili:

$$\frac{1}{b(y)}dy = a(x)\,dx$$

e si integra membro a membro:

$$\int \frac{1}{b(y)}dy = \int a(x)\,dx \qquad [8]$$

Indicate con $B(y)$ e $A(x)$ due primitive rispettivamente di $\frac{1}{b(y)}$ e di $a(x)$, si ottiene così una relazione del tipo:

$$B(y) = A(x) + c \qquad [9]$$

che esprime il legame, in forma *implicita*, tra x e y. In alcuni casi è possibile ricavare y in funzione di x, in modo da ottenere l'integrale generale in forma *esplicita*. Alle soluzioni espresse dalla [9] andranno poi aggiunte le eventuali soluzioni costanti trovate all'inizio.

ATTENZIONE!

Rifletti sul modo (improprio!) in cui abbiamo manipolato il simbolo $\frac{dy}{dx}$: esso rappresenta la derivata della funzione incognita, quindi non ha alcun significato trattarlo come se fosse una frazione e «spezzarlo» (come è stato fatto) nei due pezzi dx e dy. Per questo motivo il metodo esposto è da intendersi come un artificio *puramente formale*, utilizzato unicamente perché consente di arrivare in modo semplice all'effettivo integrale generale dell'equazione.

ATTENZIONE!

A rigore, nella [9] avremmo dovuto utilizzare una costante c_1 al primo membro e una costante c_2 al secondo, ma esse possono essere poi conglobate nell'unica costante:

$$c = c_2 - c_1$$

Perciò, in pratica, si utilizza una sola costante, a uno dei due membri.

ATTENZIONE!
Non sempre è possibile esplicitare rispetto a y l'integrale generale di un'equazione a variabili separabili. Per esempio, puoi verificare che l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{y + e^y}$$

è

$$\frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} + c$$

In questo caso **non** è possibile risolvere quest'ultima equazione rispetto a y, in modo da esprimere esplicitamente y come funzione di x.

IN UN ALTRO MODO
L'equazione $y' = y - 1$ è anche un'equazione *lineare*, quindi può anche essere risolta secondo lo schema espresso nel Teorema 1.
Essendo in questo caso $a(x) = 1$, quindi $A(x) = x$, e $b(x) = -1$ si ritrova che l'integrale generale è:

$$y = e^x \int e^{-x}(-1)\,dx =$$
$$= e^x(e^{-x} + c) = 1 + ce^x$$

ESEMPI Risoluzione di un'equazione differenziale a variabili separabili

Risolviamo le seguenti equazioni differenziali:

a. $y' = \dfrac{x^2}{y}$ **b.** $y' = y - 1$

a. Osserviamo che l'equazione si può riscrivere nella forma $y' = x^2 \cdot \dfrac{1}{y}$ da cui appare chiaro che è del tipo [7] con $a(x) = x^2$ e $b(y) = \dfrac{1}{y}$.

È sempre $b(y) \neq 0$, quindi non ci sono soluzioni costanti. Procediamo allora nella risoluzione, secondo il metodo indicato.

$\dfrac{dy}{dx} = x^2 \cdot \dfrac{1}{y}$ — **Riscrivendo y' come rapporto di differenziali**

$y\,dy = x^2 dx$ — **Separando le variabili**

$\int y\,dy = \int x^2\,dx$ — **Integrando**

$\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^3}{3} + c$ — **Calcolando gli integrali indefiniti**

$y^2 = \dfrac{2}{3}x^3 + 2c$ — **Moltiplicando i due membri per 2**

$y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}x^3 + 2c}$ — **Esplicitando rispetto a y**

Poiché $2c$ descrive, al variare di $c \in \mathbf{R}$, tutti i valori reali, così come c, la formula cui siamo giunti può essere espressa più semplicemente nella forma:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + c}$$

b. L'equazione $y' = y - 1$ è del tipo $y' = a(x)b(y)$, con $a(x) = 1$ e $b(y) = y - 1$.

L'equazione ammette anzitutto la soluzione costante $y = 1$ (in corrispondenza della quale $b(y) = 0$). Le altre soluzioni dell'equazione si possono ricavare supponendo $y \neq 1$ e procedendo come nell'esempio precedente; abbiamo:

$y' = y - 1$ — **Equazione da risolvere**

$\dfrac{dy}{dx} = y - 1$ — **Riscrivendo y' come rapporto di differenziali**

$\dfrac{1}{y-1}dy = dx$ — **Separando le variabili**

$\int \dfrac{1}{y-1}dy = \int dx$ — **Integrando**

$\ln|y - 1| = x + c_1$ — **Calcolando gli integrali indefiniti**

$|y - 1| = e^{x+c_1}$ — **Ricordando che $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$**

$y - 1 = \pm e^{x+c_1}$ — **Ricordando che $|a| = b \Leftrightarrow a = \pm b$**

$$y = 1 \pm e^{x+c_1} \qquad [10]$$

Osservando che la [10] equivale a $y = 1 \pm e^{c_1}e^x$ e che, al variare di $c_1 \in \mathbf{R}$, $\pm e^{c_1}$ descrive tutti valori reali diversi da zero (e^{c_1} descrive tutti i valori positivi mentre $-e^{c_1}$ descrive tutti i valori negativi), possiamo esprimere l'integrale generale nella forma:

$$y = 1 + ce^x, \quad \text{con } c \in \mathbf{R}$$

Questa formula rappresenta *tutte* le soluzioni dell'equazione originaria: sia le funzioni descritte dall'equazione [10] (che si ottengono al variare di $c \in \mathbf{R}$, con $c \neq 0$), sia la soluzione costante trovata all'inizio (che si ottiene per $c = 0$).

Il metodo di sostituzione e la risoluzione di equazioni omogenee e di Bernoulli

In varie occasioni hai potuto apprezzare l'efficacia del **metodo di sostituzione** delle variabili nella risoluzione di equazioni *algebriche* (per esempio nella risoluzione di equazioni trinomie, ricondotte mediante una sostituzione a equazioni di secondo grado). Vedremo ora come il metodo di sostituzione possa essere proficuamente applicato anche alla risoluzione di certe classi di equazioni *differenziali*.

1. Equazioni omogenee

Come primo esempio consideriamo le cosiddette equazioni differenziali *omogenee* del primo ordine, cioè equazioni della forma:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad [11]$$

La sostituzione

$$z = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = xz$$

implica (ricorda che $y = y(x)$ e $z = z(x)$):

$$y' = z + xz'$$ Regola di derivazione del prodotto applicata a $y = xz$

quindi la [11] diviene:

$$z + xz' = f(z) \quad \Leftrightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = f(z) - z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

Abbiamo così ricondotto l'equazione omogenea iniziale a un'equazione differenziale a *variabili separabili* nella funzione incognita z.

ATTENZIONE!
Abbiamo parlato di equazioni *lineari del primo ordine omogenee.* Nel prossimo paragrafo definiremo similmente le equazioni differenziali *lineari del secondo ordine omogenee.* Ciascuna di tali classi non è da confondere con le equazioni *omogenee* del *primo ordine* di cui ci stiamo occupando qui. L'aggettivo «omogenee» assume un significato *diverso* a seconda della classe di equazioni differenziali cui è applicato (lineari o generiche del primo ordine).

ESEMPIO Equazione differenziale omogenea

Risolviamo l'equazione differenziale $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2}$.

Dividendo il numeratore e il denominatore a secondo membro per x^3, l'equazione può essere riscritta nella forma:

$$y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Riconosciamo così che si tratta di un'equazione omogenea, cioè della forma:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ponendo $z = \dfrac{y}{x}$, sostituendo, semplificando e separando le variabili, l'equazione differenziale diviene:

$$z + xz' = \frac{1 + z^3}{z^2} \quad \Leftrightarrow \quad xz' = \frac{1}{z^2} \quad \Leftrightarrow \quad z^2 dz = \frac{dx}{x}$$

L'integrale generale di quest'ultima è dato da:

$$z = \sqrt[3]{3\ln|x| + c} \quad \text{con } c \in \mathbf{R}$$

Poiché, in base alla sostituzione effettuata, risulta $y = xz$, l'integrale generale dell'equazione iniziale è:

$$y = x\left(\sqrt[3]{3\ln|x| + c}\right) \quad \text{con } c \in \mathbf{R}$$

2. Equazioni di Bernoulli

Come secondo esempio di utilizzo della tecnica di sostituzione, consideriamo le **equazioni di Bernoulli**, cioè le equazioni della forma:

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,y^n \qquad [12]$$

ove n è un numero reale qualsiasi (possiamo supporre $n \neq 0$ ed $n \neq 1$, altrimenti l'equazione rientra nella classe delle equazioni differenziali lineari, che già sappiamo risolvere). Osserviamo preliminarmente che, se n è positivo, allora la funzione costante $y = 0$ è soluzione dell'equazione [12]. Supposto $y \neq 0$, possiamo dividere i due membri per y^n; otteniamo:

$$y'y^{-n} = a(x)\,y^{1-n} + b(x) \qquad [13]$$

La sostituzione:

$$z = y^{1-n}$$

implica (ricorda che $y^{1-n} = y^{1-n}(x)$):

$$z' = (1-n)y'y^{-n}$$

Regola di derivazione delle funzioni composte applicata a $z = y^{1-n}$

Effettuando nella [13] le sostituzioni $y^{1-n} = z$ e $y'y^{-n} = \frac{z'}{n-1}$, si giunge a un'equazione lineare nella funzione incognita z.

ESEMPIO Equazione differenziale di Bernoulli

Risolviamo l'equazione di Bernoulli $y' = y + e^x y^2$.

Osserviamo anzitutto che la funzione costante $y = 0$ è soluzione dell'equazione data. Supposto $y \neq 0$, dividiamo entrambi i membri dell'equazione per y^2, ottenendo così l'equazione:

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y} + e^x \qquad [14]$$

Ponendo $z = \frac{1}{y}$ abbiamo

$$z' = -\frac{y'}{y^2}, \text{ da cui } \frac{y'}{y^2} = -z'$$

quindi l'equazione [14] si trasforma in

$$-z' = z + e^x \quad \Leftrightarrow \quad z' = -z - e^x$$

Si tratta di un'equazione lineare, che ha come integrale generale $z = \frac{ce^{-x} + e^x}{2}$.

Infine, ricordando che in base alla sostituzione fatta si ha $y = \frac{1}{z}$, concludiamo che l'integrale generale dell'equazione originaria è:

$$y = \frac{2}{ce^{-x} + e^x} \quad \text{con } c \in \mathbf{R} \qquad [15]$$

La soluzione $y = 0$ individuata inizialmente **non** è rappresentata dall'integrale generale [15], quindi va riportata a parte.

3. Particolari equazioni del secondo ordine riconducibili al primo

Gettiamo infine un rapido sguardo sulle equazioni differenziali del secondo ordine, che tratteremo nel prossimo paragrafo, nell'ottica dell'applicazione del metodo di sostituzione.

Osserviamo che le equazioni del secondo ordine della forma:

$$y'' = f(x, y')$$

sono riconducibili banalmente a equazioni del primo ordine semplicemente ponendo $z = y'$.

ESEMPIO Equazione differenziale del secondo ordine riconducibile al primo

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' = \frac{y'}{x}$.

Si tratta di un'equazione del secondo ordine **non** risolvibile con i metodi che illustreremo nel prossimo paragrafo (non è a coefficienti costanti, infatti). Ponendo $y' = z$, l'equazione si trasforma in un'equazione del *primo* ordine *lineare* (nell'incognita z):

$$z' = \frac{z}{x}$$

L'integrale generale è: $z = cx$, con $c \in \mathbf{R}$. Ricordando che $y' = z$, non resta che integrare una seconda volta per ottenere l'integrale generale dell'equazione di partenza:

$$y' = cx \Rightarrow y = \int cx\,dx = c_1x^2 + c_2, \text{ con } c_1 \in \mathbf{R} \text{ e } c_2 \in \mathbf{R}$$

Problemi di Cauchy per le equazioni del primo ordine

Il problema di determinare la soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine soddisfacente la condizione di passaggio per il punto di coordinate (x_0, y_0), ossia $y(x_0) = y_0$, viene detto **problema di Cauchy**.
Per le equazioni *lineari* e quelle *a variabili separabili* un problema di Cauchy si scrive rispettivamente nelle seguenti forme:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema di Cauchy per equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema di Cauchy per equazioni differenziali a variabili separabili

Per un'equazione lineare, supponendo $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue in un intervallo I e $x_0 \in I$, si può dimostrare che il corrispondente problema di Cauchy ammette sempre *una unica* soluzione, definita (almeno) in tutto I.
Per un'equazione a variabili separabili, supponendo $a(x)$ e $b(y)$ continue rispettivamente negli intervalli I e J, con $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, si può dimostrare che il corrispondente problema di Cauchy ammette sempre *almeno una* soluzione, definita in un *opportuno* intorno di x_0 (ma senza ulteriori ipotesi non si può garantire né l'unicità della soluzione, né l'esistenza in tutto I).

NOTAZIONI

Nella teoria delle equazioni differenziali la funzione incognita y viene spesso indicata con la scrittura $y = y(x)$ anziché con la scrittura $y = f(x)$. La condizione di passaggio per un punto (x_0, y_0) viene perciò indicata con $y(x_0) = y_0$.

Esercizi p. 229

3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Un'equazione differenziale del **secondo ordine** è un'equazione nella quale, oltre all'incognita y, compaiono anche le derivate y' e y''.
Ci occuperemo di una *particolare* classe di equazioni differenziali del secondo ordine, precisamente le equazioni della forma:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad [16]$$

dove y è la funzione incognita, a, b e c sono numeri reali ed $f(x)$ è una funzione assegnata; tali equazioni sono dette **lineari del secondo ordine**. Nel caso particolare in cui risulta $f(x) = 0$, l'equazione [16] si dice **omogenea** (a coefficienti costanti).

ESEMPI

a. L'equazione $y'' + 3y' + 4y = 2x^2$ è un esempio di equazione lineare del secondo ordine, **non** omogenea.
b. L'equazione $y'' = 0$ è il più semplice esempio di equazione *omogenea* del secondo ordine del tipo [16]. Essa equivale a $y' = c_1$, quindi a $y = c_1x + c_2$, con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$: le soluzioni dell'equazione $y'' = 0$ sono dunque tutti e soli i polinomi di primo grado.

Approfondimento
Deduzione dell'integrale generale di un'equazione differenziale della forma $ay'' + by' + cy = 0$

Il procedimento generale per giungere all'integrale generale di un'equazione della forma [16] prevede due casi, a seconda che l'equazione sia o meno omogenea. Li affrontiamo separatamente.

Equazioni lineari del secondo ordine omogenee

Per le equazioni omogenee:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad [17]$$

il procedimento risolutivo (di cui puoi trovare una deduzione nell'approfondimento) prevede anzitutto la risoluzione dell'equazione algebrica di secondo grado (nell'incognita r):

$$ar^2 + br + c = 0$$

detta **equazione caratteristica** della [17]. Perché le soluzioni dell'equazione [17] sono collegate alle soluzioni della sua equazione *caratteristica*? Il motivo risiede nel fatto che l'integrale generale della [17] si costruisce combinando linearmente due sue opportune soluzioni *particolari* di tipo *esponenziale* e una funzione della forma $y = e^{rx}$ soddisfa l'equazione differenziale considerata se e solo se, per ogni $x \in \mathbf{R}$, risulta:

$$a\underbrace{r^2e^{rx}}_{y''} + b\underbrace{re^{rx}}_{y'} + c\underbrace{e^{rx}}_{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

cioè se e solo se r è una radice dell'equazione caratteristica.
Dopo aver risolto l'equazione caratteristica, si distinguono tre casi, a seconda che il suo discriminante sia maggiore, uguale o minore di zero.

RIFLETTI
Poiché la [17] richiede che una combinazione lineare di y, y' e y'' sia nulla, è ragionevole cercare le sue soluzioni tra le funzioni che sono *proporzionali alle loro derivate*, cioè tra le funzioni esponenziali.

Se risulta: $\Delta > 0$	Se risulta: $\Delta = 0$	Se risulta: $\Delta < 0$
allora l'equazione caratteristica ammette due soluzioni reali distinte, r_1, r_2, e l'integrale generale della [17] è: $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$	allora l'equazione caratteristica ammette una sola soluzione reale (doppia), diciamo r, e l'integrale generale della [17] è: $y = e^{rx}(c_1 + c_2x)$	allora l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate, $r_1 = \alpha - \beta i$ ed $r_2 = \alpha + \beta i$, e l'integrale generale della [17] è: $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

ESEMPI Risoluzione di un'equazione differenziale omogenea lineare del secondo ordine

Risolviamo le seguenti equazioni differenziali:
a. $y'' - 5y' + 6y = 0$ **b.** $y'' - 4y' + 4y = 0$ **c.** $y'' + 9y = 0$

Equazione differenziale	$y'' - 5y' + 6y = 0$	$y'' - 4y' + 4y = 0$	$y'' + 9y = 0$
Equazione caratteristica	$r^2 - 5r + 6 = 0$	$r^2 - 4r + 4 = 0$	$r^2 + 9 = 0$
Soluzioni dell'equazione caratteristica	$r_1 = 2$ ed $r_2 = 3$	$r = 2$ (soluzione doppia)	$r = \pm 3i$ (della forma $\alpha \pm \beta i$ con $\alpha = 0$, $\beta = 3$)
Integrale generale dell'equazione differenziale	$\underbrace{y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}}$ **$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$: vedi tabella nel caso $\Delta > 0$**	$\underbrace{y = e^{2x}(c_1 + c_2x)}$ **$y = ce^{rx}(c_1 + c_2x)$: vedi tabella nel caso $\Delta = 0$**	$\underbrace{y = e^{0x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)} =$ **$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$: vedi tabella nel caso $\Delta < 0$** $= c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee

Per le equazioni **non** omogenee si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 2 | Integrale generale di un'equazione della forma [16]

L'integrale generale dell'equazione:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbf{R}$$

si ottiene sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

un integrale particolare dell'equazione originaria.

PROVA TU
Verifica che se $g(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad [*]$$

e $h(x)$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea associata, allora anche $h(x) + g(x)$ è una soluzione dell'equazione [*].

Il problema che si pone è la ricerca dell'integrale *particolare* dell'equazione non omogenea. Ci limitiamo a dare alcune indicazioni su come trovare questo integrale particolare, che denoteremo con $g(x)$, nel caso in cui la funzione $f(x)$ sia uno dei seguenti tipi:

a. una funzione polinomiale;
b. una funzione esponenziale del tipo $f(x) = he^{kx}$;
c. una funzione goniometrica del tipo $f(x) = h_1 \sin kx + h_2 \cos kx$.

L'integrale *particolare* si cerca con il cosiddetto metodo di *somiglianza*: come suggerisce la parola, esso consiste nel cercare un integrale particolare $g(x)$ della stessa forma della funzione $f(x)$. Si tratta di un metodo semplice e intuitivo, ma applicabile solo a un ristretto repertorio di funzioni. Precisamente, la ricerca va fatta secondo le indicazioni riassunte nella seguente tabella, che ci limitiamo a enunciare.

Se...	...si cerca un integrale particolare del tipo:
$f(x)$ è un polinomio di grado n	• $g(x) = P_n(x)$ con $P_n(x)$ polinomio **completo** di grado n se 0 **non** è radice dell'equazione caratteristica • $g(x) = xP_n(x)$ se 0 è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità uguale a 1 • $g(x) = x^2P_n(x)$ se 0 è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità uguale a 2
$f(x) = he^{kx}$	• $g(x) = Ae^{kx}$ se k **non** è radice dell'equazione caratteristica • $g(x) = Axe^{kx}$ se k è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità uguale a 1 • $g(x) = Ax^2e^{kx}$ se k è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità uguale a 2
$f(x) = h_1 \sin kx + h_2 \cos kx$	• $g(x) = A \sin kx + B \cos kx$ se $\pm ik$ **non** sono radici complesse dell'equazione caratteristica • $g(x) = x(A \sin kx + B \cos kx)$ se $\pm ik$ sono radici complesse dell'equazione caratteristica

ATTENZIONE!
1. Se 0 è una radice dell'equazione caratteristica, cioè se nell'equazione $ay'' + by' + cy = f(x)$ risulta $c = 0$, conviene procedere ponendo $y' = z$ e risolvendo l'equazione del primo ordine $az' + bz = f(x)$, per poi ricavare la funzione $y(x)$ da $z(x)$ mediante una semplice integrazione.
2. Negli integrali particolari di tipo polinomiale, i coefficienti del polinomio $P_n(x)$ sono da determinarsi imponendo che esso soddisfi l'equazione differenziale.
3. Analogamente, negli integrali particolari di tipo esponenziale e goniometrico k è un numero *assegnato*, mentre A e B sono *da determinare* imponendo a $g(x)$ di soddisfare l'equazione differenziale.

ESEMPIO Equazione non omogenea con $f(x)$ di tipo polinomiale

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = x^2$.

• **Risoluzione dell'equazione omogenea associata**

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata, $y'' - 2y' + y = 0$, è:

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

che ha come soluzione doppia $r = 1$.
Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$(c_1 + c_2 x)\, e^x$$

• **Ricerca dell'integrale particolare**

Nel secondo membro dell'equazione compare la funzione $f(x) = x^2$ (polinomiale di grado 2). Poiché 0 **non** è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo (secondo quanto indicato in tabella) un integrale particolare definito da un polinomio **completo** di grado 2, ossia un integrale particolare del tipo:

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C$$ *A, B, C sono le costanti da determinare*

Osserviamo che:

$$g'(x) = 2Ax + B \quad \text{e} \quad g''(x) = 2A$$

quindi, affinché la funzione $g(x)$ sia soluzione dell'equazione data, deve essere:

$$\underbrace{2A}_{y''} - \underbrace{2(2Ax + B)}_{2y'} + \underbrace{(Ax^2 + Bx + C)}_{y} = x^2 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}$$

da cui:

$$(A - 1)x^2 + (B - 4A)x + 2A - 2B + C = 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}$$

Per il principio di identità dei polinomi questa condizione implica:

$$\begin{cases} A-1=0 \\ B-4A=0 \\ 2A-2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=4 \\ C=6 \end{cases}$$

Un integrale particolare dell'equazione data è perciò:

$$g(x) = x^2 + 4x + 6$$

- **Integrale generale dell'equazione data**

In base al **Teorema 2**, l'integrale generale dell'equazione data si ottiene sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea associata l'integrale particolare $g(x)$ poc'anzi individuato:

$$\underbrace{(c_1 + c_2x)\, e^x}_{\text{integrale generale dell'equazione omogenea associata}} + \underbrace{x^2 + 4x + 6}_{\text{integrale particolare dell'equazione data}}$$

Integrale generale dell'equazione data

ESEMPIO Equazione non omogenea con $f(x)$ di tipo esponenziale

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - 9y = e^{3x}$.

- **Risoluzione dell'equazione omogenea associata**

L'equazione omogenea associata ha come equazione caratteristica $r^2 - 9 = 0$, che ha come soluzioni $r = \pm 3$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è:

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

- **Ricerca dell'integrale particolare**

Nel secondo membro dell'equazione compare la funzione $f(x) = e^{3x}$. Poiché il coefficiente dell'esponente, 3, è soluzione di molteplicità uguale a 1 dell'equazione caratteristica, dovremo cercare un integrale *particolare* della forma:

$$g(x) = Ax\, e^{3x}$$

A è la costante da determinare

Per determinare la costante A occorre anzitutto calcolare $g'(x)$ e $g''(x)$. Puoi verificare che:

$$g'(x) = Ae^{3x}(1 + 3x) \quad \text{e} \quad g''(x) = Ae^{3x}(6 + 9x)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale le espressioni di $g'(x)$ e $g''(x)$ appena trovate e semplificando, si perviene all'equazione:

$$Ae^{3x}(6 + 9x) - 9Axe^{3x} = e^{3x} \quad \text{da cui} \quad (6A - 1)e^{3x} = 0$$

Poiché l'ultima equazione scritta deve risultare una *identità*, cioè essere vera per ogni $x \in \mathbf{R}$, necessariamente deve essere $6A - 1 = 0$, cioè $A = \frac{1}{6}$; quindi l'integrale particolare cercato è:

$$g(x) = \frac{1}{6} x\, e^{3x}$$

- **Integrale generale dell'equazione data**

Sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea associata l'integrale particolare $g(x)$ appena trovato, otteniamo l'integrale generale dell'equazione data:

$$\underbrace{c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}}_{\text{integrale generale dell'equazione omogenea associata}} + \underbrace{\frac{1}{6} x e^{3x}}_{\text{integrale particolare dell'equazione data}}$$

Integrale generale dell'equazione data

PER SAPERNE DI PIÙ **Da che cosa dipendono le condizioni poste nella tabella degli integrali particolari?**

Nell'ultimo esempio, al secondo membro dell'equazione compare la funzione $f(x) = e^{3x}$. Tuttavia, in base a quanto indicato in tabella, non abbiamo cercato un integrale particolare del tipo $g(x) = Ae^{3x}$ bensì del tipo $g(x) = Axe^{3x}$.

Da che cosa dipende ciò? Il motivo è che sarebbe impossibile trovare una soluzione particolare del tipo $g(x) = Ae^{3x}$. Infatti, imponendo che la funzione $g(x)$ soddisfi l'equazione $y'' - 9y = e^{3x}$ si giunge alla condizione $\underbrace{9ae^{3x}}_{y''} - \underbrace{9ae^{3x}}_{y} = e^{3x}$: a causa del fatto che 3 è radice dell'equazione caratteristica, il primo membro è uguale a 0, quindi si ottiene la condizione $0 = e^{3x}$, che non è mai verificata!
In altre parole, una funzione del tipo $g(x) = Ae^{3x}$ **non** può essere soluzione dell'equazione differenziale *non omogenea* proposta, semplicemente perché essa già rientra tra le soluzioni dell'equazione *omogenea* associata. Per ragioni analoghe a queste, la tabella degli integrali particolari impone talvolta di cercare integrali particolari «somiglianti» a $xf(x)$ o a $x^2f(x)$ invece che a $f(x)$.

Problemi di Cauchy per le equazioni del secondo ordine

Gli esempi precedenti mettono chiaramente in luce che l'integrale generale di un'equazione differenziale del secondo ordine dipende da *due* parametri arbitrari.
Per individuare una soluzione particolare sarà quindi necessario imporre *due condizioni iniziali*: solitamente si richiede che in un punto x_0 la soluzione abbia un assegnato valore y_0 e la derivata prima un assegnato valore y_1. È questo il cosiddetto **problema di Cauchy per le equazioni differenziali del secondo ordine**; in particolare, per le equazioni lineari che abbiamo trattato in questo paragrafo lo si assegna nella forma:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \qquad [18]$$

Si potrebbe dimostrare che il problema **[18]**, con $f(x)$ funzione continua in **R**, ammette sempre una unica soluzione, definita in tutto **R**.

PER SAPERNE DI PIÙ **Condizioni iniziali e condizioni al contorno**

Abbiamo detto che un *problema di Cauchy* per un'equazione differenziale del secondo ordine ammette *sempre una e una sola soluzione*. Ciò **non** è più vero se si considerano due condizioni *diverse* dall'assegnazione del valore della funzione e del valore della derivata prima nello stesso punto x_0.
Per esempio, puoi verificare che:

Il problema $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 1 \end{cases}$ è *impossibile*.	Il problema $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$ ammette *infinite* soluzioni.

Osserva che **non** si tratta di problemi di Cauchy, perché le condizioni sui valori della funzione sono imposte su due punti *differenti* (e non è presente la condizione sulla derivata). Tali condizioni sono dette **al contorno** o **al bordo**, per distinguerle dalle condizioni **iniziali** o **di Cauchy**.
Per esempio, per studiare come una trave fissata alle estremità si deforma per effetto del carico cui è sottoposta occorre studiare un problema *al contorno*: il fatto che la trave sia fissata agli estremi si traduce infatti in due condizioni costituite dal valore della funzione in due punti distinti.

Esercizi p. 234

4. Problemi che hanno come modello equazioni differenziali

In questo paragrafo presentiamo alcuni problemi tipici che conducono a modelli matematici espressi da equazioni differenziali.

Modelli di crescita e di decadimento

In molti modelli matematici preposti a studiare come cresce o decresce nel tempo una data grandezza, si suppone che la *velocità di variazione* della grandezza sia *proporzionale* alla grandezza stessa.
Indicata con y la variabile che rappresenta la grandezza in esame, l'equazione differenziale che traduce questo modello matematico è:

$$\underbrace{y'}_{\substack{\text{la velocità}\\ \text{di variazione}\\ \text{di } y}} = \underbrace{ky}_{\substack{\text{è proporzionale a } y\\ (k \text{ è la costante}\\ \text{di proporzionalità})}} \qquad [19]$$

OSSERVA
Riscrivendo l'equazione differenziale [19] nella forma $\frac{y'}{y} = k$ e osservando che il rapporto $\frac{y'}{y}$ al primo membro ha il significato di *tasso istantaneo di variazione relativo* di y, si può anche dire che le equazioni del tipo [19] sono i modelli matematici dei fenomeni in cui il *tasso istantaneo di variazione relativo* è *costante.*

Le equazioni differenziali del tipo [19] con costante di proporzionalità $k > 0$ sono il più semplice modello che si applica, per esempio, allo studio dell'*evoluzione* di una popolazione che cresce, istante per istante, proporzionalmente alla popolazione stessa.
Le equazioni differenziali del tipo [19] con costante di proporzionalità $k < 0$ sono invece il modello adatto a rappresentare, per esempio, il fenomeno del *decadimento* radioattivo oppure a descrivere come *diminuisce* la concentrazione di un farmaco nel sangue con il trascorrere del tempo.

PROBLEMA SVOLTO 1 ◆ Crescita di una popolazione di roditori

In base ai dati raccolti da precedenti rilevazioni, si stima che una popolazione di comuni topi di campagna cresca, istante per istante, con una velocità proporzionale al numero di topi stessi, secondo una costante di proporzionalità $k = 40\%$ al mese.
Supponiamo che la popolazione iniziale sia composta da due topi.

a. Quanti topi ci saranno dopo 1 anno?

b. Dopo quanto tempo la popolazione raggiungerà i 1000 esemplari?

ATTENZIONE!
In questo caso la variabile *indipendente* non è la consueta x ma la variabile t che rappresenta il tempo. Ciò è molto frequente nei problemi di modellizzazione che coinvolgono equazioni differenziali.

FAMILIARIZZIAMO CON IL PROBLEMA

Ci poniamo l'obiettivo di determinare una funzione $y = y(t)$ che esprima il numero $y(t)$ di topi al tempo t (misurato in mesi). Grazie a questa funzione, potremo rispondere alle domande poste dal problema.

COSTRUIAMO IL MODELLO DEL PROBLEMA

Tenendo conto di quanto osservato a proposito della [19], le informazioni fornite dal testo si possono tradurre nella seguente equazione differenziale:

$$\underbrace{y'}_{\substack{\text{il tasso (istantaneo)}\\ \text{di crescita della}\\ \text{popolazione}}} = \underbrace{0{,}4 \cdot y}_{\substack{\text{è proporzionale}\\ \text{alla popolazione stessa}\\ \text{secondo la costante}\\ k = 40\% = 0{,}4}}$$

È nota inoltre la condizione iniziale:

$$y(0) = 2$$

Il modello del nostro problema è quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 0{,}4\,y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

L'equazione può essere risolta sia come equazione a *variabili separabili*, sia come equazione *lineare* omogenea. Seguendo quest'ultima via, abbiamo che $a(t) = 0{,}4$ e una sua primitiva è $A(t) = 0{,}4t$; quindi l'integrale generale è:

$$y = ce^{0{,}4t}$$

Ricorda che l'integrale generale di $y' = a(t)y$ è $y = ce^{A(t)}$

In base alla condizione $y(0) = 2$, otteniamo infine $c = 2$, quindi l'espressione analitica della funzione cercata è:

$$y = 2\, e^{0{,}4t}$$

RISPONDIAMO

Per valutare il numero di topi dopo un anno, ossia dopo 12 mesi, calcoliamo:

$$y(12) = 2\, e^{0{,}4\cdot 12} = 2\, e^{4{,}8} \simeq 243{,}02$$

Dopo 1 anno dobbiamo quindi aspettarci una popolazione di circa 243 topi.
Per determinare quando la popolazione di topi raggiungerà i 1000 esemplari, risolviamo l'equazione:

$$2e^{0{,}4t} = 1000 \Rightarrow e^{0{,}4t} = 500 \Rightarrow 0{,}4t = \ln 500 \Rightarrow t = \frac{\ln 500}{0{,}4} \simeq 15{,}54$$

Concludiamo quindi che i 1000 esemplari verranno raggiunti dopo circa 15 mesi e mezzo.

Come suggerisce quanto emerso dalla soluzione di quest'ultimo problema, l'integrale generale dell'equazione [19] è:

$$y = ce^{kt} \qquad [20]$$

Il modello adatto a descrivere i fenomeni governati da equazioni differenziali del tipo [19] sono dunque le funzioni *esponenziali*.
Il difetto del modello esponenziale, per quanto riguarda l'applicazione allo studio della crescita di una popolazione, è che esso implica, con il trascorrere del tempo, una crescita *illimitata* della popolazione stessa: infatti, se $k > 0$, il limite della funzione [20] per $t \to +\infty$ è $+\infty$. In molti casi ciò non è realistico: all'aumentare della popolazione intervengono infatti dei vincoli esterni che frenano la crescita (per esempio limitazioni ambientali, saturazione dell'ambiente, riduzione delle risorse nutritive ecc.). Una modifica all'equazione $y' = ky$ per costruire un modello che tenga conto di questi fattori consiste nel moltiplicare la costante k per un fattore che *decresce* al *crescere* della popolazione. Una possibilità è assumere come modello l'equazione differenziale:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{h}\right) \qquad [21]$$

dove k e h sono costanti positive.
L'equazione [21] è detta **equazione logistica**. Risolvendola, si trova che il suo integrale generale è:

$$y = \frac{h}{1 + ce^{-kt}}$$

Il grafico di una funzione di questo tipo (con $h > 0$ e $k > 0$) è quello mostrato in **Fig. 1**: come puoi vedere, $y \to h$ per $t \to +\infty$: la costante h, detta **capacità dell'ambiente**, rappresenta il «tetto» che la popolazione non può superare.

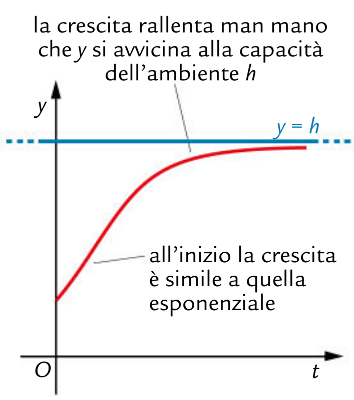


Figura 1 **Grafico della soluzione dell'equazione logistica.**

RIFLETTI

Ragiona sull'equazione [21]. Quando y è un numero piccolo il fattore $1 - \frac{y}{h}$ è prossimo a 1, quindi influisce poco sul modello (la crescita, all'inizio, è dunque simile a quella del modello esponenziale); al contrario, via via che y si avvicina ad h, il fattore $1 - \frac{y}{h}$ diventa sempre più prossimo a 0, esercitando una correzione sempre più marcata del modello esponenziale, finché, nel caso limite in cui $y = h$, risulta $y' = 0$, ovvero la crescita si arresta.

Modelli in fisica: l'equazione del moto

Passiamo ora a occuparci di problemi che conducono a equazioni differenziali nell'ambito della *fisica*. Consideriamo un punto materiale P di massa m che può muoversi lungo una retta. Fissiamo un sistema di ascisse rispetto al quale la posizione del punto P sia rappresentata dall'ascissa $x(t)$ di P e supponiamo che il punto sia soggetto a una forza costante di intensità F (diretta nella stessa direzione e nello stesso verso dell'asse x). La legge di Newton del moto fornisce l'equazione:

$$\underbrace{F}_{\text{forza}} = \underbrace{m}_{\text{massa}} \cdot \underbrace{x''}_{\text{accelerazione}}$$

ossia:

$$x'' = \frac{F}{m} \qquad [22]$$

ATTENZIONE!

In questo caso $x = x(t)$, quindi nell'equazione [22] la variabile *dipendente* è x mentre la variabile *indipendente* è t. In altre parole: t fa le veci della consueta x e x fa le veci della consueta y.

Il moto del punto è quindi descritto da un'equazione differenziale del secondo ordine. Integrando due volte otteniamo:

$$x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + c_1 t + c_2$$

dove le due costanti c_1 e c_2 possono essere determinate, per esempio, fissando la posizione e la velocità del punto a un dato istante (per esempio quando $t = 0$).
Più in generale, possiamo considerare il caso in cui sul punto P agisce una forza **non** costante oppure il caso in cui agiscono più forze, di varia natura: applicando la legge del moto di Newton sarà comunque sempre possibile scrivere l'equazione differenziale che descrive il moto del punto, anche se si otterranno ovviamente equazioni differenziali di tipo più complicato rispetto alla [22].

PROBLEMA SVOLTO 2 ◆ Il paracadutista

Un modello per descrivere la caduta libera di un paracadutista, prima che apra il paracadute, consiste nell'assumere che egli sia soggetto, oltre che al proprio peso, a una forza dovuta alla resistenza dell'aria, che agisce in verso opposto alla forza peso e che si suppone direttamente proporzionale alla velocità del paracadutista secondo una costante k (misurata in kg/s). Assumendo questo modello, con una costante $k = 7$ kg/s, e supponendo che il paracadutista, di massa 70 kg, si lanci dall'aereo con velocità iniziale nulla, rispondere alle seguenti domande.

a. Quale sarà la velocità del paracadutista dopo 20 s?
b. Quale velocità limite potrà raggiungere il paracadutista, prima di aprire il paracadute?

FAMILIARIZZIAMO CON IL PROBLEMA

Ci poniamo l'obiettivo di determinare una funzione $v = v(t)$ che esprima la velocità $v(t)$ (in m/s) del paracadutista all'istante t (misurando il tempo in secondi). Grazie a questa funzione potremo rispondere alle domande poste dal problema.

COSTRUIAMO IL MODELLO DEL PROBLEMA

Assumiamo come sistema di riferimento un asse y, con verso orientato verso il basso. Sul paracadutista agiscono la forza peso, mg, e la forza di resistenza dovuta all'aria, $-kv$; la legge del moto di Newton fornisce l'equazione:

$$ma = mg - kv$$ $a = a(t)$ indica l'accelerazione

Osservando che $a = v'$, possiamo riscrivere questa equazione in termini della velocità:

$$mv' = mg - kv$$

È noto inoltre che la velocità iniziale del paracadutista è nulla, quindi che:

$$v(0) = 0$$

Il modello del nostro problema è dunque il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} mv' = mg - kv \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

L'equazione differenziale:

$$mv' = mg - kv$$ L'incognita è $v = v(t)$

è lineare del primo ordine.
Presta attenzione al fatto che qui la variabile *indipendente* è t e la variabile *dipendente* è v. Puoi risolvere l'equazione separando le variabili, oppure secondo lo schema delle equazioni lineari del primo ordine, riconoscendo che l'equazione è del tipo:

$$v' = a(t)v + b(t) \qquad \text{con } a(t) = -\frac{k}{m} \text{ e } b(t) = g$$

La formula che dà l'integrale generale è:

$$v(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

essendo $A(t)$ una primitiva di $a(t)$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Imponendo la condizione $v(0) = 0$ si trova che deve essere $c = -\frac{mg}{k}$, quindi:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Tenendo conto, infine, dei dati del nostro problema, ossia $m = 70$ kg, $k = 7$ kg/s e che $g = 9{,}8$ m/s^2, concludiamo che il modello del nostro problema è la funzione:

$$v(t) = 98\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right)$$

UTILIZZIAMO LA FUNZIONE OTTENUTA PER RISPONDERE ALLE DOMANDE DEL PROBLEMA

Per determinare la velocità del paracadutista dopo 20 s calcoliamo:

$$v(20) = 98\,(1 - e^{-2}) \simeq 84{,}74$$

La velocità del paracadutista sarà quindi di circa 85 m/s.
Poiché la funzione $v(t)$ è strettamente crescente e il suo limite per $t \to +\infty$ è 98, concludiamo che la velocità «limite» che potrà essere raggiunta dal paracadutista è di circa 98 m/s (**Fig. 2**).

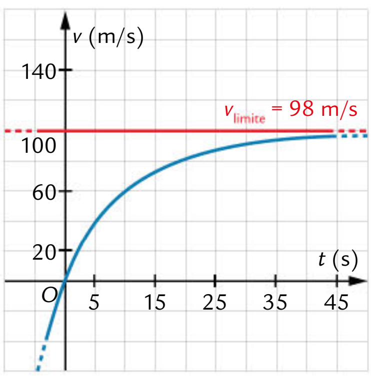


Figura 2

Approfondimento
Oscillazioni libere, smorzate, forzate. La risonanza.

Esercizi p. 237

Equazioni differenziali

Equazione differenziale

Un'equazione in cui l'incognita è una funzione (diciamo y) e in cui compaiono una o più *derivate* della funzione incognita (y', y'', ...).
Il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione si dice **ordine** dell'equazione differenziale.

ESEMPI

L'equazione $y' = y^3 + 2x$ è del primo ordine.
L'equazione $y'' = y' + x^3$ è del secondo ordine.

Soluzione in un intervallo *I*

Per un'equazione di ordine n è una funzione derivabile n volte in I, che soddisfa l'equazione per ogni $x \in I$.

ESEMPIO

La funzione $y = x^3$ è una soluzione in $\mathbf{R}$ dell'equazione differenziale $y'' = 6x$.

Equazioni del primo ordine

Ci siamo limitati a considerare le equazioni lineari, quelle a variabili separabili e alcune particolari equazioni a esse riconducibili.

Lineare

Equazione del tipo:

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

L'integrale generale è:

$$y = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\, dx$$

A(*x*) è una primitiva di *a*(*x*) e nel suo calcolo si può omettere la costante di integrazione

Nel calcolo dell'integrale la costante di integrazione va considerata

ESEMPIO

$y' = 2xy + x$ $\quad a(x) = 2x \quad b(x) = x$

$A(x) = \int 2x\, dx = x^2$

$$y = e^{x^2} \cdot \int e^{-x^2} \cdot x\, dx = e^{x^2}\left[-\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2} dx\right] =$$

$$= e^{x^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\right] = \boxed{-\frac{1}{2} + ce^{x^2}}$$ integrale generale

A variabili separabili

Equazione del tipo

$$y' = a(x) \cdot b(y)$$

ESEMPIO

$y' = 2xy^2$ $\quad a(x) = 2x \quad b(y) = y^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y^2$

$y = 0$ è una soluzione; se $y \neq 0$:

$\frac{dy}{y^2} = 2xdx$ Separando le variabili

$\int y^{-2} dy = \int 2x\, dx$ Integrando

$\frac{y^{-1}}{-1} = x^2 + c$

$y^{-1} = -x^2 + c$

$y = \frac{1}{c - x^2}$ Integrale generale (non comprende la soluzione $y = 0$)

Di Bernoulli

Equazione del tipo:

$$y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^n$$

$y = y(x)$

$z = z(x)$

riconducibile a lineare con la sostituzione $z = y^{1-n}$

Omogenea

Equazione del tipo: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Riconducibile a variabili separabili con la sostituzione $z = \frac{y}{x}$

$y = y(x)$

$z = z(x)$

Equazioni lineari del secondo ordine

Ci siamo limitati a considerare le equazioni a coefficienti costanti, cioè quelle della forma:

$ay'' + by' + cy = f(x)$, con $a, b, c \in \mathbf{R}$

Se $f(x) = 0$, l'equazione si dice omogenea.

ESEMPI

$2y'' + 3y' + y = x^2$ (non omogenea); $4y'' - y' - 5y = 0$ (omogenea)

Omogenea

L'integrale generale dell'equazione $ay'' + by' + cy = 0$ dipende dal discriminante Δ dell'equazione caratteristica $ar^2 + br + c = 0$, associata all'equazione differenziale.

Se $\Delta > 0$

L'integrale generale dell'equazione è:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c^2 e^{r_2 x}$$

(essendo r_1, r_2 le soluzioni dell'equazione caratteristica)

ESEMPIO

$y'' + y' = 0$ ha come equazione caratteristica:

$r^2 + r = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = 0$

L'integrale generale è:

$y = c_1 \cdot e^{-1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{0 \cdot x} =$
$= c_1 e^{-x} + c_2$

Se $\Delta = 0$

L'integrale generale dell'equazione è:

$$y = e^{rx}(c_1 + c_2 x)$$

(essendo r la soluzione doppia dell'equazione caratteristica)

ESEMPIO

$y'' + 2y' + y = 0$ ha come equazione caratteristica:

$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1$

è soluzione doppia.
L'integrale generale è:

$y = e^{-1 \cdot x}(c_1 + c_2 x) =$
$= e^{-x}(c_1 + c_2 x)$

Se $\Delta < 0$

L'integrale generale dell'equazione è:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

(essendo $r_1 = \alpha - \beta i$ ed $r_2 = \alpha + \beta i$ le soluzioni dell'equazione caratteristica)

ESEMPIO

$y'' + y = 0$ ha come equazione caratteristica:

$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -i,\ r_2 = i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

L'integrale generale è:

$y = e^{0x}[c_1 \cos(1 \cdot x) + c_2 \sin(1 \cdot x)] =$
$= c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Non omogenea

integrale generale dell'equazione $ay'' + by' + cy = f(x)$ = integrale generale dell'equazione omogenea associata, $ay'' + by' + cy = 0$ + integrale particolare dell'equazione originaria

ESEMPIO

L'integrale generale dell'equazione: $y'' + y' = x^2$ $=$ $\underbrace{c_1 e^{-x} + c_2}_{\text{Integrale generale di } y'' + y' = 0}$ $+$ $\underbrace{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x}_{\text{Soluzione particolare calcolata con il metodo di somiglianza}}$

Unità 4 Esercizi

1. Introduzione alle equazioni differenziali

Teoria p. 210

Esercizi introduttivi

Test

1 Qual è l'ordine dell'equazione differerenziale $y''' + 3xy' + 2y^4 = -x^2$?

A 1 B 2 C 3 D 4

2 Quale delle seguenti equazioni differenziali è del secondo ordine?

A $y + 3 = yy'$ B $y^2 + 3 = y'$ C $y + y'' = -1$ D $\dfrac{1}{y + y'} = y^2$

Le soluzioni di un'equazione differenziale

3 Stabilisci quali delle seguenti funzioni sono soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + y = 0$:

a. $y = 2 \sin x$
b. $y = \sin 2x$
c. $y = \sin x - \cos x$
d. $y = \sin x + \cos x + 1$

4 Stabilisci quali delle seguenti funzioni sono soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - 4y = 0$:

a. $y = e^{2x}$
b. $y = e^{4x}$
c. $y = e^{-2x}$
d. $y = e^{2x} + 1$

---

5 Determina a, b e c in modo che $y = ax^2 + bx + c$ sia una soluzione dell'equazione differenziale:
$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1$ $\left[a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2},\ c = \frac{9}{4}\right]$

6 Determina a, b e c in modo che $y = ax^2 + bx + c$ sia una soluzione dell'equazione differenziale:
$y'' - y' - 2y = 2x^2 + 4x + 1$ $[a = -1,\ b = -1,\ c = -1]$

7 Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = x(x^2 + 1)^2$. $\left[y = \frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 + c\right]$

8 Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = \sin x - \cos x$. $[y = -\cos x - \sin x + c]$

9 Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' = x + 2$. $\left[y = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + c_1 x + c_2\right]$

10 Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' = x + e^{2x}$. $\left[y = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2\right]$

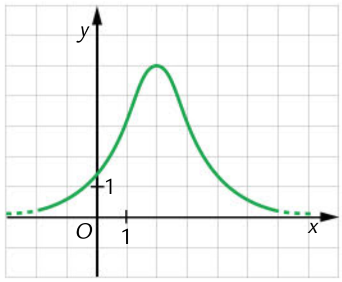
11 **Inventa tu.** Scrivi un'equazione differenziale del primo ordine che abbia tra le sue soluzioni la funzione:
$y = \cos x - \sin x$

12 **Inventa tu.** Scrivi un'equazione differenziale del secondo ordine che abbia tra le sue soluzioni la funzione:
$y = \cos x - \sin x$

13 **Inventa tu.** Scrivi un'equazione differenziale del secondo ordine che abbia tra le sue soluzioni la funzione:
$y = x^2 e^x$

Interpretazione di grafici

14 Stabilisci se la funzione il cui grafico è rappresentato in figura può essere una soluzione dell'equazione differenziale $y' - 4y = 3$.



15 **Test.** La funzione il cui grafico è rappresentato in figura è soluzione di una sola delle seguenti equazioni differenziali:

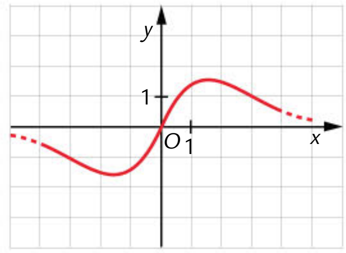
A $y' = 2 + xy$

B $y' = 2 - xy$

C $y' = -4xy$

D $y' = 4xy$

Individua qual è l'equazione differenziale di cui la funzione è soluzione, giustificando la risposta.



2. Equazioni differenziali del primo ordine

Teoria p. 211

Esercizi introduttivi

Test

16 Quale delle seguenti equazioni differenziali è lineare?

A $y + 3 = yy'$

B $y^2 + 3 = y'$

C $y + y' = -1$

D $\dfrac{1}{y + y'} = y$

17 Quale delle seguenti equazioni differenziali **non** è lineare?

A $y' = x^2 y + \sin x$

B $y' = xy + x^3$

C $y' = xy + \sin y$

D $y' = x^3$

Argomentare e dimostrare

18 Fabrizio sostiene che l'equazione $y' = e^{3x+2y}$ **non** è a variabili separabili. Spiega perché sta sbagliando.

19 Anna sostiene che l'equazione $e^{y'} = xy$ è a variabili separabili perché riconducibile a $\dfrac{e^{y'}}{y} = x$. Spiega perché sta sbagliando.

Equazioni lineari da risolvere

20 **ESERCIZIO SVOLTO**

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione $y' = \dfrac{2y}{x} + x^2$.

- Si tratta di un'equazione lineare, cioè della forma $y' = a(x)y + b(x)$, con: $a(x) = \dfrac{2}{x}$ e $b(x) = x^2$.
- La formula risolutiva di tale equazione è: $y = e^{A(x)} \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx$, con $A(x)$ primitiva di $a(x)$

  (dove la costante di integrazione c va tenuta in considerazione solo nel calcolo dell'integrale, mentre è superflua nel calcolo della primitiva).
- Applicando la formula risolutiva al nostro esempio, otteniamo: $A(x) = \int \dfrac{2}{x}\, dx = 2\ln|x| = \ln|x|^2 = \ln x^2$

  quindi l'integrale generale è: $y = e^{\ln x^2} \cdot \int e^{-\ln x^2} x^2\, dx$ da cui:

$$y = x^2 \cdot \int \frac{1}{x^2} \cdot x^2\, dx$$

$e^{\ln x^2} = x^2$ ed $e^{-\ln x^2} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{x^2}$ in base alla definizione di logaritmo e alle proprietà dei logaritmi

$$y = x^2 \cdot \int 1\, dx$$

$$y = x^2(x + c)$$

Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni lineari.

21 $y' = 4y$ $[y = ce^{4x}]$

22 $y' = -3xy$ $\left[y = ce^{-\frac{3}{2}x^2}\right]$

23 $y' = y \sin x$ $[y = ce^{-\cos x}]$

24 $y' = \dfrac{3y}{x}$ $[y = cx^3]$

25 $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x+1}}$ $\left[y = ce^{2\sqrt{x+1}}\right]$

26 $y' = xy \cos x$ $[y = ce^{\cos x + x \sin x}]$

27 $y' = 2y + 6$ $[y = ce^{2x} - 3]$

28 $y' = 3y + 9$ $[y = ce^{3x} - 3]$

29 $y' - y = e^x$ $[y = (c + x)e^x]$

30 $y' + y = e^{-2x}$ $[y = ce^{-x} - e^{-2x}]$

31 $y' - y = 8$ $[y = ce^x - 8]$

32 $y' - 4xy = e^{2x^2}$ $[y' = (x + c)e^{2x^2}]$

33 $y' + 4y = e^{2x}$ $\left[y = ce^{-4x} + \frac{1}{6}e^{2x}\right]$

34 $y' + 2xy = -x$ $\left[y = ce^{-x^2} - \frac{1}{2}\right]$

35 $y' = 2y + e^{3x}$ $[y = e^{3x} + ce^{2x}]$

36 $y' = -y + e^{2x}$ $\left[y = \frac{1}{3}e^{2x} + ce^{-x}\right]$

37 $y' = y - x$ $[y = ce^x + x + 1]$

38 $y' = y + x + 1$ $[y = ce^x - x - 2]$

39 $y' - y = 4xe^{-x}$ $[y = ce^x - e^{-x}(2x + 1)]$

40 $xy' = 2x - y$, con $x > 0$ $\left[y = \frac{c}{x} + x\right]$

41 $xy' + 2y = x$ $\left[y = \frac{c}{x^2} + \frac{x}{3}\right]$

42 $y' + \dfrac{2y - 1}{x} = x + 1$ $\left[y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{c}{x^2}\right]$

43 Videolezione $y' + \dfrac{2}{x}y = 4$ $\left[y = \frac{c}{x^2} + \frac{4}{3}x\right]$

44 **E se?** $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x - 1}{x}$, con $x > 0$

▶ Come cambierebbe la risposta se fosse $x < 0$? Sai scrivere un integrale generale valido sia per $x > 0$, sia per $x < 0$? $[y = x \ln |x| + cx + 1$, valido sia per $x > 0$, sia per $x < 0]$

45 **E se?** $(x - 2)y' + y = x^2 - 4$, con $x > 2$

▶ Cambierebbe la risposta se fosse $x < 2$? $\left[y = \frac{x^3 - 12x + c}{3(x - 2)}; \text{no}\right]$

46 $y' + y = 2 \sin x$ $[y = ce^{-x} + \sin x - \cos x]$

47 $y' + y \tan x = 2 \cos x$ $[y = (2x + c) \cos x]$

48 $y' = -\dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{x^3 + 1}$ $\left[y = \frac{\ln (x^3 + 1)}{3x^2} + \frac{c}{x^2}\right]$

49 ESERCIZIO GUIDATO

Risolvi il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 2 \end{cases}$

- Determina l'integrale generale dell'equazione $y' = x - y$ e verifica che è:

  $y = ce^{-x} + x - 1$ [*]

- Determina ora la costante c in base alla condizione $y(0) = 2$; imponendo che il grafico di una funzione di equazione [*] passi per $(0, 2)$ troverai $c =$ ..... Dunque la soluzione del problema di Cauchy è:

  $y =$ ...... $[y = 3e^{-x} + x - 1]$

Risolvi i seguenti problemi di Cauchy.

50 $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 3 \end{cases}$ $[y = 4e^x - x - 1]$

51 $\begin{cases} y' = 2xy + x \\ y(0) = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ $\left[y = 3e^{x^2} - \frac{1}{2}\right]$

52 $\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} \\ y\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) = 5 \end{cases}$ $\left[y = 2e^{\frac{1}{x}} + 1\right]$

53 $\begin{cases} y' + y \sin x = \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 5 \end{cases}$ $[y = 4e^{\cos x} + 1]$

54 $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + x^3 \\ y(3) = 6 \end{cases}$, con $x > 0$ $\left[y = \frac{1}{3}x^4 - 7x\right]$

55 $\begin{cases} y' = -y \cot x + \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$, con $0 < x < \pi$ $\left[y = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cos x\right]$

Equazioni a variabili separabili

56 ESERCIZIO GUIDATO

Determina l'integrale generale dell'equazione $y^2 y' = \sin x$.

- Controlla se esistono soluzioni costanti.
- Separa le variabili, riscrivendo l'equazione nella forma:

  $y^2 dy = \sin x \, dx$

  Integra i due membri:

  $\frac{y^3}{\dots\dots} = \dots\dots + c$

  Esprimi infine y in funzione di x, ottenendo così che l'integrale generale è dato dalla formula:

  $y = \sqrt[3]{3c - 3\cos x}$
- Osserva che, al variare di c in **R**, $3c$ assume tutti i valori reali, esattamente come c; quindi l'integrale generale dell'equazione può scriversi più semplicemente nella forma:

  $y = \sqrt[3]{c - 3\cos x}$

Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni a variabili separabili.

57 $y' = \frac{y^2}{x^2+1}$ $\left[y = \frac{1}{c - \arctan x},\ y = 0\right]$

58 $y^2 y' = \frac{1}{x+1}$ $\left[y = \sqrt[3]{3\ln|x+1| + c}\right]$

59 Videolezione $yy' = \sin x$ $\left[y = \pm\sqrt{c - 2\cos x}\right]$

60 $y' = (2x+1)e^{-y}$ $[y = \ln(x^2 + x + c)]$

61 $y' = \frac{3x^2+2x+1}{3y^2}$ $\left[y = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + c}\right]$

62 $y' = 2x(y-1)^2$ $\left[y = 1 - \frac{1}{x^2+c},\ y = 1\right]$

63 $y' = 6e^{2x}\sqrt[3]{y^2}$ $[y = (e^{2x}+c)^3,\ y = 0]$

64 $y' = y\cos x$ $[y = ce^{\sin x}]$

65 $yy' = x^3$ $\left[y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + c}\right]$

66 $y' = e^x(y+1)^2$ $\left[y = -\frac{e^x + c + 1}{e^x + c},\ y = -1\right]$

67 $y' = \frac{2x}{2y-1}$ $\left[y = \frac{1 \pm \sqrt{4x^2 + c}}{2}\right]$

68 $y' = y^2(4 - x^2)$ $\left[y = 0,\ y = \frac{3}{x^3 - 12x + c}\right]$

69 $y' = -y^2\cos x$ $\left[y = 0,\ y = \frac{1}{\sin x + c}\right]$

70 $y' = 2ye^{-x}$ $[y = ce^{-2e^{-x}}]$

71 $xy' = y^2 - 2y + 1$ $\left[y = 1 - \frac{1}{c + \ln|x|}\right]$

72 $xy' = e^{-y}$ $[y = \ln(c + \ln|x|)]$

73 $(y+1)\sin x - y' = 0$ $[y = ce^{-\cos x} - 1]$

74 $y' = 9\sqrt{y}$ $\left[y = 0,\ y = \left(\frac{9}{2}x + c\right)^2,\ \text{con } \frac{9}{2}x + c \geq 0\right]$

75 $y' = e^{2x+y}$ $\left[y = -\ln\left(c - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\right]$

76 $y' = \frac{x+1}{y+1}$ $\left[y = -1 \pm \sqrt{x^2 + 2x + c}\right]$

77 $y' = y\ln x$ $[y = ce^{x(\ln x - 1)}]$

78 $y' = (1+e^x)y$ $[y = ce^{x+e^x}]$

79 $y' = 3x^2y - 3x^2$ $[y = 1 + ce^{x^3}]$

80 $3y' = \frac{x}{y^2}\sin x$ $\left[y = \sqrt[3]{\sin x - x\cos x + c}\right]$

81 $y' = \frac{xy + 2y}{x-2}$ $[y = c(x-2)^4 e^x]$

82 $3y' = \frac{2xe^x}{\sqrt{y}}$ $\left[y = \sqrt[3]{(xe^x - e^x + c)^2},\ \text{con } xe^x - e^x + c \geq 0\right]$

83 $y' = 3x^2(1+y^2)$ $\left[y = \tan(x^3 + c),\ \text{con } \sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} - c} < x < \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - c}\right]$

Metodi a confronto

84 Risolvi l'equazione $y' - x^2 y = 0$ in due modi:
a. come equazione lineare del primo ordine;
b. come equazione a variabili separabili.
Verifica che le soluzioni ottenute sono le stesse.
$\left[y = ce^{\frac{1}{3}x^3}\right]$

85 Risolvi l'equazione $(2-x)y' = y$ in due modi:
a. come equazione lineare del primo ordine;
b. come equazione a variabili separabili.
Verifica che le soluzioni ottenute sono le stesse.
$\left[y = \dfrac{c}{x-2}\right]$

86 ESERCIZIO SVOLTO

Risolviamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2+2x+1}{2y} \\ y(0) = -2 \end{cases}$

- Integrando l'equazione a variabili separabili $y' = \dfrac{3x^2+2x+1}{2y}$, si trova che l'integrale generale è:
  $$y = \pm\sqrt{x^3+x^2+x+c}$$
- La soluzione del problema di Cauchy dato **non** può appartenere alla famiglia di funzioni di equazione $y = \sqrt{x^3+x^2+x+c}$, perché queste ultime assumono solo valori positivi o nulli, mentre la soluzione cercata deve assumere valore -2 per $x = 0$. La soluzione va dunque cercata nell'insieme delle funzioni di equazione:
  $$y = -\sqrt{x^3+x^2+x+c}$$
  Imponendo la condizione $y(0) = -2$, troviamo che $c = 4$; pertanto la soluzione del problema di Cauchy è:
  $$y = -\sqrt{x^3+x^2+x+4}$$

Risolvi i seguenti problemi di Cauchy.

87 $\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2+2x+4}{2y} \\ y(0) = 3 \end{cases}$ $\left[y = \sqrt{x^3+x^2+4x+9}\right]$

88 $\begin{cases} y' = -\dfrac{y^2}{2\sqrt{x+1}} \\ y(3) = \dfrac{1}{5} \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+3}\right]$

89 $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}\cos x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4 \end{cases}$ $[y = (\sin x + 1)^2]$

90 $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2xy+2y} \\ y(0) = -2 \end{cases}$ $\left[y = -\sqrt{\ln|x+1|+4}\right]$

91 $\begin{cases} y' = 2x(y+1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $[y = -1 + 2e^{x^2}]$

92 $\begin{cases} y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{x} \\ y(1) = 4 \end{cases}$ $[y = (2+\ln|x|)^2, \text{ con } |x| \geq e^{-2}]$

Equazioni omogenee ed equazioni di Bernoulli

93 ESERCIZIO GUIDATO

Risolvi l'equazione omogenea $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$.

- Osserva preliminarmente che $y = 0$ è soluzione dell'equazione. Supposto $y \neq 0$, poni $\dfrac{y}{x} = z$ (con $z \neq 0$ dal momento che $y \neq 0$), da cui $y = xz$ e quindi $y' = z + xz'$. L'equazione diventa così:
  $$z + xz' = z + z^2 \quad \text{da cui} \quad xz' = z^2$$
- Risolvi l'equazione a variabili separabili ottenuta, verificando che $z(x) = \dfrac{1}{c - \ln|x|}$.
- Deduci le soluzioni dell'equazione originaria.

$\left[y = 0,\ y = \dfrac{x}{c - \ln|x|}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni omogenee del primo ordine.

94 $y' = \frac{2x}{y} + \frac{y}{x}$ $\left[y = \pm x\sqrt{4\ln|x| + c}\right]$

95 $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ $\left[y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + c}\right]$

96 $y' = \frac{y^3 - x^3}{xy^2}$ $\left[y = x\sqrt[3]{c - 3\ln|x|}\right]$

97 $y' = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ $\left[y = \pm\sqrt{\frac{x^4 + c}{2x^2}}\right]$

98 $y' = -\frac{y}{y + x}$ $\left[y = -x \pm \sqrt{c + x^2}\right]$

99 $y' = \frac{x + y}{y - x}$ $\left[y = x \pm \sqrt{2x^2 + c}\right]$

100 ESERCIZIO GUIDATO

Risolvi l'equazione di Bernoulli $y' = y - xy^2$.

- Osserva che $y = 0$ è una soluzione; supposto $y \neq 0$, dividendo entrambi i membri per y^2 ottieni:

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y} - x$$

- Poni $\frac{1}{y} = z$, da cui $z' = -\frac{y'}{y^2}$; l'equazione diventa:

$$-z' = z - x \quad \text{da cui} \quad z' = -z + x$$

- Risolvi questa equazione lineare del primo ordine, verificando che $z = ce^{-x} + x - 1$.
- Deduci le soluzioni dell'equazione originaria. $\left[y = 0,\ y = \frac{1}{ce^{-x} + x - 1}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni di Bernoulli.

101 $y' = y - (x^2 + 1)y^2$ $\left[y = 0,\ y = \frac{1}{ce^{-x} + x^2 - 2x + 3}\right]$

102 $y' = -y + 2xy^2$ $\left[y = 0,\ y = \frac{1}{ce^{x} + 2(x + 1)}\right]$

103 $y' = 4y + e^x y^2$ $\left[y = 0,\ y = -\frac{5e^{4x}}{c + e^{5x}}\right]$

104 $y' = 2y + e^x\sqrt{y}$ $\left[y = 0,\ y = \frac{1}{4}e^{2x}(c + x)^2\right]$

105 $y' = xy + \frac{2x}{y}$ $\left[y = \pm\sqrt{ce^{x^2} - 2}\right]$

106 $y' = y - \frac{2x}{y}$ $\left[y = \pm\sqrt{ce^{2x} + 2x + 1}\right]$

107 $y' = \frac{2}{x}y + 8x^2\sqrt{y}$ $\left[y = 0,\ y = (2x^3 + cx)^2\right]$

108 $y' = y - 8x\sqrt[3]{y}$ $\left[y = 0,\ y = \sqrt{\left(ce^{\frac{2x}{3}} + 8x + 12\right)^3}\right]$

Risolvi le seguenti particolari equazioni del secondo ordine, riconducibili al primo.

109 $2xy'' = y'$ $\left[y = c_1 x\sqrt{x} + c_2\right]$

110 $y'' = 2y' + 4$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 - 2x\right]$

111 $xy'' = 3x - y'$, con $x > 0$ $\left[y = c_1\ln x + c_2 + \frac{3}{4}x^2\right]$

112 $y'' = y' - 2x$ $\left[y = c_1 e^x + c_2 + x^2 + 2x\right]$

3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Teoria p. 217

Esercizi introduttivi

Test

113 Quale delle seguenti funzioni può essere un integrale *particolare* dell'equazione $y''+6y'+9y=e^{-3x}$? A è un coefficiente reale da determinare.

- A $y=Ae^{-3x}$
- B $y=Axe^{-3x}$
- C $y=Ax^2e^{-3x}$
- D Nessuna delle precedenti

114 Quale delle seguenti funzioni può essere un integrale *particolare* dell'equazione $y''+6y'+9y=-e^{3x}$? A è un coefficiente reale da determinare.

- A $y=Ae^{3x}$
- B $y=Axe^{3x}$
- C $y=Ax^2e^{3x}$
- D Nessuna delle precedenti

115 **Associazione.** A ciascuna equazione differenziale sulla sinistra associa una sua soluzione sulla destra.

a. $y''+6y'+8y=0$	**A.** $y=e^{-3x}(3\sin x-2\cos x)$
b. $y''+9y'+8y=0$	**B.** $y=3e^{-4x}-2e^{-2x}$
c. $y''+6y'+9y=0$	**C.** $y=3e^{-3x}+2xe^{-3x}$
d. $y''+6y'+10y=0$	**D.** $y=e^{-8x}-2e^{-x}$

Equazioni omogenee

116 ESERCIZIO GUIDATO

Determina gli integrali generali delle seguenti equazioni differenziali:

a. $y''+5y'-6y=0$ **b.** $y''+8y'+16y=0$ **c.** $y''-4y'+20y=0$

a. L'equazione caratteristica, $r^2+5r-6=0$, ha come soluzioni: $r_1=-6$, $r_2=1$, quindi l'integrale generale è:

$$y=c_1e^{\cdots}+c_2e^{\cdots}$$

b. L'equazione caratteristica, $r^2+8r+16=0$, ha la soluzione doppia $r=-4$, quindi l'integrale generale è:

$$y=e^{\cdots}(c_1+c_2x)$$

c. L'equazione caratteristica, $r^2-4r+20=0$, ha le soluzioni complesse coniugate $2\pm4i$, quindi l'integrale generale è:

$$y=e^{2x}(c_1\cos \ldots\ldots + c_2\sin \ldots\ldots)$$

Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni.

117 $y''+2y'-3y=0$ $\quad[y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}]$

118 $y''=-2y'$ $\quad[y=c_1+c_2e^{-2x}]$

119 $y''-4y=0$ $\quad[y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}]$

120 $y''+9y=0$ $\quad[y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x]$

121 $y''+8y'+16y=0$ $\quad[y=e^{-4x}(c_1+c_2x)]$

122 $y''+8y'-9y=0$ $\quad[y=c_1e^{x}+c_2e^{-9x}]$

123 $y''+2y'+4y=0$ $\quad\left[y=e^{-x}\left[c_1\cos\left(x\sqrt{3}\right)+c_2\sin\left(x\sqrt{3}\right)\right]\right]$

124 $y''-3y'-4y=0$ $\quad[y=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}]$

125 $2y''+3y'-14y=0$ $\quad\left[y=c_1e^{2x}+c_2e^{-\frac{7}{2}x}\right]$

126 $y''=-2y$ $\quad\left[y=c_1\cos\left(x\sqrt{2}\right)+c_2\sin\left(x\sqrt{2}\right)\right]$

127 $y'' + 3y' - 10y = 0$ $[y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}]$

128 $y'' - 6y' + 9y = 0$ $[y = (c_1 + c_2x)e^{3x}]$

129 Videolezione $y'' + 4y' + 5y = 0$ $[y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)]$

130 $y'' = 4y' - 13y$ $[y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)]$

131 $3y'' = y' + 2y$ $\left[y = c_1e^{x} + c_2e^{-\frac{2}{3}x}\right]$

132 $y'' + 2y' + 10y = 0$ $[y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)]$

133 $y'' = 2y' + y$ $\left[y = c_1e^{(1-\sqrt{2})x} + c_2e^{(1+\sqrt{2})x}\right]$

134 $y'' - 5y = 0$ $\left[y = c_1e^{x\sqrt{5}} + c_2e^{-x\sqrt{5}}\right]$

135 $y'' + 6y' + 9y = 0$ $[y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}]$

136 $y'' + 6y' - 7y = 0$ $[y = c_1e^{-7x} + c_2e^{x}]$

137 $y'' + 25y = 0$ $[y = c_1 \sin 5x + c_2 \cos 5x]$

138 $y'' + 10y' + 25y = 0$ $[y = (c_1 + c_2x)e^{-5x}]$

139 $y'' - 6y' + 10y = 0$ $[y = (c_1 \sin x + c_2 \cos x)e^{3x}]$

140 $2y'' = y' + y$ $\left[y = c_1e^{x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x}\right]$

141 $3y'' - y = 2y'$ $\left[y = c_1e^{x} + c_2e^{-\frac{1}{3}x}\right]$

142 $y'' + 4y' = -\dfrac{25}{4}y$ $\left[y = \left(c_1 \sin\left(\dfrac{3}{2}x\right) + c_2 \cos\left(\dfrac{3}{2}x\right)\right)e^{-2x}\right]$

143 $2y' = -y'' - 5y$ $[y = (c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)e^{-x}]$

144 ESERCIZIO SVOLTO

Risolviamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$

- L'integrale generale dell'equazione $y'' - 6y' + 5y = 0$ è:

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{5x} \qquad [*]$$

- Dobbiamo ora determinare c_1 e c_2 in base alle condizioni $y(0) = 2$ e $y'(0) = -2$.
La condizione $y(0) = 2$ fornisce:

$$2 = c_1 + c_2 \qquad [**]$$

Per imporre la condizione $y'(0) = -2$, deriviamo anzitutto la [*]; abbiamo che $y' = c_1e^{x} + 5c_2e^{5x}$, quindi sarà $y'(0) = -2$ se e solo se:

$$-2 = c_1 + 5c \qquad [***]$$

Risolvendo il sistema formato da [**] e [***] otteniamo: $c_1 = 3$ e $c_2 = -1$.

- La soluzione del problema di Cauchy è quindi: $y = 3e^{x} - e^{5x}$.

Risolvi i seguenti problemi di Cauchy.

145 $\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ $[y = e^{-5x}(1 + 7x)]$

146 $\begin{cases} y'' - 7y' + 6y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 10 \end{cases}$ $[y = 4e^{x} + e^{6x}]$

147 $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 4 \end{cases}$ $[y = \cos 2x + 2 \sin 2x]$

148 $\begin{cases} 4y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ $\left[y = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \dfrac{3}{2}x\right)\right]$

149 $\begin{cases} y'' - 10y' + 26y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ $[y = e^{5x}(2 \cos x - 7 \sin x)]$

150 $\begin{cases} y'' - 6y' - 7y = 0 \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = 8 \end{cases}$ $[y = 2e^{7x} + 6e^{-x}]$

Equazioni non omogenee

151 ESERCIZIO GUIDATO

Determina gli integrali generali delle seguenti equazioni differenziali:

a. $y'' + 9y = x$ **b.** $y'' - 4y = e^{2x}$ **c.** $y'' + y = 2\sin 2x - \cos 2x$

---

a. Determina anzitutto l'integrale *generale* dell'equazione *omogenea associata* e verifica che esso è:

$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

Determina poi un integrale *particolare* dell'equazione data: poiché 0 **non** è soluzione dell'equazione caratteristica associata, devi cercare come integrale particolare un polinomio di primo grado, della forma $Ax + B$. Troverai così che un integrale particolare è $y = \frac{1}{9}x$. L'integrale generale dell'equazione data è pertanto $y = c_1 \cos 3x +$ ..... + ...

b. Procedi similmente al caso precedente, osservando che devi cercare un integrale particolare della forma Axe^{2x} (perché?). Troverai che l'integrale generale dell'equazione data è $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$.

c. Verifica anzitutto che l'integrale *generale* dell'equazione *omogenea* associata è $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Devi ora cercare una soluzione *particolare* dell'equazione data (non omogenea) della forma:

$y = A\sin 2x + B\cos 2x$

con A e B coefficienti ancora da determinare. Dopo avere controllato che $y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$ puoi sostituire nell'equazione originaria, raccogliere e semplificare. Giungi così all'equazione:

$(\ldots)\sin 2x + (\ldots)\cos 2x = 0$

Affinché risulti una *identità*, cioè sia valida per ogni $x \in \mathbf{R}$, deve essere $A = -\frac{2}{3}$ e $B =$ ....

L'integrale generale dell'equazione data è quindi:

$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \ldots\sin 2x + \ldots\cos 2x$

$\left[\mathbf{a.}\ y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{1}{9}x; \mathbf{b.}\ y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{2x};\right.$
$\left.\mathbf{c.}\ y = c_1\sin x + c_2\cos x - \frac{2}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos 2x\right]$

Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni.

152 $y'' + y' = 10$ $[y = c_1e^{-x} + c_2 + 10x]$

153 $y'' + y = 6$ $[y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + 6]$

154 $y'' + 6y' + 9y = -2$ $\left[y = (c_1 + c_2x)e^{-3x} - \frac{2}{9}\right]$

155 $y'' + 4y = -8$ $[y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x - 2]$

156 $2y'' + 3y' - 5y = 10$ $\left[y = c_1e^{-\frac{5}{2}x} + c_2e^x - 2\right]$

157 $y'' + 9y = 12x$ $\left[y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + \frac{4}{3}x\right]$

158 $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$ $\left[y = c_1e^{-3x} + c_2e^x - \frac{1}{4}e^{-x}\right]$

159 $y'' + 4y = 12x$ $[y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + 3x]$

160 $y'' + 2y' = 2x - 4$ $\left[y = c_1e^{-2x} + c_2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x\right]$

161 $y'' + y' - 2y = 2e^x$ $\left[y = c_1e^{-2x} + c_2e^x + \frac{2}{3}xe^x\right]$

162 $y'' + 2y' + y = x^2$ $[y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + x^2 - 4x + 6]$

163 $y'' + 4y = 2x - 1$ $\left[y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right]$

164 $y'' - 9y = 3x$ $\left[y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x\right]$

165 $y'' + 4y = 12$ $[y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + 3]$

166 $y'' + 4y' + 4y = 10$ $\left[y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{5}{2}\right]$

167 Videolezione $y'' + 4y' = -12e^{2x}$ $[y = c_1 e^{-4x} + c_2 - e^{2x}]$

168 $y'' - 2y' + y = x$ $[y = c_1e^x + c_2xe^x + x + 2]$

169 $y'' - 3y' - 4y = 2e^{2x}$ $\left[y = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} - \frac{1}{3}e^{2x}\right]$

170 $y'' + y = \sin x$ $\left[y = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \frac{1}{2}x \cos x\right]$

171 $y'' + y = 6 \cos x$ $[y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + 3x \sin x]$

172 $y'' + 4y = 12 \cos 2x$ $[y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + 3x \sin 2x]$

173 $y'' - 4y' = 10 \cos 2x$ $\left[y = c_1e^{4x} + c_2 - \sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]$

174 **Metodi a confronto** Risolvi l'equazione $y'' + 4y' = 4e^{2x}$ in due modi:

a. come equazione del secondo ordine non omogenea (cioè come spiegato in questo paragrafo);

b. mediante sostituzione: poni $z = y'$ di modo da ricondurti alla risoluzione dell'equazione del primo ordine $z' + 4z = 4e^{2x}$; quindi ritorna alla funzione incognita y originaria, integrando la funzione z ottenuta in precedenza.

Verifica che le soluzioni sono le stesse. $\left[y = c_1 e^{-4x} + c_2 + \frac{1}{3}e^{2x}\right]$

Risolvi i seguenti problemi di Cauchy.

175 $\begin{cases} y'' - 4y = 8 - 4x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $[y = e^{2x} + e^{-2x} + x - 2]$

176 $\begin{cases} y'' + y = \frac{5}{2}e^{2x} \\ y(0) = \frac{3}{2} \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ $\left[y = \sin x + \cos x + \frac{1}{2}e^{2x}\right]$

177 $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - 8x + 4)\right]$

178 $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{4}e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right]$

179 $\begin{cases} y'' - y = \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x\right]$

180 $\begin{cases} y'' + 4y = \cos 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{4}x \sin 2x\right]$

4. Problemi che hanno come modello equazioni differenziali

Teoria p. 222

Problemi dalla realtà

181 **Crescita di una colonia di batteri.** Una coltura di batteri cresce, istante per istante, con una velocità proporzionale al numero di batteri della colonia, secondo una costante $k = 10\%$ / ora.

a. Indica con $y(t)$ il numero di batteri presenti dopo t ore dall'inizio dell'osservazione e scrivi l'equazione differenziale che deve soddisfare la funzione $y(t)$.

Supposto che all'inizio dell'osservazione fossero presenti 100 batteri, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

b. Determina la soluzione particolare dell'equazione differenziale che costituisce il modello del problema.

c. Stabilisci da quanti batteri sarà costituita la colonia dopo 5 ore.

d. Stabilisci dopo quanto tempo il numero di batteri sarà il doppio di quello iniziale. Esprimi il risultato in ore e minuti, arrotondato ai minuti.

[**a.** $y' = \frac{1}{10}y$; **b.** $y = 100e^{\frac{t}{10}}$; **c.** $100e^{\frac{1}{2}}$, ossia circa 165; **d.** $t = 10 \ln 2$, ossia dopo circa 6 ore e 56 minuti]

182 **Diffusione di un prodotto.** Una campagna pubblicitaria è volta a fare conoscere l'esistenza di un nuovo prodotto a 1 000 000 potenziali consumatori. Si assume che la velocità con cui cresce il numero dei potenziali consumatori che vengono a conoscenza del nuovo prodotto sia direttamente proporzionale, secondo la costante k, al numero di coloro che ancora **non** lo conoscono. All'inizio della campagna pubblicitaria nessuno conosce il prodotto, mentre dopo sei mesi ne è venuto a conoscenza un quarto dei potenziali consumatori. Indica con $y(t)$ il numero di potenziali consumatori (in milioni) che sono venuti a conoscenza del prodotto trascorso il tempo t (misurato in anni) dall'inizio della campagna pubblicitaria.

a. Scrivi l'equazione differenziale che deve soddisfare la funzione $y(t)$ e risolvila tenendo conto delle condizioni indicate.

b. Verifica che $y(t) = 1 - \left(\frac{9}{16}\right)^t$.

c. Stima quante persone saranno venute a conoscenza del prodotto dopo 2 anni.

d. Stima quanto tempo sarà necessario perché il 90% dei potenziali consumatori venga a conoscenza del prodotto.

[**a.** $y' = k(1 - y)$, essendo k la costante di proporzionalità, si trova $y = 1 - e^{-kt}$, con $k = \ln \frac{16}{9}$;
c. circa 683 594; **d.** circa 4 anni]

183 **Raffreddamento di un corpo/ 1.** In base alla legge del raffreddamento di Newton, la velocità di raffreddamento di un oggetto è direttamente proporzionale alla differenza tra la temperatura T_0 (supposta costante) dell'ambiente in cui si trova l'oggetto e la temperatura dell'oggetto stesso. Ciò significa che, detta $y(t)$ la temperatura dell'oggetto all'istante t, la funzione $y(t)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$y'(t) = k[T_0 - y(t)]$$

essendo k una costante positiva (detta *costante di raffreddamento*) che dipende dalle caratteristiche dell'oggetto.

a. Un oggetto prodotto industrialmente è posto a raffreddare in un ambiente la cui temperatura, che rimane costante, è $T_0 = 20$ °C. Supponi che il tempo sia misurato in ore e che la costante di raffreddamento dell'oggetto sia $k = 0,5$. Scrivi l'equazione differenziale che deve soddisfare la funzione $y(t)$ e determina il suo integrale generale.

Supponendo che la temperatura iniziale dell'oggetto sia di 220 °C, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

b. Determina l'espressione analitica di $y(t)$.
c. Stabilisci qual è la temperatura dell'oggetto dopo 30 minuti.
d. Calcola il limite di $y(t)$ per $t \to +\infty$ e interpreta il risultato in relazione al problema.
e. Stabilisci dopo quanto tempo la temperatura dell'oggetto sarà diventata il 50% di quella iniziale. Esprimi il risultato sia in forma esatta, sia in modo approssimato, arrotondato ai minuti.

$\left[\textbf{a. } y' = \frac{1}{2}(20 - y);\ \textbf{b. } y(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20;\ \textbf{c. } \text{circa } 175{,}8\ °\text{C};\ \textbf{d. } 20;\ \textbf{e. } t = 2\ln\frac{20}{9}, \text{ ovvero circa 1 ora e 36 minuti}\right]$

184 **Raffreddamento di un corpo/ 2.** Assumiamo che la velocità con cui un corpo si raffredda sia proporzionale alla differenza tra la temperatura dello spazio ambiente, supposta costante, e la temperatura del corpo stesso. Un corpo riscaldato alla temperatura di 80 °C è posto in un ambiente a 20 °C; dopo un'ora la sua temperatura è di 40 °C. Quale sarà la sua temperatura dopo 2 ore? (*Suggerimento*: *vedi* l'esercizio precedente.) [Circa 26,7 °C]

185 **Evoluzione di una popolazione.** In una riserva naturale, rimasta priva di animali in seguito a un'epidemia, vengono immessi 50 cervi. Si stima che la foresta della riserva possa offrire risorse di cibo tali da consentire un'evoluzione della popolazione di cervi fino a un massimo di 500 esemplari. Supponi una crescita logistica della popolazione dei cervi, con costante di proporzionalità $k = 0,4$.

a. Indicato con $y(t)$ il numero dei cervi dopo t anni dall'immissione dei primi 50, scrivi l'equazione differenziale che la funzione $y(t)$ deve soddisfare.
b. Risolvi tale equazione, determinando l'espressione analitica di $y(t)$.
c. Determina dopo quanto tempo la popolazione di cervi sarà il doppio di quella inizialmente immessa.

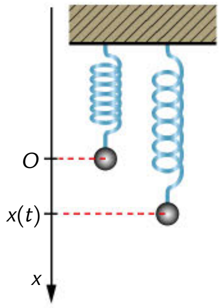
$\left[\textbf{a. } y' = 0{,}4y\left(1 - \frac{y}{500}\right);\ \textbf{b. } y = \frac{500}{1 + 9e^{-0{,}4t}};\ \textbf{c. } t = 5\ln\frac{3}{2}, \text{ ossia dopo circa 2 anni}\right]$

Problemi dalla fisica e dalla tecnica

Matematica e fisica

186 Un corpo di massa $m = 1$ kg è appeso a una molla di costante elastica $k = 9$ N/m. Se si sposta il corpo dalla sua posizione di equilibrio O, esso effettua delle oscillazioni intorno a O. La posizione del corpo all'istante t è individuata dall'ascissa $x(t)$ (in metri) sull'asse delle ascisse rappresentato in figura.

a. Giustifica, in base alle leggi della fisica, perché la funzione $x(t)$ soddisfa l'equazione differenziale $x''(t) + 9x(t) = 0$ e determina la sua soluzione generale.



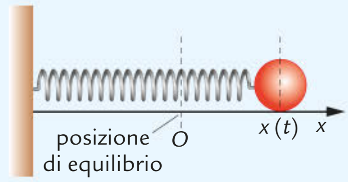
Supposto che all'istante $t = 0$ il corpo si trovi sul semiasse delle ascisse positive a 0,5 m da O e che la sua velocità sia di 1,5 m/s, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

b. Determina la soluzione particolare dell'equazione differenziale che soddisfa le precedenti condizioni.
c. Verifica che $x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$.
d. Determina dopo quanto tempo dall'istante $t = 0$ il corpo passa per la prima volta da O.

$\left[\textbf{a. } x(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t);\ \textbf{b. } x(t) = \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{2}\sin(3t);\ \textbf{c. } t = \frac{\pi}{4}\text{ s, ossia dopo circa 0,8 s}\right]$

187 **ESERCIZIO GUIDATO**

Considera una molla di costante $k = 8$ N/m, alla quale è fissato un oggetto di massa $m = 5$ kg, libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. All'istante $t = 0$ l'oggetto è fermo e si trova a 25 cm dalla posizione di equilibrio della molla; l'oggetto viene rilasciato e inizia a oscillare intorno alla posizione di equilibrio. Il moto dell'oggetto è rallentato da una forza proporzionale alla velocità dell'oggetto stesso, essendo la costante di proporzionalità uguale a $4\ \mathrm{N \cdot m^{-1} \cdot s}$.



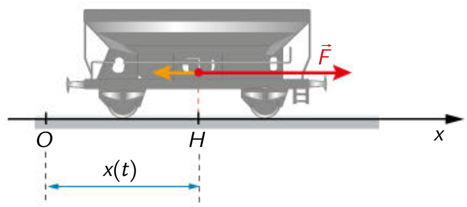
Indicata con $x(t)$ la posizione (in metri) dell'oggetto all'istante t, scrivi l'equazione differenziale che deve soddisfare $x(t)$; quindi risolvila e determina l'espressione analitica di $x(t)$.

- In base alla seconda legge della dinamica, deve essere soddisfatta l'equazione differenziale:

$$\underbrace{5}_{\text{massa}} \cdot \underbrace{x''}_{\text{accelerazione}} = \underbrace{-\ldots\ldots}_{\text{forza elastica}} \underbrace{-4x'}_{\text{forza che rallenta il moto}}$$

- Risolvi l'equazione differenziale (omogenea del secondo ordine) così ottenuta e trova la soluzione particolare che corrisponde alle condizioni iniziali, cioè $x(0) = \ldots\ldots$ e $x'(0) = \ldots\ldots$ $\left[x(t) = e^{-\frac{2}{5}t}\left[\frac{1}{4}\cos\left(\frac{6}{5}t\right) + \frac{1}{12}\sin\left(\frac{6}{5}t\right)\right]\right]$

188 Un carrello di massa $m = 200$ kg è posto su un binario orizzontale rettilineo. È sottoposto a una forza costante $\vec{F}$ di intensità 50 N. La forza di attrito è diretta in verso contrario a $\vec{F}$ ed è proporzionale alla velocità del carrello, essendo la costante di proporzionalità uguale (in valore assoluto) a $25\ \mathrm{N \cdot m^{-1} \cdot s}$. La posizione del carrello all'istante t (espresso in secondi) è individuata dalla distanza $x(t)$ (espressa in metri) del punto H dall'origine O sull'asse delle ascisse rappresentato in figura.



a. Giustifica, in base alle leggi della fisica, perché la funzione $x(t)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$25x'(t) + 200x''(t) = 50$$

b. Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale.

c. Supponi che all'istante $t = 0$ il carrello si trovasse in O con velocità nulla e determina la soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa queste condizioni.

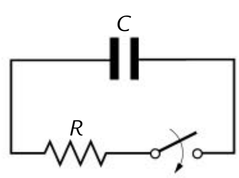
d. Qual è la distanza percorsa dal carrello dopo 40 secondi?

e. Determina l'espressione analitica della funzione $v(t)$ che esprime la velocità del carrello.

f. Determina il limite V della velocità $v(t)$ per $t \to +\infty$. Per quali valori di t la velocità del carrello è inferiore o uguale al 90% del suo valore limite V? [**b.** $c_1 + c_2 e^{\frac{-t}{8}} + 2t$; **c.** $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-\frac{1}{8}}$; **d.** circa 64,1 m; **e.** $v(t) = x'(t) = 2 - 2e^{-\frac{1}{8}t}$; **f.** $V = 2$ m/s, la condizione è verificata per $t \leq 8 \ln 10$, cioè per tempi inferiori o uguali a circa 18,4 s]

Matematica ed elettronica

189 Il circuito rappresentato in figura è costituito da un condensatore di capacità C (espressa in farad), da un resistore di resistenza R (espressa in ohm) e da un interruttore. All'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore e il condensatore, inizialmente carico, si scarica nel circuito. Sia $V(t)$ il valore (espresso in volt) della tensione ai capi del condensatore all'istante t (espresso in secondi).



a. Giustifica, in base alle leggi della fisica, perché la funzione $V(t)$ deve soddisfare l'equazione differenziale:

$$V'(t) + \frac{1}{RC}V(t) = 0$$

b. Supposto che sia $C = 10^{-4}$ F, $R = 10^4\ \Omega$ e che nell'istante $t = 0$ la tensione ai capi del condensatore sia di 12 V, determina l'espressione analitica di $V(t)$.

c. Determina dopo quanto tempo, a partire dalla chiusura del circuito, la tensione $V(t)$ è minore di 0,6 V.

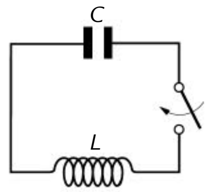
d. L'energia $E(t)$ (espressa in joule) immagazzinata nel condensatore all'istante t è data da:

$$E(t) = \frac{1}{2}C \cdot V^2(t)$$

Determina il valore medio di $E(t)$ nei primi 2 secondi.

[**b.** $V(t) = 12e^{-t}$; **c.** $t > \ln 20$ s, ossia dopo circa 3 s; **d.** $18(1 - e^{-4})10^{-4}$ J]

190 Considera il circuito rappresentato in figura, costituito da un condensatore di capacità C (espressa in farad), da una bobina di induttanza L (espressa in henry) e da un interruttore. Il tempo è espresso in secondi. All'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore e il condensatore si scarica nel circuito. Indichiamo con $q(t)$ il valore della carica (espressa in coulomb) del condensatore all'istante t.



a. Giustifica, in base alle leggi della fisica, perché la funzione $q(t)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$q''(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0$$

b. Supposto $C = 2 \cdot 10^{-3}$ F e $L = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$ H, determina la soluzione generale dell'equazione differenziale.

c. Determina la soluzione particolare che soddisfa le condizioni $q(0) = \frac{\sqrt{2}}{400}$ e $q'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

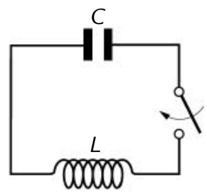
d. Verifica che la soluzione particolare trovata al punto precedente si può esprimere nella forma:

$$q(t) = \frac{1}{200} \sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right)$$

e. Determina il valore medio della quantità di carica dall'istante iniziale fino al primo istante in cui la quantità di carica assume il suo valore massimo.

[**b.** $q(t) = c_1 \cos(200t) + c_2 \sin(200t)$; **c.** $q(t) = \frac{\sqrt{2}}{400} \cos(200t) + \frac{\sqrt{2}}{400} \sin(200t)$; **e.** $\frac{\sqrt{2}}{100\pi}$]

191 Considera un circuito elettrico composto da un condensatore di capacità C (espressa in farad), da una bobina di induttanza L (espressa in henry) e da un interruttore. Il tempo t è espresso in secondi. All'istante $t = 0$ supponiamo il condensatore carico; si chiude l'interruttore e il condensatore si scarica nel circuito.



Indichiamo con $q(t)$ il valore della carica (espressa in coulomb) del condensatore all'istante t.

a. Giustifica, in base alle leggi della fisica, perché la funzione $q(t)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$q''(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0$$

b. Supposto $C = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ F ed $L = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ H, determina l'integrale generale dell'equazione differenziale.

c. Determina la soluzione particolare corrispondente alle condizioni $q(0) = 6 \cdot 10^{-3}$ e $q'(0) = 0$.

d. Determina la funzione $i(t)$ che esprime l'intensità di corrente i (misurata in ampere) che percorre il circuito all'istante t.

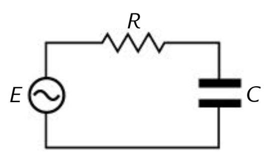
e. Determina il valore efficace E della corrente alternata che percorre il circuito, in base alla formula:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)\, dt}$$

dove T indica il periodo della corrente alternata.

[**b.** $q(t) = c_1 \cos(400t) + c_2 \sin(400t)$; **c.** $q(t) = \frac{3}{500} \cos(400t)$; **d.** $i(t) = -2{,}4 \sin(400t)$; **e.** $1{,}2\sqrt{2}$]

192 Considera un condensatore di capacità C, inserito in un circuito di resistenza R ai cui capi è applicata una forza elettromotrice costante E.



Detta $q(t)$ la carica sul condensatore all'istante t:

a. mostra che $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$;

b. risolvendo la precedente equazione differenziale nell'ipotesi $q(0) = 0$, mostra che $q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$;

c. calcola il limite di $q(t)$ per $t \to +\infty$ e interpreta il risultato del limite in relazione al problema.

193 **ESERCIZIO GUIDATO**

Una cisterna contiene 800 litri di una miscela di acqua e sale, in cui la concentrazione del sale è 0,1 kg/L. Si inizia a fare fluire nella cisterna, alla velocità di 30 L/min, una seconda miscela di acqua e sale, in cui la concentrazione del sale è di 0,2 kg/L. La miscela immessa si mescola istantaneamente a quella già presente e la miscela così ottenuta esce da uno scarico alla velocità di 15 L/min. Determina la funzione che esprime la quantità $q(t)$ di sale contenuta nella miscela presente nella cisterna all'istante t, dove $q(t)$ è espresso in kg e t è espresso in minuti.

Osserva anzitutto che:

$$\underbrace{q'(t)}_{\substack{\text{velocità di variazione}\\ \text{del sale contenuto}\\ \text{nella miscela}\\ \text{(in kg/min)}}} = \underbrace{\text{velocità con cui il sale } \textit{entra}}_{\text{all'istante } t} - \underbrace{\text{velocità con cui il sale } \textit{esce}}_{\text{all'istante } t} \qquad \text{[*]}$$

La velocità di entrata del sale è costante (cioè non dipende da t) ed è uguale al prodotto tra la concentrazione del sale nella miscela *immessa* e la velocità di entrata di quest'ultima:

$$\text{velocità con cui il sale } \textit{entra} = (0{,}2 \text{ kg/L})\,(30 \text{ L/min}) = 6 \text{ kg/min}$$

In modo analogo calcoliamo la velocità con cui il sale esce, cioè come prodotto tra la concentrazione del sale nella miscela che *fuoriesce* e la velocità di uscita di quest'ultima; occorre ora prestare attenzione al fatto che la concentrazione della miscela che fuoriesce dipende da t (mentre è sempre costante la velocità di uscita); precisamente, la concentrazione al tempo t è data dall'espressione seguente:

concentrazione all'istante $t =$

$$= \frac{\text{quantità di sale presente all'istante } t}{\text{quantità di miscela presente all'istante } t} = \frac{q(t)}{\underbrace{800}_{\substack{\text{quantità}\\ \text{di miscela}\\ \text{iniziale}}} + \underbrace{30t}_{\substack{\text{quantità}\\ \text{di miscela}\\ \text{entrata}}} - \underbrace{15t}_{\substack{\text{quantità}\\ \text{di miscela}\\ \text{uscita}}}} \text{ kg/L} = \frac{q(t)}{800+15t} \text{ kg/L}$$

Dunque:

$$\text{velocità con cui il sale } \textit{esce} = \left(\frac{q(t)}{800+15t} \text{ kg/L}\right) \cdot (15 \text{ L/min}) = \frac{3q(t)}{160+3t} \text{ kg/min}$$

Sostituendo nella **[*]** le espressioni delle velocità di entrata e di uscita del sale, ottieni l'equazione differenziale che costituisce il modello del problema.

Risolvi ora tale equazione differenziale e concludi trovando la soluzione particolare per cui $q(0)$ è uguale alla quantità di sale inizialmente presente negli 800 litri di miscela.

$$\left[q(t) = 3t + 160 - \frac{12800}{3t+160}\right]$$

Matematica e chimica

194 Una cisterna contiene 200 litri di una miscela di acqua e sale, in cui la concentrazione del sale è di 0,1 kg/L. Si inizia a fare fluire nella cisterna, alla velocità di 30 L/min, una seconda miscela di acqua e sale, ma in cui la concentrazione del sale è di 0,2 kg/L. La miscela immessa si mescola istantaneamente a quella già presente ed esce da uno scarico alla velocità di 20 L/min. Determina la funzione che esprime la quantità $q(t)$ di sale contenuta nella miscela presente nella cisterna al tempo t (espresso in minuti).

(*Vedi* lo svolgimento dell'esercizio precedente.)

$$\left[q(t) = 2t + 40 - \frac{8000}{(t+20)^2}\right]$$

195 In molte reazioni chimiche, la velocità di variazione della concentrazione $[A]$ di un reagente, al tempo t, è proporzionale a un'opportuna potenza della concentrazione stessa. In queste reazioni, la funzione che esprime la concentrazione del reagente in funzione del tempo soddisfa perciò un'equazione differenziale della forma $-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^n$, dove k è una costante positiva che dipende dalla reazione in questione mentre n è un intero positivo, detto *ordine* della reazione (il segno meno al primo membro è dovuto al fatto che la concentrazione del reagente sta diminuendo, quindi la velocità di variazione è negativa).
Supponi che la concentrazione del reagente all'istante iniziale $t = 0$ sia $[A]_0$.

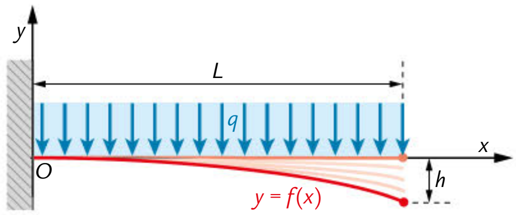
a. Considera una reazione di ordine zero ($n = 0$) e dimostra che in tal caso la funzione che esprime la concentrazione in funzione del tempo è lineare, di espressione analitica $[A] = -kt + [A]_0$.

b. Considera una reazione del primo ordine ($n = 1$) e dimostra che in tal caso la funzione che esprime la concentrazione in funzione del tempo è esponenziale, di espressione analitica $[A] = [A]_0 e^{-kt}$.

c. Considera una reazione del secondo ordine ($n = 2$) e dimostra che in tal caso la funzione che esprime la concentrazione in funzione del tempo è omografica, di espressione analitica $[A] = \frac{[A]_0}{[A]_0 kt + 1}$.

Matematica e costruzioni

196 Consideriamo una trave a mensola, di lunghezza L (in metri), sottoposta a un carico uniformemente distribuito pari a q (in newton/metro). Riferita la trave a un sistema di assi cartesiani ortogonali come in figura (la trave è fissata in O e l'unità di misura è il metro), ci proponiamo di individuare l'equazione $y = f(x)$ della deformata dell'asse della trave.



In scienza delle costruzioni si dimostra che la funzione $y = f(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale:

$$EI\,y'' = -\frac{1}{2}q(L-x)^2$$

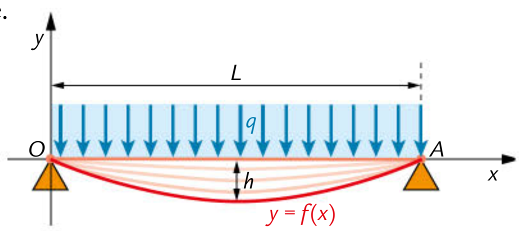
dove E e I sono costanti (E è il modulo elastico del materiale da cui è composta la trave e I è il momento d'inerzia della sezione trasversale della trave).

a. Determina l'equazione della deformata, tenendo conto che passa per l'origine e ha in questo punto tangente orizzontale.

b. Verifica che la massima inflessione si ha nell'estremo libero e calcolane il valore assoluto.

$$\left[\text{a. } y = -\frac{q}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{L^2x^2}{2}\right);\ \text{b. } h = \frac{qL^4}{8EI}\right]$$

197 Consideriamo una trave appoggiata ai due estremi, di lunghezza L (in metri), sottoposta a un carico uniformemente distribuito pari a q (in newton/metro). Riferita la trave a un sistema di assi cartesiani ortogonali come in figura (la trave è appoggiata in O e in A e l'unità di misura è il metro), ci proponiamo di individuare l'equazione $y = f(x)$ della deformata dell'asse della trave.



In scienza delle costruzioni si dimostra che la funzione $y = f(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale:

$$EI\,y'' = -\frac{1}{2}q(x^2 - Lx)$$

dove E e I sono costanti (E è il modulo elastico del materiale da cui è composta la trave e I è il momento d'inerzia della sezione trasversale della trave).

a. Determina l'equazione della deformata, tenendo conto che passa per l'origine e che il punto di massima inflessione corrisponde al punto medio della trave.

b. Calcola quanto vale (in valore assoluto) la massima inflessione.

$$\left[\text{a. } y = -\frac{q}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{6} + \frac{L^3x}{12}\right);\ \text{b. } h = \frac{5qL^4}{384EI}\right]$$

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

198 **Vero o falso?**

a. la funzione $y = x$ è soluzione dell'equazione $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ V F

b. le curve integrali dell'equazione $y' = 0$ sono tutte le rette orizzontali del piano V F

c. le curve integrali dell'equazione $y'' = 0$ sono tutte le rette del piano escluse quelle verticali V F

d. le curve integrali dell'equazione $y'' = 2$ sono tutte parabole con la concavità rivolta verso l'alto V F

e. l'integrale generale dell'equazione $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5$ è $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{19}{2}$ V F

f. la curva soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' - y \sin x = y \cos x \\ y(0) = \dfrac{4}{e} \end{cases}$ passa per il punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 4e\right)$ V F

g. l'equazione $y' + ye^x - e^{2x} = 0$ è a variabili separabili V F

199 **Associazione.** Associa a ciascuna equazione differenziale il rispettivo integrale generale.

a. $y'' + 4y = 0$ A. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

b. $y'' - 4y = 0$ B. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \dfrac{1}{3}e^x$

c. $y'' + 4y = x$ C. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$

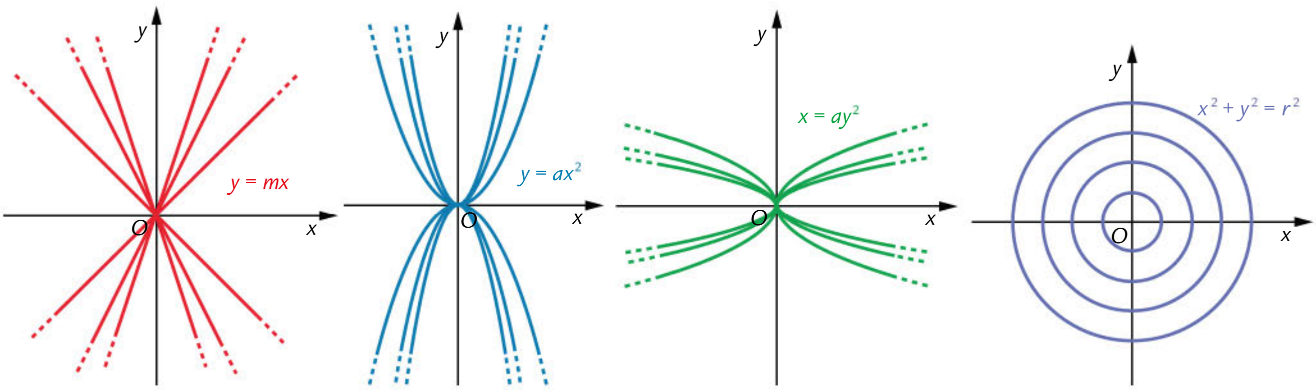
d. $y'' - 4y = e^x$ D. $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$

e. $y'' - 4y = 2x^2 - 3x + 1$ E. $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \dfrac{1}{3}\sin x$

f. $y'' + 4y = \sin x$ F. $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \dfrac{1}{4}x$

200 **Associazione.** Associa a ciascuna equazione differenziale la figura che rappresenta il suo integrale generale.

a. $y - 2xy' = 0$ **b.** $xy' = y$ **c.** $x + yy' = 0$ **d.** $xy' = 2y$



A. **B.** **C.** **D.**

Test

201 L'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3$ ammette come integrale particolare la parabola di equazione:

A $y = x^2 + 3x + 1$ B $y = x^2 + 3x + 2$ C $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{4}$ D $y = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

202 L'equazione differenziale $xyy' = 1 - x^2$ ha come soluzioni:

A circonferenze centrate nell'origine

B circonferenze qualsiasi

C parabole con vertice nell'origine e asse verticale

D nessuna delle curve proposte

203 Considerato il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} xy' + 2y = x^4 \\ y(1) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, che cosa puoi dire in merito alla sua soluzione?

A È la curva di equazione $y = x^4 + \dfrac{1}{x^2}$

B È una curva la cui tangente nel punto $x = 1$ è inclinata di 45°

C È una curva che presenta un flesso nel punto $x = 1$

D È la retta di equazione: $y = \dfrac{1}{3}$

204 L'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 4y' + 4y = \sin x$ può essere scritto nella forma:

A $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$

B $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x) + \dfrac{3}{25}\sin x + \dfrac{4}{25}\cos x$

C $y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$

D $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x) + \dfrac{3}{25}\sin(2x) + \dfrac{4}{25}\cos(2x)$

Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali.

205 $y' = 3y + 6$ $\quad [y = ce^{3x} - 2]$

206 $y'' - 4y' = 0$ $\quad [y = c_1 e^{4x} + c_2]$

207 $y' = xe^{-y}$ $\quad \left[y = \ln\left(\dfrac{1}{2}x^2 + c\right)\right]$

208 $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$, con $x > 0$ $\quad \left[y = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{c}{x}\right]$

209 $4y'' - 3y' - y = 0$ $\quad \left[y = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{4}x}\right]$

210 $(x^2 + 1)y' + xy^2 = 0$ $\quad \left[y = \dfrac{2}{\ln(x^2+1) + c},\ y = 0\right]$

211 $y'' + y = 0$ $\quad [y = c_1\cos x + c_2\sin x]$

212 $y'' = -2y' - y$ $\quad [y = e^{-x}(c_1 x + c_2)]$

213 $xy' - y = 2\sqrt{x}$ $\quad [y = cx - 4\sqrt{x}]$

214 $y'' + y' - 2y = 0$ $\quad [y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}]$

215 $y'' + 4y' = -2y$ $\quad \left[y = c_1 e^{x(\sqrt{2}-2)} + c_2 e^{-x(\sqrt{2}-2)}\right]$

216 $y'e^{-y} = 3\sqrt{x}$ $\quad \left[y = -\ln\left(c - 2x\sqrt{x}\right)\right]$

217 $y' - y\sin x = 4\sin x$ $\quad [y = ce^{-\cos x} - 4]$

218 $9y'' + 6y' + y = 0$ $\quad \left[y = e^{-\frac{x}{3}}(c_1 x + c_2)\right]$

219 $xyy' = 4 - x^2$ $\quad \left[y = \pm\sqrt{8\ln|x| - x^2 + c}\right]$

220 $xy' = 2y - x$, con $x > 0$ $\quad [y = cx^2 + x]$

221 $xy' = 4 - x^2$ $\quad \left[y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4\ln|x| + c\right]$

222 $y'' - 16y = 20$ $\quad \left[y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} - \dfrac{5}{4}\right]$

223 $y' - 16y = 20$ $\quad \left[y = ce^{16x} - \dfrac{5}{4}\right]$

224 $y'' + 16y = 8y'$ $\quad [y = (c_1 + c_2 x)e^{4x}]$

225 $y' = \dfrac{2xy^2}{x^2+1}$ $\quad \left[y = 0,\ y = \dfrac{1}{c - \ln(x^2+1)}\right]$

226 $y'' - 6y' + 5y = 10x$ $\quad \left[y = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + 2x + \dfrac{12}{5}\right]$

227 $y'' + y = x^2$ $\quad [y = c_1\sin x + c_2\cos x + x^2 - 2]$

228 $(y - 3)y' = x$ $\quad \left[y = 3 \pm \sqrt{x^2 + c}\right]$

229 $2y'' = y' + 1$ $\quad \left[y = 2c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 - x\right]$

230 $y' = xy^2$ $\quad \left[y = 0,\ y = -\dfrac{2}{x^2 + c}\right]$

231 $4y'' + 4y' + y = 8$ $\quad \left[y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{x}{2}} + 8\right]$

232 $y'' - y' + y = 0$ $\quad \left[y = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + c_2\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

233 $xy' - 4y = x^3$ $\quad [y = cx^4 - x^3]$

234 **E se?** $xy' - y = x^2 e^x$, con $x > 0$

▸ Cambierebbe la risposta se fosse $x < 0$?

$[y = xe^x + cx;\ \text{no}]$

235 $y' \tan x = y + 1$ $\quad [y = -1 + c \sin x]$

236 $y' = 1 + y^2$ $\quad \left[y = \tan(x + c), \text{ con } -\frac{\pi}{2} - c < x < \frac{\pi}{2} - c\right]$

237 $y' = \frac{e^{y+\frac{1}{x}}}{x^2}$ $\quad \left[y = -\ln\left(e^{\frac{1}{x}} + c\right)\right]$

238 $y' = y \tan x - \sin 2x$, $\quad$ con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad \left[y = \frac{2}{3} \cos^2 x + \frac{c}{\cos x}\right]$

239 $y' = \frac{2x - y}{x - 2}$, con $x > 2$ $\quad \left[y = \frac{x^2 + c}{x - 2}\right]$

240 $y'\sqrt{x} = x - y$ $\quad \left[y = c_1 e^{-2\sqrt{x}} + x - \sqrt{x} + \frac{1}{2}\right]$

241 **E se?** $y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$, con $x > 0$

▸ Cambierebbe la risposta se fosse $x < 0$? $\quad \left[y = c_1 x + \frac{1}{2x}; \text{no}\right]$

242 $xy' = 4y + x + 2$ $\quad \left[y = cx^4 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right]$

243 **E se?** $y' = \frac{xy}{x^2 - 4} + x$, con $|x| > 2$

▸ Cambierebbe la risposta se fosse $|x| < 2$? $\quad \left[y = c\sqrt{x^2 - 4} + x^2 - 4; \text{sì}\right]$

244 $yy' = x(9 - y^2)$ $\quad \left[y = \pm\sqrt{9 + ce^{-x^2}}\right]$

Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali, in cui la funzione incognita è indicata con lettere diverse da y e la variabile indipendente è t.

245 $u' = \frac{t}{4t^2 + 1} u$ $\quad \left[u = c\sqrt[8]{4t^2 + 1}\right]$

246 $\theta' = (\theta - 2) \sin t$ $\quad [\theta = ce^{-\cos t} + 2]$

247 $x'' = 6x' - 25x$ $\quad [x = (c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t)e^{3t}]$

248 $u'' = 10u' - 9u$ $\quad [u = c_1 e^t + c_2 e^{9t}]$

249 $u'' - 4u' + 4u = t + 1$ $\quad \left[u = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right]$

250 $x'' + x = 3 \cos t$ $\quad \left[x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{3}{2} t \sin t\right]$

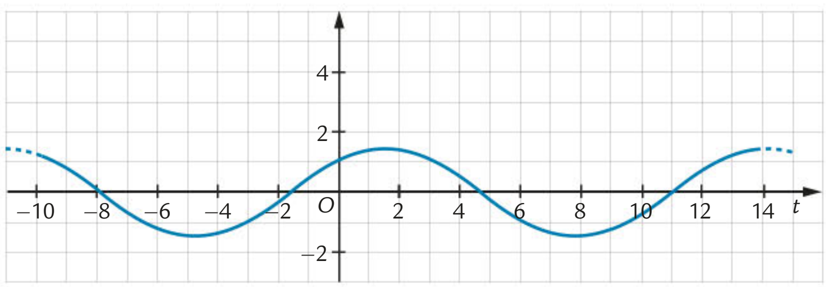
251 $3tx' + x = t^2 - t$, con $t > 0$ $\quad \left[x = \frac{c}{\sqrt[3]{t}} + \frac{t^2}{7} - \frac{t}{4}\right]$

252 $u' \cos^2 t = 2 - u$ $\quad [u = ce^{-\tan t} + 2]$

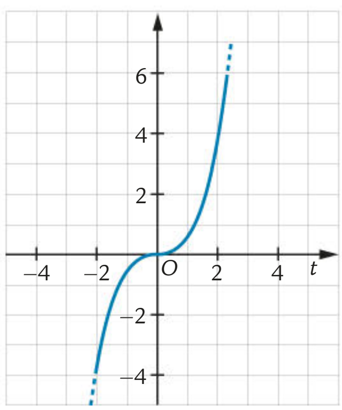
253 **Interpretazione di grafici** Associa a ogni equazione differenziale il grafico di una delle possibili soluzioni particolari:

a. $y' = \frac{3y}{x}$ $\qquad$ **b.** $y' = 2y$ $\qquad$ **c.** $y' = 4x$ $\qquad$ **d.** $y'' = -y$

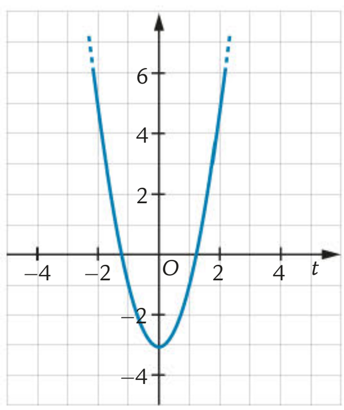
A.



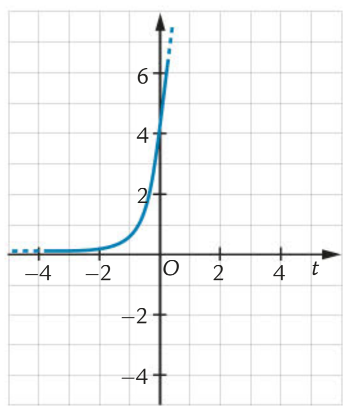
B.



C.



D.



Risolvi i seguenti problemi di Cauchy.

254 $\begin{cases} y' = 2y - 8 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ $[y = 4 - e^{2x}]$

255 $\begin{cases} y' = \sin x\sqrt{y-2} \\ y(0) = 3 \end{cases}$ $\left[y = 2 + \frac{1}{4}(3 - \cos x)^2\right]$

256 $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = x + \dfrac{1}{x} \\ y(1) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, con $x > 0$ $\left[y = \dfrac{x^3 + 3x - 3}{3x}\right]$

257 $\begin{cases} y'' + 2y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ $[y = 2 - e^{-2x}]$

258 $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-3x}\right]$

259 $\begin{cases} y'' - 1 = x^2 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2\right]$

260 $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{2}{1 - 2\arctan x}\right]$

261 $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x\ln^2 x} \\ y(e) = 1 \end{cases}$ $\left[y = e^{1-\frac{1}{\ln x}}\right]$

262 $\begin{cases} y' = x(4 + y^2) \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\left[y = 2\tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \text{con} -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi} < x < \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\right]$

Risolvi i seguenti problemi di Cauchy in cui la funzione incognita è indicata con lettere diverse da *y* e la variabile indipendente è *t*.

263 $\begin{cases} \theta'' + \theta = t^2 \\ \theta(0) = \theta'(0) = 0 \end{cases}$ $[\theta(t) = t^2 + 2\cos t - 2]$

264 $\begin{cases} x'' + 2x' - 3x = 0 \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1 \end{cases}$ $\left[x(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t})\right]$

265 $\begin{cases} \theta'' + 4\theta = 0 \\ \theta(0) = 2,\ \theta'(0) = 1 \end{cases}$ $\left[\theta(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + 2\cos 2t\right]$

266 $\begin{cases} u'' - 4u' + 4u = 2e^t \\ u(0) = -1,\ u'(0) = 0 \end{cases}$ $[u(t) = e^{2t}(4t - 3) + 2e^t]$

267 $\begin{cases} x' - 2tx = e^{t^2} \\ x(0) = -3 \end{cases}$ $[x(t) = (t-3)e^{t^2}]$

268 $\begin{cases} u' = \dfrac{u-2}{t^2} \\ u(1) = 0 \end{cases}$ $\left[u(t) = 2 - 2e^{-\frac{1}{t}}\right]$

269 $\begin{cases} x' + \dfrac{2}{t}x = t^4 \\ x(1) = 4 \end{cases}$ $\left[x(t) = \dfrac{t^7 + 27}{7t^2}\right]$

270 $\begin{cases} (t^2 + 9)u' = ut \\ u(0) = 2 \end{cases}$ $\left[u(t) = \frac{2}{3}\sqrt{t^2 + 9}\right]$

Problemi

271 Considera l'equazione differenziale $4y'' = -y$.

a. Determina l'integrale generale.

b. Determina la soluzione particolare $y = f(x)$ il cui grafico passa per i punti di coordinate $(0, 1)$ e $(\pi, -\sqrt{3})$.

c. Verifica che $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

$\left[\textbf{a. } y = c_1 \sin\frac{x}{2} + c_2\cos\frac{x}{2}; \textbf{ b. } y = -\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right]$

272 Considera l'equazione differenziale $y' + y = x$.

a. Determina l'integrale generale.

b. Determina la soluzione particolare che passa per l'origine.

c. Traccia il grafico della funzione.

d. Determina l'area della parte di piano limitata dal grafico della funzione, dal suo asintoto obliquo, dall'asse y e dalla retta di equazione $x = a$, con $a > 0$. Calcola per quale valore di a tale area è uguale a $\frac{2}{3}$.

$[\textbf{a. } y = ce^{-x} + x - 1; \textbf{ b. } y = e^{-x} + x - 1; \textbf{ d. } 1 - e^{-a}, a = \ln 3]$

273 **a.** Determina la soluzione particolare dell'equazione differenziale $y'' + 4y = 0$, che presenta un estremo relativo di coordinate $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

b. Traccia il grafico della funzione nell'intervallo $[0, \pi]$.

c. Determina le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione nei due punti di flesso appartenenti all'intervallo $[0, \pi]$.

$\left[\textbf{a. } f(x) = \frac{1}{4}\cos 2x; \textbf{ c. } y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}, y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\pi\right]$

274 **a.** Determina la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = e \end{cases}$.

b. Traccia il grafico della funzione trovata al punto **a.**

c. Sia A il punto del grafico della funzione di ascissa 0 e B il punto del grafico di ascissa 1. Determina l'area della regione finita di piano limitata dall'arco $\overset{\frown}{AB}$, dall'asse y e dalla retta $y = 1$.

d. Determina il volume del solido ottenuto da una rotazione completa intorno all'asse y della regione di piano di cui al punto precedente. [**a.** $y = e^{1-x}$; **c.** $e - 2$; **d.** $\pi(2e - 5)$]

275 **E se?** Indicata con $\overline{y}(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = k \end{cases}$, discuti, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il $\lim\limits_{x \to +\infty} \overline{y}(x)$.

▸ Cambierebbe la risposta se l'equazione differenziale fosse $y' = -2xy$?

276 Sia $k \in \mathbb{R}$. Considera la seguente equazione differenziale: $y'' + 2ky' + (k^2 + 1)y = 0$.

a. Stabilisci per quale valore del parametro k tutte le sue soluzioni sono *periodiche*.

b. Stabilisci per quali valori del parametro k tutte le sue soluzioni sono infinitesime per $x \to +\infty$. [**a.** $k = 0$; **b.** $k > 0$]

277 Considera l'equazione differenziale $4y'' + y = 0$.

a. Determina l'integrale generale.

b. Determina la soluzione particolare il cui grafico passa per il punto di coordinate $\left(\pi, \sqrt{3}\right)$ e ammette in questo punto tangente perpendicolare alla retta di equazione $y = 2x$.

c. Determina il periodo T della funzione trovata al punto **b** e tracciane il grafico nell'intervallo $[0, T]$.

d. Determina le coordinate dei punti d'intersezione del grafico tracciato al punto precedente con la retta di equazione $y = 1$. $\left[\textbf{a. } f(x) = c_1 \sin\frac{x}{2} + c_2 \cos\frac{x}{2}; \textbf{ b. } f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right); \textbf{ c. } T = 4\pi; \textbf{ d. } (0, 1), \left(\frac{4\pi}{3}, 1\right), (4\pi, 1)\right]$

278 Considera l'equazione differenziale $y'' - 4y = 20$.

a. Determina l'integrale generale.

b. Determina la soluzione particolare il cui grafico ha un estremo relativo nell'origine.

c. Traccia un grafico qualitativo della soluzione trovata al punto **b** e determina l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione e dalla retta di equazione $y = \frac{10}{3}$.

$\left[\textbf{a. } y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 5; \textbf{ b. } y = \frac{5}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) - 5; \textbf{ c. } \frac{1}{3}(25 \ln 3 - 20)\right]$

279 Dopo avere determinato la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -3xy + kx \\ y(0) = 0 \end{cases}$, determina k in modo che la soluzione $y(x)$ trovata sia tale che $\lim\limits_{x \to 0} \frac{y(x)}{x^2} = -1$. $\left[y = \frac{k}{3}\left(1 - e^{-\frac{3}{2}x^2}\right); k = -2\right]$

280 Dopo avere determinato la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (k-4)y - 4e^{-kx} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, determina per quali valori di k la soluzione trovata è tale che $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

$\left[y = \frac{1}{k-2}\left(2e^{-kx} - 2e^{(k-4)x}\right); 0 < k < 4\right]$

281 Esprimi in funzione del parametro reale k la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = k, \ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Determina quindi per quali valori di k tale soluzione soddisfa le seguenti condizioni:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$ **c.** ammette un asintoto orizzontale.

$\left[y = \frac{k-4}{3}e^{-2x} + \frac{2k+4}{3}e^{x}; \textbf{ a. } k < -2; \textbf{ b. } k > 4; \textbf{ c. } k = -2 \vee k = 4\right]$

282 Esprimi in funzione di k la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = k, \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Determina quindi per quali valori di k tale soluzione soddisfa le seguenti condizioni:

a. interseca l'asse x nel punto di coordinate $(1, 0)$;

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$

c. ammette un punto stazionario per $x = 1$. $\left[y = [(2k+1)x + k]e^{-2x}; \textbf{ a. } k = -\frac{1}{3}; \textbf{ b. } k < -\frac{1}{2}; \textbf{ c. } k = -\frac{1}{4}\right]$

ESERCIZI

Argomentare e dimostrare

283 Considera l'equazione differenziale $y' = (y^2 - 2y)(y^2 + 1)$. Può esistere una soluzione dell'equazione strettamente crescente e il cui grafico appartiene alla striscia di piano costituita dai punti aventi ordinate comprese tra 0 e 2? Giustifica adeguatamente la risposta.

284 Considera l'equazione differenziale $y' = -y^2 + y - 1 - x^2$. Può esistere una soluzione dell'equazione differenziale avente un punto di estremo relativo? Giustifica adeguatamente la risposta.

285 Considera l'equazione differenziale $y' = ye^{-x^2} + \sin x$. Può esistere una soluzione dell'equazione costituita da una funzione dispari? Giustifica adeguatamente la risposta.

286 Considera l'equazione differenziale $xy' = y + 3x^4$. Può esistere una soluzione dell'equazione costituita da una funzione pari? Giustifica adeguatamente la risposta.

Realtà e modelli

287 **Temperatura di una reazione chimica.** Indichiamo con $y = f(t)$ la funzione che esprime la temperatura, in gradi Celsius (°C), di una reazione chimica all'istante t, essendo t espresso in ore. È noto che $f(0) = 10$ e che la funzione f soddisfa l'equazione differenziale:

$$y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$$

a. Determina l'espressione analitica della funzione.
b. Traccia il grafico della funzione f in un sistema di assi tOy.
c. Dopo quanto tempo dall'inizio della reazione la temperatura è di nuovo uguale alla temperatura iniziale? Determina un valore approssimato, espresso in ore e minuti, arrotondato ai minuti.
d. Determina il valore medio della temperatura della reazione durante le prime 3 ore. Determina il valore esatto e poi quello approssimato, arrotondato alla prima cifra decimale.

$\left[\text{a. } f(t) = (20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t}\text{; c. circa 4,673 ore = circa 4 h 40 minuti; d. } \frac{100 - 220e^{-\frac{3}{2}}}{3} \simeq 17 \text{ °C}\right]$

288 **Temperatura di un lubrificante.** La temperatura in gradi Celsius del lubrificante di un motore varia in funzione del tempo t di funzionamento (espresso in ore) secondo una funzione $y = f(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale $y' + 0,1y = 3$.

a. Determina l'espressione analitica della funzione, supponendo che la temperatura del lubrificante all'istante $t = 0$ sia di 20 °C.
b. Traccia un grafico qualitativo della funzione, determinando in particolare il limite di $f(t)$ per $t \to +\infty$ e dando un'interpretazione di questo limite in relazione al problema.
c. Determina dopo quanto tempo il lubrificante raggiunge la temperatura di 28 °C. Fornisci il risultato arrotondato, espresso in ore e minuti.
d. Determina la temperatura media del lubrificante nelle prime 10 ore di funzionamento.

[**a.** $f(t) = 30 - 10e^{-\frac{1}{10}t}$; **b.** $f(t) \to 30$ per $t \to +\infty$; **c.** $t = 10 \ln 5 \simeq 16$ ore e 6 minuti; **d.** $10(2 + e^{-1}) \simeq 23,7$ °C]

289 **Matematica ed elettronica** Considera l'equazione differenziale $y'' = -\frac{y}{9}$.
a. Determina l'integrale generale.
b. Determina la soluzione particolare $y = f(x)$, il cui grafico interseca l'asse y nel punto di coordinate $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e ha in tale punto retta tangente parallela alla retta di equazione $y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + 1$.
c. Verifica che $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{5}{6}\pi\right)$ e che $f^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\pi\right)$.
d. Poni $y = i$ e $x = t$ e interpreta l'equazione $i = f(t)$ come la funzione che esprime l'intensità di una corrente alternata in funzione del tempo. Determina il valore efficace E di tale corrente alternata, di intensità $i = f(t)$, in base alla formula:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$$

dove T indica il periodo della corrente alternata.

$\left[\text{a. } f(x) = c_1 \sin\frac{x}{3} + c_2 \cos\frac{x}{3}\text{; b. } f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}\text{; d. } \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Esercizi *più*

290 Senza cercare di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + 3y^2 = 15\cos x \\ y(0) = 4 \end{cases}$, determina l'equazione della retta tangente al grafico della soluzione, nel punto di ascissa $x = 0$. $[y = -33x + 4]$

291 Senza cercare di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' - 2y^2 = 3y\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}x\right) \\ y(1) = 2 \end{cases}$, determina l'equazione della retta tangente al grafico della soluzione, nel punto di ascissa $x = 1$. $[y = 2x]$

292 Considera il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = k \end{cases}$$

a. Determina per quale valore di k la soluzione del problema di Cauchy soddisfa la relazione $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$ e determina tale soluzione.
b. Determina per quale valore di k la soluzione del problema di Cauchy soddisfa la relazione $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ e determina tale soluzione.
[**a.** $k = 4$, $y = 2e^{2x}$; **b.** $k = -8$, $y = 2e^{-4x}$]

293 Il grafico di una funzione $y = f(x)$ passa per l'origine e soddisfa la seguente proprietà: in ogni suo punto la retta normale interseca l'asse y nel punto di coordinate (0, 2). Determina l'equazione della funzione e rappresentala graficamente. $\left[y = 2 - \sqrt{4 - x^2}\right]$

Dalle gare

294 Data l'equazione differenziale $4y'' + 3y' - y = 0$ e la sua soluzione $y = e^{\lambda t}$, quali sono i valori di λ?
(Stanford Math Tournament 2006) $\left[\lambda = -1 \vee \lambda = \dfrac{1}{4}\right]$

295 L'integrale generale dell'equazione differenziale $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$:

A è $y = \dfrac{C}{1 + x^2}$, con $C \geq 0$
B è $y = C(1 + x^2)$, con $C \geq 0$
C è $y = (1 + x^2) + C$, con $C \geq 0$
D non è nessuno dei precedenti
E non esiste

(Mathematics Tournament, Gainesville College)

296 Uno studente utilizza erroneamente la regola $(fg)' = f'g'$ per calcolare la derivata del prodotto di due funzioni ma, nonostante l'errore, ottiene ugualmente il risultato corretto. Se era $f(x) = x^2$ e il dominio del problema era $(-\infty, 2)$, determina tutte le possibili funzioni g.
(Texas Math Contest 2012) $\left[g(x) = \dfrac{C}{(2 - x)^2}\right]$

297 Una funzione derivabile g soddisfa la relazione seguente per ogni $x \geq 0$:

$$\int_0^x (x - t + 1)g(t)\,dt = x^4 + x^2$$

Determina $g(x)$.
(Stanford Math Tournament 2012)
(*Suggerimento*: deriva entrambi i membri, ricordando il teorema fondamentale del calcolo.)
$[g(x) = 12x^2 - 24x + 26 - 26e^{-x}]$

Prova di autoverifica

ESERCIZI

Equazioni differenziali

1 **Vero o falso?**

a. l'equazione $y' = xy + 1$ è a variabili separabili V F

b. l'integrale generale dell'equazione $y'' + 3y' - 4y = \sin x$ dipende da due coefficienti arbitrari V F

c. la funzione $y(x) = x^2$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ V F

d. l'equazione differenziale $y' = y^2$ è del secondo ordine V F

2 Stabilisci per quale valore del parametro reale k la funzione $y = e^{x^3} + k$ è soluzione dell'equazione differenziale $y' = 3x^2 y - 15x^2$.

Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine.

3 $y' = 2xy - 2x$

4 $y' + 4y = 2e^{-2x}$

5 Determina l'integrale generale della seguente equazione differenziale del secondo ordine:
$y'' + 3y' + 2y = x + 2$

---

6 Risolvi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^2+1}(y-2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

7 Risolvi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 18 \end{cases}$$

---

8 Uno zoologo stima che una popolazione di coccinelle cresca, istante per istante, con una velocità proporzionale al numero di coccinelle presenti nella colonia, secondo la costante $k = 30\%$ / mese.

a. Indica con $p(t)$ il numero di coccinelle della popolazione considerata dopo un tempo t (misurato in mesi). Scrivi l'equazione dell'equazione differenziale che traduce il problema e determinane l'integrale generale.

b. La popolazione iniziale è di 5 coccinelle. Da quante coccinelle sarà composta la popolazione dopo 8 mesi?

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	**Totale**
Punteggio massimo	0,25 · 4 = 1	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	0,75 · 2 = 1,5	10
Punteggio ottenuto									

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 390

Utilizzare tecniche e procedure di calcolo

Calcola i seguenti integrali, eventualmente generalizzati.

1 $\int_{-2}^{0}(2x-1)^2\,dx$ $\left[\frac{62}{3}\right]$

2 $\int_{-2}^{0}(x^2-1)^2\,dx$ $\left[\frac{46}{15}\right]$

3 $\int_{1}^{2}\left(3x+\frac{2}{x}+1\right)dx$ $\left[2\ln 2+\frac{11}{2}\right]$

4 $\int_{4}^{9}(\sqrt{x}-2)\,dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

5 $\int_{1}^{4}\frac{x+1}{x}\,dx$ $[2\ln 2+3]$

6 $\int_{0}^{\pi}(3x+\sin 2x)\,dx$ $\left[\frac{3}{2}\pi^2\right]$

7 $\int_{0}^{\frac{2}{3}}(e^{2-3x}-1)\,dx$ $\left[\frac{e^2}{3}-1\right]$

8 $\int_{-2}^{-1}\frac{x^2-1}{x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

9 $\int_{-1}^{0}(8x+2e^{-2x})\,dx$ $[e^2-5]$

10 $\int_{0}^{1}x^4\cos x^5\,dx$ $\left[\frac{1}{5}\sin 1\right]$

11 $\int_{3}^{4}\frac{x}{x-2}\,dx$ $[1+2\ln 2]$

12 $\int_{\sqrt{e}}^{e^2}\frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ $\left[\frac{21}{8}\right]$

13 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\cos x\,dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{8}\right]$

14 $\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{\cos x+2}\,dx$ $[\ln 3]$

15 $\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2-4}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}\right]$

16 $\int_{1}^{e^4}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$ $[3\sqrt[3]{2}]$

17 $\int_{0}^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos x}\,dx$ $\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\right]$

18 $\int_{0}^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x\right)dx$ $[12]$

19 $\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^4}\right)dx$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

20 $\int_{-\infty}^{0}(e^{2x}-e^x)^2\,dx$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

21 $\int_{-2}^{0}\frac{x+2}{x^2+4x-5}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}\right]$

22 $\int_{2}^{4}\frac{x+3}{x^2-2x+1}\,dx$ $\left[\frac{8}{3}+\ln 3\right]$

Risolvi i seguenti problemi di Cauchy

23 $\begin{cases} y'+y=\sin 2x \\ y(0)=0 \end{cases}$ $\left[y=\frac{1}{5}(2e^{-x}+\sin 2x-2\cos 2x)\right]$

24 $\begin{cases} y'-y=x^2 \\ y(0)=-1 \end{cases}$ $[y=-x^2-2x+e^x-2]$

25 $\begin{cases} y''+4y=-1 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ $\left[y=\frac{5}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\right]$

26 $\begin{cases} y''+2y'+y=-\cos x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ $\left[y=\frac{3}{2}xe^{-x}-\frac{1}{2}\sin x+e^{-x}\right]$

27 Determina la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)=8x^3-2x-1$ che passa per il punto avente coordinate $(-1, 5)$. $[F(x)=2x^4-x^2-x+3]$

28 Considera la funzione $y=2x^2$ e la retta di equazione $y=8$. Determina l'area del segmento parabolico limitato dalla parabola e dalla retta. $\left[\frac{64}{3}\right]$

29 Considera la funzione $y=\frac{x^2-4}{x}$. Tracciane il grafico e determina l'area della regione finita di piano limitata da quest'ultimo, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=4$. $[6-4\ln 2]$

30 Considera la funzione $y=1+e^{-2x}$ e tracciane il grafico. Determina l'area della regione finita di piano limitata da quest'ultimo, dal suo asintoto orizzontale, dall'asse y e dalla retta di equazione $x=2$. $\left[\frac{1}{2}(1-e^{-4})\right]$

31 Considera la funzione $y=\frac{x+4}{x-1}$. Tracciane il grafico e determina l'area della regione finita di piano limitata da quest'ultimo e dagli assi cartesiani. $[5\ln 5-4]$

32 Considera la regione finita di piano limitata dagli assi cartesiani e dal grafico della funzione $y = 2\sqrt{4-x}$. Determina:

a. la sua area;

b. il volume del solido ottenuto da una rotazione completa di tale regione di piano intorno all'asse x.

$\left[\mathbf{a.}\ \frac{32}{3};\ \mathbf{b.}\ 32\pi\right]$

33 Determina la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = 4e^{2x} - 4e^x$ che ammette un punto di minimo relativo di ordinata 4. Traccia il grafico di tale primitiva.

$[F(x) = 2e^{2x} - 4e^x + 6]$

34 Considera la funzione $y = -2x^3$. Tracciane il grafico e determina l'equazione della retta t, tangente a esso nel suo punto di ascissa 1.

a. Calcola l'area della regione finita di piano contenuta nel quarto quadrante limitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalla retta t.

b. Determina il volume del solido che si ottiene ruotando di un giro completo intorno all'asse x la regione di piano di cui hai calcolato l'area al punto precedente.

$\left[\mathbf{a.}\ \frac{1}{6};\ \mathbf{b.}\ \frac{8\pi}{63}\right]$

35 Data la funzione $y = x^4 - 2x^2 + 3$, tracciane il grafico, quindi determina l'area della regione di piano limitata da tale grafico, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = a$, $x = b$, essendo a l'ascissa del punto di massimo relativo della funzione e b l'ascissa del punto di minimo relativo appartenente al primo quadrante.

$\left[\frac{38}{15}\right]$

36 Considera la regione finita di piano limitata dai grafici delle due funzioni $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

a. Determina la sua area.

b. Determina il volume del solido ottenuto dalla sua rotazione completa intorno all'asse x.

$\left[\mathbf{a.}\ \frac{5}{12};\ \mathbf{b.}\ \frac{5\pi}{14}\right]$

37 Considera la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{2x} (3t^2 - a)dt & x < 0 \\ e^x + 2x + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Determina a e b in modo che sia derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

$\left[a = -\frac{3}{2}, b = -1\right]$

38 Il grafico di una funzione f passa per il punto di coordinate (2, 3). Il coefficiente angolare $m(x)$ della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa x è espresso per ogni $x \in \mathbb{R}$ dalla funzione $m(x) = 6x - 15$. Qual è l'espressione analitica della funzione f?

$[f(x) = 3x^2 - 15x + 21]$

39 Una funzione $f(x)$, derivabile in $\mathbb{R}$, è tale che $f(x)$ è *inversamente* proporzionale alla sua derivata $f'(x)$, con costante di proporzionalità uguale a 2; inoltre $f(0) = 1$. Imposta il relativo problema di Cauchy e determina $f(x)$.

$\left[f(x) = \sqrt{4x+1}\right]$

40 Sia f una funzione continua e derivabile in [0, 2], tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 2]$; sapendo che:

$$\int_0^2 f'(x) f(x)\, dx = \frac{e^2 - 1}{8} \quad \text{e} \quad \int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 1$$

calcola $f(0)$ e $f(2)$.

$\left[f(0) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{e}{2}\right]$

Risolvere problemi e costruire modelli

41 **Temperatura in città.** Nell'arco delle 24 ore, la temperatura della località balneare dove Valeria soggiorna durante le vacanze estive è espressa con buona approssimazione dalla funzione:

$$T(t) = 25 - 5\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}t\right)$$

dove T denota la temperatura espressa in gradi centigradi e t il tempo, misurato in ore, a partire dalla mezzanotte.

a. Stando al modello, quando è raggiunta la temperatura minima? Quando la temperatura massima?

b. Qual è la temperatura media tra le ore 12 e le ore 18?

[**a.** Ore 4, ore 16; **b.** 29,3 °C circa]

42 **Lavoro di una forza elettrostatica.** Due cariche q_1 e q_2 si respingono con una forza la cui intensità F è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza r, cioè: $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$

Supponendo che le cariche si trovino sull'asse x, rispettivamente nei punti $A(-1, 0)$ e $B(1, 0)$, e mantenendo fissa la carica q_2, calcola il lavoro necessario per spostare la carica q_1 dal punto A all'origine degli assi.

$\left[\frac{kq_1q_2}{2}\right]$

43 **Raffreddamento di un corpo.** Un oggetto incandescente, alla temperatura di 200 °C, viene posto a raffreddare in un ambiente in cui la temperatura è costante. La velocità (in °C/ora) con cui diminuisce la temperatura dell'oggetto è espressa dalla funzione $f(t) = -80e^{-\frac{1}{2}t}$ dove t è il tempo, misurato in ore, trascorso da quando l'oggetto è stato posto a raffreddare.

a. Di quanto diminuisce la temperatura dell'oggetto nelle prime due ore?

b. Qual è stata la temperatura media dell'oggetto nelle prime due ore?

[**a.** Circa 101 °C; **b.** circa 141 °C]

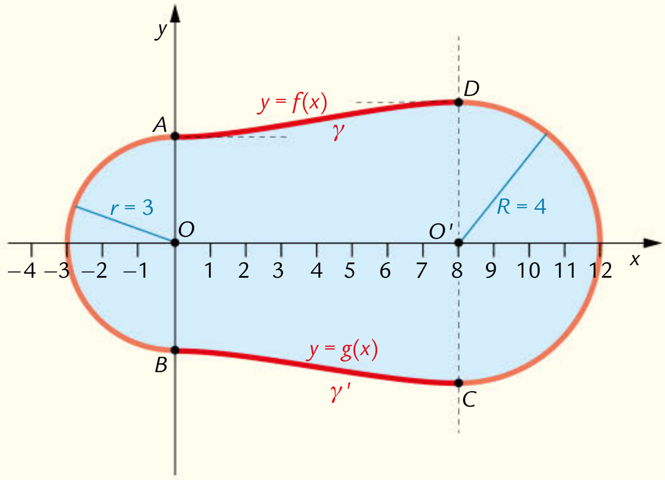
44 **La piscina.** Il modello geometrico di una piscina è rappresentato nella figura. Il perimetro della piscina è costituito da due semicirconferenze: l'arco $\widehat{AB}$ di centro O e raggio 3, e l'arco $\widehat{CD}$ di centro O' e raggio 4, uniti da due curve γ e γ', grafici nell'intervallo $[0, 8]$ rispettivamente delle due funzioni polinomiali di terzo grado $y = f(x)$ e $y = g(x)$. L'unità di misura è il metro e l'asse x rappresenta un asse di simmetria della piscina.

a. Sapendo che le tangenti al grafico di f nei punti A e D sono orizzontali, determina l'espressione analitica della funzione f e quella della funzione g.

b. Calcola l'area (in metri quadrati) della piscina, esprimendo il risultato sia in forma esatta, sia arrotondato alla prima cifra decimale.

c. La profondità dell'acqua della piscina è costante, uguale a 2 m. Quanti litri d'acqua contiene la piscina? Esprimi il risultato arrotondato a un numero intero.

$\left[\textbf{a. } f(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2 + 3,\ g(x) = \frac{1}{256}x^3 - \frac{3}{64}x^2 - 3;\right.$ $\left.\textbf{b. } \frac{25\pi}{2} + 56 \simeq 95{,}3\ \text{m}^2;\ \textbf{c. } \text{circa } 190540\ \text{L}\right]$

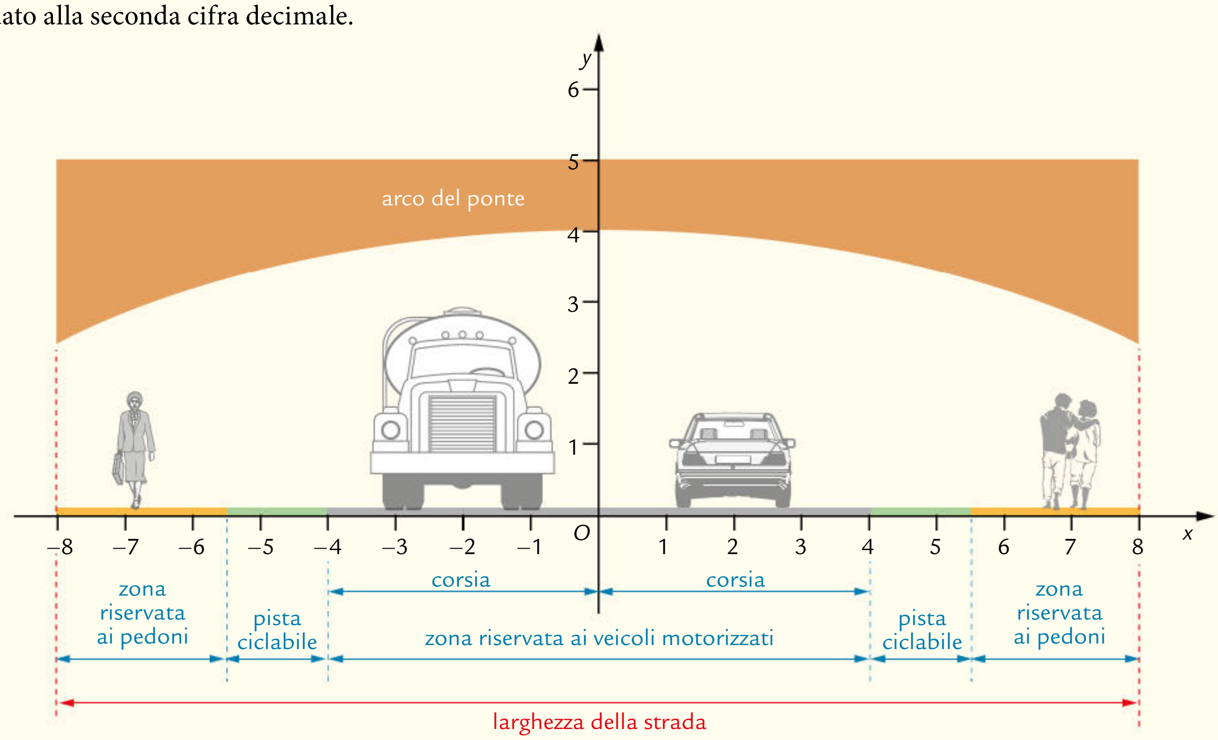


45 **Il ponte.** Un ponte a singola arcata, lungo 16 m, sovrasta una strada a doppio senso di circolazione, dotata in entrambi i sensi di marcia di una pista ciclabile e di un marciapiede per i pedoni. La ferrovia che passa sopra il ponte dista 5 m dalla strada, mentre il punto più alto del profilo dell'arco del ponte dista 4 m dalla strada. La figura rappresenta il profilo di una delle due facciate del ponte. La parte dell'asse delle ascisse compresa tra −8 e 8 rappresenta la strada.

a. Il profilo dell'arco del ponte può essere modellizzato da una funzione del tipo $f(x) = k - \frac{e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}}}{2}$ dove k è un numero reale opportuno. Determina il valore di k in base alle informazioni fornite.

b. Stabilisci la massima altezza di un veicolo motorizzato che passa sotto il ponte, al centro di una delle due corsie, in modo da mantenere una distanza di sicurezza di 50 cm tra l'arco del ponte e il tetto del veicolo.

c. Calcola l'area della facciata del ponte rappresentata in figura, fornendo sia il risultato esatto sia quello arrotondato alla seconda cifra decimale.



d. Si vogliono dipingere le due facciate del ponte. La pittura che si vuole utilizzare viene venduta in bidoni da 30 litri. Sapendo che si consuma 1 litro di vernice per ogni 0,3 m² di superficie, quanti bidoni sono necessari per dipingere entrambe le facciate del ponte?

$\left[\textbf{a. } k = 5;\ \textbf{b. } \text{circa } 3{,}42\ \text{m};\ \textbf{c. } 5\left(e^{\frac{8}{5}} - e^{-\frac{8}{5}}\right) \simeq 23{,}76\ \text{m}^2;\ \textbf{d. } 6\ \text{bidoni}\right]$

46 **Depressione economica.** A seguito di un periodo di depressione economica, il settore alimentare di un Paese ha registrato una diminuzione delle vendite di carne rossa con un tasso istantaneo relativo del 3% al mese. Ossia, se $y(t)$ è la funzione che rappresenta la quantità di carne venduta nel mese t-esimo dalla prima misurazione, si verifica che:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -0{,}03\,y(t)$$

Posto che inizialmente si siano venduti $1{,}25 \cdot 10^5$ kg di carne rossa al mese, prevedi quanti kilogrammi di questo bene saranno venduti dopo un anno dalla prima misurazione, nell'ipotesi di persistenza della fase depressiva. [$8{,}72 \cdot 10^4$ kg]

47 **Equazione di Gompertz.** L'equazione di Gompertz, presentata nel 1825, è universalmente adottata per modellizzare la crescita di organismi, cellule e tessuti ed è considerata la migliore equazione per rappresentare la crescita di cellule tumorali. Se $v(t)$ è il volume del tumore al tempo t, l'equazione di Gompertz è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{dv(t)}{dt} = v(t)(a - b\ln v(t))$$

dove a e b sono rispettivamente il tasso di crescita e il tasso di decelerazione della crescita caratteristici delle cellule considerate.

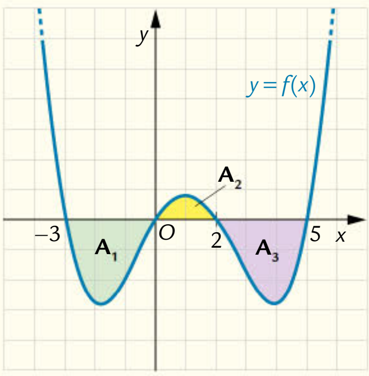
a. Determina l'equazione di Gompertz come integrale generale dell'equazione differenziale considerata.

b. Determina la soluzione particolare per $v(0) = V_0$.

[**a.** Integrale generale: $v(t) = e^{\frac{a}{b} - ce^{-bt}}$; **b.** soluzione particolare: $v(t) = e^{\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b} - \ln V_0\right)e^{-bt}}$]

Interpretare grafici e dati

48 In riferimento alla figura, è noto che le aree delle due regioni A_1 e A_3 valgono 5,3 mentre l'area della regione A_2 vale 1,2.



Calcola i valori dei seguenti integrali:

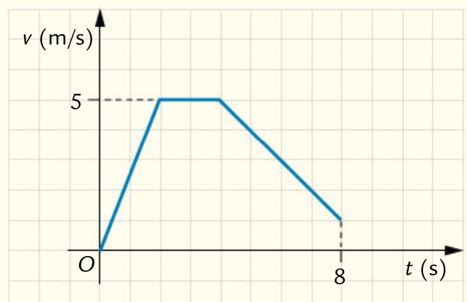
a. $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ **b.** $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$ **c.** $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx$

[**a.** −4,1; **b.** −4,1; **c.** −9,4]

49 La figura sottostante rappresenta il grafico della velocità di un punto materiale, in moto rettilineo, in funzione del tempo. Determina la distanza percorsa dal punto materiale nei primi 8 s in due modi diversi:

a. utilizzando le regole per il calcolo delle aree dei poligoni;

b. utilizzando il calcolo integrale.



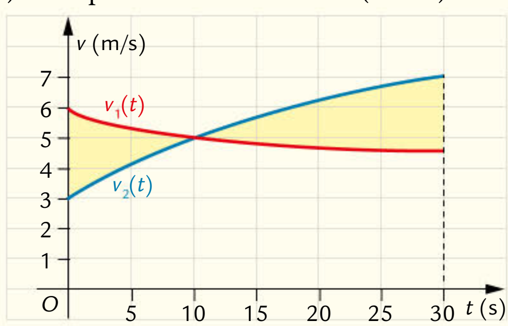
[27 m]

50 Due atleti corrono lungo una strada rettilinea; le funzioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ che esprimono le loro velocità (in m/s) sono rappresentate nella figura qui a fianco.

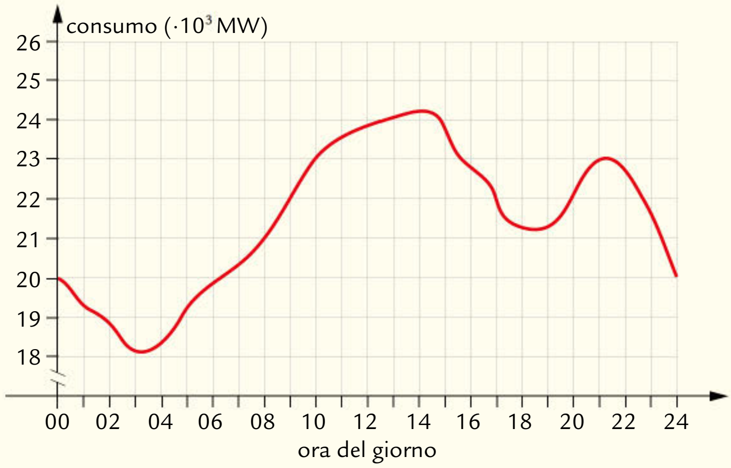
a. Supponendo che i due atleti siano partiti nello stesso istante e nello stesso punto, chi dei due è in testa dopo 5 s? E dopo 10 s?

b. Spiega che cosa esprime, in relazione al problema, l'area della parte colorata.

c. Il grafico suggerisce che in corrispondenza di un certo istante t i due atleti si trovano alla stessa distanza dal punto di partenza. Chiarisci questa affermazione e spiega quali calcoli dovresti svolgere per determinare l'istante t.



51 Nel grafico è mostrata la funzione $f(t)$ che rappresenta il consumo (in migliaia di megawatt) di energia elettrica di uno stato in un dato giorno, in funzione dell'ora del giorno. Ricorda che 1 megawatt $= 10^6\,W = 3{,}6 \cdot 10^9$ J/ora.



a. Spiega che cosa rappresenta, in relazione al problema, $\int_8^{14} f(t)\,dt$ e quale unità di misura va attribuita al numero che risulta dal calcolo dell'integrale.
b. Scrivi un'espressione contenente opportuni integrali che esprima il consumo complessivo di energia elettrica tra le 6 e le 8 del mattino e tra le 22 e le 24.
c. Sai fornire una stima, in joule, dell'energia consumata tra le 8 e le 10 del mattino? [c. Circa 1,584 · 1011 J]

Argomentare e dimostrare

52 Fornisci l'esempio di un solido di rotazione il cui volume è dato dall'integrale $\int_0^2 \pi x^6\,dx$. Successivamente calcola il volume del solido.

53 Indica dei possibili valori di a e b per cui sono vere le proposizioni seguenti:

a. $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ **b.** $\int_a^b \sin x\,dx = 0$ **c.** $\int_a^b \ln x\,dx < 0$

54 Per ciascuna delle seguenti disuguaglianze, stabilisci se è corretta, giustificando adeguatamente la risposta.

a. $\int_0^1 e^{-x^2}dx > 1$ **b.** $\int_{0,1}^1 \ln x\,dx > 0$ **c.** $\int_0^1 e^{-x^2}dx < 1$ **d.** $\int_{-1}^1 \sin x^3 dx < 0$

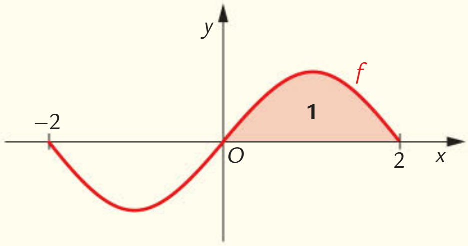
55 Senza calcolare $\int_0^3 e^{-x^2}dx$, giustifica perché $3e^{-9} \le \int_0^3 e^{-x^2}dx \le 3$.

56 Una funzione f, definita e continua nell'intervallo $[0, 4]$, è tale che $\int_0^4 f(x)\,dx = 6$. Spiega perché il massimo della funzione f nell'intervallo $[0, 4]$ non può essere minore di 1.

57 Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Mostra con un controesempio che in generale l'uguaglianza $\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ è falsa. Enuncia una condizione sufficiente sulla funzione f (sempre supposta continua) perché l'uguaglianza sia vera.

Verso la prova Invalsi

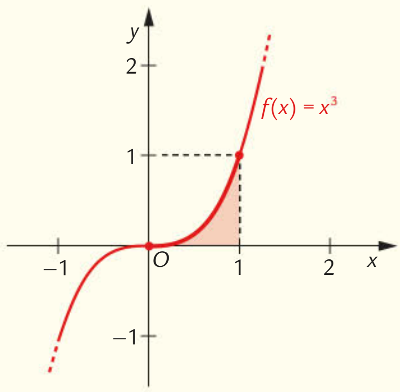
1 Il grafico in figura rappresenta la funzione f definita nell'intervallo $[-2, 2]$. Il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine O. L'area della regione colorata è 1.



Che valore ha l'integrale definito $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$?
Risposta: ....

(Esempi di domande Invalsi al termine del secondo ciclo)

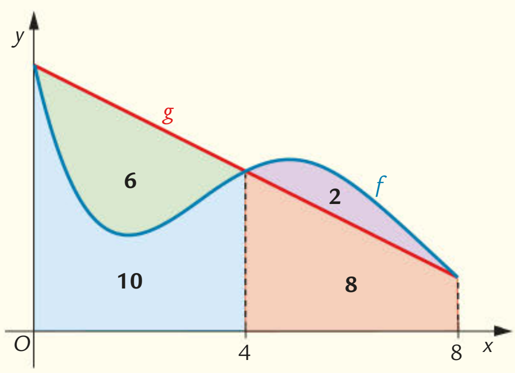
2 Il grafico rappresenta la funzione $f(x) = x^3$. Una primitiva della funzione f è la funzione $F(x) = \frac{1}{4}x^4$.



Quanto vale l'area della regione colorata in figura, cioè l'area sottesa dal grafico della funzione f nell'intervallo $[0, 1]$? Risposta: ....

(Esempi di domande Invalsi al termine del secondo ciclo)

3 Considera i grafici delle funzioni f e g. In figura sono rappresentate quattro superfici, ciascuna delle quali evidenziata con un colore. Inoltre, per ciascuna superficie è indicata la sua area.



a. Che valore ha l'integrale definito $\int_{4}^{8} f(x)\,dx$?
Risposta: ....

b. Che valore ha l'integrale definito $\int_{0}^{4} [g(x) - f(x)]\,dx$?

A 4 B 6 C 10 D 16

(Esempi di domande Invalsi al termine del secondo ciclo)

4 Qual è il risultato dell'integrale $\int e^{3x-1}dx$?

A $e^{3x-1} + c$

B $3e^{3x-1} + c$

C $\frac{1}{3}e^{3x-1} + c$

D Un numero reale positivo

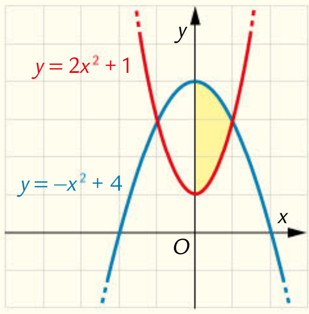
5 Qual è l'area della regione di piano colorata in figura?

A $\frac{11}{3}$

B $\frac{5}{3}$

C 2

D 4



6 Qual è la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = (3x - 1)^2$ che passa per il punto di coordinate $(-1, 2)$?

A $F(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 1$

B $F(x) = 3x^3 - 3x^2$

C $F(x) = 3x^3 + x + 1$

D $F(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 9$

7 Qual è l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione $y = \sin x$ e dall'asse x nell'intervallo $[-\pi, \pi]$?

Risposta: ....

8 Quanto vale $\int_{-3}^{3} \frac{x}{x^4+1}dx$?

A 0

B 1

C 2

D Nessuna delle precedenti risposte

9 Considera la regione finita di piano limitata dalla curva di equazione $y = e^{2x}$, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \ln 2$. Qual è il volume del solido che si ottiene dalla rotazione di questa regione di piano intorno all'asse x?

A $\frac{7\pi}{4}$

B $\frac{15\pi}{4}$

C $\frac{19\pi}{4}$

D Non è finito

10 Alcuni studi botanici hanno permesso di stabilire che la velocità di crescita di un particolare albero (misurata in decimetri per anno) è ben modellizzata dalla funzione $f(t) = \frac{1}{10} + \frac{8}{t^4}$, dove t è il tempo (misurato in anni) trascorso da quando l'albero è stato piantato. Di quanto cresce l'albero tra il primo e il secondo anno di vita?

- A Circa 2,4 dm
- B Circa 2 dm
- C Circa 1,4 dm
- D Circa 4 dm

11 Quanto vale $\int_1^2 \left(6x - \frac{4}{x^2}\right) dx$?

Risposta: ....

12 L'integrale $\int_0^3 \pi x^4 dx$ rappresenta:

- A il volume generato in una rotazione completa intorno all'asse x della regione di piano limitata dal grafico della funzione $y = x^4$ e dall'asse x nell'intervallo [0, 3]
- B il volume generato in una rotazione completa intorno all'asse x della regione di piano limitata dal grafico della funzione $y = x^3$ e dall'asse x nell'intervallo [0, 3]
- C il volume generato in una rotazione completa intorno all'asse x della regione di piano limitata dal grafico della funzione $y = x^2$ e dall'asse x nell'intervallo [0, 3]
- D nessuna delle precedenti risposte è corretta

13 Sia f una funzione continua e decrescente nell'intervallo $[0, +\infty)$. Barbara afferma che allora «devono esistere due numeri reali a e b, con $0 < a < b$, tali che $\int_a^b f(x)\,dx < 0$». Alberto è convinto che Barbara si stia sbagliando e afferma che, nelle ipotesi fatte, si può dire soltanto che «comunque scelti due numeri reali a e b, con $0 < a < b$, risulta $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$». Maria dissente e afferma che sia Barbara sia Alberto si stanno sbagliando. Chi ha ragione?

- ☐ Barbara
- ☐ Alberto
- ☐ Maria

Giustifica adeguatamente la risposta:

....

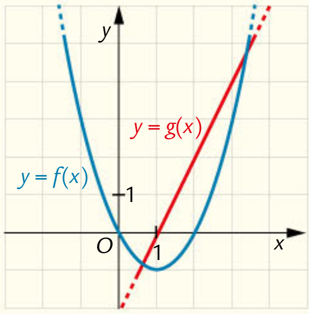
....

14 Qual è il valore medio della funzione $f(x) = 3x^2 + 1$ nell'intervallo [1, 2]?

A 7 B 8 C 9 D 10

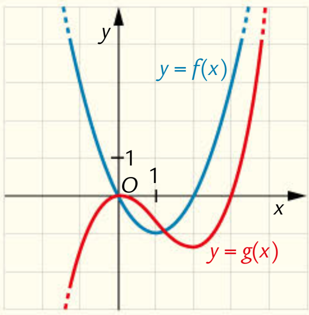
15 In riferimento alla figura possiamo affermare che:

- A la funzione f è la derivata della funzione g
- B la funzione f è una primitiva della funzione g
- C la funzione f è l'inversa della funzione g
- D nessuna delle precedenti



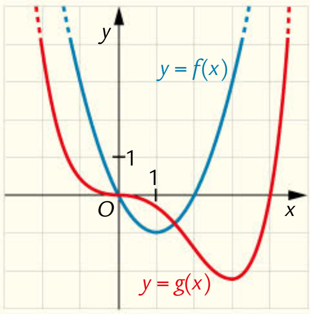
16 In riferimento alla figura possiamo affermare che:

- A la funzione f è la derivata della funzione g
- B la funzione f è una primitiva della funzione g
- C la funzione f è l'inversa della funzione g
- D nessuna delle precedenti



17 In riferimento alla figura possiamo affermare che:

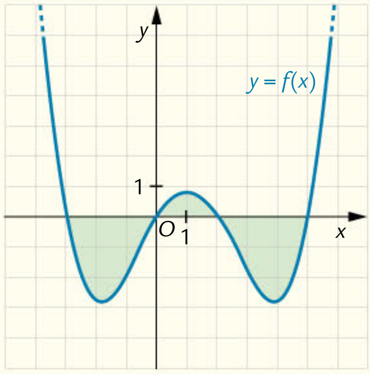
- A la funzione f è la derivata della funzione g
- B la funzione f è una primitiva della funzione g
- C la funzione f è l'inversa della funzione g
- D nessuna delle precedenti



18 La velocità di crescita di un'infezione virale (misurata in termini di numero di nuove infezioni al mese) è espressa dalla funzione $f(t) = \frac{50t}{t^2+1}$, dove t è il tempo (in mesi) trascorso da quando l'infezione è comparsa. Dopo 4 mesi, quante persone dobbiamo aspettarci che siano state infettate?

Risposta: ....

19 Quale delle seguenti espressioni esprime l'area complessiva della regione colorata in figura?



A $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx$

B $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx$

C $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx - \int_{2}^{5} f(x)\,dx$

D $-\int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx - \int_{2}^{5} f(x)\,dx$

20 Stabilisci se le seguenti disuguaglianze sono vere o false.

a. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin x\,dx < 0$ V F **b.** $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\,dx > 0$ V F **c.** $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos x\,dx < 0$ V F **d.** $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-x}\,dx > 0$ V F

21 Un'azienda produce capi di abbigliamento che necessitano di una rifinitura a mano. In base a delle statistiche effettuate, si stima che un operaio riesce a rifinire i capi con una velocità (misurata in numero di capi all'ora) espressa dalla funzione:

$f(t) = -3t^2 + 8t + 10 \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 4$

dove t è il tempo (in ore) trascorso a partire dall'inizio dell'orario di lavoro, alle 8 del mattino. Quanti capi ci si può aspettare che vengano rifiniti nelle prime due ore di lavoro, dalle 8 alle 10?

A 28 B 30 C 32 D 34

22 Sapendo che $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ ed $f(0) = 0$, stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. la funzione f è dispari V F
b. la funzione f non presenta né asintoti verticali né asintoti orizzontali V F
c. la funzione f presenta un punto di minimo assoluto nell'origine V F
d. la funzione f non presenta punti di flesso V F
e. risulta $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)$ V F

23 Si è stabilito un modello in base al quale la velocità di crescita di una popolazione batterica è di $3e^{2t}$ batteri al giorno, essendo t il tempo (in giorni) trascorso dall'inizio dell'osservazione.

a. Di quanto cresce la popolazione di batteri in 3 giorni? Arrotonda il risultato a un numero intero.
Risposta: ....

b. Si può affermare che dopo 3 giorni la popolazione di batteri è costituita da meno di 700 unità?
A Sì B No C I dati sono insufficienti per stabilirlo

c. Come cambierebbe la risposta alla domanda precedente se si sapesse che la popolazione era composta inizialmente da 200 batteri?
Risposta: ....

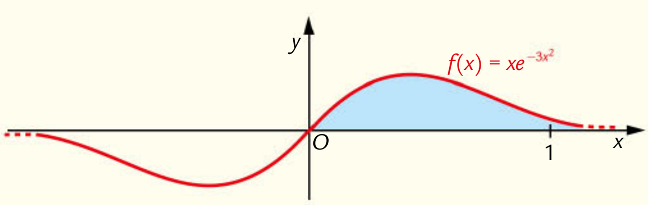
d. Come cambierebbe la risposta alla domanda **b**, se si sapesse che la popolazione era composta inizialmente da 50 batteri?
Risposta: ....

24 Qual è l'area della regione di piano in figura, limitata dal grafico della funzione $f(x) = xe^{-3x^2}$ e dall'asse x?

A È uguale a $\frac{1}{4}$

B È uguale a $\frac{1}{6}$

C È uguale a $\frac{1}{3}$



D È infinita, poiché si tratta di una regione di piano illimitata

25 La funzione $f(x) = e^{2x} + 1$ è soluzione di una delle seguenti equazioni differenziali. Di quale?

A $y' = 2y - 1$ B $y' = 2(y - 1)$ C $y' = y - 2$ D Nessuna delle precedenti

1 Una primitiva della funzione $f(x) = e^{2+3x}$ è:

A e^{2+3x} B $\frac{1}{3}e^{2+3x}$ C $3e^{2+3x}$ D e^{3x}

(Analisi matematica 1, febbraio 2009, Ingegneria, Politecnico di Torino)

2 Una primitiva della funzione $f(x) = (4+3x)^5$ su **R** è:

A $(4+3x)^4$ B $(4+3x)^7$ C $\frac{1}{120}(4+3x)^6$ D $\frac{1}{18}(4+3x)^6$

(Analisi matematica 1, febbraio 2009, Ingegneria, Politecnico di Torino)

3 $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2\, dx$ è uguale a:

A 0 B $\frac{\sin\sqrt{\pi}}{2}$ C 1 D $\frac{1-\cos\sqrt{\pi}}{2}$

(Calcolo 1, giugno 2004, Ingegneria, Università di Trento)

4 Calcola $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 11x \cos 11x\, dx$

(Istituzioni di matematiche, settembre 2010, Biologia, Università di Pavia) $\left[\frac{1}{22}\right]$

5 Calcola $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{R-1}^{R+4} \frac{x}{x+1} dx$.

(Istituzioni di matematiche, settembre 2010, Biologia, Università di Pavia) $[5]$

6 Calcola $\int_0^1 x \ln(1+x)\, dx$.

(Analisi matematica 1, aprile 2004, corso di laurea in informatica, Università di Pisa) $\left[\frac{1}{4}\right]$

7 Calcola $\int_{-1}^{4} \left|\frac{x-1}{x+2}\right| dx$.

(Analisi matematica 1, febbraio 2009, Ingegneria, Politecnico di Milano) $\left[1+3\ln\frac{3}{2}\right]$

8 Calcola il valore del seguente integrale improprio:

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-5}} dx$$

(Analisi matematica 1, settembre 2009, Ingegneria, Politecnico di Milano) $\left[\frac{\pi\sqrt{5}}{5}\right]$

9 Calcola l'area della regione finita di piano compresa tra le curve di equazioni $y = x^3$ e $y = x^2 + 2x$.

(Istituzioni di matematiche 1, settembre 2011, Architettura, Università di Roma) $\left[\frac{37}{12}\right]$

10 Disegna la porzione di piano S, delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = \frac{x^2}{4}$ e $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ e calcola il volume del solido ottenuto ruotando S intorno all'asse delle ascisse.

(Istituzioni di matematiche, giugno 2003, Chimica, Università di Padova) $\left[\frac{3\pi}{5}\right]$

11 Calcola l'area della regione compresa tra le curve di equazioni $y = x^2 - 6x + 7$ e $y = |x-3|$.

(Istituzioni di matematiche 1, giugno 2008, Architettura, Università di Roma) $\left[\frac{20}{3}\right]$

12 Calcola l'area della regione finita di piano compresa tra le curve di equazioni $y = \frac{1}{x}$ e $y = |-4x+4|$.

(Istituzioni di matematiche 1, febbraio 2011, Architettura, Università di Roma) $\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-2\right]$

13 Disegna la porzione di piano S formata dai punti (x, y) tali che:

$$\begin{cases} -6 \le x \le 6 \\ \sqrt{|x|} \le y \le \frac{6-x}{5} \end{cases}$$

e calcola il volume del solido che si ottiene ruotando S di un giro completo intorno all'asse delle ascisse.

(Istituzioni di matematiche, luglio 2003, Chimica, Università di Padova) $[2\pi]$

14 Sia f una funzione continua definita su [0, 1]. Di' se la seguente implicazione è vera oppure falsa (e dai una dimostrazione oppure un controesempio):

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

(Analisi matematica 1, luglio 2008, Ingegneria, Università di Pavia)

15 Determina la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)=\sqrt{e^{4x}-e^{6x}}$ tale che $F(0)=0$, quindi calcola $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.
(Analisi matematica 1, gennaio 2010, Ingegneria, Università di Brescia)

$\left[F(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}\,;\,-\frac{1}{3}\right]$

16 Determina la soluzione $y(x)$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ del problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y''+2y'+y=2x^2 \\ y(0)=12 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

(Analisi matematica 1, febbraio 2011, Ingegneria, Università di Brescia) $[y=8xe^{-x}+2x^2-8x+12]$

17 Dopo avere determinato, in dipendenza del parametro reale a, la soluzione y_a del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=2e^x \\ y(0)=0 \\ y'(0)=a \end{cases}$$

stabilisci per quali valori di a la funzione $g_a(x)=e^{-x}y_a(x)$ ammette asintoto obliquo per $x\to+\infty$.
(Analisi matematica 1, aprile 2004, corso di laurea in Fisica, Università di Milano)

[$y_a(x)=-2xe^x-(a+2)e^x+(a+2)e^{2x}$; $g_a(x)$ ammette asintoto obliquo per $x\to+\infty$ se e solo se $a=-2$]

18 Considera il problema di Cauchy:

$$u''-3u'+2u=t^2 \qquad u(0)=\alpha,\; u'(0)=0$$

a. Trova la soluzione del problema nel caso particolare $\alpha=0$.

b. Determina per quali valori di α si ha $\lim_{t\to+\infty} u(t)=-\infty$.

(Analisi matematica 1, febbraio 2005, Ingegneria, Università di Pisa) $\left[\mathbf{a.}\ u(t)=\frac{1}{4}e^{2t}-2e^t+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{7}{4};\ \mathbf{b.}\ \alpha\geq\frac{1}{4}\right]$

Compito di realtà 1

Crescita di una popolazione di batteri

Una popolazione di batteri cresce a una velocità $v(t)$ (misurata in numero di batteri all'ora) che è ben modellizzata dalla funzione $v(t) = \frac{150}{(t+1)^2}$, con $t \geq 0$ (t rappresenta il tempo, in ore).

1 Di quante unità cresce la popolazione nelle prime quattro ore dall'istante iniziale di osservazione ($t = 0$)?

2 Sapendo che nell'istante iniziale di osservazione la popolazione era costituita da 200 batteri, determina l'espressione analitica della funzione $P(t)$ che esprime il numero di batteri all'istante t.

3 In base al modello determinato al punto **2**, qual è l'evoluzione della popolazione di batteri nel lungo periodo? Puoi affermare che la funzione $P(t)$ è strettamente crescente?

Una popolazione di batteri di una specie diversa dalla precedente cresce a una velocità $v^*(t)$ (misurata in numero di batteri all'ora) che è ben modellizzata dalla funzione $v^*(t) = \frac{150}{t+1}$, con $t \geq 0$.

4 Nelle prime quattro ore dall'inizio dell'osservazione, quale delle delle due popolazioni di batteri considerate cresce di più? Rispondi senza fare calcoli, dando un'adeguata giustificazione.

5 Verifica l'esattezza della risposta data al punto **4**, calcolando a quanto ammonta esattamente la differenza tra il numero di batteri di cui è cresciuta la prima popolazione e il numero di batteri di cui è cresciuta la seconda nelle prime 4 ore dall'inizio dell'osservazione.

6 È possibile stabilire il numero di batteri della seconda specie dopo 4 ore dall'inizio dell'osservazione?

7 Indica con $P^*(t)$ la popolazione di batteri della seconda specie al tempo t e calcola $\lim_{t \to +\infty} P^*(t)$, verificando in particolare che tale limite non dipende dal numero di batteri presenti in origine. Commenta il risultato ottenuto: il modello costituito dalla funzione $P^*(t)$, realistico nel primo periodo, ti sembra adatto a predire l'evoluzione della popolazione della seconda specie di batteri nel lungo periodo?

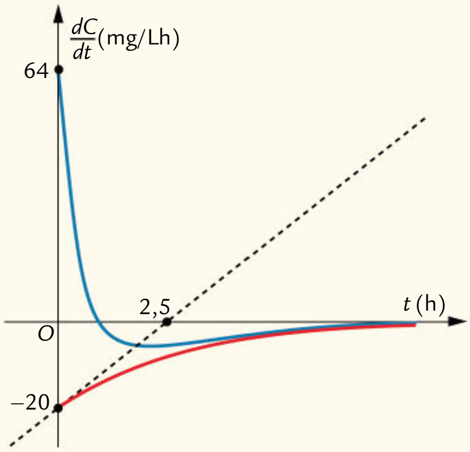
Risposte p. 392

Compito di realtà 2

Concentrazione di un farmaco nel sangue e biodisponibilità

La concentrazione di un farmaco nel sangue varia nel tempo in modo diverso a seconda che esso sia assunto per via endovenosa o per via orale. Nel primo caso, la concentrazione è massima nel momento in cui il farmaco viene iniettato, dopodiché diminuisce al passare del tempo. Nel secondo caso, invece, poiché il farmaco deve essere metabolizzato, la concentrazione è inizialmente uguale a 0, poi aumenta fino a un valore massimo e infine diminuisce.

I grafici riportati nella figura in blu e in rosso rappresentano, nei due casi, la velocità con cui varia la concentrazione di un certo farmaco nel sangue di un paziente (espressa in mg/Lh) in funzione del tempo (espresso in h). In figura è riportata anche la retta tangente al grafico disegnato in rosso nel punto corrispondente a $t = 0$.



1 Stabilisci quale dei due grafici corrisponde all'assunzione per via endovenosa e quale all'assunzione per via orale, motivando in modo esauriente la tua scelta.

2 In base alle informazioni che puoi ricavare dai grafici, determina le espressioni analitiche delle due funzioni rappresentante in blu e in rosso, sapendo che esse sono rispettivamente della forma:

$$f(t) = A\left(5e^{-2t} - e^{-\frac{2}{5}t}\right) \qquad g(t) = Be^{kt}$$

dove A, B e k sono parametri da determinare.

3 Utilizzando le tecniche del calcolo differenziale, verifica che la concentrazione del farmaco somministrato per via orale è massima dopo circa un'ora dall'assunzione.

La concentrazione iniziale (cioè in $t = 0$) del farmaco in esame, nel caso di somministrazione per via endovenosa, è uguale a 50 mg/L.

4 Deduci le espressioni analitiche delle funzioni $C_o(t)$ e $C_e(t)$, che esprimono la concentrazione del farmaco nel sangue rispettivamente nel caso di somministrazione per via orale e per via endovenosa .

5 Determina la concentrazione *media* del farmaco nel sangue del paziente nelle prime 10 ore dall'assunzione in ciascuno dei due casi, cioè nel caso di somministrazione per via orale e nel caso di somministrazione per via endovenosa.

La biodisponibilità di un farmaco è la frazione del principio attivo somministrato che raggiunge la circolazione sanguigna; se la somministrazione avviene per via endovenosa la biodisponibilità è massima e uguale a 1 (100%), mentre nel caso di una somministrazione per altra via si hanno valori inferiori a causa del parziale assorbimento e del metabolismo.

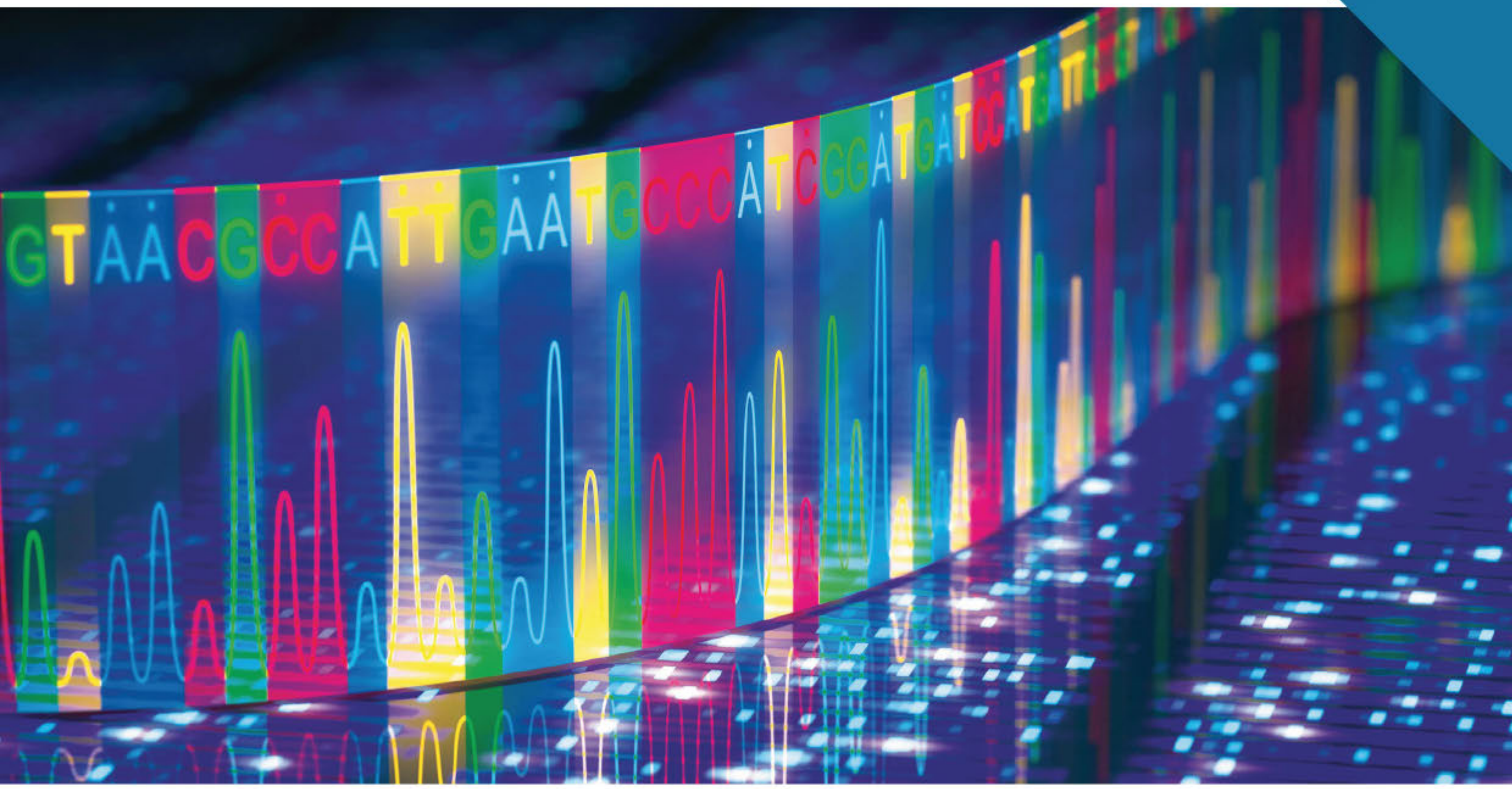
6 Calcola la biodisponibilità del farmaco in esame nel caso di somministrazione per via orale, tenendo conto che essa è definita dal rapporto seguente, espresso in percentuale:

$$\frac{\int_0^{+\infty} C_o(t)\,dt}{\int_0^{+\infty} C_e(t)\,dt}$$

Risposte p. 392

TEMA N

Dati e previsioni



Un concetto fondamentale che ti è stato presentato fin dall'inizio di questo corso di matematica, e che ormai ti è certamente familiare, è quello di variabile.
Ora vogliamo riprendere questo concetto e darne una nuova interpretazione, in termini *probabilistici*. Nella prossima Unità introdurremo infatti il concetto di *variabile aleatoria*, cioè di variabile i cui valori sono determinati dall'esito di un esperimento casuale.
La nozione di variabile aleatoria è di fondamentale importanza perché è alla base della costruzione di modelli matematici generali, utilizzati per descrivere numerosi fenomeni casuali. Tali modelli trovano applicazioni in svariati settori, dai problemi di scelta nell'ambito di decisioni aziendali alle scienze della vita (per esempio nella stesura degli algoritmi per il sequenziamento del DNA).
Alla luce delle nuove nozioni introdotte approfondiremo infine lo studio della statistica, presentando i primi elementi di inferenza statistica.

PREREQUISITI

- Concetti fondamentali di calcolo della probabilità
- Calcolo combinatorio
- Integrali indefiniti, definiti e impropri

COMPETENZE

- Utilizzare modelli probabilistici per risolvere problemi ed effettuare scelte consapevoli

Unità
5
Tema N

Distribuzioni di probabilità

- Approfondimenti
- Con GeoGebra
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

1. Variabili aleatorie e distribuzioni discrete

Un nuovo concetto di variabile

Nell'ambito del calcolo della probabilità si introduce un nuovo concetto di «variabile», quello di *variabile aleatoria*, che è fondamentale in svariate applicazioni.
Consideriamo per esempio l'esperimento che consiste nel lancio di due dadi regolari, e indichiamo con X la somma dei due numeri ottenuti. La lettera X rappresenta una variabile, che può assumere i valori:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

Essa è l'esempio di una **variabile aleatoria**.
Intuitivamente, una variabile aleatoria è una *variabile i cui valori sono numeri reali determinati dall'esito di un esperimento aleatorio*. Per esempio, sono variabili aleatorie:

- la variabile T che rappresenta il numero di «testa» uscite nel lancio di 100 monete;
- la variabile H che rappresenta l'altezza di una persona scelta a caso nella popolazione;
- la variabile N che rappresenta il numero di autovetture che giungono in un giorno a un casello autostradale.

OSSERVA
Le variabili aleatorie si indicano di solito con lettere *maiuscole* dell'alfabeto.

Una variabile aleatoria, tuttavia, si può anche interpretare come *funzione*; per esempio, riconsideriamo la variabile aleatoria X «somma dei due numeri ottenuti nel lancio di due dadi»: essa si può interpretare come la *funzione* che associa a ogni possibile esito del lancio la somma dei due numeri ottenuti. Questa osservazione consente di dare una definizione più formale di variabile aleatoria.

DEFINIZIONE | **Variabile aleatoria**

Si chiama **variabile aleatoria** (o **variabile casuale**) una funzione che associa a ogni possibile esito di un esperimento aleatorio un numero reale.

RICORDA
Un insieme si dice **numerabile** se è in corrispondenza biunivoca con **N**.

Se Ω è lo spazio campionario di un esperimento aleatorio e X è una variabile aleatoria relativa all'esperimento, in base alla definizione data risulta $X : \Omega \to \mathbf{R}$.
Per esempio, se consideriamo l'esperimento che consiste nel lancio di 2 monete equilibrate e indichiamo con X il numero di «testa» che si ottiene, la variabile aleatoria X, intesa come funzione, può essere rappresentata dal diagramma a frecce mostrato nella **Fig. 1**. Una variabile aleatoria che, come quest'ultima, assume soltanto un numero finito di valori (nel caso specifico 0, 1, 2), o al più un'infinità numerabile, si dice **discreta**.

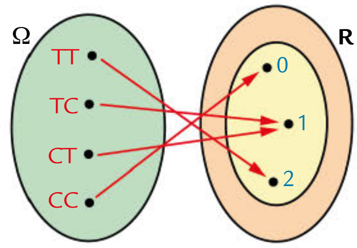


Figura 1

Distribuzioni di probabilità

Riconsideriamo nuovamente la variabile aleatoria X che conta il numero di «testa» uscite nel lancio di due monete; possiamo associare a ciascuno dei valori che può assumere X (0, 1, 2) la probabilità che X assuma quel valore (ossia rispettivamente la probabilità degli eventi $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, che significano «non è uscita nessuna 'testa'», «è uscita esattamente una 'testa'», «sono uscite due 'testa'»): si definisce così una funzione che, nel caso dello specifico esempio, è rappresentata in forma tabulare dalla seguente tabella:

Indica i possibili valori di X →	x_i, con $i = 0, 1, 2$	0	1	2
Indica la probabilità che X assuma il valore x_i →	$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La funzione così costruita è l'esempio di una distribuzione di probabilità. Si dà infatti la seguente definizione.

DEFINIZIONE | Distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta

Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $x_1, x_2, ..., x_n$, con probabilità rispettive $p_1, p_2, ..., p_n$; si chiama **distribuzione di probabilità** (o **densità**) della variabile aleatoria X la funzione che associa a ciascun x_i la rispettiva probabilità p_i.

La distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta si rappresenta tramite una tabella del tipo mostrato qui sotto.

x_i	x_1	x_2	......	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	......	p_n

Poiché gli eventi $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ sono *disgiunti* e la loro *unione* è Ω, ne segue che è sempre $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.
Avrai notato la similitudine fra il concetto di distribuzione di *probabilità* e quello di distribuzione di *frequenze relative* studiato in statistica. La similitudine continua anche nella definizione dei concetti di *media*, *varianza* e *deviazione standard* di una variabile aleatoria discreta.

DEFINIZIONE | Media, varianza e deviazione standard di una variabile aleatoria discreta

Sia X una variabile aleatoria discreta che assume i valori $x_1, x_2, ..., x_n$, con probabilità rispettive $p_1, p_2, ..., p_n$.

a. Si chiama **media** (o **valore atteso** o **speranza matematica**) della variabile aleatoria X, e si indica con il simbolo $E(X)$ o con la lettera μ, il numero:

$$\mu = E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

b. Si definisce **varianza** di X, e si indica con il simbolo $V(X)$ o con il simbolo σ^2, il numero così definito:

$$\sigma^2 = V(X) = [x_1 - E(X)]^2 \cdot p_1 + [x_2 - E(X)]^2 \cdot p_2 + ... + [x_n - E(X)]^2 \cdot p_n$$

c. Si definisce **deviazione standard** (o **scarto quadratico medio**) di X, e si indica con la lettera σ, la radice quadrata della sua varianza.

OSSERVA

1. Il simbolo standard $E(X)$ utilizzato per indicare la media di una variabile aleatoria X deriva dall'inglese *Expectation*, che significa «valore atteso».
2. Continuano a valere, per la media di una variabile aleatoria, proprietà analoghe a quelle viste per la media in statistica. In particolare, il valore medio di una variabile aleatoria è lineare, vale a dire: se a e $b \in \mathbb{R}$, e X è una variabile aleatoria, risulta: $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Intuitivamente, la *media* di una variabile aleatoria fornisce un valore che approssima la media aritmetica dei valori assunti dalla variabile, quando si esegue un numero k di prove: l'approssimazione è tanto migliore quanto più grande è k; la *varianza* e la *deviazione standard* sono invece indici che forniscono una misura della «dispersione» dei valori della variabile aleatoria intorno alla sua media.
Similmente a quanto visto in statistica, per il calcolo della *varianza* di una variabile aleatoria sussiste anche la seguente **formula alternativa ridotta**, che permette un minor numero di calcoli:

$$V(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n - [E(X)]^2$$

ESEMPIO Media, varianza e deviazione standard di una variabile aleatoria

Determiniamo media, varianza e deviazione standard della variabile aleatoria X che esprime il numero di «testa» uscite nel lancio di tre monete equilibrate.

La distribuzione di X (calcolata nell'esempio precedente) è:

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

In base alle definizioni date poc'anzi abbiamo:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$ Valore medio

$$V(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$ Utilizzando la formula ridotta per il calcolo della varianza

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{3}{4}} \simeq 0{,}87$$ Deviazione standard

Giochi equi

Tramite il concetto di valore medio di una variabile aleatoria possiamo costruire un modello matematico che consente di valutare l'*equità* di un gioco.
Intuitivamente, un gioco è:

- *equo* se, alla fine di molte partite, il giocatore si trova circa nelle stesse condizioni di partenza, senza né grandi vincite né grandi perdite;
- *favorevole* al giocatore se, alla fine di molte partite, il giocatore realizza una vincita;
- *sfavorevole* al giocatore se, alla fine di molte partite, il giocatore si trova in perdita.

Queste considerazioni intuitive si possono formalizzare considerando la variabile aleatoria X che rappresenta la somma complessiva vinta o persa da un giocatore dopo una partita (tenendo conto anche dell'eventuale cifra sborsata all'inizio del gioco per partecipare a esso) e calcolando il *valore medio* di tale variabile aleatoria:

- se il valore medio di X è *nullo*, il gioco è **equo**;
- se il valore medio di X è *positivo*, il gioco è **favorevole** al giocatore;
- se il valore medio di X è *negativo*, il gioco è **sfavorevole** al giocatore.

ESEMPIO Roulette francese

Alla roulette francese, la puntata sul rosso (o sul nero) è pagata, in caso di vincita, il doppio della posta giocata. Si tratta di un gioco equo?

Immaginiamo di puntare 1 euro su uno dei due colori e sia X la variabile aleatoria che esprime la somma complessiva vinta o persa dopo una puntata. La variabile aleatoria X può assumere valore -1 o 1, rispettivamente se non esce o esce il colore puntato. Per calcolare le probabilità che corrispondono ai due eventi $X = -1$ e $X = 1$ occorre ricordare che la roulette francese ha 37 numeri: 18 rossi, 18 neri e 1 verde (lo zero), favorevole al banco nel caso di giocata su nero/rosso. La distribuzione di probabilità di X è dunque quella in tabella:

Valori di X	-1	1
Probabilità	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$$\Rightarrow E(X) = -\frac{19}{37} + \frac{18}{37} = -\frac{1}{37}$$

Poiché $E(X) < 0$, **non** si tratta di un gioco equo, bensì di un gioco *sfavorevole* al giocatore.

Esercizi p. 288

2. Distribuzione binomiale

Il concetto di variabile aleatoria permette di costruire dei modelli generali, applicabili a vaste classi di problemi. Tra i modelli che fanno riferimento a variabili aleatorie *discrete* ci limiteremo a studiare i due più importanti: il *processo di Bernoulli* (in questo paragrafo) e il *processo di Poisson* (nel prossimo).
Iniziamo lo studio del processo di Bernoulli introducendo una definizione preliminare.

DEFINIZIONE | Esperimento di Bernoulli

Si dice **esperimento** (o **prova**) **di Bernoulli** un esperimento aleatorio che può avere solo due possibili esiti. Conveniamo di chiamare «successo» l'esito che interessa e «insuccesso» l'altro esito possibile. La probabilità p di successo in un esperimento di Bernoulli si dice **parametro** dell'esperimento.

SCRITTURE EQUIVALENTI

Talvolta «successo» e «insuccesso» vengono indicati rispettivamente con 1 e con 0.

ESEMPI Prove di Bernoulli

1. Si lancia una moneta e si vince se esce «testa». Questo esperimento aleatorio è una prova di Bernoulli, dove si considera come «successo» l'esito «testa»; il parametro di questa prova di Bernoulli è $p = \frac{1}{2}$.
2. È noto che mediamente il 5% dei pezzi prodotti in una giornata da un'azienda hanno dei difetti. La scelta a caso di un pezzo tra quelli prodotti e la verifica se sia difettoso si possono assimilare a una prova di Bernoulli, dove si considera come «successo» l'evento che consiste nell'aver trovato un pezzo difettoso. Il parametro di questa prova di Bernoulli è $p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

Supponiamo ora di eseguire ripetutamente n prove di Bernoulli **identiche** e **indipendenti** tra loro, vale a dire supponiamo che le prove si verifichino tutte nelle stesse condizioni (in modo, quindi, che la probabilità di avere un successo sia la stessa in ogni prova) e che l'esito di un singolo esperimento **non** abbia influenza sull'esito degli altri esperimenti: il processo che ne risulta è il modello adatto a descrivere moltissimi fenomeni, perciò gli si è dato un nome specifico.

DEFINIZIONE | Processo di Bernoulli

Si chiama **processo di Bernoulli** l'esperimento aleatorio consistente nella ripetizione di n prove di Bernoulli identiche e indipendenti.

Per esempio, sono processi di Bernoulli il lancio ripetuto per n volte di una moneta, oppure l'estrazione con reinserimento, per n volte successive, di una pallina da un'urna che contiene palline di due soli colori.

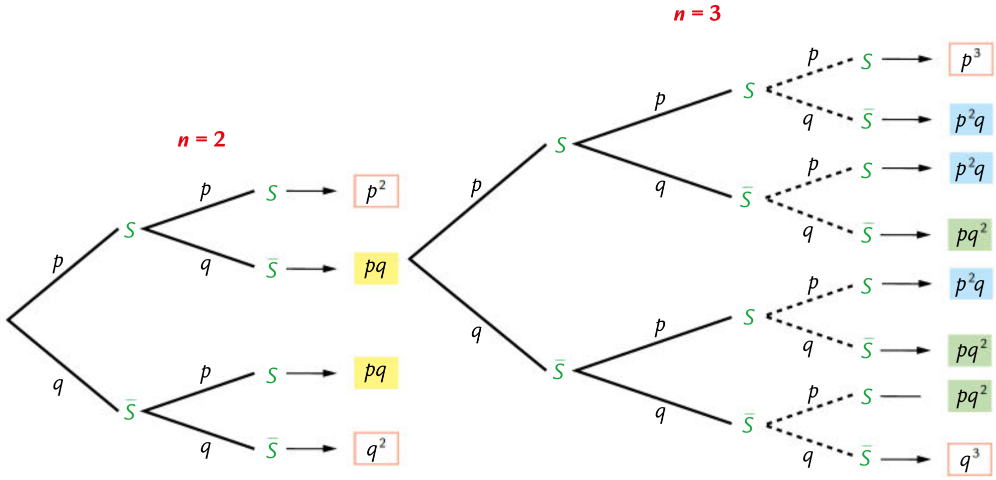
DEFINIZIONE | Variabile aleatoria binomiale

Consideriamo un processo di Bernoulli costituito da n prove di parametro p. La variabile aleatoria X che conta il numero complessivo di successi ottenuti nelle n prove si dice **binomiale** di parametri n e p.

Con GeoGebra
Distribuzione binomiale

Il parametro n è un numero intero positivo, mentre il parametro p è un numero reale con $0 \leq p \leq 1$. Qual è la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria binomiale di parametri n e p?
Cominciamo con l'esaminare il caso in cui $n = 2$; immaginiamo cioè di eseguire 2 esperimenti indipendenti, in ciascuno dei quali la probabilità di successo (S) è p e quella di insuccesso ($\overline{S}$) è $q = 1 - p$.

La variabile aleatoria X che conta il numero di successi può assumere allora i valori 0, 1, 2 e i vari possibili esiti dell'esperimento, con le rispettive probabilità, sono rappresentati in **Fig. 2a**. Analogamente, analizziamo il caso in cui $n = 3$ (**Fig. 2b**).



a. Le probabilità che si realizzino 2, 1 o 0 successi sono rispettivamente:

p^2 $2pq$ q^2

b. Le probabilità che si realizzino 3, 2, 1 o 0 successi sono rispettivamente:

p^3 $3p^2q$ $3pq^2$ q^3

Figura 2

Riconosciamo che, nel caso in cui $n = 2$, le probabilità degli eventi $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ sono date dai termini dello sviluppo del quadrato del *binomio* $(p + q)$; analogamente, nel caso in cui $n = 3$, le probabilità degli eventi $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$ sono espresse dai termini dello sviluppo del cubo del *binomio* $(p + q)$. Questi risultati si possono generalizzare: il seguente teorema consente infatti di affermare che in un processo di Bernoulli di parametri n e p le probabilità degli eventi $X = 0$, $X = 1$, ..., $X = n$ sono espresse dai termini dello sviluppo della potenza n-esima del *binomio* $(p + q)$: di qui l'appellativo *binomiale* dato alla variabile aleatoria.

RIFLETTI

Abbiamo visto nel volume *Statistica e probabilità* che il coefficiente di $p^k q^{n-k}$ nello sviluppo di $(p+q)^n$ è $\binom{n}{k}$. Puoi quindi riconoscere che la formula che esprime $p(X = k)$ fornisce effettivamente, per ogni k, uno dei termini dello sviluppo di $(p+q)^n$.

TEOREMA 1 | Distribuzione di una variabile aleatoria binomiale

Sia X una variabile aleatoria **binomiale** di parametri n e p. La **distribuzione di probabilità** di X è data dalla formula:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, ..., n$$

DIMOSTRAZIONE

1. Dobbiamo calcolare la probabilità che sia $X = k$, cioè la probabilità di avere k successi in n prove.
2. La probabilità di ottenere, in n prove, una *particolare* sequenza di k successi e $(n - k)$ insuccessi, per l'*indipendenza* delle prove, è uguale a $p^k(1-p)^{n-k}$.
3. Le *diverse sequenze possibili* costituite da k successi e $n - k$ insuccessi sono in tutto $\binom{n}{k}$. Infatti una particolare sequenza di questo tipo è individuata univocamente una volta che sono note le k posizioni dei successi (perché ovviamente tutte le altre posizioni saranno occupate da insuccessi) e i modi in cui si possono scegliere k posizioni tra n è uguale a $\binom{n}{k}$.
4. Poiché gli $\binom{n}{k}$ modi in cui possono realizzarsi k successi sono eventi incompatibili, la probabilità dell'evento $X = k$ è la *somma delle probabilità* di tutti questi eventi incompatibili, quindi è uguale a $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Per indicare che una variabile aleatoria ha distribuzione binomiale di parametri n e p si utilizza la scrittura $X \sim B(n, p)$, da leggere «X segue la **distribuzione binomiale** di parametri n e p». I diagrammi a barre in **Fig. 3** rappresentano le distribuzioni di probabilità di alcune variabili aleatorie binomiali in cui $n = 10$.

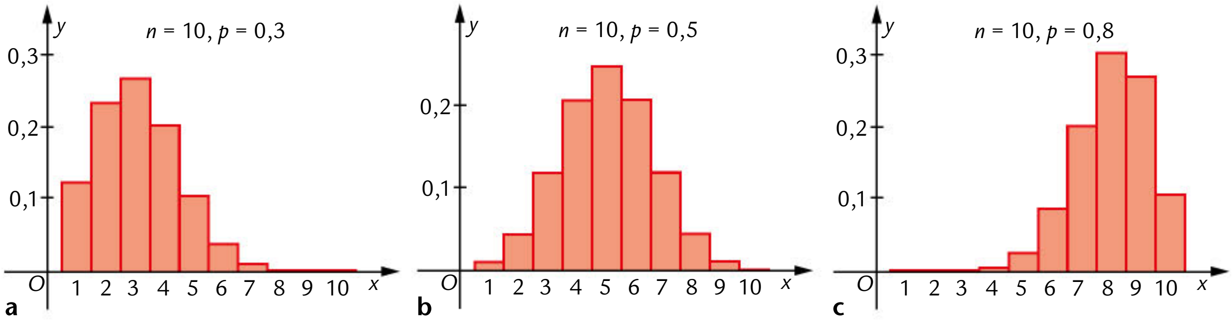


Figura 3 Se $p = 0,5$, la distribuzione è simmetrica rispetto a $\frac{n}{2}$ (vedi Fig. b in cui $n = 10$, quindi $\frac{n}{2} = 5$), mentre, se $p < 0,5$ ($p > 0,5$), la densità è «sbilanciata» verso lo 0 (oppure verso n) come mostrano le Figg. a e c.

Circa la media e la varianza di una variabile aleatoria binomiale, si potrebbe dimostrare quanto segue.

TEOREMA 2 | Media e varianza di una variabile aleatoria binomiale

Sia X una variabile aleatoria **binomiale** di parametri n e p. Allora la **media** e la **varianza** di X sono assegnate dalle formule:

$$E(X) = np \qquad V(X) = np\,(1 - p)$$

ESEMPIO Test a risposta multipla

In un compito in classe Paolo deve rispondere a 5 quesiti a risposta multipla: ogni quesito è costituito da 4 risposte, di cui una sola è quella esatta. Il test è superato rispondendo in modo corretto ad almeno 3 domande.
Essendo del tutto impreparato Paolo risponde a caso a tutti i quesiti.

a. Qual è la probabilità che Paolo superi il test?
b. Qual è il numero medio di risposte esatte che Paolo può aspettarsi di avere dato?

a. La risposta a un singolo quesito è un esperimento di Bernoulli, con probabilità di successo uguale a $p = \frac{1}{4}$; le risposte ai 5 quesiti costituiscono un processo di Bernoulli di 5 prove, di parametro p.
La variabile X che conta il numero complessivo di risposte esatte date è quindi una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 5$, $p = \frac{1}{4}$.

La probabilità $p(X \geq 3)$ che Paolo superi il test è data dalla somma $p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)$, essendo gli eventi $X = 3$, $X = 4$, $X = 5$ incompatibili.

$$p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{9}{16} = \frac{45}{512} \simeq 0,088 = 8,8\%$$

$$p(X = 4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1 = 5 \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{1024} \simeq 0,015 = 1,5\%$$

$$p(X = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024} \simeq 0,001 = 0,1\%$$

In definitiva, la probabilità che Paolo superi il test è all'incirca 8,8% + 1,5% + 0,1% = 10,4% (decisamente bassa!).

b. Il numero medio di risposte che Paolo può aspettarsi di aver dato è:

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1,25$$

PER SAPERNE DI PIÙ La distribuzione geometrica

Un'importante variabile aleatoria legata al processo di Bernoulli è quella che conta *il numero complessivo di prove fino alla realizzazione del primo successo* (incluso quest'ultimo); detta p la probabilità di successo, una tale variabile aleatoria, diciamo X, è detta **geometrica** di parametro p. Osservando che l'evento $X = k$ si realizza quando si sono verificati (nell'ordine) $k - 1$ insuccessi e 1 successo, per l'indipendenza delle prove in un processo di Bernoulli, otteniamo che:

$$p(X = k) = q^{k-1}p = pq^{k-1} \qquad \text{con } k \in \mathbf{N} - \{0\} \text{ e } q = 1 - p$$

Si riconosce così che la distribuzione di probabilità di X è una progressione *geometrica*: di qui l'appellativo dato alla variabile aleatoria.

Esercizi p. 292

3. Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson

Un'importante distribuzione di probabilità discreta, che ha una vasta gamma di applicazioni in aree diverse, è la cosiddetta **distribuzione di Poisson**. Essa può venire ricavata come approssimazione della distribuzione binomiale, secondo il procedimento che ora spieghiamo.

1. Consideriamo una variabile aleatoria binomiale X di parametri n e p; sappiamo che:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Indichiamo inoltre con λ il valore medio di X, cioè poniamo $\lambda = np$.

2. Esprimiamo la probabilità che sia $X = k$ in funzione di λ e di n.
Poiché $\lambda = np$, ne segue che $p = \dfrac{\lambda}{n}$, dunque:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \qquad [1]$$

3. Supponiamo ora che n sia «molto grande» (e di conseguenza che p sia «molto piccolo» dal momento che $p = \dfrac{\lambda}{n}$); in tal caso il valore della [1] può essere approssimato dal suo limite per n che tende a più infinito:

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{k \text{ fattori decrescenti}}}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k}}_{\substack{\text{è un rapporto di due}\\ \text{polinomi il cui termine}\\ \text{di grado massimo è } n^k\\ \text{quindi tende a 1 per}\\ n\to+\infty}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}}_{\substack{\text{è costante}\\ \text{indipendente}\\ \text{da } n}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\substack{\text{tende a } e^{-\lambda}\\ \text{per il limite}\\ \text{notevole [13]}\\ \text{dell'Unità 2}\\ \text{del Volume 4}}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\substack{\text{tende a 1}\\ \text{per } n\to\infty}} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

ATTENZIONE!
L'approssimazione [2] è considerata soddisfacente quando $n > 50$ e $np < 10$.

Riassumendo: se X è una variabile aleatoria binomiale tale che n è «grande» e p è «piccolo», vale la seguente approssimazione:

$$p(X = k) \simeq e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{dove } \lambda = np \qquad [2]$$

La formula [2] definisce la distribuzione di Poisson.

DEFINIZIONE | Distribuzione di Poisson

Una variabile aleatoria discreta X è detta **di Poisson** di parametro λ, con $\lambda > 0$, se la sua distribuzione di probabilità è assegnata da:

$$p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots$$

IN SIMBOLI

Per indicare che una variabile aleatoria X è di Poisson di parametro λ si utilizza la scrittura $X \sim P(\lambda)$.

Circa la media e la varianza di una distribuzione di Poisson, si potrebbe dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 3 | Media e varianza di una variabile aleatoria di Poisson

Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ; allora sia la **media** sia la **varianza** di X sono uguali a λ:

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

La distribuzione di Poisson nella modellizzazione

La distribuzione di Poisson non è utile soltanto per calcolare approssimativamente probabilità relative a variabili aleatorie binomiali in cui n è grande e p è piccolo, ma riveste un ruolo di particolare importanza ai fini della modellizzazione di fenomeni aleatori. Essa è infatti il modello adatto a interpretare le situazioni descritte da una variabile aleatoria binomiale di cui conosciamo il *valore medio*, ma **non** i valori esatti di n e p, purché sia lecito supporre n «grande» e p «piccolo».

DALLA STORIA

La distribuzione di Poisson venne introdotta da **S.D. Poisson** nell'ambito dei suoi studi circa le applicazioni del calcolo della probabilità alle cause civili e ai processi. Essa fu a lungo ignorata, finché non si scoprì che il numero di particelle α emesse da una sostanza radioattiva in un dato intervallo di tempo non ha un valore fisso ma è una variabile aleatoria ben interpretata da una distribuzione di Poisson.

ESEMPIO Arrivi di telefonate a un centralino / 1

Al centralino di un numero verde, in un'ora di punta, arriva un numero medio di 120 telefonate. Qual è la probabilità che il numero effettivo di telefonate arrivate a quel centralino in un'ora di punta sia 110?

- **Modellizzazione del problema**

Indichiamo con la variabile aleatoria X il numero *effettivo* di telefonate che arrivano al centralino in un'ora di punta. Supponiamo che il numero n di «utenti potenziali» del centralino sia *molto alto*, che la probabilità p che un singolo utente telefoni al centralino sia *molto bassa* e che ciascun utente telefoni o meno al centralino *indipendentemente* dagli altri. Sotto queste ipotesi il numero X di telefonate effettivamente giunte al centralino si può assimilare al numero di successi in un processo di Bernoulli di n prove di parametro p. Non conosciamo i valori esatti di n e di p, tuttavia conosciamo il *valore medio* di X (uguale a 120); inoltre abbiamo supposto che n sia grande e p sia piccolo: dunque siamo nelle condizioni per poter approssimare il modello esatto costituito dalla distribuzione *binomiale* di parametri *incogniti* n e p con la distribuzione di *Poisson* di parametro *noto* $\lambda = 120$.

- **Calcoli**

La distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 120$ è definita da:

$$p(X = k) = e^{-120} \cdot \frac{120^k}{k!}$$

In particolare: $p(X = 110) = e^{-120} \cdot \dfrac{120^{110}}{110!} \simeq 0{,}025 = 2{,}5\%$

Ragionando come nell'esempio precedente, si può capire perché la distribuzione di Poisson si rivela utile a descrivere, per esempio, i seguenti fenomeni:

- il numero di incidenti che si verificano su un certo tratto autostradale in un dato giorno;
- il numero di errori di stampa che si trovano in una pagina di un libro;
- il numero di auto che passano da un certo casello autostradale tra le 17 e le 18 di un dato giorno;
- il numero di persone di una comunità che superano l'età di 100 anni.

ESEMPIO Arrivi di telefonate a un centralino / 2

Nelle ipotesi dell'esempio precedente, calcoliamo la probabilità che nei primi cinque minuti di un'ora di punta arrivino al centralino più di 5 telefonate.

Dobbiamo fare l'ulteriore ipotesi che la probabilità di arrivo di una telefonata sia *uniforme nel tempo*, cioè sia la stessa in ogni istante dell'ora considerata. In tale ipotesi è ragionevole supporre che nell'intervallo di tempo di 5 minuti (uguali a $\frac{5}{60}$ di ora) il numero medio di telefonate che giungono al centralino sia $\frac{5}{60} \cdot 120 = 10$. Dunque il numero Y di telefonate effettivamente giunte al centralino nei primi cinque minuti di un'ora di punta si può modellizzare con una variabile aleatoria di Poisson di parametro 10. Pertanto:

$$p(Y > 5) = 1 - p(Y \leq 5) =$$

$$= 1 - e^{-10} \cdot \left(\frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!} + \frac{10^5}{5!} \right) \simeq 0{,}93$$

PER SAPERNE DI PIÙ **Il processo di Poisson**

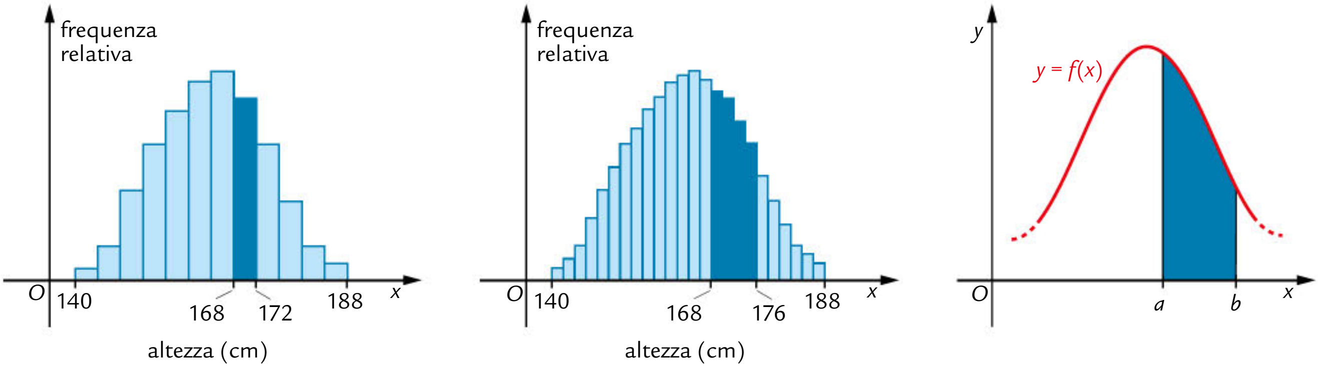
In generale, le situazioni che si possono modellizzare tramite la distribuzione di Poisson sono quelle assimilabili al cosiddetto *processo di Poisson*, che ora descriviamo.
Supponiamo che in un certo intervallo di tempo possa manifestarsi ripetutamente uno stesso fenomeno (che chiameremo «arrivo»), in modo che *gli arrivi si verifichino senza sovrapposizioni*, *con la stessa probabilità in ogni istante dell'intervallo* (non ci sono momenti «di punta») e *indipendentemente uno dall'altro*: chiamiamo **processo di Poisson** una successione di arrivi che soddisfa queste tre condizioni.
Si dimostra che il numero di arrivi che si verificano in un processo di Poisson, in un intervallo di tempo di durata t, è una variabile aleatoria avente distribuzione di Poisson di parametro λt, essendo λ il numero di arrivi nell'unità di tempo.
È interessante confrontare il processo di Poisson con il processo di Bernoulli: interpretando i «successi» in un processo di Bernoulli come «arrivi» che possono verificarsi in tempi *discreti* (uno al minuto, uno al mese...), possiamo osservare che il processo di Poisson non è altro che la versione a tempo *continuo* del processo di Bernoulli.

Esercizi p. 297

4. Variabili aleatorie e distribuzioni continue

Nei paragrafi precedenti ci siamo soffermati sulle variabili aleatorie *discrete*, tuttavia esistono moltissimi fenomeni per la cui descrizione le variabili aleatorie discrete **non** sono adatte. Per esempio, è necessaria una variabile aleatoria *continua* (cioè una variabile aleatoria che può assumere tutti i valori reali di un dato intervallo) per descrivere la misura di grandezze fisiche quali la temperatura, la velocità ecc. In questo contesto, a causa degli inevitabili errori di misura, non è utile chiedersi quanto vale la probabilità che la misura di una data grandezza assuma un valore prefissato, ma piuttosto qual è la probabilità che l'errore commesso non superi una certa soglia: si è interessati cioè a stabilire la probabilità che la misura di una grandezza assuma valori *in un determinato intervallo*.
Per esempio, consideriamo la variabile aleatoria X che rappresenta l'altezza di una persona scelta a caso in un dato insieme di individui; come possiamo interpretare geometricamente la probabilità che X assuma valori in un determinato intervallo?

Osserva la **Fig. 4** e leggi le relative didascalie.



a. **L'istogramma rappresenta la distribuzione delle altezze, dove si sono considerate classi di ampiezza costante uguale a 4 cm. Scegliendo come unità di misura sull'asse *x* l'ampiezza di ciascuna classe, la probabilità che *X* assuma valori per esempio nell'intervallo [168 cm, 172 cm], ossia la frequenza relativa dell'intervallo, è rappresentata dall'area del rettangolo in blu scuro.**

b. **Riducendo l'ampiezza delle classi, l'istogramma ha un contorno più regolare; la probabilità che la variabile aleatoria *X* assuma per esempio valori nell'intervallo [168 cm, 176 cm] è uguale all'area della regione in blu scuro (sempre assumendo come unità di misura sull'asse *x* l'ampiezza di ciascuna classe).**

c. **Immaginando di ridurre sempre di più l'ampiezza delle classi, il contorno dell'istogramma tende a diventare una linea continua, grafico di una funzione reale di variabile reale, e la probabilità che *X* assuma valori in un dato intervallo [*a*, *b*] si può interpretare come l'area del trapezoide limitato dal grafico della funzione e dall'asse *x* nell'intervallo [*a*, *b*].**

Figura 4

Poiché l'area del trapezoide in **Fig. 4c** è data dall'integrale della funzione f nell'intervallo $[a, b]$, siamo indotti a ritenere che, nel continuo, la probabilità che una variabile aleatoria X assuma valori in un dato intervallo I possa essere definita come integrale di un'opportuna funzione, detta *densità di X*, sull'intervallo I (**Fig. 5a**).
Tale funzione dovrà avere due proprietà:

1. essere non negativa (il che assicura che, comunque sia scelto I, la probabilità dell'evento $X \in I$ sia espressa da un numero non negativo);
2. essere tale che l'integrale della funzione sull'intervallo $I = (-\infty, +\infty)$ valga 1: infatti tale integrale deve rappresentare la probabilità dell'evento $X \in (-\infty, +\infty)$, cioè la probabilità dell'evento certo.

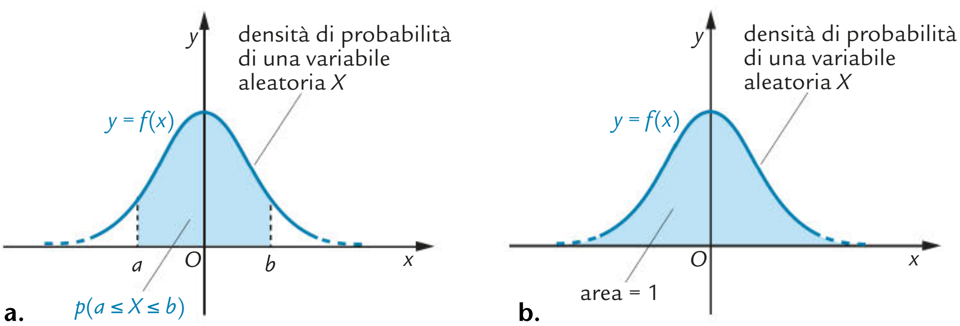


Figura 5

Queste osservazioni motivano quanto segue.

DEFINIZIONE | Densità di una variabile aleatoria continua

La distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria continua X viene definita assegnando una funzione f, detta **densità** (**di probabilità**) di X, tale che:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R} \qquad [3]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad [4]$$

La probabilità che X assuma valori in un dato intervallo I è data dall'integrale della sua densità sull'intervallo I considerato.

Casi particolari			
$I = [a, b]$	$I = (-\infty, a]$	$I = [a, +\infty)$	$I = (-\infty, +\infty)$
$p(X \in I) =$ $= p(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$	$p(X \in I) =$ $= p(X \le a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$	$p(X \in I) =$ $= p(X \ge a) = \int_a^{+\infty} f(x)dx$	$p(X \in I) =$ $= p(-\infty < X < +\infty) =$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

È importante fare alcune osservazioni.

a. Se l'intervallo $I = [a, b]$ si riduce a un punto, cioè se $a = b$, risulta:

$$p(X \in I) = p(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Perciò, se X è una variabile aleatoria *continua*, la probabilità che essa assuma un qualsivoglia valore reale prefissato è sempre *nulla*; in simboli:

$$p(X = a) = 0 \qquad \text{per ogni } a \in \mathbf{R}$$

Nel continuo, dunque, un evento di probabilità nulla **non** è necessariamente l'evento impossibile. Conseguenza di questo fatto è che aggiungere o togliere un numero *finito* di punti a un intervallo non altera la sua probabilità; per esempio:

$$p(a \le X \le b) = p(a < X \le b) = p(a \le X < b) = p(a < X < b)$$

b. Data la densità di probabilità f di una variabile aleatoria continua X, il valore $f(a)$ da essa assunto quando $x = a$ **non** ha (come invece accade nel caso discreto) il significato di probabilità dell'evento $X = a$: infatti questa probabilità è sempre uguale a zero, mentre il valore assunto da f in $x = a$, in generale, è un numero positivo, eventualmente maggiore di 1. Nel continuo solo l'*integrale* della densità su un intervallo ha il significato di *probabilità* di un evento.

MATEMATICA E FISICA

Il concetto di densità di probabilità è analogo al concetto di densità lineare (cioè di massa per unità di lunghezza di un filo rettilineo) che si incontra in fisica, precisamente in meccanica. La probabilità che una variabile aleatoria X assuma valori in un intervallo $[a, b]$ corrisponde, in questa analogia, alla massa del tratto di filo che ha lunghezza corrispondente a tale intervallo.

ESEMPIO Densità di probabilità

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a. determiniamo per quale valore di k essa definisce la densità di una variabile aleatoria X;

b. in corrispondenza del valore di k trovato, determiniamo la probabilità che risulti $1 \le X \le 2$.

a. Affinché la funzione f definisca una densità di probabilità devono essere soddisfatte le due condizioni [3] e [4].
Affinché la funzione sia sempre non negativa (condizione [3]) deve essere $k \ge 0$; affinché sia soddisfatta anche la [4] deve essere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad [5]$$

Poiché la funzione f è nulla al di fuori dell'intervallo $0 \le x \le 3$ la condizione [5] equivale alla seguente equazione, che risolviamo:

$$\int_0^3 kx^2\, dx = 1 \Rightarrow k\int_0^3 x^2\, dx = 1 \Rightarrow k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow 9k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}$$

Questo valore di k è *accettabile* perché è *positivo*.

b. Per determinare la probabilità che sia $1 \le X \le 2$ basta integrare la densità sull'intervallo $[1, 2]$:

$$p(1 \le X \le 2) = \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{9}x^2}_{\text{densità di probabilità di } X} dx = \frac{1}{9}\int_1^2 x^2\, dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$$

Media e varianza di una variabile aleatoria continua

Le definizioni di media e varianza di una variabile aleatoria *discreta* si estendono al caso *continuo* sostituendo semplicemente la sommatoria con l'integrale.

DEFINIZIONE | Media di una variabile aleatoria continua

Data una variabile aleatoria continua X, di densità f, si dice **media** (o **valore medio** o **valore atteso** o **speranza matematica**) di X e si indica con il simbolo $E(X)$ (o con la lettera μ) il numero, se esiste, così definito:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \qquad [6]$$

MATEMATICA E FISICA

La media di una variabile aleatoria continua X rappresenta il «centro» della distribuzione, così come in meccanica il baricentro di un filo pesante rappresenta il punto di equilibrio del filo stesso.

DEFINIZIONE | Varianza e deviazione standard di una variabile aleatoria continua

Data una variabile aleatoria continua X, di densità f e media μ, si dice **varianza** di X e si indica con il simbolo $V(X)$ (o con σ^2) il numero, se esiste, così definito:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \qquad [7]$$

Si definisce **deviazione standard** di X (e si indica con σ) la radice quadrata della varianza:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Anche nel caso continuo, per il calcolo della varianza vale una formula «abbreviata» simile a quella vista nel caso discreto:

$$\boxed{\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2} \qquad [8]$$

Essa è giustificata dalla seguente catena di uguaglianze:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - 2\mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx}_{\text{uguale a } \mu \text{ per definizione}} + \mu^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx}_{\text{uguale a 1, per le proprietà di una funzione densità}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2$$

ESEMPIO Media e varianza di una variabile aleatoria continua

Calcoliamo media e varianza della variabile aleatoria X di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In base alla [6]:

$$\mu = E(X) = \underbrace{\int_0^3 x \cdot \frac{1}{9}x^2\, dx}_{\substack{\text{la densità è nulla al di fuori dell'intervallo [0, 3],} \\ \text{quindi sugli intervalli } (-\infty, 0) \text{ e } (3, +\infty) \\ \text{anche l'integrale della densità è nullo}}} = \int_0^3 \frac{1}{9}x^3\, dx = \frac{1}{9}\int_0^3 x^3\, dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{81}{4} = \frac{9}{4}$$

Per calcolare la varianza, utilizziamo la formula «abbreviata» [8]:

$$V(X) = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{1}{9}x^2\, dx - \mu^2 = \frac{1}{9}\int_0^3 x^4\, dx - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 - \frac{81}{16} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{3^5}{5} - \frac{81}{16} = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = \frac{27}{80}$$

OSSERVA

La funzione dell'esempio qui a fianco definisce effettivamente una densità di probabilità in base a quanto visto nell'esempio precedente.

Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua

OSSERVA
Il concetto di funzione di ripartizione di una variabile aleatoria si può definire anche nel caso di una variabile aleatoria *discreta* X, che assume i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ponendo per ogni $x \in \mathbf{R}$:

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i)$$

Nota l'evidente analogia con il concetto di distribuzione di frequenze cumulate studiato in statistica descrittiva.

DEFINIZIONE | Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua

Sia X una variabile aleatoria continua, avente come densità la funzione f; si chiama **funzione di ripartizione** di X la funzione che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, è così definita:

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

ESEMPIO Funzione di ripartizione

Sia X una variabile aleatoria continua di densità:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La sua funzione di ripartizione è:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt & x < 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt & 0 \leq x \leq 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt & x > 1 \end{cases}$$

Pertanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Si può dimostrare che la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua:

- è crescente;
- tende a 0 per $x \to -\infty$;
- tende a 1 per $x \to +\infty$.

Inoltre, poiché la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua è la *funzione integrale* della sua densità, segue dalle proprietà della funzione integrale che:

- la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua è *sempre* una funzione *continua*;
- se la densità $f(x)$ di X è una funzione continua, la funzione di ripartizione $F(x)$ di X è derivabile e la sua derivata è la densità:

$$\underbrace{F'(x)}_{\text{la derivata della funzione di ripartizione di } X} \underbrace{=}_{\text{è uguale}} \underbrace{f(x)}_{\text{alla densità di } X}$$

In molti problemi di probabilità è più facile determinare la *funzione di ripartizione* di una variabile aleatoria invece della sua *densità*. In questi casi si determina preliminarmente la funzione di ripartizione e poi si deduce, mediante derivazione, la funzione densità.

Esercizi p. 299

5. Distribuzioni uniforme, esponenziale e normale

Presentiamo in questo paragrafo le principali densità di probabilità continue.

La distribuzione uniforme

DEFINIZIONE | Densità uniforme

Una variabile aleatoria continua si dice avere **distribuzione uniforme** sull'intervallo $[a, b]$, con $a, b \in \mathbf{R}$ e $a < b$, se la sua densità è la funzione (**Fig. 6**):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per indicare che una variabile aleatoria X è uniforme sull'intervallo $[a, b]$ si utilizza la scrittura $X \sim U(a, b)$.

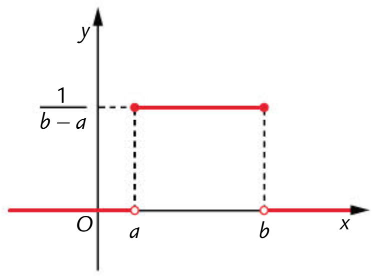


Figura 6

TEOREMA 4 | Media e varianza di una variabile aleatoria uniforme

La **media** e la **varianza** di una variabile aleatoria X **uniforme** sull'intervallo $[a, b]$ sono espresse dalle formule:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

PROVA TU

Puoi dimostrare la validità delle formule qui a fianco verificando che:

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \\ = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\ = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Il modello uniforme si applica a tutti quei fenomeni casuali che si possono assimilare alla scelta di un numero a caso in un intervallo (o equivalentemente alla scelta di un punto a caso su un segmento).

ESEMPIO Tempo di attesa di un bus

Una linea di bus prevede una data fermata la prima volta alle 7.15 del mattino e successivamente ogni quindici minuti. Paolo tutti i giorni si presenta a quella fermata in un istante a caso tra le 7 e le 7.30 e prende il primo bus che passa. Qual è la probabilità che debba attendere più di cinque minuti?

- **Costruiamo il modello del problema**

Poiché l'arrivo di Paolo tra le 7 e le 7.30 alla fermata del bus è del tutto casuale, possiamo assimilare l'ora di arrivo di Paolo alla scelta a caso di un numero nell'intervallo $[0, 30]$. Indichiamo con X la variabile aleatoria che rappresenta tale numero scelto a caso. Allora X è una variabile aleatoria *uniforme* sull'intervallo $[0, 30]$. L'evento E: «Paolo deve attendere più di cinque minuti» si realizza se e solo se Paolo arriva tra le 7 e le 7.10 oppure se arriva tra le 7.15 e le 7.25. Dunque dobbiamo calcolare la probabilità che sia $0 < X < 10$ o $15 < X < 25$.

Approfondimento
Probabilità e geometria: le «insidie» del continuo

- **Svolgiamo i calcoli**

$$p(E) = p(0 < X < 10) + p(15 < X < 25) =$$

$$= \int_0^{10} \frac{1}{30}\,dx + \int_{15}^{25} \frac{1}{30}\,dx = \frac{1}{30}(10-0) + \frac{1}{30}(25-15) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

In alternativa, si può osservare che, nell'arco dei 30 minuti totali considerati, l'evento E si realizza in corrispondenza di $10 + 10 = 20$ minuti.

Quindi $p(E) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

La distribuzione esponenziale

DEFINIZIONE | Distribuzione esponenziale

Una variabile aleatoria continua si dice avere **distribuzione esponenziale** di parametro reale λ, con $\lambda > 0$, se la sua densità è la funzione (**Fig. 7**):

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

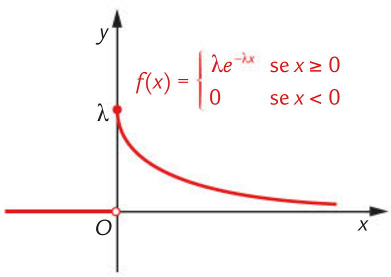


Figura 7

Per indicare che una variabile aleatoria X è esponenziale di parametro λ si utilizza la scrittura $X \sim E(\lambda)$.

PROVA TU

Puoi verificare la validità delle formule del Teorema 5 verificando che:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

TEOREMA 5 | Media e varianza di una variabile aleatoria esponenziale

La **media** e la **varianza** di una variabile aleatoria X **esponenziale** di parametro λ sono espresse dalle formule:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Le variabili aleatorie esponenziali sono utilizzate come modelli per descrivere il *tempo di attesa* di un accadimento; in particolare giocano un ruolo importante nella descrizione del *tempo di vita* (cioè del tempo di attesa prima che si verifichi un guasto) di *componenti elettronici*; per capire il motivo di ciò, dobbiamo mettere in evidenza un'importante proprietà della distribuzione esponenziale.
Consideriamo una variabile aleatoria X, che rappresenti il tempo di attesa prima che si verifichi il primo guasto di un apparecchio. *Sapendo* che è già trascorso un tempo t senza che si sia verificato alcun guasto (cioè che $X > t$), qual è la probabilità che trascorra ulteriormente un tempo superiore ad h prima che si verifichi un guasto (cioè che $X > t + h$)?
Si dimostra che questa probabilità (cioè la probabilità dell'evento $X > t + h$ *condizionato* all'evento $X > t$) è uguale alla probabilità dell'evento $X > h$ (cioè è uguale alla probabilità che si aveva inizialmente di dovere attendere più di h), se X ha distribuzione esponenziale. Questa proprietà può essere interpretata come se in ogni istante una variabile aleatoria esponenziale azzerasse la propria «memoria del passato». È questo il motivo per cui si parla di « assenza di memoria» della distribuzione esponenziale.

DEFINIZIONE | Assenza di memoria delle variabili aleatorie esponenziali

Se X è una variabile aleatoria esponenziale, vale la seguente proprietà:

$$p(X > t + h \mid X > t) = p(X > h) \qquad \text{per ogni } t > 0,\ h > 0 \qquad [9]$$

L'assenza di memoria si può interpretare, in termini di tempo di vita di un'apparecchiatura, come *mancanza di usura*; infatti la [9] esprime quanto segue:

$$\underbrace{p(X > t + h \mid X > t)}_{\text{la probabilità che il tempo di vita di un'apparecchiatura vecchia, di età } t\text{, sia superiore a } t+h} \underbrace{=}_{\text{è uguale}} \underbrace{p(X > h)}_{\text{alla probabilità che il tempo di vita di un apparecchio nuovo sia superiore ad } h}$$

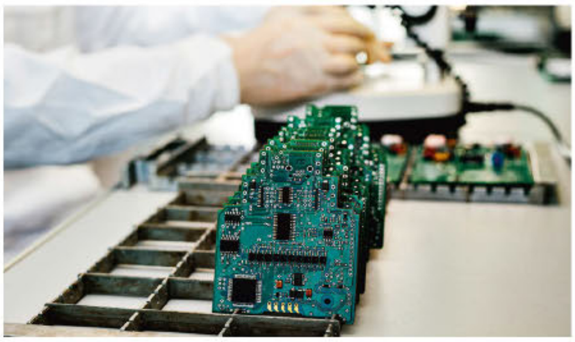
Un ulteriore fatto notevole è che l'assenza di memoria *caratterizza* la distribuzione esponenziale, nel senso che è l'*unica* distribuzione continua che soddisfa questa proprietà.
Le variabili aleatorie esponenziali quindi sono l'*unico* modello adeguato a descrivere il tempo di vita di componenti (come i transistor) che non si usurano nel tempo e il cui guasto è da attribuirsi a eventi puramente accidentali.

ESEMPIO Tempo di vita di un componente elettronico

Il tempo di vita (in ore) di un componente elettronico è ben interpretato da una variabile aleatoria esponenziale X di parametro $\lambda = 0{,}0005$. Determiniamo:

a. la probabilità che il tempo di vita del componente sia inferiore alle 1000 ore;

b. il tempo di vita medio del componente.



a. Poiché X segue una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 0{,}0005$, la sua densità sarà la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}0005e^{-0{,}0005x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Dunque la probabilità richiesta è uguale a:

$$p(X < 1000) = \int_{-\infty}^{1000} f(x)\ dx = \int_{0}^{1000} 0{,}0005e^{-0{,}0005x}\ dx = [-e^{-0{,}0005x}]_0^{1000} =$$

la densità è nulla sull'intervallo $(-\infty, 0)$ quindi anche l'integrale della densità su questo intervallo è nullo

$$= -e^{-0{,}5} + 1 \simeq 0{,}3935 =$$

$$= 39{,}35\%$$

b. Il tempo di vita medio del componente è uguale alla media di X, che è uguale a:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}0005} = 2000$$

quindi la durata di vita media del componente è 2000 ore.

PER SAPERNE DI PIÙ **Istante del primo arrivo in un processo di Poisson**

Abbiamo visto nel **Paragrafo 2** che la variabile aleatoria che conta il numero di prove fino alla realizzazione del primo successo in un *processo di Bernoulli* è *geometrica*. Qual è invece la distribuzione di probabilità dell'istante del primo arrivo in un *processo di Poisson*?
Consideriamo la variabile aleatoria X_t che conta il numero di arrivi di un fenomeno casuale che si verificano nell'intervallo di tempo $[0, t]$. Assumiamo che, per ogni intervallo di tempo considerato (ossia per ogni $t \geq 0$), X_t sia una variabile aleatoria di Poisson di parametro λt, essendo λ il numero medio di arrivi nell'unità di tempo.
Consideriamo la variabile aleatoria Y: «istante in cui avviene il primo arrivo». L'evento $Y > t$: «il primo arrivo avviene dopo l'istante t» coincide con l'evento $X_t = 0$, vale a dire «il numero di arrivi nell'intervallo $[0, t]$ è 0». Pertanto:

$$p(Y > t) = p(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

Ne segue che, per $t \geq 0$, la funzione di ripartizione di Y è così definita:

$$F_Y(t) = p(Y \leq t) = 1 - p(Y > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

mentre per $t < 0$ è ovviamente $F_Y(t) = p(Y \leq t) = 0$. La densità di Y è la *derivata* della funzione di ripartizione, quindi:

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

La distribuzione *esponenziale* è dunque la distribuzione *dell'istante del primo arrivo* in un processo di Poisson.
Alla luce di quest'ultima osservazione, possiamo riassumere nella seguente tabella analogie e differenze nel processo di Bernoulli e nel processo di Poisson:

Proprietà	Processo di Bernoulli di parametro p	Processo di Poisson di intensità λ
Il tempo è ...	... discreto	... continuo
Il numero di successi/arrivi ...	... in n prove è una variabile aleatoria avente distribuzione *binomiale* di parametri n e p	... nell'intervallo $[0, t]$ è una variabile aleatoria avente distribuzione di *Poisson* di parametro λt
L'istante del primo arrivo è una variabile aleatoria ...	... avente distribuzione *geometrica* di parametro p	... avente distribuzione *esponenziale* di parametro λ

La distribuzione normale

DALLA STORIA

La distribuzione gaussiana è in realtà stata scoperta nel 1733 dal matematico **Abraham De Moivre** (1667-1754) e successivamente utilizzata nel 1797 da **Gauss** (1777-1855) nell'ambito della teoria degli errori.

DEFINIZIONE | **Distribuzione normale**

Una variabile aleatoria continua si dice avere **distribuzione normale** (o **gaussiana**) di parametri μ e σ^2, con $\mu \in \mathbf{R}$ e $\sigma > 0$, se la sua densità di probabilità è la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Per indicare che una variabile aleatoria X è normale di parametri μ e σ^2 si scrive: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Il fatto che i parametri siano indicati con le lettere μ e σ^2 non è casuale, infatti sussiste il teorema seguente.

TEOREMA 6 | **Media e varianza di una variabile aleatoria normale**

La **media** e la **varianza** di una variabile aleatoria X **normale** di parametri μ e σ^2 sono espresse dalle formule:

$$E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Il grafico della densità di probabilità di una variabile aleatoria normale, rappresentato in **Fig. 8**, ha le seguenti caratteristiche:

- è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \mu$;
- presenta un massimo nel punto $x = \mu$;
- presenta due punti di flesso in $x = \mu \pm \sigma$;
- ha come asintoto l'asse x;
- quanto più σ è piccolo, tanto più il grafico apparirà «appuntito» (la maggioranza dei valori della densità saranno infatti vicini a μ) e le «code» si avvicineranno rapidamente all'asse x; quanto più σ è grande, tanto più il grafico apparirà «smussato» e le «code» si avvicineranno più lentamente all'asse x (**Fig. 9**).

Con GeoGebra
Distribuzione normale

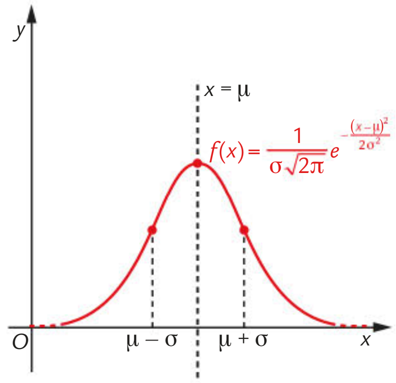


Figura 8

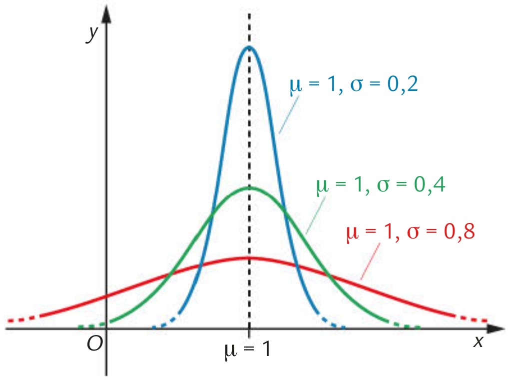


Figura 9

Una variabile aleatoria normale avente media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$ è detta **normale standard**; la sua densità è rappresentata in **Fig. 10**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad [10]$$

IN SIMBOLI
Una variabile aleatoria **normale standard** viene di solito indicata con la lettera Z:
$Z \sim N(0,1)$

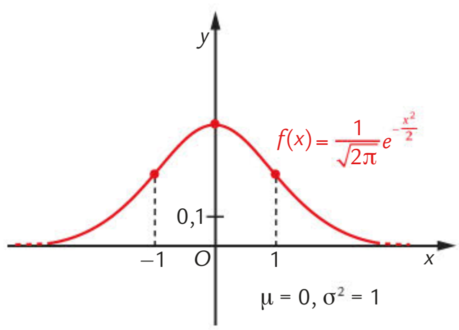


Figura 10

Nel proseguimento del paragrafo vedremo:

1. come calcolare le probabilità di una variabile aleatoria *normale standard*;
2. come calcolare le probabilità di una variabile aleatoria normale di parametri *qualsiasi*, utilizzando le probabilità della *normale standard*;
3. a quali fenomeni si applica il modello normale.

1. Il calcolo delle probabilità di una normale standard

Il calcolo delle probabilità di una variabile aleatoria Z normale standard (ossia di densità [10]) si basa sulla **funzione di ripartizione** della normale standard, convenzionalmente denotata con la lettera Φ:

$$\Phi(z) = p(Z \le z) = p(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad [11]$$

RICORDA
Nel continuo risulta
$p(Z = z) = 0$ perciò
$p(Z \le z) = p(Z < z)$

I valori assunti dalla funzione [11] si possono ottenere (data la complessità dei calcoli necessari a ricavarli) tramite le funzioni predefinite messe a disposizione dai fogli elettronici e dai software di calcolo, oppure facendo riferimento alla **Tab. 1** proposta più avanti, che ne riporta i valori per $z \ge 0$.

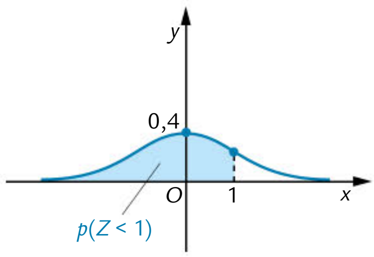
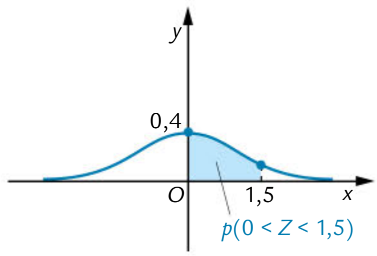
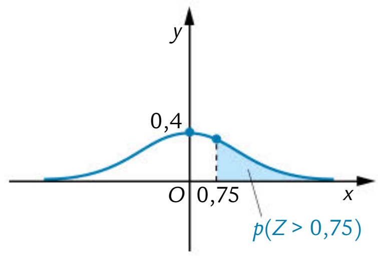
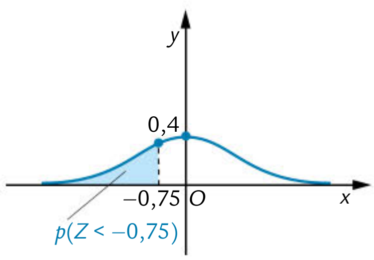
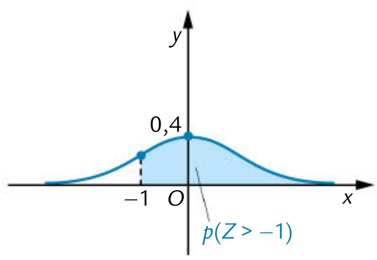
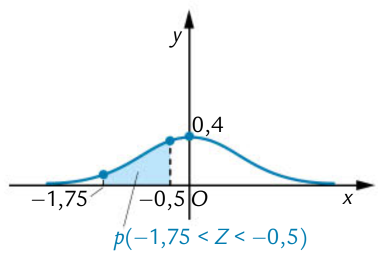
I valori per $z < 0$ si possono ricavare in base alle proprietà di simmetria della densità normale standard, come è messo in evidenza nei prossimi esempi.

ESEMPIO Come calcolare le probabilità della normale standard

Sia Z una variabile aleatoria normale standard. Calcoliamo:

- **a.** $p(Z < 1)$
- **b.** $p(0 < Z < 1{,}5)$
- **c.** $p(Z > 0{,}75)$
- **d.** $p(Z < -0{,}75)$
- **e.** $p(Z > -1)$
- **f.** $p(-1{,}75 < Z < -0{,}5)$

Impostiamo il lavoro nelle seguenti tabelle.

a. $p(Z < 1)$	**b.** $p(0 < Z < 1{,}5)$	**c.** $p(Z > 0{,}75)$
		
$p(Z < 1) =$ $= \Phi(1) = 0{,}84134$ **Tavole**	$p(0 < Z < 1{,}5) =$ $= p(Z < 1{,}5) - p(Z \le 0) =$ $= \Phi(1{,}5) - \Phi(0) =$ **Tavole** $= 0{,}93319 - 0{,}5 =$ $= 0{,}43319$	$p(Z > 0{,}75) =$ $= 1 - p(Z \le 0{,}75) =$ **Passaggio al complementare** $= 1 - \Phi(0{,}75) =$ $= 1 - 0{,}77337 = 0{,}22663$ **Tavole**
d. $p(Z < -0{,}75)$	**e.** $p(Z > -1)$	**f.** $p(-1{,}75 < Z < -0{,}5)$
		
Utilizziamo la simmetria rispetto all'asse y della densità normale standard: $p(Z < -0{,}75) =$ **Simmetria** $= p(Z > 0{,}75) =$ **Vedi punto c** $= 1 - p(Z \le 0{,}75) =$ $= 1 - \Phi(0{,}75) = 0{,}22663$	Utilizziamo la simmetria rispetto all'asse y della densità normale standard: $p(Z > -1) =$ **Simmetria** $= p(Z < 1) =$ $= \Phi(1) = 0{,}84134$ **Tavole**	Utilizziamo la simmetria rispetto all'asse y della densità normale standard: $p(-1{,}75 < Z < -0{,}5) =$ **Simmetria** $= p(0{,}5 < Z < 1{,}75) =$ $= p(Z < 1{,}75) - p(Z \le 0{,}5) =$ $= \Phi(1{,}75) - \Phi(0{,}5) =$ $= 0{,}95994 - 0{,}69146 = 0{,}26848$

In particolare, ragionando come nel punto **d** degli esempi precedenti, si può dedurre che in generale valgono le relazioni:

$$p(Z < -z) = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad \text{per ogni } z > 0 \qquad [12]$$

$$p(-z < Z < z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1$$

Tabella 1 **Tavola della funzione di ripartizione della normale standard. La prima colonna della tavola riporta i valori di *z* con la prima cifra decimale; la prima riga riporta la seconda cifra decimale dei valori di *z*. All'incrocio della riga e della colonna che identificano un prefissato valore di *z* con due cifre decimali si legge il corrispondente valore di $\Phi(z)$. Per esempio, all'incrocio della riga e della colonna evidenziate si legge il valore di $\Phi(1{,}24) = 0{,}89251$.**

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	**0,89251**	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

2. Il calcolo delle probabilità di una normale di parametri qualsiasi

Il calcolo delle probabilità di una variabile aleatoria normale di parametri qualsiasi può sempre essere riportato al calcolo delle probabilità di una normale standard. Infatti, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si dimostra che la variabile aleatoria Z così definita:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

è *normale standard*. Dunque:

$$p(X \leq x) = p(X < x) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Abbiamo quindi la formula:

$$p(X \leq x) = p(X < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad [13]$$

È particolarmente interessante calcolare la probabilità dei **cosiddetti intervalli tipici** della normale, ossia dei tre intervalli:

$$[\mu - \sigma, \mu + \sigma] \qquad [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] \qquad [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$$

Iniziamo a fare i calcoli per il primo intervallo:

$$p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = p(X \leq \mu + \sigma) - p(X < \mu - \sigma) \underset{\text{per la [13]}}{=}$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) \underset{\text{per la [12]}}{=} \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \underset{\text{tavole}}{=} 0{,}68268$$

Analogamente si trova che:

$$p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 = 0{,}9545$$
$$p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 = 0{,}9973$$

In conclusione, i valori assunti da una variabile aleatoria normale cadono (**Fig. 11**):

- nell'intervallo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ con una probabilità del 68,27% circa;
- nell'intervallo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ con una probabilità del 95,45% circa;
- nell'intervallo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ con una probabilità del 99,73% circa.

Ciò significa che l'area sottesa al grafico della densità normale è quasi interamente contenuta nell'intervallo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, mentre l'area all'esterno di tale intervallo, ossia l'area sotto le «code» (**Fig. 11**), è trascurabile, essendo meno dello 0,27%: è questo il motivo per cui di solito le tavole della normale standard non riportano valori superiori a 4.

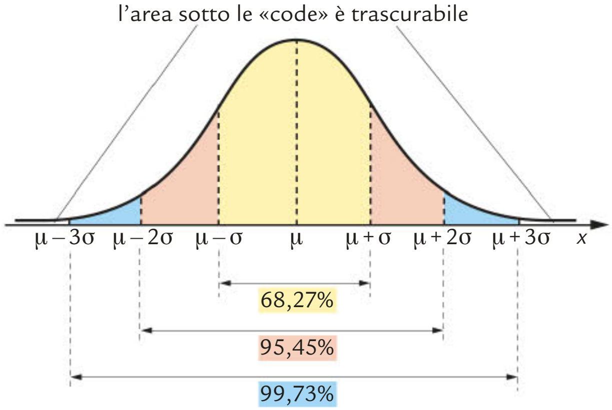


Figura 11 **Intervalli tipici della normale.**

3. Le variabili normali nella modellizzazione

Le variabili aleatorie normali sono il modello adatto a interpretare una vasta gamma di fenomeni; in particolare, il modello normale funziona bene quando la variabile aleatoria in esame *tende ad assumere un valore prevalente* μ *o valori per lo più vicini a* μ *e lo scostamento da* μ *dipende dalla somma di numerosi fattori aleatori indipendenti*. Esempi tipici di variabili aleatorie che rientrano in queste ipotesi, per le quali si utilizza il modello normale, sono le seguenti:

- la misura di una grandezza con uno strumento; μ è l'effettiva misura della grandezza mentre il valore ottenuto con lo strumento differisce dalla misura «vera» a causa di tanti piccoli errori, alcuni sistematici (dovuti per esempio allo strumento di misura) e altri casuali e indipendenti tra loro (dovuti per esempio a piccole variazioni della temperatura o della pressione);
- l'effettiva dimensione di un oggetto prodotto da una macchina utensile (μ è il valore nominale della dimensione dell'oggetto mentre il valore effettivo, come nel caso precedente, ne differisce a causa di tanti piccoli errori);
- la misura di caratteristiche quantitative di una popolazione (quali per esempio la statura o il peso) che presentino variazioni casuali (ma contenute) intorno a una media.

RIFLETTI
Un errore di misurazione può essere per *eccesso* o per *difetto*, quindi la variabile aleatoria che rappresenta tale errore può assumere valori *positivi* o *negativi*. Gli errori per eccesso e per difetto sono di solito distribuiti in modo *simmetrico*. Inoltre l'errore è solitamente contenuto, quindi al *crescere* del valore assoluto dell'errore la probabilità di avere commesso tale errore deve *decrescere rapidamente*. La densità normale riassume proprio tutte queste caratteristiche.

ESEMPIO Difetti di fabbricazione

Delle mine per matite prodotte da un'azienda devono avere diametro di 0,5 mm. Se la misura del diametro delle mine differisce da quella dichiarata al massimo del 4% le mine sono ugualmente utilizzabili, mentre se sussistono differenze superiori al 4% le mine vanno scartate. Il diametro delle mine è una variabile aleatoria normale, di media 0,5 mm e deviazione standard 0,01 mm. Le mine vengono tutte controllate prima di essere immesse sul mercato.
Qual è la percentuale di mine che verranno scartate?

- Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il diametro delle mine prodotte dall'azienda; X sarà una variabile aleatoria normale, di media $\mu = 0{,}5$ e deviazione standard $\sigma = 0{,}01$.
- La percentuale di mine scartate si può interpretare come la probabilità che, scelta a caso una mina, essa abbia diametro la cui misura, in millimetri, differisce più del 4% da 0,5. Poiché $\frac{4}{100} \cdot 0{,}5 = 0{,}02$, le mine da scartare sono quelle il cui diametro è inferiore a $(0{,}5 - 0{,}02)$ mm $= 0{,}48$ mm o superiore a $(0{,}5 + 0{,}02)$ mm $= 0{,}52$ mm.
- Si tratta quindi di calcolare:

$$p(X < 0{,}48 \vee X > 0{,}52) = p(X < 0{,}48) + p(X > 0{,}52) =$$

$$= p(X < 0{,}48) + 1 - p(X \leq 0{,}52) = \qquad \text{Formula [13]}$$

$$= \Phi\left(\frac{0{,}48 - 0{,}5}{0{,}01}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{0{,}52 - 0{,}5}{0{,}01}\right) =$$

$$= \Phi(-2) + 1 - \Phi(2) = \underbrace{1 - \Phi(2)}_{\Phi(-2)} + 1 - \Phi(2) = 2 - 2\Phi(2) =$$

$$= 2 - 2 \cdot 0{,}97725 = 0{,}0455$$

- Concludiamo che la percentuale di mine da scartare è circa del 4,55%.

Esercizi p. 302

Distribuzioni di probabilità

Variabile aleatoria

Intuitivamente è una variabile che può assumere come valori numeri reali (o interi) determinati dall'esito di un esperimento aleatorio.

si dice

Discreta

se può assumere solo valori interi.

ESEMPIO

La variabile X che conta il numero di volte in cui è uscita «testa» nel lancio di due monete (X può assumere i valori 0, 1 o 2).

Distribuzione di probabilità

Per una variabile aleatoria discreta è la funzione che associa a ogni possibile valore x_i di X la probabilità p_i che X assuma quel valore.
Si rappresenta spesso in forma tabulare:

x_i	x_1	x_2	.....	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	.....	p_n

ESEMPIO

La distribuzione della variabile aleatoria dell'esempio precedente è:

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Media e varianza

$$\underbrace{\mu}_{\text{media}} = \underbrace{E(X)}_{\text{media}} = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

$$\underbrace{\sigma^2}_{\text{varianza}} = \underbrace{V(X)}_{\text{varianza}} = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots + x_n^2 \cdot p_n - [E(X)]^2$$

$$\underbrace{\sigma}_{\text{derivazione standard}} = \sqrt{V(X)}$$

ESEMPIO

In relazione alla variabile aleatoria del precedente esempio:

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\sigma^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Continua

se può assumere tutti i valori reali di un dato intervallo.

ESEMPIO

La variabile X che rappresenta la misura (in cm) dell'altezza di una persona scelta a caso nella popolazione (solitamente X assume valori dell'intervallo [0, 200]).

Distribuzione di probabilità

Per una variabile aleatoria X continua viene assegnata tramite una funzione $f(x)$, detta densità di probabilità di X, tale che:

$$f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Vale la formula:

$$\underbrace{p(a < X < b)}_{\text{probabilità che } X \text{ assuma valori nell'intervallo } (a,\, b)} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{a \text{ e } b \text{ possono essere numeri reali oppure } \pm\infty}$$

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$ è una densità perché

$$f(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = 1.$$

Media e varianza

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

ESEMPIO

In relazione alla variabile aleatoria del precedente esempio:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) - \mu^2 = \int_0^1 2x^3\,dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

Variabili aleatorie discrete notevoli

Binomiale

Una variabile aleatoria che conta il numero di successi che si verificano in n prove indipendenti, in ciascuna delle quali la probabilità di successo è uguale a p. La sua distribuzione è:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Risulta:

$E(X) = p \quad V(X) = p(1-p)$

ESEMPIO

Il numero X di volte in cui esce «testa» in 100 lanci di una moneta regolare è una variabile aleatoria di tipo binomiale di parametri: $n = 100$, $p = \frac{1}{2}$.

Poisson

Una variabile aleatoria X tale che:

$p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ dove $k = 0, 1, 2, \ldots$

Risulta:

$E(X) = V(X) = \lambda$

ESEMPIO

Il numero X di telefonate che arrivano in una data ora a un centralino in cui arrivano in media 100 telefonate all'ora è una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 100$.

Variabili aleatorie continue notevoli

Uniforme

Una variabile aleatoria X la cui densità è del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Risulta:

$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

ESEMPIO

La variabile aleatoria che rappresenta un numero reale scelto a caso nell'intervallo (a, b).

Esponenziale

Una variabile aleatoria X la cui densità è del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Risulta: $E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

ESEMPIO

La variabile aleatoria che rappresenta il tempo di vita di un componente elettronico il cui tempo di vita medio è 2000 ore è esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2000} = 0{,}0005$.

Normale

Una variabile aleatoria X la cui densità è del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

media di X

deviazione standard di X

ESEMPIO

La variabile aleatoria che rappresenta la misura di una grandezza tramite uno strumento è normale dove μ è l'effettiva misura della grandezza e σ è un parametro opportuno che dipende dalla precisione dello strumento.

Unità 5

Esercizi

1. Variabili aleatorie e distribuzioni discrete

Teoria p. 264

Esercizi introduttivi

1 Spiega perché la seguente tabella **non** può rappresentare la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria.

x_i	-1	0	3	8	10
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

2 La seguente tabella rappresenta la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria. Qual è il valore di k?

x_i	-3	-2	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	k	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$

$\left[k=\frac{1}{16}\right]$

3 La misura dei lati di un quadrato è scelta a caso tra i numeri 2, 4, 5, 10. Considera la variabile aleatoria X che rappresenta il perimetro del quadrato. Completa la seguente tabella, che rappresenta la distribuzione di probabilità di X.

x_i	8	16	....	....
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	....	....	....

Distribuzioni di probabilità e calcolo di media, varianza e deviazione standard

4 ESERCIZIO GUIDATO

Considera la variabile aleatoria X che esprime il numero di figli femmine nelle famiglie con due figli. Determina:

a. la distribuzione di probabilità di X;

b. la media, la varianza e la deviazione standard di X.

---

a. La variabile aleatoria X può assumere evidentemente i valori 0, 1 o 2. Assumi che la probabilità della nascita di una figlia femmina sia uguale a quella di un figlio maschio, in modo che gli eventi elementari dello spazio campionario $\Omega=\{MM, MF, FM, FF\}$ siano equiprobabili. Allora:

$$p(X=0)=p(MM)=\frac{1}{4} \qquad p(X=1)=p(MF)+p(FM)=\ldots\ldots \qquad p(X=2)=p(FF)=\ldots\ldots$$

quindi la distribuzione di probabilità di X è:

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	.....	.....

b. La media di X è data da: $E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{\ldots}+2\cdot\frac{1}{\ldots}=\ldots$

La varianza di X è data da: $V(X)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{\ldots}+2^2\cdot\frac{1}{\ldots}-(E(X))^2=\ldots$

La deviazione standard di X è la radice quadrata della varianza: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\ldots$

$\left[\text{b. } 1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

5 La seguente tabella rappresenta la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X avente valore medio uguale a $\frac{9}{4}$. Qual è il valore di k?

x_i	-1	1	$\frac{3}{2}$	2	3	k
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

[$k=5$]

6 Da alcune rilevazioni è risultato che a un certo incrocio stradale si fa una fila di 10 minuti una volta su due, di 15 minuti una volta su quattro, di 1 minuto una volta su 4. Considera la variabile aleatoria X che esprime il tempo di attesa a quell'incrocio. Determina:

a. la distribuzione di probabilità di X;
b. il tempo medio di attesa all'incrocio.

[**a.** X può assumere i valori (in minuti) 1, 10, 15, rispettivamente con probabilità $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$; **b.** 9 minuti]

7 In un giorno, una ragazza riceve: telefonate della durata di 10 minuti 2 volte su 7; telefonate di 15 minuti 3 volte su 7; telefonate di 20 minuti 2 volte su 7. Considera la variabile aleatoria X che esprime la durata delle telefonate ricevute dalla ragazza. Determina:

a. la distribuzione di probabilità di X;
b. la durata media di una telefonata.

[**a.** X può assumere i valori (in minuti) 10, 15, 20, rispettivamente con probabilità $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$; **b.** 15 minuti]

8 Una variabile aleatoria X assume i valori 1, 2, 3, 4, 5, ciascuno con probabilità proporzionale al valore stesso. Determina:

a. la distribuzione di probabilità di X;
b. il valore medio di X.

[**a.** X assume i valori 1, 2, 3, 4, 5, rispettivamente con probabilità $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{5}, \frac{4}{15}, \frac{1}{3}$; **b.** $\frac{11}{3}$]

9 Un'urna contiene 2 palline rosse e 1 pallina verde. Si estraggono dall'urna, una alla volta, tre palline (senza rimettere nell'urna, a ogni estrazione, la pallina precedentemente estratta). Sia X la variabile aleatoria che esprime il numero di estrazioni necessarie a estrarre per la prima volta la pallina verde. Determina:

a. la distribuzione di probabilità di X;
b. il valore medio di X.

[**a.** X assume i valori 1, 2, 3, ciascuno con probabilità $\frac{1}{3}$; **b.** 2]

10 Si lancia una moneta successivamente per quattro volte. Sia X la variabile aleatoria che esprime il numero di «croce» ottenuto. Determina:

a. la distribuzione di probabilità di X;
b. la media di X;
c. la varianza e la deviazione standard di X.

[**a.** X assume i valori 0, 1, 2, 3, 4, rispettivamente con probabilità $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$; **b.** 2; **c.** 1, 1]

11 Si lanciano due dadi da gioco regolari a sei facce. Sia X la variabile aleatoria che esprime la somma dei due numeri ottenuti. Determina:

a. la distribuzione di probabilità di X;
b. la media di X;
c. la varianza e la deviazione standard di X.

[**a.** X assume i valori 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, rispettivamente con probabilità $\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}$; **b.** 7; **c.** $\frac{35}{6}, \sqrt{\frac{35}{6}}$]

Giochi equi e applicazioni del concetto di valore medio

12 ESERCIZIO GUIDATO

Si estrae a caso un numero compreso fra 1 e 90; se esce un multiplo di 10 si vince una somma *S*. Determina la somma *S* in modo che il gioco sia equo, sapendo che per partecipare si pagano 2 euro.

Consideriamo la variabile aleatoria X che esprime la somma complessivamente vinta o persa dal giocatore dopo un'estrazione (tenendo conto anche della somma spesa per partecipare). X può assumere il valore $S-2$ (se esce un numero multiplo di 10, quindi con probabilità $\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$) oppure il valore -2 (se esce un numero che non è multiplo di 10, quindi con probabilità .....). Affinché il gioco sia equo deve essere $E(X)=0$, ossia:

$$(S-2)\cdot\frac{1}{10}-2\cdot\frac{.....}{.....}=0$$

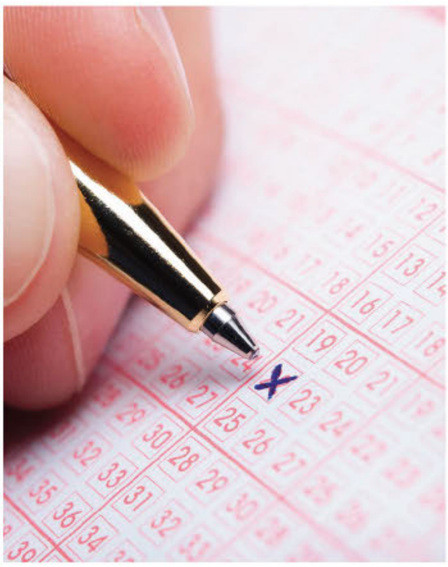
Risolvendo questa equazione nell'incognita S, si trova $S=$ .....; quindi la vincita equa in caso di uscita di un multiplo di 10 è di 20 euro.

13 Tizio partecipa a un gioco con le seguenti regole: si estrae una carta da un mazzo di quaranta. Se viene estratta una carta di cuori Tizio vince 5 euro; se viene estratta una carta di quadri vince 3 euro; se viene estratta una carta di picche o di fiori paga 4 euro. Si tratta di un gioco equo? [Sì]

14 Il biglietto di una lotteria costa 3 euro. Sapendo che il montepremi complessivo è di 5 milioni di euro, quanti biglietti si dovrebbero vendere per garantire un gioco equo? [1 666 667]

Realtà e modelli

15 **Gioco del lotto.** La realizzazione di un terno al lotto viene pagata 4500 volte la posta giocata. Si tratta di un gioco equo? Dopo avere calcolato la probabilità di fare un terno al lotto (giocando tre numeri), stabilisci l'ammontare *equo* della vincita, se lo scommettitore gioca un euro.



[11747 euro]

16 Un'urna contiene 3 palline gialle, 2 blu, 1 rossa e 4 verdi. Si estrae a caso una pallina dall'urna e se la pallina estratta è rossa si vincono S euro, se è verde si perdono 2 euro, se è gialla o blu si vince 1 euro. In corrispondenza di quali valori di S il gioco è equo o favorevole al giocatore? [Se S è maggiore o uguale a 3 euro]

17 Un'urna contiene 8 palline nere e n palline bianche, con $n \geq 1$. Si estraggono successivamente dall'urna due palline (estraendo la seconda senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna). Se le due palline estratte hanno lo stesso colore si vince 1 euro, se sono di colore diverso si perde 1 euro. Per quali valori di n il gioco è favorevole al giocatore? [$1 \leq n \leq 4 \vee n \geq 13$]

18 **Videolezione** Un'urna contiene 6 palline bianche ed n palline nere, con $n \geq 1$. Un gioco consiste nell'estrarre una pallina dall'urna, osservarne il colore, quindi estrarre una seconda pallina dall'urna, senza reimmissione della prima. In ciascuna delle due estrazioni, il giocatore vince 2 euro se estrae una pallina bianca, mentre ne perde 3 se estrae una pallina nera.
Sia X la variabile aleatoria che esprime la somma complessiva vinta o persa dal giocatore dopo le due estrazioni.

a. Determina la distribuzione di probabilità di X.
b. Verifica che il valore medio di X è espresso dalla formula:

$$E(X)=\frac{6(4-n)}{n+6}$$

c. Determina per quali valori di n il gioco è favorevole al giocatore. [**a.** X può assumere i valori -6, -1, 4, rispettivamente con probabilità $\frac{n^2-n}{(n+5)(n+6)}$, $\frac{12n}{(n+5)(n+6)}$, $\frac{30}{(n+5)(n+6)}$; **c.** $1 \leq n \leq 3$]

19 Un'urna contiene 1 pallina nera e 9 palline bianche. Un gioco consiste nell'estrarre simultaneamente 4 palline dall'urna, quindi nel lanciare un dado cubico regolare con le facce numerate da 1 a 6. Se tra le palline estratte c'è quella nera, il giocatore vince se nel lancio del dado esce un numero pari; se tra le palline estratte non c'è quella nera, il giocatore vince se nel lancio del dado esce il numero 1. Per partecipare al gioco il giocatore deve sborsare m euro; se il giocatore vince, riceve come premio 10 euro, se il giocatore non vince ma tra le palline estratte c'è quella nera, il giocatore recupera la cifra spesa per giocare; se infine il giocatore non vince e tra le palline estratte non c'è quella nera, il giocatore perde la cifra sborsata per giocare.
Indica con X la variabile aleatoria che esprime la cifra guadagnata o persa dal giocatore dopo avere giocato.

a. Determina la distribuzione di probabilità di X.
b. Stabilisci per quale valore di m il gioco è equo.

[**a.** X può assumere i valori $10-m$, 0, $-m$, rispettivamente con probabilità $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$;
b. risulta $E(X)=\frac{15-4m}{5}$, pertanto il gioco è equo quando $m = 3{,}75$]

20 Un'urna contiene 60 palline, di cui 9 rosse e le rimanenti nere. Un giocatore pesca una pallina dall'urna, ne osserva il colore, quindi rimette la pallina estratta nell'urna e pesca una seconda pallina. In ciascuna delle due estrazioni, il giocatore guadagna n euro, con $n \in \mathbb{N}$, se estrae una pallina rossa e perde 2 euro se estrae una pallina nera.
Indica con X la variabile aleatoria che esprime la cifra complessiva guadagnata o persa dal giocatore dopo le due estrazioni.

a. Determina la distribuzione di probabilità di X.
b. Determina il valore medio di X.
c. Stabilisci per quali valori di n il gioco è favorevole al giocatore.

[**a.** X può assumere i valori $2n$, $n-2$, -4, rispettivamente con probabilità $\frac{9}{400}, \frac{51}{200}, \frac{289}{400}$; **b.** $\frac{3}{10}n-\frac{17}{5}$; **c.** $n \geq 12$]

21 ESERCIZIO GUIDATO

La probabilità che un vigile urbano passi a controllare una macchina che sosta in un parcheggio a pagamento, non custodito, è di $\frac{1}{300}$ per ogni minuto di sosta. La tariffa prevista per il parcheggio è 1 euro all'ora (soste inferiori a 1 ora vengono arrotondate a 1 ora); la multa per sosta senza tagliando è di 50 euro. Supponiamo di effettuare spesso soste di 30 minuti a quel parcheggio: la strategia di non pagare il biglietto è, a lungo andare, vantaggiosa? Come deve essere il tempo di sosta affinché, mediamente, sia vantaggioso non pagare il biglietto?

- Supponi di non comprare il tagliando per la sosta e immagina la situazione come un «gioco» in cui guadagni 1 euro (il prezzo che altrimenti avresti dovuto pagare per il tagliando) se il vigile non passa, mentre perdi 49 euro (la differenza tra la multa di 50 euro e il prezzo di 1 euro per il tagliando) se il vigile passa.
- Considera la variabile aleatoria X che esprime i soldi guadagnati o persi dopo una sosta al parcheggio senza tagliando; la sosta senza biglietto risulterà vantaggiosa se la media di X è positiva, svantaggiosa se è negativa.
- Se svolgi i calcoli correttamente troverai che la sosta senza biglietto non è vantaggiosa e che, per esserlo, il tempo di sosta dovrebbe essere inferiore a 6 minuti.

Realtà e modelli

22 **Prenotazione di un biglietto aereo.** Una compagnia aerea pratica degli sconti del 50% sul costo del biglietto, a condizione che si parta di lunedì e che si prenoti almeno una settimana prima. La prenotazione del biglietto scontato non è rimborsabile, né rinviabile. Sono sempre disponibili, invece, biglietti a tariffa intera.
Tizio, per ragioni di lavoro, deve comprare un biglietto tutte le settimane; nel momento in cui prenota (almeno una settimana prima) non è però certo di poter partire il lunedì: precisamente, valuta che egli potrà partire di lunedì con una probabilità dell'80%, e nei giorni successivi con una probabilità del 20%. In media, gli conviene la strategia di prenotare sempre il biglietto scontato?
(*Suggerimento*: ragiona in modo simile all'esercizio precedente.)

[La strategia di comprare sempre il biglietto scontato è a lungo andare vantaggiosa]

23 **In pasticceria.** Il pasticciere Vincenzo vuole stabilire quante torte alla frutta preparare in mattinata, tenendo conto che vanno vendute in giornata (così da assicurarne la massima freschezza). La produzione di una torta gli costa 12 euro; la vendita gli rende un ricavo di 28 euro a torta. Il numero X di torte richieste giornalmente è una variabile aleatoria la cui distribuzione di probabilità è indicata nella tabella seguente:

Valori di X	0	1	2
Probabilità	20%	50%	30%

Vincenzo è indeciso se preparare una sola torta (eventualmente scontentando un cliente) oppure due (forse avanzandone, però). Qual è la scelta migliore, in base al criterio del guadagno atteso? [Conviene preparare una sola torta]

24 **Strategie produttive.** Una ditta produce componenti elettronici. Ogni componente costa 8 euro. La probabilità che un componente presenti un difetto è del 5% e la riparazione di un componente difettoso prevede un costo aggiuntivo di 4 euro. In media, quale delle due strategie seguenti è più conveniente per l'azienda?

a. Vendere ogni componente al prezzo di 15 euro e riparare i componenti difettosi.
b. Vendere ogni componente al prezzo di 16 euro ed eliminare i componenti difettosi, senza ripararli.

(*Suggerimento*: indica con X e Y, rispettivamente, le variabili aleatorie che rappresentano il guadagno per ciascun pezzo venduto nel caso della strategia **a** e nel caso della strategia **b**; calcola i valori medi di X e Y e confrontali.)
[È più conveniente la strategia **b**]

25 **Gioco a quiz.** A un quiz, un concorrente deve rispondere a due domande, diciamo A e B, e deve decidere se rispondere prima alla domanda A o prima alla domanda B. La probabilità che il concorrente risponda correttamente alla domanda A è 0,7, e in tal caso il concorrente vince 1000 euro. La probabilità che il concorrente risponda correttamente alla domanda B è 0,4, e in tal caso il concorrente vince 2000 euro. Se il concorrente sbaglia la risposta alla prima domanda non può tentare di rispondere alla seconda; se invece risponde correttamente alla prima domanda gli viene posta anche la seconda domanda. Qual è la strategia più conveniente per il concorrente: rispondere prima alla domanda A o rispondere prima alla domanda B?
(*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente.) [La migliore strategia è quella di rispondere prima alla domanda A]

2. Distribuzione binomiale

Teoria p. 267

Esercizi introduttivi

26 **Vero o falso?**

a. Si estraggono successivamente cinque carte da un mazzo, rimettendo dopo ciascuna estrazione la carta estratta nel mazzo prima dell'estrazione successiva. La variabile aleatoria X che conta il numero di Assi ottenuto complessivamente nelle cinque estrazioni ha una distribuzione binomiale. V F

b. Si estraggono successivamente cinque carte da un mazzo, **senza** rimettere dopo ciascuna estrazione la carta estratta nel mazzo prima dell'estrazione successiva. La variabile aleatoria X che conta il numero di Assi ottenuto complessivamente nelle cinque estrazioni ha una distribuzione binomiale. V F

c. Si lancia successivamente per 10 volte un dado regolare. La variabile aleatoria X che conta il numero di «6» complessivamente ottenuto nei dieci lanci ha una distribuzione binomiale. V F

d. Un sacchetto contiene 10 caramelle alla menta e 20 caramelle alla frutta. Paolo estrae a caso, successivamente, 3 caramelle dal sacchetto, e mangia ciascuna caramella estratta prima di estrarre la successiva. La variabile aleatoria X che conta il numero di caramelle alla menta che ha complessivamente mangiato Paolo ha una distribuzione binomiale. V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

27 **Vero o falso?**

Viene lanciato per 20 volte successive un dado regolare. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di «6» ottenuto complessivamente nei 20 lanci.

a. X ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 20$ e $p = \frac{1}{6}$ V F

b. X può assumere qualsiasi valore da 0 a 20, ciascuno con la stessa probabilità V F

c. la probabilità che sia $X = 2$ è uguale a $\binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8$ V F

d. risulta $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 1)$ V F

e. la probabilità che sia $X = 0$ è uguale a $\binom{20}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{20}$ V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

Test

28 Si estraggono successivamente, con reimmissione nel mazzo, cinque carte da un mazzo di 52. La variabile aleatoria X che conta il numero di Assi ottenuti:

A ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$, $p = \frac{1}{12}$

B ha distribuzione binomiale di parametri $n = 5$, $p = \frac{1}{13}$

C ha distribuzione binomiale di parametri $n = 6$, $p = \frac{1}{15}$

D non ha distribuzione binomiale

29 Si lancia n volte successivamente un dado truccato a sei facce, in modo che in ciascun lancio la probabilità di ottenere «6» è uguale a 0,4. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di «6» complessivamente ottenuto negli n lanci. Quale delle seguenti espressioni fornisce la probabilità che sia $X = 5$?

A $\binom{n}{5}(0,6)^5(0,4)^{n-5}$ B $\binom{n}{5}(0,4)^5(0,6)^{n-5}$ C $\binom{n}{5}(0,6)^5(0,4)^{n-5}$ D $\binom{n}{5}(0,4)^5(0,6)^{n-5}$

30 Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 100$ e $p = 0,4$. Qual è la media di X?

A 20 B 30 C 40 D 50

31 Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 100$ e $p = 0,4$. Qual è la varianza di X?

A 21 B 22 C 23 D 24

32 Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 50$ e $p = \frac{1}{3}$. Allora la probabilità che sia $X \geq 1$ è uguale a:

A $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{50}$ B $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ C $\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ D nessuna delle precedenti

Parametri di una distribuzione binomiale

33 Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 6$, $p = \frac{1}{3}$. Calcola la probabilità che risulti $X = 4$. Arrotonda il risultato a meno di un centesimo.

$\left[\frac{20}{243} \simeq 0,08\right]$

34 Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 8$, $p = \frac{1}{4}$. Determina:

a. la probabilità che sia $X = 5$; **b.** la probabilità che sia $X \geq 6$; **c.** la probabilità che sia $X < 3$.

Esprimi i risultati arrotondati a meno di un millesimo.

[**a.** 0,023; **b.** 0,004; **c.** 0,679]

35 Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 5$, $p = \frac{1}{2}$.

a. Determina la distribuzione di probabilità di X.

b. Per quale valore di k è massima la probabilità che sia $X = k$?

[**a.** X può assumere i valori 0, 1, 2, 3, 4, 5, rispettivamente con probabilità $\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}$;

b. la probabilità è massima per $k = 2$ e per $k = 3$]

ESERCIZI

36 Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 6$, $p = \frac{1}{2}$.

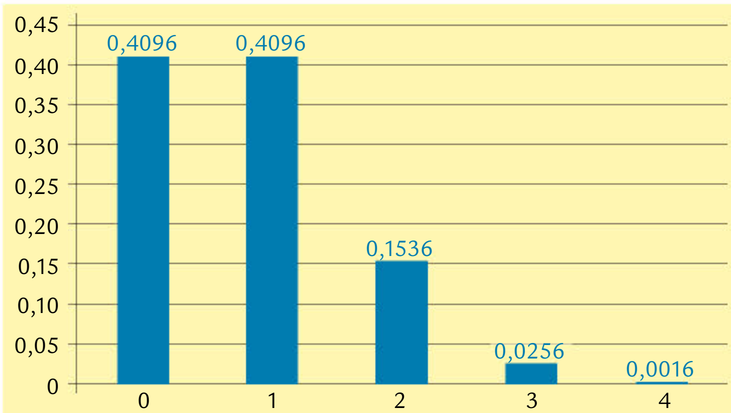
a. Determina la distribuzione di probabilità di X.

b. Per quale valore di k (con $k \in \mathbb{N}$) è massima la probabilità che sia $X = k$?

[**a.** X può assumere i valori 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, rispettivamente con probabilità $\frac{1}{64}, \frac{3}{32}, \frac{15}{64}, \frac{5}{16}, \frac{15}{64}, \frac{3}{32}, \frac{1}{64}$; **b.** la probabilità è massima per $k = 3$]

37 Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 50$ e $p = \frac{1}{10}$. Determina la media e la deviazione standard di X. $\left[E(X) = 5, \sigma(X) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

38 **Interpretazione di grafici** Nella figura è rappresentata la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria binomiale X. Individua i parametri n e p della distribuzione e la media di X.



$\left[n = 4, p = \frac{1}{5}, E(X) = \frac{4}{5}\right]$

39 Sia X una variabile aleatoria binomiale, di parametri $n = 18$ e $p > \frac{1}{2}$. Sapendo che la varianza di X è 4, determina il valore di p e la media di X. $\left[p = \frac{2}{3}, E(X) = 12\right]$

40 Sia X una variabile aleatoria binomiale, avente media uguale a 30 e deviazione standard uguale a $\frac{\sqrt{30}}{2}$.

a. Determina i parametri n e p della variabile aleatoria.

b. Verifica che la probabilità che sia $X = 1$ è uguale a $\frac{15}{2^{77}}$. [**a.** $n = 40$, $p = \frac{3}{4}$]

Problemi

41 Si lancia un comune dado regolare a sei facce e si vince se esce un numero minore o uguale a 4.

a. Qual è la probabilità di vincere?

b. Il dado viene lanciato successivamente per quattro volte. Indicata con X la variabile aleatoria che conta il numero complessivo di volte in cui si è vinto nei quattro lanci, individua la distribuzione di probabilità di X, precisandone i parametri.

c. Calcola la probabilità che, nei quattro lanci, si vinca esattamente 2 volte.

d. Calcola la probabilità che, nei quattro lanci, si vinca esattamente 3 volte.

[**a.** $\frac{2}{3}$; **b.** binomiale di parametri $n = 4$, $p = \frac{2}{3}$; **c.** $\frac{8}{27}$; **d.** $\frac{32}{81}$]

42 Si lancia una moneta regolare per 6 volte successivamente. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte in cui è uscita «testa» nei sei lanci.

a. Individua la distribuzione di probabilità di X, precisandone i parametri.

b. Calcola la probabilità che siano uscite esattamente 3 «testa». [**a.** Binomiale di parametri $n = 6$, $p = \frac{1}{2}$; **b.** $\frac{5}{16}$]

43 Da un'urna contenente 16 palline, di cui 4 bianche e 12 nere, si effettuano quattro estrazioni successive, con reimmissione. Qual è la probabilità di estrarre esattamente 3 palline bianche? $\left[\frac{3}{64}\right]$

44 **Videolezione** Un'urna contiene 9 palline, di cui 6 bianche e 3 rosse. Si eseguono successivamente quattro estrazioni dall'urna, con reimmissione. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte complessivamente nelle quattro estrazioni.

a. Individua la distribuzione di probabilità di X, precisandone i parametri.
b. Calcola la probabilità di estrarre esattamente 2 palline bianche.
c. Calcola la probabilità di estrarre esattamente 3 palline bianche.

$\left[\textbf{a.}\ \text{Binomiale di parametri } n=4,\ p=\frac{2}{3};\ \textbf{b.}\ \frac{8}{27};\ \textbf{c.}\ \frac{32}{81}\right]$

Realtà e modelli

45 **Guida senza cintura.** Da alcune indagini statistiche risulta che il 20% degli automobilisti guida ancora in città senza allacciare le cinture di sicurezza. Una pattuglia ferma e controlla a caso 5 auto; qual è la probabilità di riscontrare l'infrazione due volte? $\left[\frac{128}{625}=20{,}48\%\right]$

46 **Difetti di produzione.** A causa di un difetto a un macchinario di una linea di produzione , il 60% dei componenti prodotti risulta difettoso. I componenti vengono venduti in confezioni da 4. Qual è la probabilità che la metà di componenti contenuti in una confezione risulti difettosa? $\left[\frac{216}{625}=34{,}56\%\right]$

47 **Semafori.** Un automobilista incontra abitualmente tre semafori sul tragitto che compie per recarsi al lavoro. Ciascun semaforo segue questo ciclo: resta verde per 50 secondi, quindi diventa giallo per 10 secondi e infine resta rosso per 60 secondi. Supponendo che ciascun semaforo sia indipendente dagli altri, indica con X, Y e Z, le variabili aleatorie che contano rispettivamente il numero di semafori verdi, gialli e rossi che incontra l'automobilista sul suo tragitto.

a. Individua le distribuzioni di probabilità di X, Y e Z.
b. Calcola la probabilità che l'automobilista trovi un solo semaforo verde.
c. Calcola la probabilità che l'automobilista trovi esattamente due semafori gialli.
d. Calcola la probabilità che l'automobilista trovi tutti e tre i semafori rossi.

$\left[\textbf{a.}\ X \text{ binomiale di parametri } n=3,\ p=\frac{5}{12},\ Y \text{ di parametri } n=3,\ p=\frac{1}{12},\ Z \text{ di parametri } n=3,\ p=\frac{1}{2};\ \textbf{b.}\ \frac{245}{576};\ \textbf{c.}\ \frac{11}{576};\ \textbf{d.}\ \frac{1}{8}\right]$

48 **Errori di trasmissione.** Vengono trasmessi 100 segnali ed è noto che, per ciascun segnale trasmesso, la probabilità che si verifichi un errore di trasmissione è dell'1%. Supponi che i segnali siano trasmessi in modo indipendente uno dall'altro. Qual è la probabilità che si verifichino più di due errori? [Circa 7,9%]

49 **Numero di figli maschi.** Supponi che la probabilità di avere un figlio maschio sia uguale alla probabilità di avere una figlia femmina. Scelta a caso una coppia che ha tre figli (il sesso di ciascuno dei quali si suppone indipendente da quello degli altri), sia X la variabile aleatoria che conta il numero di figli maschi della coppia.

a. Individua la distribuzione di probabilità di X, precisandone i parametri.
b. Calcola la probabilità che quella coppia abbia avuto esattamente due figli maschi.

Si scelgono a caso, e in modo indipendente, quattro coppie, ciascuna delle quali ha tre figli; indicata con Y la variabile aleatoria che conta il numero di coppie che hanno esattamente due figli maschi, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

c. Individua la distribuzione di probabilità di Y, precisandone i parametri.
d. Calcola la probabilità che almeno una delle quattro coppie abbia esattamente due figli maschi.

$\left[\textbf{a.}\ X \text{ binomiale di parametri } n=3,\ p=\frac{1}{2};\ \textbf{b.}\ \frac{3}{8};\ \textbf{c.}\ Y \text{ binomiale di parametri } n=4,\ p=\frac{3}{8};\ \textbf{d.}\ 1-\left(\frac{5}{8}\right)^4 \simeq 0{,}85\right]$

50 **Candidati a un concorso.** Si stima che ciascun candidato che partecipa a un concorso abbia una probabilità del 25% di superarlo. Considera un gruppo di 20 candidati scelti a caso.

a. Qual è la probabilità che almeno un candidato del gruppo superi il concorso?

b. Qual è la probabilità che al massimo due candidati del gruppo superino il concorso?

c. Qual è il numero medio di candidati del gruppo che possiamo aspettarci superino il concorso?

Per ciascuna probabilità, scrivi l'espressione che la esprime, quindi, con l'aiuto di una calcolatrice, fornisci il risultato arrotondato a meno di un millesimo.

$$\left[\textbf{a.}\ 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20} \simeq 0{,}997;\ \textbf{b.}\ \left(\frac{3}{4}\right)^{20}+5\left(\frac{3}{4}\right)^{19}+\frac{95}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{18} \simeq 0{,}091;\ \textbf{c.}\ 5\right]$$

51 **Test a risposta multipla.** Un compito in classe è costituito da 10 quesiti, ciascuno con quattro risposte di cui una sola è esatta. Il professore assegna 1 punto per ogni risposta esatta e nessun punto per ogni risposta sbagliata o non data. Paolo risponde a caso a tutti i quesiti.

a. Qual è la probabilità che Paolo prenda la sufficienza, cioè che dia almeno sei risposte esatte? Determina la formula che esprime tale probabilità, quindi determinane un valore approssimato con l'aiuto di una calcolatrice. Arrotonda il risultato a meno di un centesimo ed esprimilo sotto forma di percentuale.

b. Qual è il voto medio che Paolo può aspettarsi di prendere dando tutte le risposte a caso?

c. Benché impreparato, Paolo ha la capacità di riconoscere, per ciascun quesito del test, una delle tre risposte sbagliate. In questo modo, aumenta a $\frac{1}{3}$ la probabilità di «azzeccare» la risposta giusta a ciascun quesito. Quale diviene, ora, la probabilità che Paolo raggiunga la sufficienza rispondendo a caso a tutti i quesiti?

$$\left[\textbf{a.}\ \sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \simeq 0{,}02 = 2\%;\ \textbf{b.}\ 2{,}5;\ \textbf{c.}\ \sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} \simeq 7{,}6\%\right]$$

52 **Matematica e storia** **Il problema del cavaliere de Méré.** Il cavaliere de Méré pose nel 1654 a Blaise Pascal il seguente problema: «È più probabile ottenere almeno un '6' lanciando quattro volte un dado, oppure un doppio '6' lanciando due dadi 24 volte?».

a. Lanciamo un dado quattro volte. Indicata con X la variabile aleatoria che conta il numero complessivo di «6» ottenuto nei quattro lanci, qual è la distribuzione di probabilità di X? Qual è la probabilità che esca almeno un «6», cioè che sia $X \geq 1$?

b. Lanciamo due dadi ventiquattro volte. Indicata con Y la variabile aleatoria che conta il numero complessivo di doppi «6» ottenuti nei ventiquattro lanci, qual è la distribuzione di probabilità di Y? Qual è la probabilità che esca almeno un doppio «6», cioè che sia $Y \geq 1$?

c. Dai risultati ottenuti ai due punti precedenti deduci la risposta al problema del cavaliere de Méré.

$$\left[\textbf{a.}\ X \sim B\left(4, \frac{1}{6}\right), 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{4};\ \textbf{b.}\ Y \sim B\left(24, \frac{1}{36}\right), 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24};\right.$$

$$\left.\textbf{c.}\ \text{è più probabile ottenere almeno un «6» lanciando un dado quattro volte}\right]$$

53 **Matematica e sport** **Calci di rigore.** I tempi supplementari della finale di Champions League tra le squadre A e B si sono conclusi in parità e l'esito della partita è deciso ai calci di rigore: cinque rigori per parte, battuti da altrettanti calciatori. Supponi che ciascuno dei rigoristi di entrambe le formazioni abbia l'80% di probabilità di segnare il proprio rigore e che i rigori siano indipendenti.

a. Qual è la probabilità che al termine dei dieci rigori permanga la situazione di pareggio?

b. Qual è la probabità che al termine dei dieci rigori risulti vincente la squadra A?

(*Suggerimento* per il punto **b**: nelle ipotesi assunte, per un'ovvia ragione di simmetria, la probabilità che vinca la squadra A è uguale a quella che vinca la squadra B.) [**a.** Circa 32%; **b.** circa 34%]

3. Distribuzione di Poisson

Teoria p. 270

Esercizi introduttivi

54 **Vero o falso?**

Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 3$.

a. la media di X è 3 V F

b. la varianza di X è uguale al quadrato della media di X V F

c. la probabilità che risulti $X = 3$ è 1 V F

d. la probabilità che risulti $X = 2$ è $\frac{9}{2e^3}$ V F

e. la probabilità che risulti $X = 0$ è e^{-3} V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

Test

55 Una variabile aleatoria di Poisson:

A può assumere soltanto un numero finito di valori
B ha media sempre espressa da un numero intero
C ha deviazione standard uguale alla radice quadrata della media
D non può mai avere media uguale alla varianza

56 Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ; allora la probabilità che risulti $X = 0$ è:

A e^{λ} B $e^{-\lambda}$ C $1 - e^{\lambda}$ D $1 - e^{-\lambda}$

57 Qual è la deviazione standard di una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 9$?

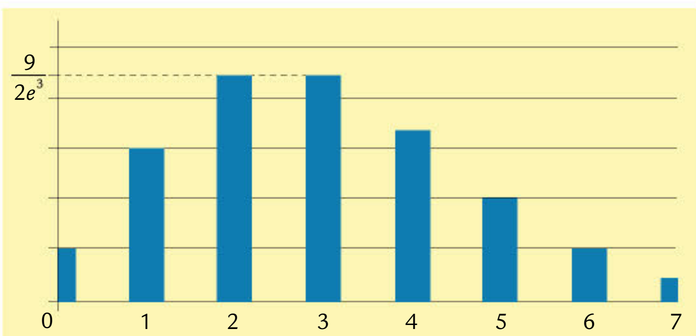
A $\sqrt{3}$ B 3 C 9 D Nessuna delle precedenti

58 Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 6$; allora la probabilità che risulti $X = 3$ è:

A $3e^{-6}$ B $36e^{-3}$ C $6e^{-3}$ D $36e^{-6}$

Parametro di una distribuzione di Poisson

59 **Interpretazione di grafici** Determina il parametro λ della distribuzione di Poisson in parte rappresentata in figura.



60 Considera una variabile aleatoria X di Poisson di media 4; verifica che la probabilità che risulti $X = 2$ è uguale a $\frac{8}{e^4}$.

61 Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 2$. Determina la probabilità che risulti $2 \leq X < 5$. Arrotonda il risultato a meno di un millesimo. [0,541]

62 Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$ tale che la probabilità dell'evento $X = 3$ è uguale alla probabilità dell'evento $X = 4$. Qual è il valore di λ? [4]

63 Sia $\lambda \in \mathbb{N}$ e X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ; dimostra che la probabilità che risulti $X = \lambda$ è uguale alla probabilità che risulti $X = \lambda - 1$.

64 Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ. Determina per quale valore di λ è massima la probabilità che risulti $X = 2$. [2]

65 Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ. Determina per quale valore di λ è massima la probabilità che risulti $X = 3$. [3]

Problemi

Realtà e modelli

66 **Errori di stampa/ 1.** Supponiamo che il numero di errori tipografici di una pagina di un libro abbia una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = \frac{1}{3}$. Qual è la probabilità che in una data pagina ci sia almeno un errore?
$\left[1 - e^{-\frac{1}{3}} \simeq 0,28\right]$

67 **Radiazioni.** In media vengono emesse 3 particelle α al secondo di un dato materiale radioattivo. Qual è la probabilità che in un secondo vengano emesse al massimo 3 particelle α di quel materiale radioattivo? $[13e^{-3} \simeq 0,65]$

68 **SMS.** Paolo riceve mediamente 8 SMS al giorno tra le 8 del mattino e la mezzanotte. Supponendo che gli SMS possano arrivare a Paolo con la stessa probabilità in ciascun istante di questo arco temporale, calcola la probabilità che Paolo:

a. riceva almeno un SMS tra le 8 e mezzogiorno;
b. riceva 2 SMS tra le 15 e le 18. $\left[\textbf{a. } 1 - e^{-2} \simeq 0,86; \textbf{ b. } \frac{9}{8}e^{-\frac{3}{2}} \simeq 0,25\right]$

69 **Al pronto soccorso.** In un Pronto Soccorso di una località di montagna, nei mesi invernali si presentano in media 6 sciatori ogni settimana per qualche trauma dovuto a una caduta. Qual è la probabilità che durante un periodo di 2 settimane in gennaio si presentino al Pronto Soccorso 10 sciatori? Fornisci il risultato arrotondato a meno di un millesimo. [0,105]

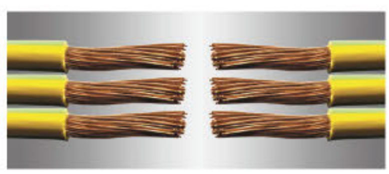
70 **Al centralino.** Il numero X di chiamate telefoniche che arrivano in un'ora a un centralino segue una distribuzione di Poisson. La probabilità che in un'ora non arrivi alcuna telefonata è uguale a e^{-4}. Calcola:

a. il numero medio di telefonate che arrivano a quel centralino in un'ora;
b. la probabilità che in un'ora arrivino a quel centralino esattamente 5 telefonate. $\left[\textbf{a. } \lambda = 4; \textbf{ b. } \frac{128}{15}e^{-4} \simeq 0,156\right]$

71 **Vendite di auto.** Il numero di automobili che un concessionario vende giornalmente è ben interpretato da una varabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 1$.

a. Qual è la probabilità che in un giorno il concessionario non venda alcuna automobile?
b. Qual è la probabilità che in un giorno il concessionario venda più di un'automobile?
Supponendo che il numero di automobili vendute in un giorno sia indipendente dal numero di automobili vendute negli altri giorni, determina la probabilità che per cinque giorni consecutivi il concessionario non venda automobili e poi il sesto giorno ne venda più di una. $[\textbf{a. } e^{-1}; \textbf{ b. } 1 - 2e^{-1}; \textbf{ c. } e^{-5} - 2e^{-6}]$

72 Videolezione **Impurità nel rame/ 1.** In un filo di rame sottile è presente in media un'impurità ogni 3 cm. Calcola la probabilità che in 15 cm di filo:



a. non siano presenti impurità;
b. sia presente esattamente una impurità;
c. siano presenti almeno due impurità. $[\textbf{a. } e^{-5}; \textbf{ b. } 5e^{-5}; \textbf{ c. } 1 - 6e^{-5}]$

73 **Call center.** Il numero medio di chiamate che arrivano a un call center in un'ora è 150. Sapendo che il numero di chiamate che arrivano segue una distribuzione di Poisson, calcola la probabilità che in 1 minuto arrivino al massimo due chiamate. Fornisci il risultato sia in forma esatta, sia arrotondato a meno di un millesimo. $\left[\frac{53}{8}e^{-\frac{5}{2}} \simeq 0,544\right]$

74 **Incidenti.** In un incrocio pericoloso si verificano mediamente 2 incidenti, nel mese di novembre. Supponendo che gli incidenti si possano verificare con la stessa probabilità in ciascun momento del mese, calcola:

a. la probabilità che in un dato giorno di quel mese non si verifichi nessun incidente;
b. il minimo numero di giorni durante i quali la probabilità che si verifichi almeno un incidente è superiore all'80%.
$[\textbf{a. } e^{-\frac{1}{15}}; \textbf{ b. } 25 \text{ giorni}]$

75 **Impurità nel rame/ 2.** In un filo di rame sottile è presente in media un'impurità ogni 2 cm. Come deve essere la lunghezza l del filo affinché la probabilità che il filo contenga almeno una impurità sia superiore al 99%?

[$l > \ln 10\,000$ cm, ossia $l > 9{,}2$ cm circa]

76 **Errori di stampa/ 2.** Il numero di errori presenti in una pagina di un libro è una variabile aleatoria di Poisson, di parametro λ. Come deve essere λ affinché la probabilità che una pagina contenga almeno un errore sia inferiore al 5%?

$\left[\lambda < \ln\left(\frac{20}{19}\right)\right]$

4. Variabili aleatorie e distribuzioni continue

Teoria p. 272

Esercizi introduttivi

77 **Vero o falso?**

Sia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua.

a. se f è una densità di probabilità, allora $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ V F

b. se f è una densità di probabilità, allora può essere $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 2$ V F

c. se una variabile aleatoria continua X ha densità $f(x)$, allora la probabilità che X sia compresa tra 1 e 4 è data dall'integrale $\int_1^4 f(x)\,dx$ V F

d. se una variabile aleatoria continua X ha densità $f(x)$, allora la probabilità che X sia uguale a 1 è data da $f(1)$ V F

e. se $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, allora la funzione f è una densità di probabilità V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

Test

78 Una variabile aleatoria X ha come densità di probabilità la funzione f. La probabilità che risulti $1 < X < 2$ è uguale a:

A $\int_2^1 f(x)\,dx$ B $f(2) - f(1)$ C $\int_1^2 f(x)\,dx$ D $f(1) - f(2)$

79 Una variabile aleatoria continua X ha come densità di probabilità la funzione $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Quale dei seguenti integrali esprime il valore medio di X?

A $\int_0^1 3x^2 dx$ B $\int_0^1 3x^3 dx$ C $\int_0^1 3x^4 dx$ D Nessuno dei precedenti

80 La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$:

A è una densità di probabilità se e solo se $k = 1$;
B è una densità di probabilità se e solo se $k = 2$;
C è sempre una densità di probabilità, qualsiasi sia il valore di k;
D non è mai una densità di probabilità.

81 **Interpretazione di grafici** Per ciascuno dei seguenti grafici stabilisci, motivando la risposta, se rappresenta una densità di probabilità.

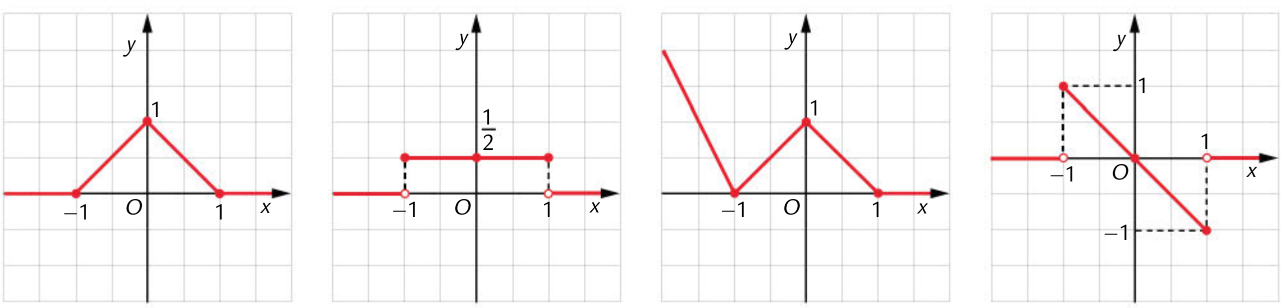


Figura A Figura B Figura C Figura D

Densità di probabilità

82 Verifica che la funzione $f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$ è una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria avente come densità la funzione $f(x)$. Calcola la probabilità che sia $X\ge\frac{1}{3}$. $\left[\frac{26}{27}\right]$

83 Stabilisci se la funzione $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x^4} & x\ge 1\\ 0 & x<1\end{cases}$ definisce una densità di probabilità. [No]

84 Verifica che la funzione $f(x)=\begin{cases}3e^{-3x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ è una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria avente come densità la funzione $f(x)$. Calcola la probabilità che sia $X\ge 1$. $[e^{-3}]$

85 ESERCIZIO GUIDATO

Considera la funzione $f(x)=\begin{cases}k\sqrt{x} & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$. Determina per quale valore di k definisce una densità di probabilità.

—

- Devono essere verificate le due condizioni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1 \quad \text{e} \quad f(x)\ge 0 \text{ per ogni } x\in \mathbf{R}$$

- La prima condizione equivale a $\int_0^4 k\sqrt{x}\,dx=1$, ossia a $k\int_0^4\sqrt{x}\,dx=1$, da cui $k=.....$
- In corrispondenza del valore di k trovato, anche la seconda condizione è verificata, quindi la funzione rappresenta una densità di probabilità. $\left[k=\frac{3}{16}\right]$

86 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{k}{x^2} & 1\le x\le 4\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Determina per quale valore di k definisce una densità di probabilità. $\left[k=\frac{4}{3}\right]$

87 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}kxe^{-x^2} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

Determina per quale valore di k definisce una densità di probabilità. $[k=2]$

88 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}k(4-x^2) & -2\le x\le 2\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Determina per quale valore di k definisce una densità di probabilità. $\left[k=\frac{3}{32}\right]$

89 Realtà e modelli **Tempo di vita di una pila.** Il tempo di vita X, espresso in ore, di un dato tipo di pile è una variabile aleatoria di densità:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{150}{x^2} & x\ge 150\\ 0 & x<150\end{cases}$$

a. Calcola la probabilità che una pila di quel tipo debba essere sostituita entro le 200 ore di attività.

b. Una torcia elettrica, per funzionare, ha bisogno di due pile. Supponendo che il tempo di vita di ciascuna delle due pile abbia densità $f(x)$ e che le pile funzionino indipendentemente una dall'altra, qual è la probabilità di dover sostituire almeno una pila entro le 200 ore di attività? $\left[\text{a. } \frac{1}{4}; \text{ b. } \frac{7}{16}\right]$

Media e varianza di una variabile aleatoria continua

90 Determina il valore medio della variabile aleatoria X la cui densità è la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2 & 0\le x\le 3\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$\left[\frac{9}{4}\right]$

91 Determina il valore medio della variabile aleatoria X la cui densità è la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x^4} & x<1\\ 0 & x\ge 1\end{cases}$$

$\left[\frac{3}{2}\right]$

---

92 Considera la funzione $f(x)=\begin{cases}kx & 0\le x\le 6\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$.

a. Determina k in modo che la funzione f definisca una densità di probabilità.
b. In corrispondenza del valore di k trovato, determina il valore medio della variabile aleatoria X che ha come densità la funzione f.

$\left[\mathbf{a.}\ k=\frac{1}{18};\ \mathbf{b.}\ 4\right]$

93 Considera la funzione $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$.

Verifica che definisce una densità di probabilità e determina il valore medio della variabile aleatoria X che ha come densità la funzione f. [1]

94 **Realtà e modelli** **Diametro di particelle di polline.** Il diametro X di un tipo di particelle di polline, espresso in micron, è una variabile aleatoria di densità:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x^4} & x\ge 1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

a. Calcola la probabilità che una particella di polline scelta a caso abbia diametro compreso tra 1 e 2 micron.
b. Qual è il diametro medio delle particelle di polline del tipo considerato?

$\left[\mathbf{a.}\ \frac{7}{8};\ \mathbf{b.}\ 1{,}5 \text{ micron}\right]$

---

95 Una variabile aleatoria continua X ha densità:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 2\le x<5\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Determina la media e la varianza di X.

$\left[E(X)=\frac{7}{2}, V(X)=\frac{3}{4}\right]$

96 Considera la variabile aleatoria X di densità:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

a. Determina il valore medio di X.
b. Determina la varianza e la deviazione standard di X.

$\left[\mathbf{a.}\ \frac{4}{3};\ \mathbf{b.}\ \frac{2}{9}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

97 Una variabile aleatoria continua X ha densità:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 2x+2 & -1\le x\le 0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

Determina la media e la varianza di X.

$\left[E(X)=-\frac{1}{3}, V(X)=\frac{1}{18}\right]$

98 Una variabile aleatoria continua X ha densità:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Determina:

a. la probabilità che risulti $\frac{1}{2}\le X\le 1$;
b. la media di X;
c. la varianza di X;
d. la deviazione standard di X.

$\left[\mathbf{a.}\ \frac{7}{32};\ \mathbf{b.}\ \frac{7}{6};\ \mathbf{c.}\ \frac{11}{36};\ \mathbf{d.}\ \frac{\sqrt{11}}{6}\right]$

ESERCIZI

Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua

99 Una variabile aleatoria X ha densità:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2e^{-2x} & x\geq 0\end{cases}$$

Determina la funzione di ripartizione $F(x)$ di X.

$$\left[F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-2x} & x\geq 0\end{cases}\right]$$

100 Una variabile aleatoria continua X ha densità:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 2\leq x<5\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Determina la funzione di ripartizione $F(x)$ di X.

$$\left[F(x)=\begin{cases}0 & x<2\\ \frac{x-2}{3} & 2\leq x\leq 5\\ 1 & x>5\end{cases}\right]$$

101 Una variabile aleatoria continua X ha funzione di ripartizione:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ (x+1)^2 & -1\leq x\leq 0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

a. Determina la densità $f(x)$ di X e traccia il grafico sia di $f(x)$ sia di $F(x)$.
b. Calcola la probabilità che sia $-\frac{1}{2}\leq X\leq 0$.

$$\left[\text{a. } f(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 2(x+1) & -1\leq x\leq 0\\ 0 & x>0\end{cases};\ \text{b. } \frac{3}{4}\right]$$

102 Una variabile aleatoria X ha funzione di ripartizione:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{2}\\ 1-\frac{1}{2x} & x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$

a. Determina la densità $f(x)$ di X e traccia il grafico sia di $f(x)$ sia di $F(x)$.
b. Calcola la probabilità che sia $\frac{1}{2}\leq X\leq 1$.

$$\left[\text{a. } f(x)=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2x^2} & x\geq\frac{1}{2}\end{cases};\ \text{b. } \frac{1}{2}\right]$$

5. Distribuzioni uniforme, esponenziale e normale

Teoria p. 277

Esercizi introduttivi

103 **Vero o falso?**

a. una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo [2, 5] ha come densità la funzione $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 2\leq x\leq 5\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$ V F

b. una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ ha come densità la funzione $f(x)=\begin{cases}e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ V F

c. la funzione di densità di una variabile aleatoria normale, di media μ e varianza σ^2, presenta due punti di flesso di ascisse $\mu\pm\sigma$ V F

d. se X è una variabile aleatoria di densità normale, di media μ e varianza σ^2, allora $\frac{X-\mu}{\sigma^2}$ è una variabile aleatoria di densità normale standard V F

e. se X è una variabile aleatoria di densità normale, di media μ e varianza σ^2, allora la probabilità che sia $\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma$ è più del 99% V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

Test

104 Se X è una variabile aleatoria di densità uniforme sull'intervallo [0, 2], allora la probabilità che sia $0{,}5\leq X\leq 1{,}5$ è uguale a:

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{5}$

105 Sia X una variabile aleatoria continua, di densità esponenziale di parametro λ, con $\lambda > 0$. La probabilità dell'evento $1 \leq X \leq 5$ è uguale a:

A $e^{-\lambda} - e^{-5\lambda}$ B $e^{-5\lambda} - e^{-\lambda}$ C $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-5\lambda}}$ D $e^{-6\lambda}$

106 Qual è la media di una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 5$?

A 0,1 B 0,2 C 0,3 D 0,4

107 Sia X una variabile aleatoria continua avente una distribuzione di probabilità esponenziale di parametro $\lambda = 0{,}01$. La probabilità che sia $X > 20$ è uguale a:

A $e^{-\frac{1}{2}}$ B $e^{-\frac{1}{3}}$ C $e^{-\frac{1}{4}}$ D $e^{-\frac{1}{5}}$

108 Sia X una variabile aleatoria avente una distribuzione normale di media 5 e varianza 9, e Z una variabile aleatoria avente una distribuzione normale standard. Allora $p(X \leq x)$ è uguale a:

A $p(Z \leq x)$ B $p\left(Z \leq \dfrac{x-5}{9}\right)$ C $p\left(Z \leq \dfrac{x-9}{5}\right)$ D $p\left(Z \leq \dfrac{x-5}{3}\right)$

Distribuzione uniforme

109 Sia X una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[0, 8]$. Calcola la probabilità che sia:

a. $X < 4$ **b.** $X > 6$ **c.** $3 < X < 6$ $\left[\text{a. } \dfrac{1}{2}; \text{ b. } \dfrac{1}{4}; \text{ c. } \dfrac{3}{8}\right]$

110 Sia X una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[-2, 6]$.

a. Calcola la probabilità che risulti $X < 0$, $X = 2$, $X \geq \dfrac{1}{2}$.

b. Calcola la media e la varianza di X. $\left[\text{a. } \dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{11}{16}; \text{ b. } 2, \dfrac{16}{3}\right]$

111 Scelto a caso un numero appartenente all'intervallo $[0, 1]$, calcola la probabilità:

a. che sia una soluzione dell'equazione $8x^2 - 6x + 1 = 0$;

b. che sia una soluzione della disequazione $8x^2 - 6x + 1 > 0$. $\left[\text{a. } 0; \text{ b. } \dfrac{3}{4}\right]$

112 **E se?** Dato un segmento AB, di lunghezza 10 cm, sia P un punto scelto a caso appartenente al segmento AB. Determina la probabilità che il rapporto tra AP e PB sia maggiore di 2.

▶ Cambierebbe la risposta considerando il rapporto tra il *maggiore* e il *minore* dei due segmenti AP e PB? $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

113 Scelto a caso un angolo X, la cui ampiezza (in radianti) appartiene all'intervallo $[-\pi, \pi]$, calcola la probabilità che il seno dell'angolo sia maggiore di $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

Realtà e modelli

114 **Attesa a un appuntamento.** Paolo promette a Barbara di andarla a trovare tra le 15 e le 16 di un dato giorno. Supposto che Paolo possa arrivare da Barbara, con la stessa probabilità, in qualsiasi istante tra le 15 e le 16, calcola la probabilità:

a. che Paolo arrivi dopo le 15.20;

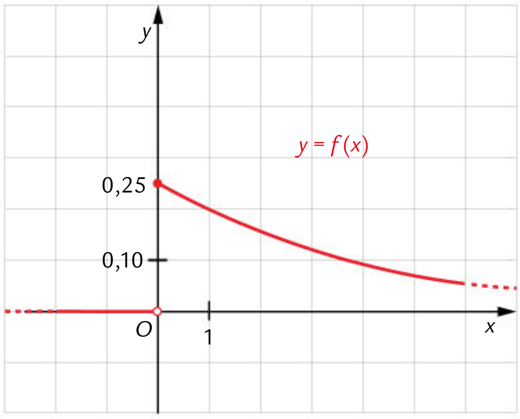
b. che Barbara debba attendere Paolo per più di 45 minuti. $\left[\text{a. } \dfrac{2}{3}; \text{ b. } \dfrac{1}{4}\right]$

115 **Un gol in extremis.** Un gol di Vincenzo ha permesso alla sua squadra di vincere la finale per 1-0. Calcola la probabilità che Vincenzo abbia segnato in chiusura di tempo, cioè entro cinque minuti dal termine di uno dei due tempi di gioco (un tempo di gioco dura 45 minuti, escludendo l'eventuale recupero). $\left[\dfrac{1}{9}\right]$

Distribuzione esponenziale

116 **Interpretazione di grafici** In figura è rappresentata la densità di probabilità di una variabile aleatoria X, avente una distribuzione esponenziale. Determina:

a. la densità di probabilità di X;
b. la probabilità che sia $X \le 8$;
c. il valore medio di X.



$\left[\textbf{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}; \textbf{ b. } 1 - e^{-2}; \textbf{ c. } 4\right]$

117 **ESERCIZIO GUIDATO**

Il tempo di attesa X, espresso in secondi, alla cassa di un supermercato è ben interpretato da una variabile aleatoria di densità esponenziale, di parametro λ. Il tempo medio di attesa è di 3 minuti e 20 secondi.

a. Determina il valore di λ.
b. Determina la probabilità di recarsi a quella cassa e dovere attendere meno di 5 minuti.
c. Se si è già atteso per 2 minuti, qual è la probabilità di dovere attendere almeno un altro minuto?

---

a. Il tempo medio di attesa è di 200 secondi; ricordando che $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, puoi dedurre che $\frac{1}{\lambda} = 200$, quindi $\lambda = 0{,}005$.

b. La densità di X è $f(x) = 0{,}005e^{-0{,}005x}$; pertanto, dal momento che 5 minuti equivalgono a 300 secondi, la probabilità richiesta è data dall'integrale:

$$\int_0^{300} f(x)\,dx$$

Se svolgi correttamente i calcoli troverai che questa probabilità è uguale a $1 - e^{-\frac{3}{2}} \simeq 0{,}78$.

c. Devi calcolare $p(X \ge 180 \mid X \ge 120)$; per la proprietà di assenza di memoria delle variabili aleatorie esponenziali, questa probabilità equivale a $p(X \ge 60)$, che è data da $\int_{60}^{+\infty} f(x)\,dx$. Il valore di quest'ultimo integrale (quindi della probabilità cercata) è $e^{-\frac{3}{10}} \simeq 0{,}74$.

Realtà e modelli

118 **Attesa in posta.** Il tempo di attesa, espresso in minuti, allo sportello di un ufficio postale è una variabile aleatoria di densità esponenziale di parametro $\frac{1}{10}$.

a. Qual è il tempo medio di attesa?
b. Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?
c. Qual è la probabilità di attendere più di 10 minuti?

[**a.** 10 minuti; **b.** $1 - e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0{,}39$; **c.** $e^{-1} \simeq 0{,}37$]

119 **Videolezione** **Camion.** La durata di vita, espressa in anni, dei camion di una società di autotrasporti si può modellare con una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ. La durata di vita media di un camion è 12 anni.

a. Determina il valore di λ.
b. Calcola la probabilità che la durata di vita di un camion sia superiore a 15 anni.
c. Qual è la probabilità che un camion in attività da 10 anni sia ancora operativo per almeno altri 6 anni?

$\left[\textbf{a. } \lambda = \frac{1}{12}; \textbf{ b. } e^{-\frac{5}{4}} \simeq 0{,}29; \textbf{ c. } e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0{,}61\right]$

Matematica ed elettronica

120 La durata di vita di un componente elettronico, espressa in ore, è una variabile aleatoria X di densità esponenziale, con parametro $\lambda = 0{,}0003$.

a. Calcola la probabilità che la durata di vita del componente sia superiore alle 2000 ore.

b. Senza utilizzare la calcolatrice, dimostra che la probabilità calcolata al punto precedente è superiore al 50%. [**a.** $e^{-\frac{3}{5}}$]

121 La durata di vita di un componente elettronico, espressa in ore, segue una densità esponenziale di parametro $\lambda = 0{,}005$. Calcola la probabilità che la durata di vita del componente:

a. sia superiore alle 500 ore;

b. sia al massimo 10 giorni;

c. sia compresa tra 10 e 20 giorni.

$\left[\textbf{a.}\ e^{-\frac{5}{2}} \simeq 0{,}08;\ \textbf{b.}\ -e^{-\frac{6}{5}} \simeq 0{,}70\ \textbf{c.}\ e^{-\frac{6}{5}} - e^{-\frac{12}{5}} \simeq 0{,}21\right]$

122 La durata di vita, espressa in ore, di un componente elettronico è una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ. La probabilità che la durata di vita del componente sia inferiore alle 100 ore è uguale al 5%. Qual è il valore di λ?

$\left[\lambda = \frac{1}{100} \ln \frac{20}{19}\right]$

123 La durata di vita di un componente elettronico, espressa in giorni, è una variabile aleatoria X di densità esponenziale, con parametro λ. La probabilità che la durata di vita del componente sia compresa tra 500 e 1000 giorni è uguale a $\frac{1}{4}$. Determina il valore esatto di λ e il suo valore arrotondato a meno di 10^{-4}.

$\left[\lambda = \frac{\ln 2}{500} \simeq 0{,}0014\right]$

Distribuzione normale

124 Sia Z una variabile aleatoria con distribuzione normale standard. Utilizzando le tavole o il foglio di calcolo, determina le seguenti probabilità:

a. $p(Z > 2)$ **b.** $p(-2 < Z < 2)$ **c.** $p(Z < 3)$

Fornisci i risultati arrotondati a meno di un millesimo. [**a.** 0,023; **b.** 0,955; **c.** 0,999]

125 Sia X una variabile aleatoria normale, di parametri $\mu = 6$, $\sigma^2 = 4$. Calcola la probabilità che risulti $X > 6$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

126 Sia X una variabile aleatoria normale, di parametri $\mu = 6$, $\sigma^2 = 4$. Calcola la probabilità che risulti $4 < X < 8$. Fornisci il risultato sotto forma di percentuale. [Circa il 68%]

127 Sia X una variabile aleatoria normale, di parametri $\mu = 6$, $\sigma^2 = 4$. Calcola la probabilità che risulti:

a. $X > 3$ **b.** $X < 1$ **c.** $2 < X < 8$

Fornisci i risultati arrotondati a meno di un millesimo. [**a.** 0,933; **b.** 0,006; **c.** 0,819]

128 Sia X una variabile aleatoria normale, di parametri $\mu = 10$, $\sigma^2 = 9$. Calcola la probabilità che risulti:

a. $X > 2$ **b.** $X < 2$ **c.** $9 < X < 12$

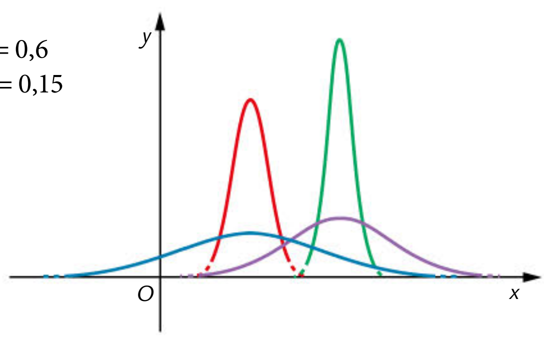
Fornisci i risultati arrotondati a meno di un millesimo. [**a.** 0,996; **b.** 0,004; **c.** 0,378]

Interpretazione di grafici

129 I grafici riportati in figura sono le densità di probabilità di variabili aleatorie aventi distribuzione normale con parametri:

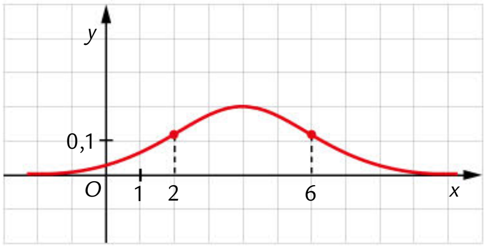
a. $\mu = 1, \sigma = 0{,}2$
b. $\mu = 1, \sigma = 0{,}8$
c. $\mu = 2, \sigma = 0{,}6$
d. $\mu = 2, \sigma = 0{,}15$

Associa a ogni grafico i parametri corretti.



130 Il grafico in figura, dove sono evidenziati i due punti di flesso, rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria X, avente una distribuzione normale. Determina:

a. il valore medio e la deviazione standard di X;
b. la probabilità che sia $X \leq 6$;
c. la probabilità che sia $X \geq 6$.



[**a.** $\mu = 4$, $\sigma = 2$; **b.** circa 0,84; **c.** circa 0,16]

131 **E se?** Determina la media μ e la deviazione standard della curva gaussiana di cui sono note le coordinate del suo flesso *destro*: $F(x_F, y_F)$.

▶ Come cambierebbe la risposta, sapendo che F è il flesso *sinistro* della gaussiana? $\left[\mu = x_F - \frac{1}{y_F\sqrt{2\pi e}}, \sigma = \frac{1}{y_F\sqrt{2\pi e}}\right]$

132 **ESERCIZIO GUIDATO**

Un'azienda produce biscotti in confezioni dal peso dichiarato di 500 g. In base ai risultati di alcune indagini statistiche effettuate su campioni prelevati a caso, si stima però che il peso effettivo delle confezioni possa essere interpretato come una variabile aleatoria normale, di media 500 e varianza 36. Il processo produttivo è ritenuto accettabile se almeno il 95% delle scatole prodotte non si discosta da 500 g per più di 5 g, altrimenti necessita di una revisione. Ritieni che il processo produttivo vada revisionato?

- Indica con X la variabile aleatoria che esprime il peso effettivo delle confezioni.
- Devi calcolare la percentuale di scatole nei limiti della tollerabilità, ossia la probabilità:
  $p(\ldots.. < X < \ldots..)$
- Eseguendo il calcolo, con l'aiuto delle tavole o della calcolatrice, troverai che tale probabilità è circa il 59,53%, quindi il processo produttivo va revisionato.

Matematica e controllo qualità

133 Le barrette di acciaio prodotte da una certa linea di produzione devono avere una lunghezza nominale di 5 cm. Sono accettabili le barrette aventi lunghezza compresa tra 4,5 cm e 5,5 cm. Le lunghezze reali dei pezzi prodotti sono variabili aleatorie normali, di media 5 cm e deviazione standard 0,5 cm. Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza? Esprimi il risultato arrotondandolo alla seconda cifra decimale. [31,73%]

134 Una ditta di minuterie costruisce bulloni che vengono prodotti con diametro avente una distribuzione normale di media $\mu = 3{,}00$ mm e varianza $\sigma^2 = 0{,}0016$ mm^2. Assumendo che i bulloni vengano messi in vendita se hanno un diametro compreso nell'intervallo $(3{,}00 \pm 0{,}08)$ mm, calcola la probabilità che uno di essi venga scartato. [$p \simeq 4{,}55\%$]

Realtà e modelli

135 **Altezza della popolazione.** Supponiamo che l'altezza X degli individui di una data popolazione sia una variabile aleatoria di distribuzione normale, con media $\mu = 175$ cm e deviazione standard $\sigma = 10$ cm.

a. Qual è la percentuale di individui di quella popolazione che sono alti meno di 170 cm?
b. Qual è la percentuale di individui della popolazione che sono alti più di 180 cm?
c. Qual è la percentuale di individui della popolazione la cui altezza è compresa tra 170 cm e 180 cm?

Esprimi i risultati sotto forma di percentuale, arrotondandoli alla seconda cifra decimale.

[**a.** 30,85%; **b.** 30,85%; **c.** 38,29%]

136 **Voti agli esami.** In un esame universitario il voto medio è 25, con una deviazione standard di 3 punti. Supponendo che i voti si distribuiscano secondo una distribuzione normale, calcola la probabilità:

a. che un allievo riporti un voto superiore a 25;
b. che un allievo riporti un voto inferiore a 20. [**a.**50%; **b.** 4,78%]

137 **Esame di Stato.** Nei licei di una data città ci sono stati 500 candidati promossi all'esame di Stato, con voto medio di 75 e deviazione standard uguale a 10. Assumendo che il voto X dei candidati segua una distribuzione normale, determina approssimativamente quanti alunni hanno avuto un voto compreso tra 65 e 85. [341]

138 **Pompa di benzina.** In base a dei controlli effettuati su una pompa di benzina, si è appurato che la quantità di benzina (espressa in litri) effettivamente erogata quando l'indicatore segna «1 litro» è ben modellata da una variabile aleatoria normale di media 1 e deviazione standard 0,25. Calcola la probabilità che la pompa:

a. eroghi meno di 0,9 litri;
b. eroghi più di 1,2 litri;
c. eroghi con una tolleranza del 10% in più o in meno.

Esprimi i risultati sotto forma di percentuale, arrotondandoli alla seconda cifra decimale.

[**a.** 34,46%; **b.** 21,19%; **c.** 31,08%]

139 **Tempo di vita.** Un dispositivo elettronico ha una durata di funzionamento distribuita normalmente con valore medio $\mu = 12\,000$ h e varianza $\sigma^2 = 90\,000$ h^2. Calcola la probabilità che uno di questi dispositivi duri:

a. meno di 11 000 h;
b. non meno di 12 500 h;
c. tra 11 500 h e 12 800 h. [**a.** $p \simeq 0{,}04\%$; **b.** $p \simeq 4{,}7\%$; **c.** $p \simeq 94{,}9\%$]

140 **Peso del riso.** Una confezione di riso ha peso distribuito normalmente con valore medio $\mu = 1{,}00$ kg e varianza $\sigma^2 = 0{,}0049$ kg^2. Calcola la probabilità che una confezione abbia peso:

a. maggiore di 1,10 kg;
b. compreso tra 0,97 kg e 0,98 kg;
c. non inferiore a 0,92 kg. [**a.** $p \simeq 7{,}6\%$; **b.** $p \simeq 5{,}2\%$; **c.** $p \simeq 87{,}3\%$]

141 **Circonferenza cranica.** In una popolazione di 100 000 maschi adulti, la circonferenza cranica ha misura distribuita normalmente con media $\mu = 58$ cm e varianza $\sigma^2 = 4$ cm^2. Stima il numero di individui che hanno circonferenza cranica:

a. maggiore di 60 cm;
b. non minore di 59 cm;
c. minore di 59 cm o maggiore di 60 cm. [**a.** Circa 15 900; **b.** circa 30 900; **c.** circa 85 000]

142 **Peso della popolazione.** La distribuzione dei pesi degli individui di una popolazione è gaussiana con media $\mu = 62$ kg e deviazione standard $\sigma = 6$ kg. Qual è la percentuale di individui il cui peso è compreso tra 60 kg e 64 kg?

[Circa 26,1%]

143 **Lunghezza della specie.** La lunghezza media dei pesci di una certa specie è bene modellizzata da una distribuzione normale di media 8 cm e deviazione standard di 2 cm. Scelto a caso un pesce di quella specie, calcola la probabilità che la sua lunghezza:

a. sia superiore a 8 cm;
b. sia al massimo 5 cm;
c. sia compresa tra 6 cm e 8 cm.

Arrotonda i risultati alla seconda cifra decimale.

[**a.** 0,5; **b.** 0,07; **c.** 0,34]

144 **Principio attivo.** L'effettiva quantità di principio attivo di un farmaco contenuta in una compressa è distribuita normalmente, con media $\mu = 25{,}0$ mg e deviazione standard $\sigma = 0{,}5$ mg. Determina un intervallo, avente centro in μ, tale che, scelta a caso una compressa, la probabilità che l'effettiva quantità x di principio attivo in essa contenuta appartenga a tale intervallo sia il 75%.

[$24{,}425 < x < 25{,}575$]

145 **Visita di leva.** Alle visite di leva dei nati nel 1970, la statura risultò distribuita normalmente. Sapendo che il 10% dei ragazzi esaminati era più alto di 185 cm e il 15% di essi era più basso di 165 cm, determina la media e la deviazione standard della distribuzione. Calcola poi la probabilità che la statura di un individuo risultasse compresa tra 170 e 175 cm.

[$\mu \simeq 173{,}94$ cm; $\sigma \simeq 8{,}63$ cm; $p \simeq 22{,}5\%$]

146 **Carabinieri e Corazzieri.** Per entrare nell'Arma dei Carabinieri è richiesta una statura di almeno 165 cm, mentre per entrare nel Reggimento dei Corazzieri è necessario essere alti almeno 190 cm.
In una certa annata la statura di coloro che hanno avanzato domanda per entrare nell'Arma, distribuita normalmente, è risultata avere media $\mu = 171$ cm e deviazione standard $\sigma = 6$ cm. In base a tali dati:

a. stima la percentuale dei richiedenti che avevano i requisiti di statura per accedere all'Arma;
b. stima la percentuale dei richiedenti che avevano i requisiti di statura per accedere al Reggimento dei Corazzieri;
c. supponendo che siano stati effettivamente arruolati nell'Arma il 30% dei richiedenti, avendo statura non inferiore a x, stima il valore di x.

[**a.** 84%; **b.** 0,08%; **c.** $x \simeq 174$ cm]

147 **Voto di laurea.** Il voto di laurea conseguito dagli studenti di un certo ateneo è distribuito normalmente con media $\mu = 103$ e deviazione standard $\sigma = 6$ (per semplicità equipariamo la votazione 110 con lode a 110). Calcola la probabilità che:

a. due studenti abbiano entrambi avuto una votazione superiore a 107;
b. due studenti abbiano entrambi avuto una votazione compresa tra 100 e 105;
c. scelti due studenti a caso, uno di essi abbia avuto votazione inferiore a 100 e l'altro superiore a 102.

[**a.** $p \simeq 6{,}4\%$; **b.** $p \simeq 10{,}4\%$; **c.** $p \simeq 34{,}9\%$]

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

148 **Vero o falso?**

a. la funzione $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ è una distribuzione di probabilità V F

b. per una distribuzione binomiale con parametri $n = 600$ e $p = \frac{1}{3}$, si ha: valore medio $\mu = 200$, deviazione standard $\sigma \simeq 11{,}55$ V F

c. Sara afferma che estraendo, con reimmissione, 10 carte da un mazzo di 52, si ottengono in media da 2 a 3 carte di quadri; Silvia afferma che se ne ottengono da 3 a 4. Ha ragione Silvia V F

d. il valore medio di una distribuzione uniforme di probabilità, definita nell'intervallo [3, 10], è $\frac{91}{14}$ V F

e. in una distribuzione continua di probabilità la funzione di ripartizione è una primitiva della funzione densità di probabilità V F

f. il grafico della funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria continua deve per forza avere un asse di simmetria, che corrisponde alla retta di equazione $x = \mu$ V F

g. la curva di una distribuzione normale è tanto più stretta quanto più è piccola la varianza della distribuzione V F

Test

149 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se} -k \le x \le k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, è possibile assegnare un valore a k (con $k > 0$) in modo tale da poterla considerare una funzione densità di probabilità?

A Sì, basta assegnare a k il valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B Sì, basta assegnare a k il valore $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

C No, perché l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ non potrà mai convergere

D No, perché $2x^2 > 1$ qualunque sia il valore di x

150 Considera la variabile aleatoria X che rappresenta il valore ottenuto lanciando un dado a 20 facce su cui sono impressi i numeri da 1 a 20, nell'ipotesi che ciascuna faccia abbia la stessa probabilità di uscita. Qual è il valore medio di X?

A 10,5 B 11 C 10 D Nessuno di quelli indicati

151 Paolo, in un tiro al bersaglio, ha probabilità pari a 0,4 di fare centro e 12 lanci a disposizione. Qual è la probabilità che faccia centro esattamente 7 volte?

A Circa l'1% B Circa lo 0,1% C Circa il 10% D Circa $\frac{1}{100}$

152 In un problema di prove ripetute, con $n = 100$ e probabilità $p = \frac{1}{100}$ di avere un successo, si calcola la probabilità di ottenere 5 successi. Quale errore relativo si commette se si utilizza la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = np$ anziché quella binomiale?

A Circa il 60%

B Circa lo 0,6%

C Circa il 6%

D Non è sensato valutare l'errore perché i risultati che si ottengono sono uguali a meno della decima cifra decimale

153 In una stazione dei Vigili del Fuoco, in una certa fascia oraria si ricevono in media 4 richieste di intervento. Qual è la probabilità che in due giorni consecutivi, in quella fascia oraria, si ricevano 6 chiamate in totale?

A Circa il 6% B Circa l'1,2% C Circa il 12% D Circa il 24%

154 Una variabile aleatoria continua ha funzione densità di probabilità del tipo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1} & \text{se } -k\le x\le k, \text{con } k>0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Quanto vale k? Qual è il valore medio μ della distribuzione?

A Una funzione di questo tipo non può rappresentare una densità di probabilità

B $k=\tan\dfrac{1}{2}$, $\mu=0$

C $k=\arctan\dfrac{1}{2}$, $\mu=0$

D $k=\tan\dfrac{1}{2}$, $\mu=1$

155 Per una variabile aleatoria X distribuita normalmente si sa che $p(X>4{,}6)=0{,}00069$ e $p(X<3{,}9)=0{,}96407$. Quali sono il valore medio μ e la deviazione standard σ della distribuzione?

A $\mu=3$ e $\sigma=0{,}5$

B $\mu=4{,}25$ e $\sigma=0{,}35$

C $\mu=2{,}5$ e $\sigma=0{,}7$

D Non vi sono dati a sufficienza per determinarli

---

156 Una variabile aleatoria discreta X ha la seguente distribuzione di probabilità:

x_i	1	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	k

a. Determina k.

b. Determina il valore medio e la varianza di X.

$\left[\mathbf{a.}\ k=\frac{1}{4};\ \mathbf{b.}\ 2,\ \frac{3}{2}\right]$

157 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}k\sin x & 0\le x\le\pi\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

a. Determina per quale valore di k è una densità di probabilità di una variabile aleatoria X.

b. Traccia il grafico della funzione f, in corrispondenza del valore di k trovato.

c. Calcola la probabilità che risulti $\frac{\pi}{4}\le X\le\frac{3\pi}{4}$.

$\left[\mathbf{a.}\ k=\frac{1}{2};\ \mathbf{c.}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Argomentare e dimostrare

158 Spiega perché per nessun valore del parametro reale k la funzione

$$f(x)=\begin{cases}2-kx^3 & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

può rappresentare la densità di probabilità di una variabile aleatoria.

159 Sia X una variabile aleatoria esponenziale, di parametro λ. Calcola la probabilità che risulti:

a. $X\ge 1$ **b.** $1\le X\le 4$ **c.** $X\le 2$

$[\mathbf{a.}\ e^{-\lambda};\ \mathbf{b.}\ e^{-\lambda}-e^{-4\lambda};\ \mathbf{c.}\ 1-e^{-2\lambda}]$

160 Verifica che se una variabile aleatoria binomiale X, di parametri n e p, è tale che la sua media è uguale alla sua deviazione standard, allora $p=\dfrac{1}{n+1}$.

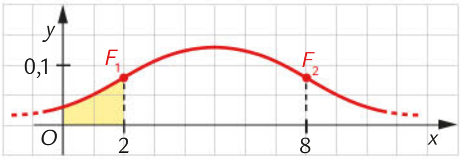
161 Una variabile aleatoria continua X ha densità esponenziale di parametro λ. Sia $a>0$; la probabilità dell'evento «X assume valori maggiori di a» è uguale alla probabilità dell'evento «X assume valori minori di a». Qual è il valore di a?

$\left[\dfrac{\ln 2}{\lambda}\right]$

ESERCIZI

Interpretazione di grafici

162 Il grafico in figura è quello di una curva gaussiana e i punti indicati ne sono i flessi. Individua i parametri μ e σ della distribuzione rappresentata e calcola l'area della regione colorata.



[$\mu = 5, \sigma = 3$; circa 0,11]

163 Due variabili aleatorie X_A e X_B, aventi distribuzione esponenziale, hanno densità rappresentate rispettivamente nelle **Figg. a** e **b**. Nella **Fig. b**, la semiretta tratteggiata è tangente al ramo del grafico con $x \geq 0$ nel suo punto d'intersezione con l'asse y.

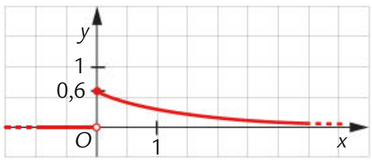


Figura a

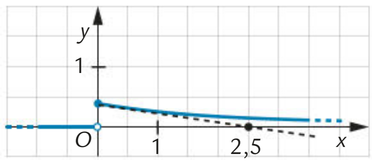


Figura b

Determina i parametri λ_A e λ_B delle due densità rappresentate, in base alle informazioni deducibili dai grafici.

[$\lambda_A = 0{,}6; \lambda_B = 0{,}4$]

164 Un'urna contiene una pallina bianca e due nere. Si estraggono successivamente dall'urna quattro palline, rimettendo dopo ciascuna estrazione la pallina estratta nell'urna.

a. Qual è la probabilità di estrarre esattamente due palline bianche?
b. Qual è la probabilità di estrarre almeno una pallina bianca?

$\left[\textbf{a. } \dfrac{8}{27}; \textbf{ b. } \dfrac{65}{81}\right]$

165 Un'urna contiene 10 palline, di cui 7 bianche e 3 nere. Si estraggono successivamente dall'urna cinque palline, rimettendo dopo ciascuna estrazione la pallina estratta nell'urna. Qual è la probabilità di estrarre 3 palline nere e 2 bianche?

$\left[\dfrac{1323}{10000}\right]$

Realtà e modelli

166 **Cinque lanci.** Un giocatore lancia un dado regolare, successivamente, per cinque volte. In ciascuno dei cinque lanci, il giocatore perde se esce «1» e vince altrimenti.

a. Qual è la probabilità che perda esattamente tre volte?
b. Qual è la probabilità che vinca esattamente quattro volte?

$\left[\textbf{a. } \dfrac{125}{3888}; \textbf{ b. } \dfrac{3125}{7776}\right]$

167 **Fare centro.** A un poligono di tiro, la probabilità che un concorrente faccia centro è 0,3. Il concorrente effettua n tiri indipendenti. Qual è il minimo numero di tiri che gli occorre effettuare per avere una probabilità superiore al 90% di fare centro almeno una volta? [7]

168 **Contagio.** Il 10% di una certa popolazione è contagiato da un virus. Si scelgono a caso 4 persone dalla popolazione. Supponendo le scelte tra loro indipendenti, qual è la probabilità che almeno due delle quattro persone siano contagiate?

$\left[\dfrac{523}{10000}\right]$

169 **Temperatura massima.** In base ai dati statistici rilevati negli anni passati, si è stabilito che la temperatura massima T in un dato giorno dell'anno in una certa località è ben interpretata da una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo [26 °C, 30 °C].

a. Determina il valore medio μ e la deviazione standard σ di T.
b. Determina la probabilità che risulti $\mu - \sigma < T < \mu + \sigma$.

$\left[\textbf{a. } \mu = 28\,°C, \sigma = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,°C; \textbf{ b. } \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

170 **Durata di un motore.** La durata di vita di un motore, espressa in ore, è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 0{,}0002$.

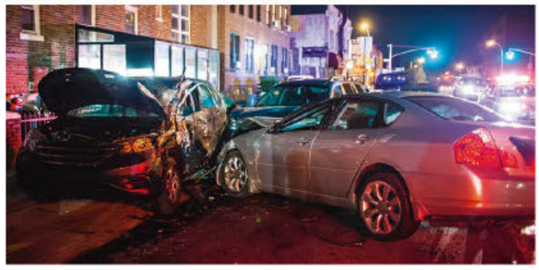
a. Qual è la durata di vita media di un motore?
b. Qual è la probabilità che il motore funzioni senza guasti per almeno 10 000 ore?

[**a.** 5000 ore; **b.** $e^{-2} \simeq 0{,}135$]

171 **Allo sportello.** Il tempo di attesa (in minuti) a uno sportello di un ufficio postale è espresso da una variabile aleatoria normale, di media $\mu = 8$ e varianza $\sigma^2 = 16$. Presentandosi a caso in quell'ufficio, qual è la probabilità di dovere attendere:

a. tra 5 e 10 minuti **b.** meno di 5 minuti **c.** più di 10 minuti. [**a.** 46,48%; **b.** 22,66%; **c.** 30,85%]

172 **Abuso di alcool.** Si sono svolte alcune analisi statistiche sugli incidenti stradali dovuti ad abuso di alcool. Si è stabilito che i conducenti delle auto coinvolte negli incidenti, aventi al massimo 40 anni, cui è stata attribuita la colpa di un incidente hanno un'età ben interpretata da una variabile aleatoria di densità:



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x^2} & 18 \le x \le 40 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

a. Determina il valore di k.

b. Scelto a caso uno dei conducenti di cui sopra, qual è la probabilità che abbia meno di 25 anni? E che abbia più di 30 anni?

$\left[\textbf{a. } k=\dfrac{360}{11}; \textbf{ b. } \dfrac{28}{55}, \dfrac{3}{11}\right]$

173 **Durata di vita.** La durata di vita, espressa in anni, di un componente elettronico (cioè il tempo che trascorre fino al primo guasto) è una variabile aleatoria esponenziale, di parametro λ.

a. La probabilità che la durata di vita del componente sia superiore a 5 anni è uguale a 0,4. Qual è il valore di λ?

b. Considerato un lotto di 10 componenti, qual è la probabilità che almeno uno di essi abbia una durata di vita superiore a 5 anni?

$\left[\textbf{a. } \dfrac{1}{5}\ln\dfrac{5}{2}; \textbf{ b. } 1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^{10}\right]$

174 **Il lampadario.** Un lampadario è formato da 4 lampadine dello stesso tipo. Il funzionamento di ogni lampadina è indipendente da quello delle altre. La durata di ciascuna lampadina (in mesi) è una variabile aleatoria distribuita esponenzialmente e la vita media di una lampadina è 8 mesi.

a. Qual è la probabilità che in un anno non occorra sostituire alcuna lampadina?

b. Qual è la probabilità che in un anno si guastino al massimo due lampadine?

$\left[\textbf{a. } e^{-6} \simeq 0{,}0025; \textbf{ b. } 6e^{-3}-8e^{-\frac{9}{2}}+3e^{-6} \simeq 0{,}22\right]$

Esercizi *più*

175 **Matematica e controllo della qualità**

Regolazione di un macchinario. Un'azienda meccanica produce sbarre d'acciaio cilindriche che, per essere conformi alle specifiche, devono avere un diametro compreso tra 2,45 cm e 2,55 cm. Il diametro di un generica sbarra prodotta si può assimilare a una variabile aleatoria normale, la cui media μ viene fissata regolando il macchinario di produzione e la cui deviazione standard è $\sigma = 0{,}02$ cm. Supponi che il macchinario venga regolato in modo che sia $\mu = 2{,}5$ cm.

a. Scelta a caso una sbarra, qual è la probabilità che non sia conforme?

b. Se la deviazione standard σ, per un difetto al macchinario, aumentasse del 50%, di quanto aumenterebbero, in percentuale, i pezzi non conformi?

c. Si sceglie a caso dalla produzione una sbarra e si verifica che il suo diametro è superiore a 2,52 cm; qual è la probabilità che non sia conforme?

Poniti ora il problema di stabilire se la regolazione del macchinario è la migliore possibile, al fine di minimizzare i pezzi non conformi.

d. Scrivi l'espressione analitica della funzione $f:[2{,}45, 2{,}55] \to \mathbf{R}$ che a ogni possibile $\mu \in [2{,}45, 2{,}55]$ associa la probabilità che un pezzo scelto a caso nella produzione non sia conforme. Determina in corrispondenza di quale μ tale funzione è minima e concludi stabilendo se il macchinario è regolato nel miglior modo possibile.

[**a.** Circa 1,24%; **b.** circa del 671%; **c.** circa 3,9%; **d.** $f(\mu)=1-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\frac{2,45-\mu}{\sigma}}^{\frac{2,55-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$, essendo $\sigma = 0{,}02$, e si ha che

$f'(\mu)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2,55-\mu}{\sigma}\right)^2}-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2,45-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]$; si verifica che la funzione f ammette minimo (assoluto) per $x = 2{,}5$:

dunque, come è intuitivo, il macchinario è stato regolato nel migliore modo possibile]

Distribuzioni di probabilità

1 **Vero o falso?**
Un'urna contiene 20 palline nere e 80 palline bianche. Si effettuano n estrazioni successive, con reimmissione. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere complessivamente estratte negli n lanci.

a. X ha una distribuzione binomiale del tipo $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ V F

b. $p(X=0) = \frac{3}{4^n}$ V F

c. $p(X<4) = 1 - p(X>4)$ V F

d. $E(X) = 0{,}75n$ V F

e. Se $n=5$, allora $p(X=3) = \frac{45}{512}$ V F

f. $p(X=2) = \frac{(n^2-n)3^{n-2}}{2^{2n+1}}$ V F

2 Un'urna contiene 10 palline: 8 bianche e 2 nere. Un giocatore estrae successivamente, con reimmissione, due palline dall'urna. Se ha estratto 2 palline bianche, guadagna 5 euro; se ha estratto due palline nere guadagna 10 euro; se ha estratto due palline di colori differenti perde 5 euro.
Sia X la variabile aleatoria che rappresenta la somma vinta o persa dal giocatore. Determina la distribuzione di probabilità e la media di X e deduci se il gioco è favorevole o sfavorevole al giocatore.

3 Si sceglie a caso un numero reale nell'intervallo [0, 4]. Determina la probabilità che sia una soluzione della disequazione $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

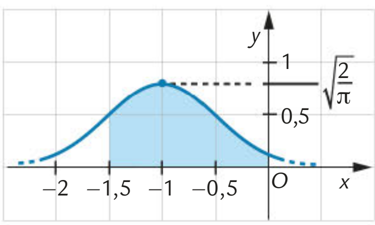
4 Il tempo di attesa T, espresso in secondi, alla cassa di un supermercato è una variabile aleatoria esponenziale, di parametro $\lambda = 0{,}01$.
a. Scrivi la funzione di densità di probabilità di T.
b. Determina il tempo medio di attesa alla cassa, espresso in minuti e secondi.
c. Determina la probabilità di dovere attendere più di 2 minuti.

5 Paolo ha promesso a Barbara di andare a trovarla tra le 4 e le 6 del pomeriggio. L'ora esatta tra le 4 e 6 in cui Paolo si presenterà da Barbara è una variabile aleatoria di densità:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx & 4 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a. Determina k.
b. Determina la probabilità che Paolo si presenti da Barbara dopo le 5.

6 In figura è rappresentata la densità di probabilità di una variabile aleatoria X distribuita normalmente. Dopo avere determinato il valore medio e la deviazione standard della variabile aleatoria X, calcola l'area della regione colorata.



7 Una macchina produce barattoli di caffè del peso dichiarato di 250 g. Il peso reale è una variabile aleatoria normale di media 250 g e deviazione standard 5 g. Le confezioni il cui peso reale si scosta per più del 4% da quello dichiarato vanno scartate. Qual è la percentuale di confezioni da scartare??

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	**Totale**
Punteggio massimo	$0{,}25 \cdot 6 = 1{,}5$	1	1	$0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$	$0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5$	1,5	2	10
Punteggio ottenuto								

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 390

Unità 6
Tema N

Inferenza statistica

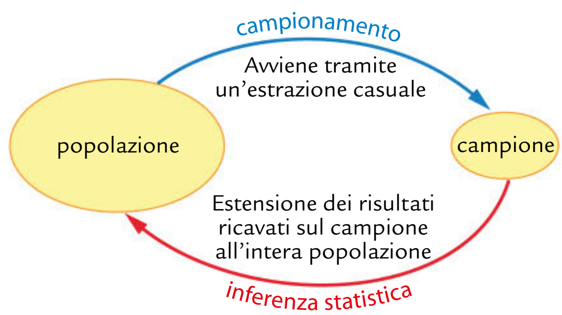
1. Introduzione alla statistica inferenziale

Che cos'è la statistica inferenziale?

Esercizi interattivi

Finora, nello studio della statistica, ci siamo posti l'obiettivo di *descrivere* le caratteristiche di un fenomeno o di una coppia di fenomeni su una data popolazione, ovvero ci siamo occupati di statistica **descrittiva**. Ora vogliamo focalizzare la nostra attenzione sulla situazione in cui la rilevazione dei dati non avviene sull'*intera popolazione*, ma solo su un *campione*, e occuparci del problema di studiare se e come sia possibile *estendere* all'intera popolazione i risultati ottenuti dalla rilevazione sul campione. La statistica **inferenziale** è la parte della statistica che studia queste problematiche.

Un punto fondamentale dell'inferenza statistica è la *scelta* del campione, che deve essere il più possibile *rappresentativo* della popolazione. Nella statistica inferenziale classica, si suppone che il campione venga scelto *casualmente*, riponendo fiducia nel fatto che la casualità giochi a favore della produzione di un campione che non abbia caratteristiche speciali e quindi si possa ritenere un'immagine abbastanza fedele dell'intera popolazione. Il processo di scelta casuale del campione viene detto **campionamento**; esso è da interpretare come un *esperimento casuale* e da affrontare, di conseguenza, con gli strumenti del calcolo della probabilità.



RIFLETTI
Con il termine *inferenza* in generale si indica un processo che porta a trarre una conclusione, a partire da certe premesse. In particolare, l'inferenza induttiva procede dal particolare al generale; l'inferenza statistica è una particolare inferenza *induttiva* (dal campione all'intera popolazione).

Gli elementi di statistica inferenziale che presenteremo nel prosieguo si basano sul tipo più semplice di campionamento: il cosiddetto campionamento **bernoulliano** (o con ripetizione). Un campione bernoulliano di n unità, estratto da una popolazione di N unità, non è altro che un campione ottenuto da n estrazioni *indipendenti*, quindi *con reimmissione* (o in blocco). Chiaramente sarebbe più naturale pensare a estrazioni *senza* reimmissione (per evitare che in un campione una stessa unità statistica venga considerata più volte); tuttavia, se N è sufficientemente grande e il rapporto $\frac{n}{N}$ è sufficientemente piccolo, è possibile dimostrare che le due tecniche di campionamento con o senza reimmissione producono risultati equivalenti. Per questo motivo, e per il fatto che in generale per un campione bernoulliano valgono proprietà più comode ai fini dei calcoli (in particolare l'indipendenza), si preferisce in pratica riferirsi allo schema **con** reimmissione.

I problemi di stima di un parametro

Consideriamo un esempio di un tipico problema di statistica inferenziale:

◆ **PROBLEMA**
Si sono osservate le lunghezze di 5 pezzi prodotti da un macchinario:

10,42 cm   10,12 cm   10,25 cm   10,34 cm   10,15 cm

Vengono dichiarati «conformi» i pezzi la cui lunghezza non supera i 10,35 cm. Qual è una stima attendibile della lunghezza media dei pezzi prodotti dal macchinario? Qual è una stima attendibile della percentuale di pezzi prodotti conformi?

Questo problema ha per oggetto la stima di due *parametri* incogniti: la *media* della lunghezza dei pezzi e la *proporzione* dei pezzi conformi. Molti problemi di statistica inferenziale hanno per oggetto proprio la *stima* di un *parametro incognito* della popolazione. Ci sono due grandi classi di metodi per stimare parametri incogniti:

a. stime puntuali;
b. stime per intervallo.

Una **stima puntuale** di un parametro ignoto è il risultato di un calcolo eseguito sui dati osservati su un *particolare* campione: il calcolo consente di ottenere un *unico* numero, stima del parametro.
La **stima per intervallo** invece consente di determinare un possibile *intervallo di valori* per il parametro incognito.
In questo e nel prossimo paragrafo ci occuperemo del problema della stima puntuale, mentre nel terzo paragrafo affronteremo quello della stima per intervallo.

La stima puntuale di una media e di una proporzione si ottengono nel modo più naturale possibile:

- la media μ della popolazione si stima tramite la media $\overline{x}$ dei dati campionari x_1, x_2, ..., x_n;
- la proporzione p della popolazione che soddisfa una data caratteristica si stima tramite la proporzione $\hat{p}$ del campione che soddisfa la caratteristica d'interesse.

ESEMPIO Stima puntuale della media e della proporzione

In riferimento al problema introdotto all'inizio di questo sottoparagrafo:

a. la stima *puntuale* $\overline{x}$ della lunghezza media dei pezzi prodotti dal macchinario si ottiene dalla media dei dati campionari, quindi è uguale a:

$$\overline{x} = \frac{10{,}42 + 10{,}12 + 10{,}25 + 10{,}34 + 10{,}15}{5} \simeq 10{,}26\,\text{cm}$$

b. la stima *puntuale* della proporzione di pezzi conformi è semplicemente il rapporto tra il numero di pezzi conformi nel campione (4 in tutto) e la numerosità del campione stesso:

$$\frac{4}{5} = 80\%$$

Un altro parametro che spesso occorre stimare è la *varianza*. In questo caso, tuttavia, le cose **non** vanno bene come per la stima della media e della proporzione; si verifica infatti che il metodo che verrebbe più naturale, cioè stimare la varianza della popolazione tramite la varianza dei dati campionari, in generale **non** è un metodo affidabile (capiremo il perché nel prossimo paragrafo). Ma che cosa ci garantisce l'affidabilità o meno di un metodo di stima puntuale? Campioni *diversi* portano a stime puntuali *diverse*, che possono essere più o meno lontane dal reale (e ignoto) valore del parametro che vogliamo stimare.
Per studiare questi aspetti, legati alla variabilità del campione, dobbiamo introdurre nuovi strumenti, in particolare il concetto di *stimatore*, cui sarà dedicato il prossimo paragrafo.

Esercizi p. 342

2. Stimatori

Un modello astratto del campionamento

Per introdurre il concetto di *stimatore* è necessario preliminarmente costruire un *modello astratto* del campionamento, basato sul fatto che l'estrazione di un campione si può assimilare a un *esperimento casuale*. Per avvicinarci a questo modello, ragioniamo anzitutto su un esempio.

ESEMPIO

Si vuole stimare la durata *media* di un certo tipo di lampadine prodotte da un'azienda.
La variabile aleatoria X che interpreta il fenomeno d'interesse è la durata della lampadina e l'oggetto dell'inferenza è la media di X. Ci concentriamo ora sulla sola fase del *campionamento*. Supponiamo di avere estratto un campione bernoulliano, di 3 lampadine, di avere valutato la durata delle singole lampadine estratte, e di avere osservato i seguenti valori:

$$\underbrace{x_1 = 1000 \text{ ore}}_{\text{durata della prima lampadina estratta}} \qquad \underbrace{x_2 = 1152 \text{ ore}}_{\text{durata della seconda lampadina estratta}} \qquad \underbrace{x_3 = 920 \text{ ore}}_{\text{durata della terza lampadina estratta}} \qquad \text{Primo campione}$$

La prima osservazione campionaria x_1 è stata di 1000 ore nel campione estratto. Se pensiamo a *tutti* i possibili campioni estraibili, ci rendiamo conto che x_1 può valere una qualunque delle possibili durate delle lampadine, cioè x_1 è uno dei possibili valori di una variabile aleatoria X_1 che può assumere tutti e soli i valori di X e con la stessa distribuzione di probabilità; brevemente si dice che X_1 è *identica e identicamente distribuita* a X. Analogamente, x_2 e x_3 sono due dei possibili valori rispettivamente di due variabili aleatorie X_2 e X_3, anch'esse identiche e identicamente distribuite a X.

OSSERVA

Nell'ipotesi assunta di campionamento bernoulliano, $X_1, X_2, ..., X_n$ sono anche *indipendenti*.

Le osservazioni fatte nell'esempio possono essere generalizzate. Indicata con X la variabile aleatoria che interpreta il fenomeno d'interesse (che in questo contesto viene talvolta chiamata **popolazione**) ed estratto un *particolare* campione di numerosità n, i valori osservati $x_1, x_2, ..., x_n$ si possono interpretare come particolari possibili valori delle variabili aleatorie $X_1, X_2, ..., X_n$ (dette **prima estrazione campionaria**, **seconda estrazione campionaria**, ..., ***n*-esima estrazione campionaria**), ciascuna delle quali è identica e identicamente distribuita a X. Si comprende dunque come sia possibile definire un modello astratto, che consente di rappresentare tutti i possibili valori osservabili al variare del campione: sarà sufficiente assimilare un **campione casuale** di dimensione n a un insieme di n variabili aleatorie $X_1, X_2, ..., X_n$, identiche e identicamente distribuite a X.
Questa formalizzazione del campionamento in termini di *variabili aleatorie* ci consentirà di effettuare delle considerazioni *teoriche* a priori (cioè *prima* di estrarre effettivamente un campione), che giustificano la bontà dei metodi di stima che introdurremo, e ci permetterà al contempo di «controllare» la variabilità campionaria tramite gli strumenti del calcolo della probabilità.

Gli stimatori

Supponiamo di essere interessati a studiare la *media* incognita di un fenomeno, interpretato dalla variabile aleatoria X. Estraiamo un *particolare* campione e indichiamo con $\bar{x}$ la stima della media di X che possiamo calcolare sulla base dei valori osservati nel campione estratto. Tale stima $\bar{x}$ della media non è altro che uno dei possibili valori della *variabile aleatoria* **media campionaria** $\overline{X}$:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

essendo $X_1, X_2, ..., X_n$ le variabili aleatorie che rappresentano un campione casuale di dimensione n. La media campionaria è un esempio di **stimatore**.

DEFINIZIONE | Stimatore e stima

Uno **stimatore** è una variabile aleatoria, funzione delle variabili aleatorie estrazioni campionarie $X_1, X_2, ..., X_n$, che viene utilizzata per stimare un determinato parametro incognito di una popolazione. Il valore assunto dallo stimatore in corrispondenza di un particolare campione viene detto **stima** del parametro incognito.

ATTENZIONE!

Utilizzeremo lettere *minuscole* per indicare le *stime* e lettere *maiuscole* per indicare i corrispondenti *stimatori*.

Riassumendo: una *stima* è un *numero* che viene calcolato sul campione *effettivamente* estratto ed è solo uno dei possibili valori del corrispondente *stimatore*; quest'ultimo è una *variabile aleatoria*, i cui valori sono tutte le possibili stime che possono ottenersi, al variare dei campioni estraibili di una prefissata numerosità.
Schematicamente, nel caso della stima della media:

possibili valori delle variabili aleatorie estrazioni campionarie
$X_1, X_2, ..., X_n$
(che rappresentano tutti i possibili campioni)

Campione	1	2	...
Elementi del campione	$x_1, x_2, ..., x_n$	$x'_1, x'_2, ..., x'_n$	...
Stima puntuale della media calcolata sul campione	$\bar{x}$	$\bar{x}'$	...

possibili valori dello stimatore media campionaria
(che rappresenta tutte le possibili stime della media
ottenibile al variare del campione)

Oltre alla media campionaria, ci occuperemo di altri due stimatori:

- la **varianza campionaria** V^2, definita da:

$$V^2 = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + ... + (X_n - \overline{X})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

- la **frequenza campionaria**, utilizzata per stimare la proporzione p (incognita) di una popolazione che soddisfa una prefissata caratteristica. Per definire tale stimatore osserviamo che in questo caso la variabile aleatoria X che interpreta il fenomeno d'interesse, detta **di Bernoulli**, ha le seguenti caratteristiche:
  – può assumere solo due valori: convenzionalmente 1 in corrispondenza dei soggetti della popolazione che possiedono la caratteristica che si sta esaminando, e 0 in corrispondenza dei soggetti che non la possiedono;
  – assume i valori 1 o 0 rispettivamente con probabilità p e $1 - p$.

  Un campione casuale $X_1, ..., X_n$ è costituito da n variabili aleatorie di Bernoulli e la loro somma, $X_1 + ... + X_n$, conta il numero complessivo di unità del campione che possiedono la caratteristica d'interesse. Infine, la variabile aleatoria:

$$\hat{F} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

  è lo stimatore *frequenza campionaria*, che rappresenta la frequenza relativa della caratteristica in esame su un generico campione casuale.

RIFLETTI

La frequenza campionaria non è altro che la *media campionaria* del campione $X_1, ..., X_n$, essendo $X_1, ..., X_n$ variabili aleatorie di Bernoulli.

Proprietà di uno stimatore e bontà dei metodi di stima puntuale

La *bontà* di un metodo di stima puntuale risiede nelle *proprietà teoriche* del corrispondente *stimatore*. Le più importanti proprietà che si richiedono a uno stimatore sono tre: la **correttezza**, la **consistenza** e l'**efficienza**:

a. uno stimatore si dice **corretto** se il suo valore medio coincide con il parametro oggetto della stima; uno stimatore non corretto viene detto **distorto**;

b. intuitivamente, uno stimatore si dice **consistente** se la sua variabilità diminuisce all'aumentare della numerosità campionaria; se uno stimatore è corretto, si dimostra che esso è consistente se e solo se la sua varianza tende a 0 al tendere a infinito della numerosità campionaria;

c. dati due stimatori corretti e consistenti di uno stesso parametro, si dice che è più **efficiente** lo stimatore la cui varianza è inferiore (in altre parole, tra due stimatori corretti e consistenti è preferibile quello la cui variabilità è minore).

ATTENZIONE!

La *correttezza* di uno stimatore garantisce che esso non è soggetto a deviazioni sistematiche rispetto al parametro da stimare, ovvero che mediamente non tende a fornire delle stime né per eccesso né per difetto.

Si può dimostrare che la *media campionaria* e la *frequenza campionaria* (in ipotesi di campionamento bernoulliano) sono stimatori corretti, consistenti e i più efficienti possibile tra tutti gli stimatori corretti della media e della proporzione. In queste buone proprietà risiede l'affidabilità dei metodi di stima puntuale della media e della proporzione basati semplicemente sul calcolo della media e della proporzione sui dati campionari. Lo stimatore *varianza campionaria* si dimostra invece essere uno stimatore *distorto* (che ha tendenza a produrre stime per *difetto*); per questo motivo, la stima della varianza della popolazione che si otterrebbe semplicemente calcolando la varianza dei dati campionari **non** sarebbe affidabile (tenderebbe a essere una *sottostima*). È tuttavia semplice correggere la distorsione della varianza; si può dimostrare infatti che per ottenere uno stimatore corretto e consistente della varianza è sufficiente dividere per $(n-1)$ anziché per n. Pertanto, una volta estratto un campione di dimensione n, si stima la varianza dell'intera popolazione mediante la cosiddetta **varianza campionaria corretta**, che indicheremo con s^2, così definita:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad [1]$$

Per il calcolo della varianza campionaria corretta sussiste anche la seguente formula *abbreviata*, equivalente alla [1] e analoga a quella già nota per la varianza:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$$

La **deviazione standard campionaria corretta** è la radice quadrata della varianza campionaria corretta.

ESEMPIO Stima puntuale della deviazione standard

Si sono osservate le lunghezze di 5 pezzi prodotti da un certo macchinario:

10,42 cm 10,12 cm 10,25 cm 10,34 cm 10,15 cm

Qual è una stima della deviazione standard della lunghezza dei pezzi prodotti?

Calcoliamo anzitutto la varianza campionaria corretta:

$$s^2 = \frac{1}{5-1}[(10{,}42)^2 + (10{,}12)^2 + (10{,}25)^2 + (10{,}34)^2 + (10{,}15)^2 - 5(10{,}256)^2] = 0{,}01593$$

Poiché $s = \sqrt{0{,}01593} \simeq 0{,}13$, una stima puntuale della deviazione standard della lunghezza dei pezzi è 0,13 cm.

SINTESI

Stime puntuali e stimatori

- Estratto un campione di numerosità n:

La stima puntuale della ...	Formula
... media, che indicheremo con $\overline{x}$, si calcola determinando la media dei dati campionari $x_1, x_1, ..., x_n$	$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$
... proporzione, che indicheremo con $\hat{p}$, si calcola determinando la proporzione del campione che soddisfa la caratteristica oggetto di studio.	$\hat{p} = \frac{f}{n}$ essendo f il numero delle unità del campione che possiede la caratteristica in esame
... varianza, che indicheremo con s^2, si calcola determinando la varianza corretta dei dati campionari.	$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$

- L'affidabilità dei metodi di stima puntuale inerenti la media e la proporzione risiede nel fatto che i corrispondenti stimatori sono corretti, consistenti e i più efficienti possibile (tra quelli corretti). Per la stima della varianza della popolazione occorre invece calcolare la varianza *corretta* dei dati campionari (perché lo stimatore varianza campionaria risulta distorto).

Si è soliti associare a una stima puntuale della media e della proporzione un *numero*, detto **errore standard**, che esprime l'errore medio che si commette sostituendo il valore del parametro ignoto con la stima calcolata su un campione di dimensione n; l'errore standard è definito, nei vari casi, come indicato nella tabella sottostante, dove σ indica la deviazione standard della popolazione:

Parametro da stimare	Stima puntuale	Errore standard (per un campionamento bernoulliano)	
Media	$\overline{x}$	Se σ è nota: errore standard $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Se σ è incognita: errore standard $= \frac{s}{\sqrt{n}}$
Proporzione	$\hat{p}$	errore standard $= \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	

Distribuzione di probabilità di uno stimatore

Per poter utilizzare gli stimatori come strumenti teorici per «controllare» la variabilità campionaria, occorre conoscerne le relative distribuzioni di probabilità. Il primo risultato, che enunciamo senza dimostrare, riguarda la media campionaria X nel caso di una popolazione normale.

PROPRIETÀ | Distribuzione della media campionaria per una popolazione normale

Consideriamo una popolazione X, avente distribuzione normale di media μ e varianza σ^2; allora la media campionaria $\overline{X}$ ha una distribuzione normale di parametri μ e $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, essendo n la dimensione del campione.

Un importante teorema (il teorema del limite centrale) su cui, per ragioni di semplicità, non possiamo soffermarci, garantisce che $\overline{X}$ ha distribuzione *approssimativamente* normale, qualsiasi sia la distribuzione della popolazione X, purché il campione sia *sufficientemente numeroso*.

TEOREMA 1 | Distribuzione approssimata della media campionaria per una popolazione qualsiasi

Consideriamo una popolazione X di media μ e deviazione standard σ; allora, se la dimensione n del campione è sufficientemente grande, la media campionaria $\overline{X}$ ha una distribuzione approssimativamente normale di media μ e deviazione standard $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Solitamente l'approssimazione si ritiene valida purché $n > 30$; pertanto possiamo scrivere simbolicamente:

$$\overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad \text{se } n > 30$$

Lo stimatore frequenza campionaria $\hat{F}$ può considerarsi una particolare media campionaria nel caso in cui la popolazione X sia una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p; poiché una tale variabile aleatoria ha media p e deviazione standard $\sqrt{p(1-p)}$, da quanto enunciato poc'anzi segue che:

$$\hat{F} \approx N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \qquad \text{se } n > 30$$

RIFLETTI

A questo punto è immediato verificare che la media campionaria e la frequenza campionaria, oltre a essere stimatori corretti, sono anche consistenti. Infatti:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p(1-p)}{n} = 0$$

Controllo di qualità

Il **Teorema 1** è fondamentale per esempio in alcuni problemi di controllo di qualità.

◆ **PROBLEMA**

Un'azienda produce sferette di un diametro dichiarato μ e deviazione standard σ ed è interessata a controllare che il diametro delle sferette sia effettivamente quello dichiarato. Sia $\overline{X}$ la variabile aleatoria che rappresenta il diametro medio delle sferette di un campione casuale di dimensione n estratto dalla produzione (con $n > 30$) e sia $I = [a, b]$ l'intervallo per cui la probabilità che $\overline{X}$ assuma valori in I è del 95%. Il criterio di controllo della qualità adottato dall'azienda è il seguente: dopo avere estratto un campione casuale di n sferette si controlla se la media $\overline{x}$ degli elementi di questo particolare campione appartiene all'intervallo I; in caso affermativo il processo sarà ritenuto in controllo, altrimenti occorrerà verificare il funzionamento dei macchinari. Entro quali limiti deve essere contenuta la misura $\overline{x}$ affinché la produzione possa ritenersi in controllo?

Per rispondere alla domanda posta dal problema dobbiamo determinare l'intervallo I. In simboli, cerchiamo un intervallo $I = [a, b]$ in modo che:

$$p(a \leq \overline{X} \leq b) = 0{,}95$$

Osserva che 95% = 0,95

È necessario ricordare (*vedi* **Unità 5**, **Paragrafo 5**) che se una variabile aleatoria X è normale di media μ e deviazione standard σ risulta:

$$p(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) = 0{,}95 \qquad [2]$$

Poiché, nelle nostre ipotesi, la media campionaria $\overline{X}$ (per il **Teorema 1**) è normale di media μ e deviazione standard $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si ottiene un intervallo I che soddisfa la condizione richiesta semplicemente sostituendo nella [2] alla variabile X la variabile $\overline{X}$ e alla media e alla deviazione standard di X quelle di $\overline{X}$; otteniamo così che:

$$p\left(\mu - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95 \qquad [3]$$

Dunque la produzione potrà ritenersi in controllo se $\overline{x} \in \left[\mu - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

In pratica, nel controllo della media μ di una variabile aleatoria X, di deviazione standard σ, si è soliti accettare che il processo sia in controllo fintantoché le medie calcolate su campioni di dimensione n appartengono all'intervallo $\left[\mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ (che corrisponde a una probabilità del 99,73%, mentre l'intervallo che compare al primo membro della [3] corrisponde al 95%).

Esercizi p. 342

3. Intervalli di confidenza

Premessa

La stima puntuale di un parametro ha il pregio della semplicità ed è sempre ottenibile a partire dai dati campionari, senza richiedere ulteriori informazioni. Tuttavia è evidente che è *molto rischiosa*, nel senso che è molto difficile avvicinarsi con *un solo* numero al vero valore del parametro incognito; inoltre ha il difetto di non fornirci strumenti in grado di «controllare» l'errore che si commette tramite la stima. Per questi motivi è più interessante ricavare un *intervallo* di possibili valori per il parametro incognito, da determinarsi in base a un prefissato grado di fiducia di *fare bene*, cioè di costruire un intervallo che contenga effettivamente l'ignoto valore del parametro: in ciò consiste un procedimento di **stima per intervallo**. Il metodo di stima per intervallo che introduciamo in questo paragrafo è quello più noto e utilizzato: esso consiste nella costruzione dei cosiddetti **intervalli di confidenza**.

Per la costruzione di tali intervalli faremo spesso ricorso alla *distribuzione normale*, introdotta nell'**Unità 5**.
In particolare, data una variabile aleatoria Z normale standard, in molti problemi di statistica inferenziale saremo interessati a determinare il valore z_k a sinistra del quale l'area sotto il grafico della densità di Z risulta uguale a k (**Fig. 1**). In altre parole, cerchiamo il valore z_k per cui risulta:

$$p(Z \leq z_k) = k$$

Il valore z_k si dice **quantile** di ordine k della normale standard.

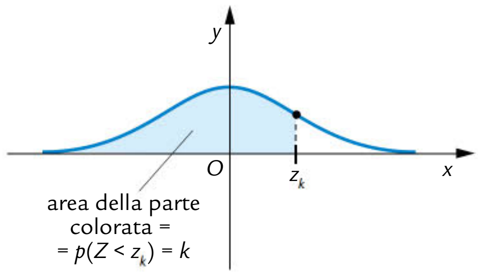


Figura 1

OSSERVA
Ricordando che si indica con $\Phi(z)$ la funzione di ripartizione della normale standard, così definita:

$$\Phi(z) = p(Z \leq z)$$

la relazione

$$p(Z \leq z_k) = k$$

si può scrivere in modo equivalente nella forma:

$$\Phi(z_k) = k$$

Pertanto, si può anche scrivere che

$$z_k = \Phi^{-1}(k)$$

I quantili di uso più comune, ricavabili per esempio con un calcolatore, sono riportati nella seguente tabella.

Tabella 1

k	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,99995	0,999995
z_k	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	3,891	4,417

Intervallo di confidenza per la stima di una media di una popolazione normale, di cui è nota la varianza

Il problema che ci poniamo è il seguente:

◆ **PROBLEMA**
Data una popolazione normale X, di media *incognita* μ e varianza *nota* σ^2, estraiamo un campione di numerosità n e determiniamo la stima $\bar{x}$ della media calcolata sul campione. È possibile determinare un intervallo centrato in $\bar{x}$ che contenga μ con un prefissato grado di fiducia?

Il grado di fiducia si chiama **livello di confidenza**, mentre il massimo rischio di sbagliare che siamo disposti ad accettare si chiama **livello di significatività** e si indica solitamente con la lettera α. Per fissare le idee, in questa discussione preliminare fissiamo $\mu = 5\%$, ovvero ci proponiamo di costruire un **intervallo di confidenza** al livello del 95%. Osserva che il problema che ci stiamo ponendo è l'«inverso» di quello che ci siamo posti alla fine del precedente paragrafo a proposito del controllo della qualità. In quell'occasione abbiamo supposto che μ fosse *nota* e abbiamo cercato un intervallo I entro cui può fluttuare la media *campionaria* $\overline{X}$ con una probabilità del 95%, mentre ora μ è incognita e stiamo cercando un intervallo entro cui può variare con una confidenza del 95% (**Fig. 2**).

MODI DI DIRE
L'espressione «intervallo di fiducia» è sinonimo di «intervallo di confidenza».

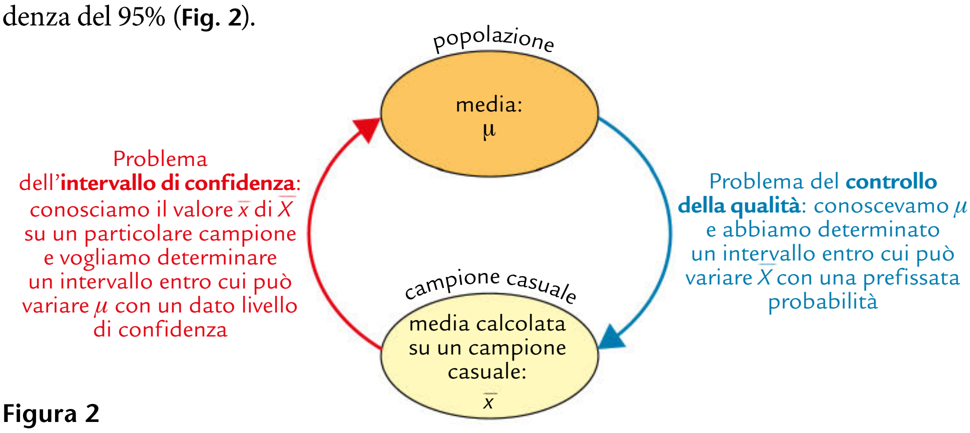


Figura 2

Per risolvere il problema dell'intervallo di confidenza, partiamo ancora dalla relazione [3] ottenuta nel **Paragrafo 2**: $p\left(\mu-1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\overline{X}\leq\mu+1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0{,}95$ ma risolviamo la doppia disequazione rispetto a μ (dal momento che ora l'obiettivo è trovare un intervallo di fluttuazione di μ). Otteniamo:

$$p\left(\overline{X}-1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\overline{X}+1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0{,}95$$

Ciò significa che la *probabilità* che l'intervallo:

$$\left[\overline{X}-1{,}96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+1{,}96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

contenga il valore μ del parametro incognito è uguale al 95%. È questa la garanzia probabilistica *a priori* (cioè *prima* di estrarre effettivamente il campione) dell'affidabilità della stima intervallare che stiamo per costruire.
Dopo avere estratto un *particolare* campione casuale e determinata la stima puntuale $\overline{x}$ della media in base ai dati osservati, diremo di essere *confidenti* al 95% che sia:

$$\overline{x}-1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\overline{x}+1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Un intervallo di confidenza al 95% per μ risulta perciò:

$$\left[\overline{x}-1{,}96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+1{,}96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \qquad [4]$$

ATTENZIONE!

Abbiamo detto che siamo *confidenti* al 95% che l'intervallo [4] contenga il vero valore di μ, non che la *probabilità* che μ cada in tale intervallo è del 95%. Quest'ultimo modo di esprimersi non sarebbe corretto, in quanto *nessuna* delle quantità che compaiono nell'intervallo [4] è una variabile aleatoria: né σ, né *n*, né $\overline{x}$. La locuzione «intervallo di confidenza» va piuttosto interpretata come segue: sebbene l'intervallo [4] dipenda dalla stima puntuale $\overline{x}$ e quindi dal campione estratto, il modo in cui l'abbiamo costruito garantisce che, se eseguissimo un gran numero di campionamenti, all'incirca il 95% dei campioni darebbe luogo a intervalli di confidenza contenenti il vero valore incognito μ.

Il ragionamento condotto nel precedente esempio si può *generalizzare*, ai fini di determinare un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$. Il numero $1-\alpha$ rappresenta la probabilità che, scelto un campione casuale, i dati osservati su di esso producano una stima intervallare che contiene μ. Il ragionamento per costruire l'intervallo di confidenza è il medesimo visto nel caso $1-\alpha=95\%$, con l'unica differenza che ora occorre determinare *k* in modo che risulti:

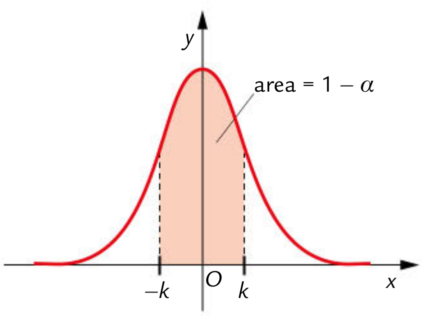
$$p\left(\mu-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\overline{X}\leq\mu+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha \qquad [5]$$

(nel caso $1-\alpha=0{,}95$ sapevamo che $k=1{,}96$). La relazione [5] equivale a:

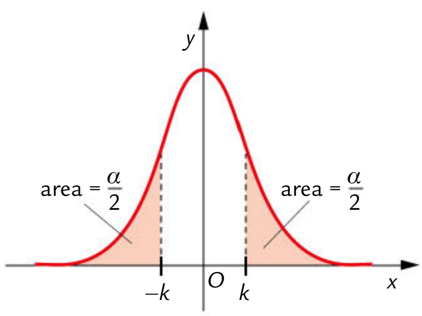
$$p\left(-k\leq\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leq k\right)=1-\alpha$$

$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ **ha distribuzione normale standard**

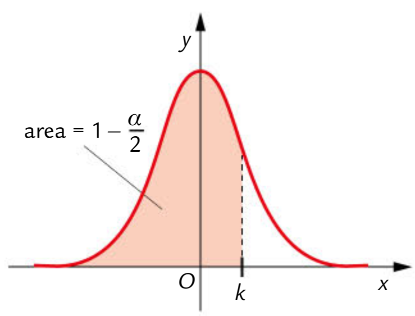
quindi si tratta di determinare *k* in modo che: $p(-k\leq Z\leq k)=1-\alpha$
Ragionando come illustrato nelle didascalie della **Fig. 3**, si giunge a concludere che $k=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.



a. Vogliamo determinare *k* in modo che $p(-k\leq Z\leq k)=1-\alpha$. Ciò equivale a richiedere che l'area sottesa alla normale standard nell'intervallo $[-k, k]$ sia uguale a $1-\alpha$.



b. Poiché la normale standard è simmetrica rispetto all'asse *y* e l'area sottesa al suo grafico è complessivamente uguale a 1, la condizione espressa al punto a è verificata se e solo se le aree sottese alle due «code» sono ciascuna uguale ad $\frac{\alpha}{2}$.



c. Ne segue che l'area sottesa alla normale standard, a sinistra di *k*, deve essere uguale a $(1-\alpha)+\frac{\alpha}{2}=1-\frac{\alpha}{2}$. Dunque *k* deve essere il quantile della normale standard di ordine $1-\frac{\alpha}{2}$, ovvero $k=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Figura 3

Se ne deduce il seguente teorema.

TEOREMA 2 | Intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale (varianza nota)

Sia X una variabile aleatoria normale, di media incognita μ e varianza nota σ^2. L'intervallo di confidenza al livello $1-\alpha$ per la media μ è:

$$\left[\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \qquad [6]$$

essendo:

- n la dimensione del campione;
- $\overline{x}$ la stima puntuale della media μ calcolata sul campione;
- $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ il quantile della normale standard di ordine $1-\dfrac{\alpha}{2}$.

È facile ricavare (tenendo conto della **Tab. 2** dei quantili riportata all'inizio del paragrafo) i valori di $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ corrispondenti ai più frequenti livelli di confidenza:

Tabella 2

Livello di confidenza $1-\alpha$	90%	95%	99%
$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	1,645	1,960	2,576

PER COMPRENDERE MEGLIO

Per esempio, se $1-\alpha = 90\% = 0{,}9$, quindi $\alpha = 0{,}1$, risulta $1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-\dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}95$ e dalla tabella dei quantili si deduce che $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}95} = 1{,}645$.

ESEMPIO Stima intervallare per una media, nota la varianza

Si sono osservate le lunghezze di 5 pezzi prodotti da un certo macchinario:

10,42 cm 10,12 cm 10,25 cm 10,34 cm 10,15 cm

È noto che la precisione del macchinario, ossia la deviazione standard della lunghezza dei pezzi, è 0,1 cm. Supponendo che la lunghezza dei pezzi abbia una distribuzione normale, determiniamo un intervallo di confidenza al 95% per la lunghezza media dei pezzi prodotti.

Per costruire la stima richiesta in base alla [6] ci occorrono $\overline{x}$, n, σ e $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$:

- la stima puntuale $\overline{x}$ della lunghezza media è stata calcolata nell'esempio del **Paragrafo 1**; abbiamo visto che $\overline{x} \simeq 10{,}26$ cm;
- il campione è costituito da $n = 5$ pezzi;
- il valore di σ è noto, uguale a 0,1 cm;
- essendo richiesto un livello di confidenza $1-\alpha = 95\%$ risulta (*vedi* la **Tab. 2**):

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

Pertanto l'intervallo di confidenza richiesto è:

$$\left[\underbrace{10{,}26}_{\overline{x}} - \underbrace{1{,}96}_{z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{5}},\ \underbrace{10{,}26}_{\overline{x}} + \underbrace{1{,}96}_{z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{5}}\right]$$

ossia circa:

$[10{,}16,\ 10{,}35]$ **Vedi nota qui a fianco**

Ciò significa che, a un livello di confidenza del 95%, possiamo ritenere che la lunghezza media dei pezzi prodotti sia compresa tra 10,16 cm e 10,35 cm (estremi inclusi).

ATTENZIONE!

Nell'eseguire i calcoli per determinare un intervallo di confidenza è bene approssimare l'estremo inferiore dell'intervallo per *difetto* e l'estremo superiore per *eccesso*, in modo da essere certi di ottenere un intervallo di confidenza approssimato che *contiene* quello esatto. D'ora in avanti, per approssimare gli estremi di un intervallo di confidenza procederemo in questo modo.

È importante fare alcune osservazioni.

a. L'intervallo di confidenza [6] può essere espresso anche nella forma:

$$\overline{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Il termine:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

indica l'*errore massimo* che si commette stimando μ con $\overline{x}$ (nell'ipotesi in cui confidiamo, al livello $1-\alpha$, che μ appartenga effettivamente all'intervallo di confidenza stabilito).

b. L'*ampiezza* dell'intervallo di confidenza è uguale a:

$$2z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad [7]$$

e definisce la *precisione* della stima, nel senso che un intervallo di confidenza è tanto più preciso quanto più è «stretto» e tanto più impreciso quanto più è «largo». Dalla [7] appare chiaro che la precisione della stima dipende da tre elementi: il livello di confidenza $1-\alpha$, la dimensione n del campione e la deviazione standard σ. Quest'ultima è una quantità fissata, mentre il livello di confidenza e la dimensione del campione possono essere scelti a piacere. A parità di livello di confidenza, aumentare la dimensione del campione fa diminuire l'ampiezza dell'intervallo di confidenza, quindi *migliora* la precisione della stima. Viceversa, a parità di dimensione del campione, aumentare il livello di confidenza porta a un aumento del valore di $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ e quindi dell'ampiezza dell'intervallo di confidenza, *peggiorando* la precisione della stima.
Si può perciò comprendere il motivo per cui **non** è una buona idea fissare un livello di confidenza prossimo a 1 (per esempio a 0,999, in modo da garantirci quasi con certezza che l'intervallo di confidenza corrispondente al campione estratto contenga effettivamente il parametro da stimare): così facendo aumenterebbe l'ampiezza dell'intervallo, in modo da contenere praticamente tutti i valori possibili, e l'informazione fornita dall'intervallo di confidenza non sarebbe più significativa.

Intervallo di confidenza per la stima di una media di una popolazione normale, di cui non è nota la varianza

Non sempre l'ipotesi che sia nota la *varianza* della popolazione è *sufficientemente realistica* (non conosciamo la media, difficilmente saremo in grado di stabilire la varianza!). Consideriamo dunque il caso in cui X sia una variabile aleatoria normale di media μ e varianza σ^2, *entrambe incognite*. Il procedimento per la costruzione di un intervallo di confidenza per la media è del tutto simile al precedente, ma con un'importante differenza. Poiché la varianza **non** è nota, è necessario stimarla tramite la *varianza campionaria corretta* s^2. La sostituzione, nella media campionaria standardizzata, di σ con s ha come conseguenza che la variabile aleatoria:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

MODI DI DIRE

L'espressione t-Student si legge «t di Student» o «distribuzione di Student».

non ha più distribuzione normale standard, ma ha una particolare distribuzione detta **t-Student con $n-1$ gradi di libertà**, che indicheremo con il simbolo T_{n-1} e che dipende dalla numerosità del campione. Si tratta di una distribuzione simile alla normale standard, ma con «code» che sottendono un'area maggiore (*vedi* la **Fig. 4**, in cui abbiamo riportato i grafici della densità in corrispondenza di alcuni valori di n).

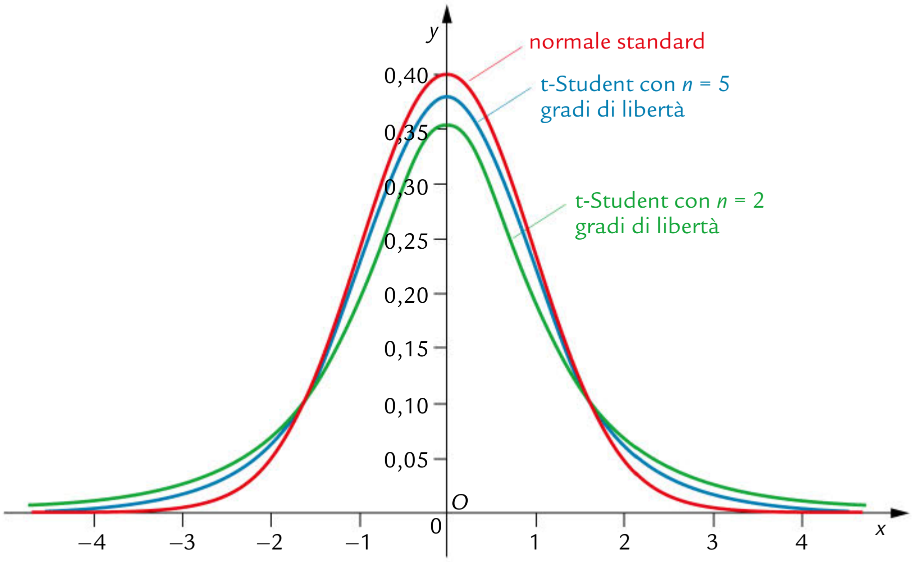


Figura 4

Come puoi intuire dalla figura, la distribuzione della t-Student tende, al crescere di n, ad approssimare sempre di più quella della normale standard.

Indicato con $t_k(n)$ il quantile di ordine k della t-Student con n gradi di libertà, ossia il valore $t_k(n)$ per cui $p(T_n \leq t_k(n)) = k$, l'espressione dell'intervallo di confidenza per la media risulta del tutto simile al caso in cui era nota la varianza.

TEOREMA 3 | Intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale (varianza incognita)

Sia X una variabile aleatoria normale, di media μ e varianza σ^2, entrambe incognite. L'intervallo di confidenza al livello $1-\alpha$ per la media μ è:

$$\left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \qquad [8]$$

essendo:

- n la dimensione del campione;
- $\bar{x}$ la stima puntuale della media μ calcolata sul campione;
- s la deviazione standard dedotta dalla varianza campionaria corretta;
- $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ il quantile di ordine $1-\frac{\alpha}{2}$ della t-Student con $n-1$ gradi di libertà.

I quantili della t-Student, in corrispondenza dei livelli di confidenza più utilizzati, sono riportati in **Tab. 3**.

Come puoi osservare, i valori riportati in tabella sono completi fino a $n = 30$, sono riportati solo in corrispondenza di multipli di 10 per $30 \leq n \leq 120$ e non sono riportati oltre $n = 120$. Per il calcolo dei quantili corrispondenti ai gradi di libertà compresi fra 30 e 120 che non sono multipli di 10 (se non si dispone di un computer) si può procedere con il metodo di interpolazione lineare (vedi la nota a fianco); per $n > 120$, invece, la distribuzione t-Student è molto bene approssimata dalla normale standard, per cui in tal caso si approssima l'intervallo di confidenza [8] utilizzando i quantili della normale standard:

$$\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \qquad [9]$$

INTERPOLAZIONE LINEARE

Per esempio, per calcolare il quantile di ordine $k = 0{,}95$ nel caso di $n = 83$ gradi di libertà, possiamo scrivere l'equazione $y = mx + q$ della retta che passa per i due punti di coordinate $(80,\ t_{0{,}95}(80))$ e $(90,\ t_{0{,}95}(90))$, quindi calcolare il valore di y per $x = 83$.

Tabella 3

Tavola dei quantili della distribuzione t-Student avente *n* gradi di libertà, con $1 \leq n \leq 120$					
Gradi di libertà (*n*)	**Ordine del quantile**				
	0,9	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
1	3,0777	6,3137	12,7062	31,8210	63,6559
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408
4	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768
15	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045
50	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603
70	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479
80	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387
90	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316
100	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259
110	1,2893	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213
120	1,2886	1,6576	1,9799	2,3578	2,6174

Per esempio, all'incrocio della riga $n = 10$ e della colonna relativa al valore 0,95 possiamo leggere che il quantile di ordine $k = 0,95$ della t-Student con 10 gradi di libertà è 1,8125. Ciò significa che:

$$p(T_{10} \leq 1{,}8125) = 0{,}95$$

ESEMPIO Stima intervallare per una media, nel caso di varianza incognita

Si sono osservate le lunghezze di 5 pezzi prodotti da un certo macchinario:

10,42 cm 10,12 cm 10,25 cm 10,34 cm 10,15 cm

Supponendo che la lunghezza dei pezzi abbia una distribuzione normale, determiniamo un intervallo di confidenza al 95% per la lunghezza media dei pezzi prodotti.

Per costruire la stima richiesta in base alla [8] ci occorrono $\overline{x}$, n, s e $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$:

- la stima puntuale $\overline{x}$ della lunghezza media è stata calcolata nell'esempio del **Paragrafo 1**; abbiamo visto che $\overline{x} \simeq 10{,}26$ cm;
- il campione è costituito da $n = 5$ pezzi;
- anche la stima puntuale s della deviazione standard è stata calcolata in uno degli esempi precedenti, ottenendo $s \simeq 0{,}13$;
- poiché l'esercizio richiede un livello di confidenza $1 - \alpha = 95\% = 0{,}95$, ossia $\alpha = 0{,}05$, risulta:
$$1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0{,}05}{2}=0{,}975$$
e dalla tabella dei quantili della t-Student si deduce che:
$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)=t_{0{,}975}(4)=2{,}7765$$

Pertanto l'intervallo di confidenza richiesto è:

$$\left[\underbrace{10{,}26}_{\overline{x}}-\underbrace{2{,}7765}_{t_{0{,}975}(4)}\cdot\frac{0{,}13}{\sqrt{5}},\ \underbrace{10{,}26}_{\overline{x}}+\underbrace{2{,}7765}_{t_{0{,}975}(4)}\cdot\frac{0{,}13}{\sqrt{5}}\right]$$

ossia circa:

[10,09, 10,43]

Ciò significa che, a un livello di confidenza del 95%, possiamo ritenere che la lunghezza media dei pezzi prodotti sia compresa tra 10,09 cm e 10,43 cm (estremi inclusi).

OSSERVA

Rispetto allo stesso esempio, risolto nel sottoparagrafo precedente nel caso in cui era nota la deviazione standard, abbiamo ottenuto un intervallo di confidenza di ampiezza maggiore. In generale risulta $t_{1-\frac{\alpha}{2}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ e ciò porta come conseguenza che l'ampiezza dell'intervallo di confidenza è generalmente maggiore nel caso di varianza incognita. È questo il «prezzo da pagare» conseguente al fatto di avere minori informazioni.

Intervallo di confidenza per la stima della media nel caso di una popolazione non normale

Gli enunciati dei **Teoremi 2** e **3** richiedono che X abbia una distribuzione *normale*; tuttavia, il **teorema del limite centrale** (cui abbiamo accennato nel **Paragrafo 2**) garantisce che gli intervalli [6] (nel caso di varianza nota), [8] e [9] (nel caso di varianza incognita) forniscono comunque una buona *approssimazione* dell'intervallo esatto di confidenza anche nel caso in cui **non** sia nota la distribuzione di X (oppure sia nota ma non sia normale) purché il campione sia *sufficientemente numeroso*: in genere l'approssimazione è buona, quindi si possono continuare a utilizzare gli intervalli [6], [8] e [9], per una dimensione campionaria $n > 30$.

RIFLETTI

La costruzione di un intervallo di confidenza richiede sempre maggiori informazioni rispetto a una stima puntuale: se non è nota la distribuzione di X occorre avere *molti* dati (in modo da potersi appellare al teorema del limite centrale).

Intervallo di confidenza per la proporzione

Consideriamo il seguente problema.

◆ **PROBLEMA**

In occasione delle prossime elezioni, un partito A ha commissionato un sondaggio, effettuato su un campione di 1000 elettori; dai risultati del sondaggio è emerso che il 20% dei componenti del campione voteranno per quel partito. Come possiamo determinare un intervallo di confidenza al 95% per la percentuale di elettori dell'intera popolazione che voteranno per il partito A?

Questo problema è un esempio di una vasta classe di problemi che si incontrano nella pratica, ovvero stimare la proporzione p della popolazione complessiva che soddisfa una determinata caratteristica a partire dalla proporzione ottenuta su un campione di n individui. Così come per la costruzione di un intervallo di confidenza per la media è stato essenziale conoscere la distribuzione dello stimatore corrispondente, ossia della media campionaria, analogamente per la costruzione di un intervallo di confidenza per la proporzione occorre conoscere la distribuzione dello stimatore frequenza campionaria $\hat{P}$. Ricordando che se n è *sufficientemente numeroso*, allora $\hat{P}$ ha distribuzione *approssimativamente* normale di media p e deviazione standard $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ (*vedi* il **Paragrafo 2**), si può costruire un intervallo di confidenza (approssimato) per p, procedendo in modo del tutto simile a quanto visto per la media (nel caso di varianza nota). Si ottiene il seguente risultato.

TEOREMA 4 | Intervallo di confidenza per la proporzione

L'intervallo di confidenza al livello $1-\alpha$ per la proporzione p, nel caso di un campione bernoulliano sufficientemente numeroso, è approssimativamente:

$$\left[\hat{p}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] \qquad [10]$$

essendo

- $\hat{p}$ la stima puntuale della proporzione calcolata sul campione;
- n la dimensione del campione;
- $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ il quantile della normale standard di ordine $1-\dfrac{\alpha}{2}$.

La richiesta che il campione sia *sufficientemente numeroso* dipende dal fatto che solo sotto questa ipotesi l'approssimazione che viene utilizzata è valida; nella pratica si considera il campione sufficientemente numeroso (quindi la [10] può essere utilizzata) se sono verificate le condizioni:

$$n\hat{p}>5 \qquad \text{e} \qquad n(1-\hat{p})>5 \qquad [11]$$

Condizioni di validità della [10]

ESEMPIO Stima intervallare per una proporzione

Si effettua un controllo su 200 pezzi prodotti da una macchina e si trova che 16 di essi non sono conformi alle norme dichiarate. Costruiamo un intervallo di confidenza al livello del 90% per la percentuale di pezzi prodotti non conformi.

Per costruire la stima richiesta, in base alla [10], ci occorrono $\hat{p}$, n e $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$:

- la stima puntuale $\hat{p}$ della percentuale di pezzi non conformi dedotta dal campione è:

$$\frac{16}{200}=\frac{8}{100}=0{,}08=8\%$$

- Il campione è costituito da $n=200$ pezzi;
- Poiché l'esercizio richiede un livello di confidenza $1-\alpha=90\%$, in base alla **Tab. 3**:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1{,}645$$

Essendo:

$$n\hat{p}=200\cdot\frac{8}{100}=16>5$$

$$n(1-\hat{p})=200\cdot\left(1-\frac{8}{100}\right)=184>5$$

sono soddisfatte le condizioni per potere applicare la [10].

Pertanto l'intervallo di confidenza richiesto è:

$$\left[\underbrace{0{,}08}_{\hat{p}}-\underbrace{1{,}645}_{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{0{,}08(1-0{,}08)}{200}},\ \underbrace{0{,}08}_{\hat{p}}+\underbrace{1{,}645}_{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{0{,}08(1-0{,}08)}{200}}\right]$$

ossia circa:

[0,048, 0,112]

Ciò significa che, a un livello di confidenza del 90%, possiamo ritenere la percentuale dei prodotti non conformi compresa tra il 4,8% e l'11,2% (estremi inclusi).

L'intervallo di confidenza [10] può anche essere scritto nella forma:

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

L'ampiezza dell'intervallo è:

$$2z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Poiché sappiamo che in ogni caso è $0 \le \hat{p} \le 1$, analizzando il grafico della parabola di equazione $y = x(1-x)$ con $0 \le x \le 1$ (**Fig. 5**) si deduce che è sempre $\hat{p}(1-\hat{p}) \le \frac{1}{4}$. Dunque risulterà sempre:

$$\underbrace{2z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}_{\text{ampiezza dell'intervallo di confidenza della proporzione}} \le 2z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4n}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

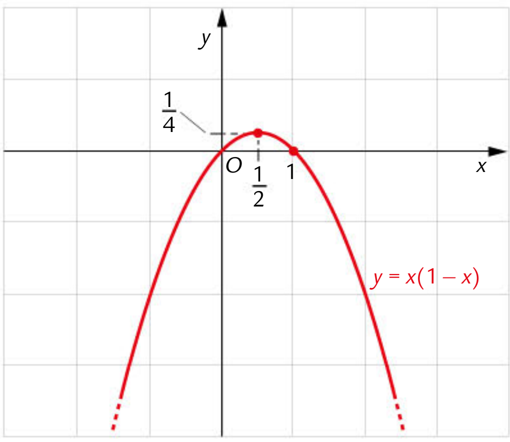


Figura 5

Fissato α, è possibile determinare la minima dimensione n del campione in modo da ottenere una prefissata precisione, cioè un intervallo di confidenza di ampiezza minore o uguale a un dato numero k; basta infatti determinare il minimo intero positivo n che soddisfa la disequazione $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \le k$, cioè:

$$n \ge \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{k}\right)^2 \qquad [12]$$

Quando n o $\hat{p}$ **non** sono specificati dal problema (come nel caso appena esaminato in cui n è da *determinare*), non è possibile verificare a priori se sono soddisfatte le condizioni [11]. In questi casi converremo per semplicità che il campione sia sufficientemente numeroso perché la [10], e quindi anche la [12] che da essa deriva, siano valide; ciò consente di utilizzare la [12] conoscendo soltanto il livello di significatività α e la precisione k, anche quando n e $\hat{p}$ **non** sono note.

COLLEGHIAMO I CONCETTI **La struttura degli intervalli di confidenza**

Riflettendo sugli intervalli di confidenza che abbiamo trovato:

$$\underbrace{\overline{x}}_{\text{stima puntuale}} \pm \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{\text{quantile}} \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\substack{\text{errore standard}\\\text{associato alla stima}}} ; \quad \underbrace{\overline{x}}_{\text{stima puntuale}} \pm \underbrace{t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}_{\text{quantile}} \underbrace{\frac{s}{\sqrt{n}}}_{\substack{\text{errore standard}\\\text{associato alla stima}}} ; \quad \underbrace{\hat{p}}_{\text{stima puntuale}} \pm \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{\text{quantile}} \underbrace{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}_{\substack{\text{errore standard}\\\text{associato alla stima}}}$$

possiamo osservare che hanno tutti la stessa struttura:

$$\boxed{\text{stima puntuale del parametro}} \pm \boxed{\text{numero opportuno (quantile)} \times \text{errore standard associato alla stima puntuale}}$$

Un intervallo di confidenza è dunque un intervallo centrato nella stima puntuale del parametro d'interesse, la cui semiampiezza è «multipla» dell'errore standard secondo l'opportuno quantile legato al livello di confidenza fissato.

Esercizi p. 347

4. Test statistici per la verifica di ipotesi

I concetti di base

In questo paragrafo, con cui concludiamo il nostro breve percorso alla scoperta dell'inferenza statistica, introduciamo la seconda grande classe di metodi di inferenza dopo gli *intervalli di confidenza*: la **verifica di ipotesi** mediante i **test statistici**. Anziché utilizzare i dati campionari per determinare un intervallo al quale confidiamo che appartenga l'ignoto valore di un parametro da stimare secondo un certo livello di confidenza, supponiamo ora di avere formulato un'*ipotesi* (una *congettura*) sul parametro e di volere utilizzare i dati campionari per stabilire se possiamo ragionevolmente *accettare* o *rifiutare* tale ipotesi. Un *test statistico* consiste in una procedura atta a prendere questa decisione. Vediamo dunque quali sono gli elementi fondamentali di un test statistico.

1. Le ipotesi e gli errori

L'ipotesi che si vuole sottoporre a verifica viene detta **ipotesi nulla** ed è indicata convenzionalmente con il simbolo H_0. All'ipotesi nulla si contrappone l'**ipotesi alternativa** H_1, che viene accettata quando si rigetta l'ipotesi nulla.

ESEMPIO Ipotesi nulla e ipotesi alternativa

Un gruppo di donne viene sottoposto a terapia con un farmaco che si ipotizza possa fare alzare la pressione diastolica. In donne sane nella medesima fascia di età la pressione diastolica è uguale a 74,4 mmHg. Considerato un campione casuale di 50 donne sottoposte alla terapia, si trova che esse hanno una pressione diastolica media uguale a 84 mmHg.
Come si possono scegliere le ipotesi di un test per stabilire, in base ai dati campionari, se la congettura sugli effetti del farmaco è fondata?

Possiamo assumere come *ipotesi nulla* H_0 l'ipotesi che il farmaco non influisca sulla pressione diastolica dei pazienti (ovvero che la pressione media delle pazienti resti uguale a quella standard) e come ipotesi *alternativa* H_1 quella che il farmaco tenda a fare alzare la pressione diastolica (ovvero che la pressione media delle pazienti risulti superiore a quella standard). Se indichiamo con μ la pressione media delle pazienti, possiamo formalizzare l'ipotesi nulla e quella alternativa come segue:

$$H_0: \mu = 74{,}4 \qquad H_1: \mu > 74{,}4$$

È bene osservare fin d'ora che la scelta dell'ipotesi nulla e dell'ipotesi alternativa **non** è unica; capiremo meglio tra poco qual è il criterio che deve guidare nella scelta.

Poiché un test statistico si basa su dati campionari, è sempre insito in qualunque test un certo margine di *incertezza*: quando un test porta a *rifiutare* l'ipotesi nulla, ciò **non** significa necessariamente che H_0 è falsa, ma soltanto che i dati campionari non supportano sufficientemente H_0; analogamente, quando un test porta ad *accettare* l'ipotesi nulla, ciò **non** significa necessariamente che H_0 sia vera, ma soltanto che i dati campionari sono consistenti con l'ipotesi nulla e la suffragano.
Nell'accettare o nel rifiutare H_0 è quindi sempre insita la possibilità di commettere un *errore*. I casi che possono presentarsi sono quelli riassunti in **Tab. 4**.

Tabella 4

Realtà / Decisione	H_0 è vera	H_0 è falsa
Rifiutiamo H_0	Commettiamo un errore, detto del **primo tipo**	Decidiamo correttamente
Accettiamo H_0	Decidiamo correttamente	Commettiamo un errore, detto del **secondo tipo**

Un test «ideale» dovrebbe minimizzare *entrambi* gli errori, sia quelli del primo tipo, sia quelli del secondo tipo. Ciò però non è possibile, in quanto si può dimostrare che, decrescendo l'errore del primo tipo, aumenta quello del secondo tipo, e viceversa.
Occorre quindi scegliere quale dei due tipi di errore «tenere sotto controllo». Per comprendere meglio la situazione, è utile ricorrere a una analogia. Possiamo paragonare lo svolgimento di un test da parte di uno statistico allo svolgimento di un processo da parte di un giudice. Il giudice deve vagliare le due ipotesi:

H_0: l'imputato è innocente $\qquad$ H_1: l'imputato è colpevole

Commettere un errore del *primo* tipo significa «condannare un innocente», mentre commettere un errore del *secondo* tipo significa «assolvere un colpevole», e il primo tipo di errore si considera *più grave* del secondo. Questo principio si estende ai test statistici, per cui la scelta che viene adottata è quella di tenere sotto controllo l'*errore del primo tipo*. In altre parole, colui che costruisce il test deve *scegliere* le due ipotesi in modo che l'ipotesi nulla sia il presupposto che considera «vero fino a prova contraria» e perciò, dal suo punto di vista, sia più grave commettere l'errore del primo tipo che quello del secondo. Il giudizio su quale errore sia più grave commettere dipende comunque dal *punto di vista* di chi costruisce il test, come messo in luce dal seguente esempio.

ATTENZIONE!
La scelta delle ipotesi è particolarmente importante, in quanto il ruolo di H_0 e di H_1 non è simmetrico: scambiare le due ipotesi significa fare due test diversi, che possono portare a esiti differenti!

ESEMPIO Scelta del sistema di ipotesi

Il contenuto dichiarato dei barattoli di marmellata di un certo tipo è 250 g. Supponiamo di estrarre un campione di barattoli e di volere verificare l'ipotesi che i barattoli contengano effettivamente 250 g. Come possiamo scegliere l'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa?

a. Se ci poniamo dal punto di vista di un acquirente, che ha interesse a non comprare barattoli contenenti meno marmellata di quanto dichiarato, nell'impostare il test dobbiamo scegliere:

$$H_0: \mu < 250 \qquad H_1: \mu \geq 250$$

Così facendo infatti l'errore del *primo tipo* (che è quello che il test è in grado di tenere sotto controllo) corrisponde proprio a ciò che il consumatore maggiormente vuole evitare, e cioè «considerare la quantità contenuta corretta, quando invece è minore di quanto dichiarato».

b. Se ci poniamo dal punto di vista del produttore, che ha interesse a non vendere barattoli contenenti una quantità di marmellata superiore a quanto dichiarato, nell'impostare il test dobbiamo scegliere:

$$H_0: \mu > 250 \qquad H_1: \mu \leq 250$$

Così facendo, infatti, l'errore del *primo tipo* (che è quello tenuto sotto controllo) corrisponde proprio a ciò che il produttore vuole evitare, e cioè «considerare la quantità contenuta corretta, quando invece è maggiore di quanto dichiarato».

c. Se infine ci poniamo dal punto di vista di chi vuole controllare semplicemente la taratura delle macchine (partendo dal presupposto che esse siano tarate regolarmente), si può scegliere:

$$H_0: \mu = 250 \qquad H_1: \mu \neq 250$$

Il controllo dell'errore di primo tipo è possibile tramite gli strumenti del *calcolo della probabilità*; precisamente, occorre conoscere la *distribuzione di probabilità* della variabile aleatoria X che interpreta il fenomeno d'interesse sulla popolazione oppure essere nelle condizioni di poterla approssimare: limitatamente ai casi che prenderemo in considerazione, ciò porta come conseguenza che un test statistico potrà essere costruito (analogamente a quanto visto per gli intervalli di confidenza) soltanto se sappiamo a priori che X ha distribuzione *normale* oppure se siamo nel caso di *grandi campioni*.

ATTENZIONE!

Come abbiamo visto, in statistica, con l'espressione «livello di significatività» si intende la massima probabilità di sbagliare che si è disposti ad accettare. Il preciso significato da attribuire all'espressione «probabilità di sbagliare» (e di conseguenza al concetto di livello di significatività) dipende dal particolare problema in esame, ossia dal fatto che si stia costruendo un intervallo di confidenza o eseguendo un test statistico.

2. Il livello di significatività

Il **livello di significatività** di un test è definito come la (massima) probabilità di commettere un errore di *primo tipo* che siamo disposti a tollerare. Esso viene usualmente scelto uguale al 10%, al 5% o all'1% e viene convenzionalmente indicato con la lettera α. Immaginando di estrarre moltissimi campioni e di ripetere ogni volta il test, per la legge dei grandi numeri il numero α rappresenta approssimativamente la percentuale di volte in cui un test porta a prendere una decisione sbagliata a causa di un errore di primo tipo.

3. La statistica-test

Una volta stabilito il sistema di ipotesi da sottoporre a test e il livello di significatività, occorre considerare un'opportuna *variabile aleatoria*, che in questo contesto viene detta **statistica-test** e che indicheremo con la lettera maiuscola U, sulla base della quale viene fondata la *regola di decisione* per stabilire se accettare o rifiutare l'ipotesi nulla. La statistica-test va scelta in modo che, nell'ipotesi che H_0 sia vera, sia completamente nota la sua distribuzione di probabilità.

Nei test statistici che ci limiteremo a considerare, la statistica-test sarà sempre lo *stimatore standardizzato* del parametro su cui vertono le ipotesi: nei test sulla media, la statistica-test sarà la media campionaria standardizzata, mentre nei test sulla proporzione sarà la frequenza campionaria standardizzata.

MODI DI DIRE

Anziché dire che «*si accetta* l'ipotesi nulla» (come per brevità spesso si fa nella pratica) gli statistici preferiscono talvolta esprimersi più prudentemente dicendo «non si rifiuta» l'ipotesi nulla. Questo perché, in assenza di un controllo sull'errore del secondo tipo, accettando l'ipotesi nulla non è possibile determinare con esattezza quanta fiducia dobbiamo riporre in questa decisione. La locuzione «non si rifiuta» viene utilizzata per suggerire di sospendere il giudizio: così facendo, ovvero non accettando direttamente l'ipotesi nulla, ci si salvaguarda dal rischio di commettere un errore del secondo tipo.

4. La regione critica e quella di accettazione

L'insieme dei possibili valori che può assumere la statistica-test viene suddiviso in due regioni complementari: la **regione critica** (costituita dai valori che depongono a favore del rifiuto dell'ipotesi nulla) e la **regione di accettazione** (costituita dai valori che depongono a favore dell'accettazione dell'ipotesi nulla).

Il test è costruito in modo che un errore di primo tipo avvenga se e solo se la statistica-test assume valori nella regione critica. Pertanto la regione critica *dipende* dal livello di significatività α fissato; precisamente, la probabilità che la statistica-test assuma valori nella regione critica qualora H_0 sia vera deve essere uguale ad α.

5. La regola di decisione

Indicato con la lettera u il valore (detto **valore osservato**) assunto dalla statistica-test U in corrispondenza del campione estratto, si stabilisce la seguente regola di decisione:

- se u appartiene alla regione critica, allora si *rifiuta* l'ipotesi nulla H_0;
- se u **non** appartiene alla regione critica (ovvero appartiene alla regione di accettazione), allora si *accetta* l'ipotesi nulla H_0.

Riassumendo, possiamo paragonare, come già fatto, lo svolgimento di un test da parte di uno statistico allo svolgimento di un processo da parte di un giudice. L'analogia è la seguente. Il giudice deve vagliare le due ipotesi H_0: «l'imputato è innocente» e H_1: «l'imputato è colpevole». Il giudice ascolta le argomentazioni dell'accusa e della difesa (lo statistico estrae un campione e raccoglie i dati campionari), dopodiché, assumendo che l'imputato sia innocente (cioè che l'ipotesi nulla sia vera), ne valuta la consistenza (stabilisce se il valore osservato appartiene o meno alla regione critica). Infine decide se assolverlo oppure condannarlo (accettare o rifiutare l'ipotesi nulla). Cerchiamo di chiarire tutti questi concetti grazie a un esempio.

ESEMPIO Impostazione di un test statistico sulla media

Il contenuto dichiarato dei barattoli di marmellata di un certo tipo è 250 g. Il contenuto effettivo si può modellizzare con una variabile aleatoria normale, di deviazione standard uguale a 3 g. Scegliendo un campione casuale di 20 barattoli, si riscontra un contenuto medio di 248 g. Impostiamo un test statistico per stabilire, in base a questi dati e al livello di significatività del 5%, se i macchinari che producono i barattoli sono tarati correttamente.

- **Ipotesi**

Sia X il contenuto di un barattolo di marmellata. Sappiamo che X ha distribuzione normale, di media incognita μ e varianza 9. L'ipotesi nulla, che riteniamo vera fino a prova contraria, è che le macchine siano tarate in modo corretto, quindi assumiamo:

$$H_0 : \mu = 250 \qquad H_1 : \mu \neq 250$$

- **Livello di significatività**

In questo caso è stato fissato $\alpha = 5\% = 0{,}05$.

- **Statistica-test**

Come abbiamo anticipato, poiché in questo caso il parametro che è sottoposto a test è la *media*, assumiamo come statistica-test *la media campionaria standardizzata*. Ricordiamo che, se X è normale di parametri μ e σ^2, allora la media campionaria $\overline{X}$ è a sua volta normale di parametri μ e $\frac{\sigma^2}{n}$ (essendo n la dimensione del campione). Nel nostro caso, se supponiamo che l'ipotesi nulla sia *vera*, cioè che $\mu = 250$, abbiamo:

$$\underbrace{X \sim N(250, 9)}_{\text{nell'ipotesi che } H_0 \text{ sia vera}} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(250, \frac{9}{20}\right)$$

quindi, standardizzando, sarà:

$$\underbrace{U}_{\text{statistica-test}} = \frac{\overline{X} - 250}{\sqrt{\frac{9}{20}}} \sim N(0,1) = Z$$

È importante osservare che la media campionaria standardizzata soddisfa i requisiti di una statistica-test:

- ha distribuzione nota, nell'ipotesi che H_0 sia vera;
- ci consente di ottenere informazioni per decidere se accettare o rifiutare l'ipotesi nulla; infatti, se *l'ipotesi nulla è vera*, ci aspettiamo che le differenze $\overline{X} - 250$ siano piccole e che di conseguenza la media campionaria standardizzata assuma valori prevalentemente *vicini* a 0.

- **Regione critica**

Suddividiamo l'insieme dei valori che può assumere la statistica-test U in due regioni:

- l'insieme dei valori per cui $|U| \leq k$ (dove k è un opportuno numero reale positivo da determinare);
- l'insieme dei valori per cui $|U| > k$.

RIFLETTI
Assumendo che l'ipotesi nulla sia vera, quindi che la distribuzione della statistica-test sia normale standard, commettiamo un errore del primo tipo quando *rifiutiamo* l'ipotesi nulla, ossia quando *U* assume valori nella regione critica.

Il primo insieme contiene i valori della statistica-test U *vicini* allo zero, ossia quelli che depongono a favore dell'*accettazione* dell'ipotesi nulla, e pertanto definisce la **regione di accettazione**; il secondo insieme invece contiene i valori della statistica-test U *lontani* dallo zero (per difetto o per eccesso), ossia quelli che depongono a favore del *rifiuto* dell'ipotesi nulla, e costituisce perciò la **regione critica** (**Fig. 6**). I valori $\pm k$ che separano la regione critica da quella di accettazione sono detti **valori critici.**

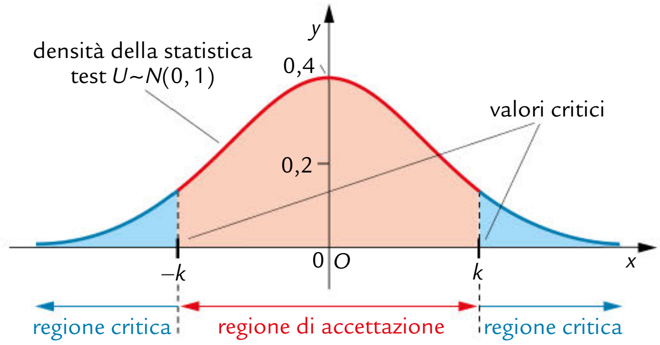


Figura 6

Il valore di k *dipende* dal livello di significatività; se fissiamo $\alpha = 0{,}05$, allora possiamo determinare k in base alla condizione che scaturisce dalla definizione di livello di significatività:

$$\underbrace{p(|U|>k)}_{\text{la probabilità che la statistica-test assuma valori nella regione critica (= probabilità di commettere un errore del primo tipo)}} \underbrace{=}_{\text{è uguale}} \underbrace{0{,}05}_{\text{al livello di significatività}}$$

Poiché U ha la distribuzione di una normale standard, questa condizione equivale a richiedere che le due «code» individuate dalla regione critica abbiano area uguale a $\frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$ mentre la regione di accettazione deve avere area uguale a $1 - 0{,}05 = 0{,}95$ (**Fig. 7**).

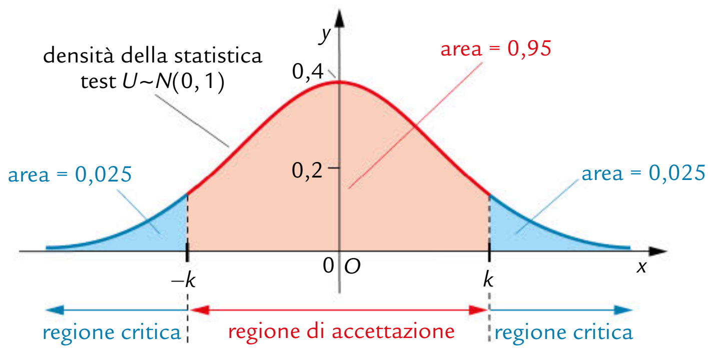


Figura 7

Dunque il valore critico k deve lasciare a sinistra del grafico un'area uguale a $0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975$, ovvero k deve essere il quantile di ordine 0,975 della normale standard:

$$k = z_{0{,}975} = 1{,}96$$

- **Valore osservato *u* di *U* sul campione estratto**

È uguale al valore della statistica-test in corrispondenza del campione estratto, ossia:

$$u = \frac{\overline{x} - 250}{\sqrt{\frac{9}{20}}}$$

essendo $\overline{x}$ la media dei dati campionari che, in base al testo dell'esercizio, è uguale a 248.
Dunque:

$$u = \frac{248 - 250}{\sqrt{\frac{9}{20}}} \simeq -2{,}98$$

- **Regola di decisione**

La situazione che si presenta è quella illustrata in **Fig. 8**.

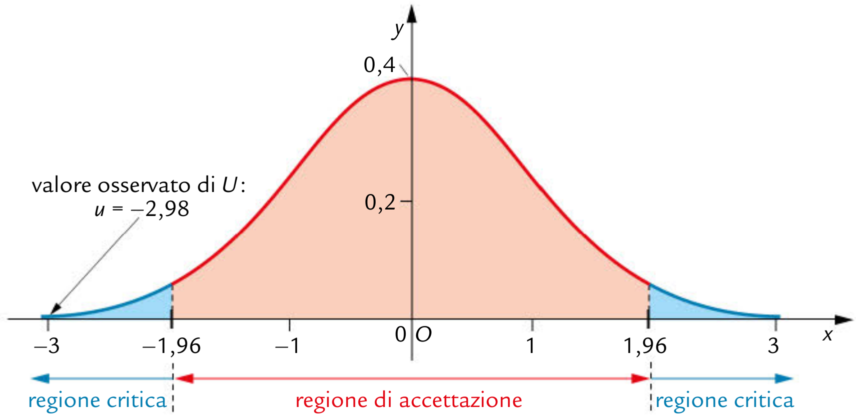


Figura 8

Poiché il valore osservato u della statistica-test cade nella regione *critica*, rifiutiamo l'ipotesi nulla, ovvero accettiamo l'ipotesi alternativa che i macchinari non siano ben tarati.

Verifica di ipotesi sulla media di una popolazione normale, con varianza nota

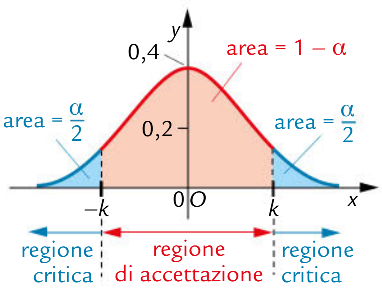
Con ragionamenti simili a quelli visti nell'esempio precedente, si giunge a formulare i test statistici riassunti in **Tab. 5**, che riguardano la media di una popolazione normale, di varianza σ^2 nota.

Tabella 5

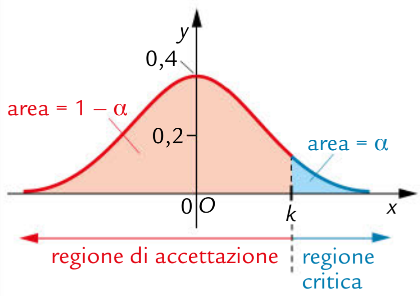
Test sulla media μ, nel caso di popolazione normale di cui è nota la varianza σ^2					
Ipotesi nulla (H_0)	**Ipotesi alternativa (H_1)**	**Statistica-test**	**Regione critica**	**Valore osservato di U**	**Regola di decisione** Rifiutiamo l'ipotesi nulla se il valore osservato u di U è tale che...
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (ossia la media campionaria standardizzata)	$\lvert U \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ dove $\overline{x}$ è la media dei dati campionari	$\lvert u \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$		$U > z_{1-\alpha}$		$u > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$		$U < -z_{1-\alpha}$		$u < -z_{1-\alpha}$

Il primo test indicato in tabella (illustrato in **Fig. 9a** a pagina seguente), avendo una regione critica della forma $\lvert U \rvert > k$, si dice **a due code** (o bilatero), mentre il secondo e il terzo (illustrati nelle **Figg. 9b-c**), avendo il primo una regione critica del tipo $U > k$ e il secondo una regione critica del tipo $U < k$, sono detti test **a una coda** (o unilateri).

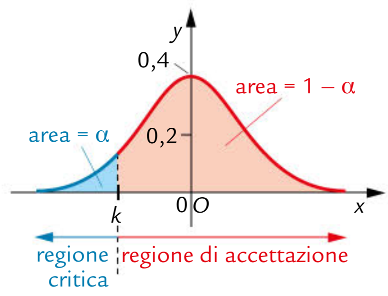
I valori critici sono stati individuati in base alle considerazioni spiegate nelle didascalie della **Fig. 9**.



a. La regione critica è della forma $|U| > k$. Poiché la probabilità che U assuma valori in tale regione deve essere uguale ad α, l'area di ciascuna delle due «code» individuate dalla regione critica deve essere uguale ad $\alpha/2$, mentre l'area individuata dalla regione di accettazione deve essere uguale a $1-\alpha$. Ne segue che il valore critico k deve lasciare a sinistra un'area uguale a $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, quindi deve essere uguale al quantile della normale standard di ordine $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, cioè a $k = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.



b. La regione critica è della forma $U > k$. Poiché la probabilità che U assuma valori in tale regione deve essere uguale ad α, l'area della coda individuata dalla regione critica deve essere uguale ad α, mentre l'area individuata dalla regione di accettazione deve essere uguale a $1-\alpha$. Ne segue che il valore critico k deve lasciare a sinistra un'area uguale a $(1-\alpha)$, quindi deve essere uguale al quantile della normale standard di ordine $(1-\alpha)$, cioè a $k = z_{1-\alpha}$.



c. La regione critica è della forma $U < k$. Poiché la probabilità che U assuma valori in tale regione deve essere uguale ad α, l'area della coda individuata dalla regione critica deve essere uguale ad α; inoltre il valore critico k deve certamente essere *negativo* (poiché rappresentando α un livello di significatività, certamente è $\alpha < \frac{1}{2}$). Osservando che la situazione che si presenta è la simmetrica rispetto all'asse y di quella raffigurata in b, possiamo concludere che $k = -z_{1-\alpha}$.

Figura 9 **Deduzione dei valori critici dei test riportati in tabella.**

È utile avere presente i valori critici corrispondenti ai più frequenti livelli di significatività.

Livello di significatività α	10%	5%	1%
$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (test a due code)	1,645	1,960	2,576
$z_{1-\alpha}$ (test a una coda)	1,282	1,645	2,326

OSSERVA

I passi per risolvere un problema di verifica di ipotesi sulla media sono i seguenti:
1. scelta delle ipotesi
2. calcolo del valore osservato della statistica-test;
3. calcolo del valore critico;
4. confronto tra il valore osservato e il valore critico e conseguente decisione.

ESEMPIO Test a una coda sulla media (con varianza nota)

La statura degli abitanti di un paese è in media 173 cm. Alcuni ricercatori, sulla base di alcuni cambiamenti avvenuti negli ultimi anni, ipotizzano che la statura media dei giovani sia aumentata rispetto a quella dei loro genitori.
Estraggono perciò un campione casuale di 100 giovani, che verificano avere una statura media di 176,5 cm. Supponendo che la statura dei giovani sia una variabile aleatoria normale, di deviazione standard 15 cm, che cosa possono concludere i ricercatori a un livello di significatività del 5%?

- **Scelta delle ipotesi**

Dal punto di vista dei ricercatori, l'ipotesi messa in discussione, vera fino a prova contraria, è che la media della statura dei giovani permanga di 173 cm. Assumeremo perciò:

$$H_0: \mu = 173 \qquad H_1: \mu > 173$$

Osserva che $\mu_0 = 173$

- **Valore osservato della statistica-test**

$$u = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{15}{\sqrt{100}}} = \frac{176{,}5-173}{\frac{3}{2}} \simeq 2{,}33$$

- **Valore critico**

Il valore critico, essendo $\alpha = 0{,}05$ e quindi $1 - \alpha = 0{,}95$, è:

$$z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1{,}645$$

- **Confronto tra valore critico e valore osservato e decisione**

Poiché $u > z_{0,95}$, si rifiuta l'ipotesi nulla, quindi i ricercatori hanno motivo di ritenere fondata la loro ipotesi che l'età media dei giovani sta aumentando, al livello di significatività del 5%.

Verifica di ipotesi sulla media di una popolazione normale, con varianza non nota

Nel caso in cui la varianza **non** sia nota, si presenta una situazione analoga a quella vista per gli intervalli di confidenza; i test statistici sono del tutto simili a quelli visti nel caso in cui la varianza è conosciuta, con due sole differenze: la varianza della popolazione va ora *stimata* tramite la *varianza campionaria corretta* s^2 e, al posto dei quantili della normale standard, occorre utilizzare i quantili della distribuzione t-Student con $(n - 1)$ gradi di libertà (n rappresenta sempre la numerosità del campione). I test statistici assumono perciò la forma riassunta in **Tab. 6**.

Tabella 6

Test sulla media μ, nel caso di popolazione normale di cui non è nota la varianza					
Ipotesi nulla (H_0)	**Ipotesi alternativa (H_1)**	**Statistica-test**	**Regione critica**	**Valore osservato di U**	**Regola di decisione** Rifiutiamo l'ipotesi nulla se il valore osservato u di U è tale che...
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ dove s_2 è la varianza campionaria corretta	$\|U\| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ dove $\overline{x}$ è la media dei dati campionari	$\|u\| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$		$U > t_{1-\alpha}(n-1)$		$u > t_{1-\alpha}(n-1)$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$		$U < -t_{1-\alpha}(n-1)$		$u < -t_{1-\alpha}(n-1)$

Rianalizziamo l'esempio precedente sulla base di queste nuove ipotesi.

ESEMPIO Test a una coda sulla media (con varianza incognita)

La statura media degli abitanti di un paese è una variabile aleatoria normale di media 173 cm. Diversi ricercatori, sulla base di alcuni cambiamenti avvenuti negli ultimi anni, ipotizzano che la statura media dei giovani sia aumentata rispetto a quella dei loro genitori. Estraggono perciò un campione casuale di 100 giovani, che verificano avere una statura media di 176,5 cm. Inoltre, in base al calcolo della varianza campionaria corretta, stimano che la varianza della statura dei giovani sia di 250 cm^2. A un livello di significatività dell'1%, che cosa possono concludere i ricercatori?

- **Scelta delle ipotesi**

Dal punto di vista dei ricercatori, l'ipotesi messa in discussione, vera fino a prova contraria, è che la media della statura permanga di 173 cm. Assumeremo perciò:

$$H_0 : \mu = 173 \qquad H_1 : \mu > 173$$

- **Valore osservato della statistica-test**

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{176{,}5 - 173}{\sqrt{\frac{250}{100}}} \simeq 2{,}21$$

RIFLETTI
Abbiamo già osservato che un basso livello di significatività comporta un basso contenuto informativo del test statistico. Le conclusioni *opposte* a cui siamo giunti negli ultimi due esempi presentati lo illustrano: in quest'ultimo esempio (in cui abbiamo supposto la varianza incognita) l'ipotesi nulla è *accettata*; nell'esempio precedente (con varianza nota) l'ipotesi nulla è stata invece *rifiutata*. Il test più «stringente», cioè quello che porta al *rifiuto* dell'ipotesi nulla, risulta essere il primo perché impostato su un maggiore livello di significatività.

- **Valore critico**

Il valore critico, essendo $n = 100$ e $1 - \alpha = 0{,}99$, può essere calcolato con il metodo dell'interpolazione lineare o, più velocemente, ricorrendo a un software opportuno. Si trova che è:

$$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0,99}(99) \simeq 2{,}36$$

- **Confronto tra valore critico e valore osservato e decisione**

Poiché $u < t_{0,99}(99)$, l'ipotesi nulla **non** può essere rifiutata; quindi sulla base dei dati campionari i ricercatori non possono accettare l'ipotesi che l'età media dei giovani sia aumentata, al livello di significatività del 1%.

Verifica di ipotesi sulla media di una popolazione di cui non è nota la distribuzione

Similmente a quanto visto per gli intervalli di confidenza, i test sulla media possono continuare a essere utilizzati anche nel caso in cui **non** sia nota la distribuzione di probabilità del carattere X oggetto di studio (oppure sia nota ma non sia normale), purché la dimensione del campione sia sufficientemente elevata. In tal caso non si tratterà però di test *esatti* bensì di test *approssimati*; in genere l'approssimazione è buona, quindi si possono continuare a utilizzare i test consueti per campioni di numerosità n, con $n > 120$.

Verifica di ipotesi sulla proporzione

Supponiamo per esempio di volere sottoporre a un test, su un campione bernoulliano di numerosità n, una ipotesi del tipo:

$$H_0 : p = p_0$$

sulla proporzione (incognita) p della popolazione che possiede una certa caratteristica. Sappiamo che in tal caso la variabile aleatoria X che interpreta il fenomeno d'interesse **non** è normale, ma di Bernoulli. Tuttavia, come abbiamo già osservato nel caso degli intervalli di confidenza, se il campione è sufficientemente numeroso, lo stimatore frequenza campionaria:

$$\hat{P} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

ha distribuzione approssimativamente normale, di media p e varianza $\dfrac{p(1-p)}{n}$.

Se l'ipotesi nulla è vera, cioè $p = p_0$, la distribuzione di probabilità di $\hat{P}$ è allora nota:

$$\hat{P} \approx N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$$

Assumendo come statistica-test la frequenza campionaria standardizzata:

$$U = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

potremo costruire test del tutto simili a quelli visti per la media (nel caso di varianza nota). Si ottengono così i test riassunti in **Tab. 7**.

Come già visto per gli intervalli di confidenza, il campione si considera sufficientemente numeroso, quindi il test può essere applicato, purché sia:

$$n\hat{p} > 5 \quad \text{e} \quad n(1-\hat{p}) > 5$$

Tabella 7

Test sulla proporzione p, nel caso di popolazione normale di cui non è nota la varianza					
Ipotesi nulla (H_0)	**Ipotesi alternativa (H_1)**	**Statistica-test**	**Regione critica**	**Valore osservato di U**	**Regola di decisione** Rifiutiamo l'ipotesi nulla se il valore osservato u di U è tale che...
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$U = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$\lvert U \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$u = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ dove $\hat{p}$ è la proporzione di unità del campione che possiede la caratteristica oggetto di indagine	$\lvert u \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$p = p_0$ $p \leq p_0$ $p < p_0$	$p > p_0$ $p > p_0$ $p \geq p_0$		$U > z_{1-\alpha}$		$u > z_{1-\alpha}$
$p = p_0$ $p \geq p_0$ $p > p_0$	$p < p_0$ $p < p_0$ $p \leq p_0$		$U < -z_{1-\alpha}$		$u < -z_{1-\alpha}$

ESEMPIO Test di ipotesi sulla proporzione

Un acquirente deve decidere se comprare un lotto di 4000 pezzi. Egli ritiene il lotto inaccettabile se contiene almeno il 7% di pezzi difettosi. Esamina un campione di 100 pezzi e ne trova 6 difettosi. Quale decisione deve prendere l'acquirente, al livello di significatività del 5%?

- **Scelta delle ipotesi**

Dal punto di vista dell'acquirente è più grave acquistare un lotto da rigettare piuttosto che non comprarne uno conforme; quindi l'ipotesi nulla, che l'acquirente è disposto ad abbandonare solo in caso di forte evidenza, è che il lotto sia da rigettare, ovvero che contenga una percentuale p di prezzi difettosi maggiore o uguale al 7%. Poniamo dunque:

$$H_0: p \geq 0{,}07 \qquad H_1: p < 0{,}07$$

Osserva che $p_0 = 0{,}07$

- **Verifica delle condizioni per potere applicare il test**

La proporzione $\hat{p}$ di pezzi difettosi sul campione è:

$$\hat{p} = \frac{6}{100} = 0{,}06$$

Inoltre il campione è sufficientemente numeroso per poter applicare il test, in quanto risulta:

$$\underbrace{100 \cdot 0{,}06}_{n \cdot \hat{p}} = 6 > 5 \qquad \text{e} \qquad \underbrace{100(1-0{,}06)}_{n(1-\hat{p})} = 94 > 5$$

- **Valore osservato della statistica-test**

$$u = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}06 - 0{,}07}{\sqrt{\dfrac{0{,}07(1-0{,}07)}{100}}} \simeq -0{,}39$$

- **Valore critico**

Il valore critico, essendo $\alpha = 0{,}05$ e quindi $1 - \alpha = 0{,}95$, è:

$$-z_{1-\alpha} = -z_{0,95} = -1{,}645$$

- **Confronto tra valore critico e valore osservato e decisione**

Confrontando il valore osservato con il valore critico, osserviamo che $u > -z_{0,95}$, dunque, al livello di significatività del 5%, accettiamo l'ipotesi nulla. Concludiamo perciò che l'acquirente **non** dovrebbe acquistare il lotto.

OSSERVA

I passi per risolvere un problema di verifica di ipotesi sulla proporzione sono i seguenti:
1. scelta delle ipotesi;
2. verifica delle condizioni per potere applicare il test;
3. calcolo del valore osservato della statistica-test;
4. calcolo del valore critico;
5. confronto tra il valore osservato e il valore critico e conseguente decisione.

Esercizi p. 352

Inferenza statistica

Statistica inferenziale

Parte della statistica che si occupa dello studio dei metodi che consentono di estendere all'intera popolazione i risultati ottenuti dalla rilevazione su un campione.

Intervallo di confidenza

Intervallo che contiene il valore di un parametro ignoto da stimare con un prefissato grado di fiducia detto **livello di confidenza**. Se α è il livello di significatività, cioè il massimo rischio di errore che si è disposti ad accettare (per esempio il 5%), il livello di confidenza è $1-\alpha$ (95% se $\alpha = 5\%$).

Per la media, se σ^2 è nota

Al livello di confidenza $1-\alpha$, nel caso di popolazione normale per grandi campioni (cioè per campioni di dimensione n, con $n > 30$) è l'intervallo:

media calcolata sul campione

deviazione standard della popolazione

$$\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

quantile della normale standard di ordine $1-\frac{\alpha}{2}$

dimensione del campione

Per la media, se σ^2 non è nota

Al livello di confidenza $1-\alpha$, nel caso di una popolazione normale per grandi campioni, è l'intervallo:

media calcolata sul campione

deviazione standard campionaria corretta

$$\left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

quantile della t-Student con $n-1$ gradi di libertà di ordine $1-\frac{\alpha}{2}$

dimensione del campione

Quantili notevoli

$1-\alpha$	$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576

Per la proporzione

Al livello di confidenza $1-\alpha$, nel caso di grandi campioni, è l'intervallo:

proporzione calcolata sul campione

$$\left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

quantile della normale standard di ordine $1-\frac{\alpha}{2}$

dimensione del campione

Verifica di ipotesi

Test sulla media

Nel caso di popolazione normale, si distinguono due casi, a seconda che sia nota o meno la varianza σ^2 della popolazione.

σ^2 è nota

Per una popolazione normale o per grandi campioni:					
Ipotesi nulla (H_0)	**Ipotesi alternativa (H_1)**	**Statistica-test**	**Regione critica**	**Valore osservato di U**	**Regola di decisione:** Rifiutiamo H_0 se...
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (ossia la media campionaria standardizzata)	$\lvert U \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ dove $\overline{x}$ è la media dei dati campionari	$\lvert u \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$		$U > z_{1-\alpha}$		$u > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$		$U < -z_{1-\alpha}$		$u < -z_{1-\alpha}$

σ^2 non è nota

Per una popolazione normale o per grandi campioni:					
Ipotesi nulla (H_0)	**Ipotesi alternativa (H_1)**	**Statistica-test**	**Regione critica**	**Valore osservato di U**	**Regola di decisione:** Rifiutiamo H_0 se...
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$ dove s_2 è la varianza campionaria corretta	$\lvert U \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$ dove $\overline{x}$ è la media dei dati campionari	$\lvert u \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$		$U > t_{1-\alpha}(n-1)$		$u > t_{1-\alpha}(n-1)$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$		$U < -t_{1-\alpha}(n-1)$		$u < -t_{1-\alpha}(n-1)$

Test sulla proporzione

Per grandi campioni:					
Ipotesi nulla (H_0)	**Ipotesi alternativa (H_1)**	**Statistica-test**	**Regione critica**	**Valore osservato di U**	**Regola di decisione:** Rifiutiamo H_0 se...
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$U = \dfrac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$\lvert U \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$u = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ dove $\hat{p}$ è la proporzione di unità del campione che possiede la caratteristica oggetto di indagine	$\lvert u \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$p = p_0$ $p \leq p_0$ $p < p_0$	$p > p_0$ $p > p_0$ $p \geq p_0$		$U > z_{1-\alpha}$		$u > z_{1-\alpha}$
$p = p_0$ $p \geq p_0$ $p > p_0$	$p < p_0$ $p < p_0$ $p \leq p_0$		$U < -z_{1-\alpha}$		$u < -z_{1-\alpha}$

Esercizi

1. Introduzione alla statistica inferenziale

Teoria p. 314

1 Vero o falso?

a. la statistica inferenziale si occupa dei problemi relativi all'estensione all'intera popolazione dei risultati osservati su un campione V F
b. un campione bernoulliano è un campione estratto senza reimmissione V F
c. un campione bernoulliano non è un campione casuale V F
d. la stima di un parametro incognito è uno dei problemi affrontati dall'inferenza statistica V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

2 Volendo studiare l'età media dei clienti di un negozio, si considera un campione casuale di 50 clienti su cui si osservano i dati riportati in tabella:

Età	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[40, 45)	[45, 50)	[50, 55)	[55, 60]
Numero clienti	5	12	25	3	2	2	1

Fornisci una stima puntuale dell'età media dei clienti del negozio. [Circa 32,8]

3 Si è intervistato un campione casuale di 200 individui, per valutare gli effetti della crisi economica sui consumi degli italiani. I consumi mensili, in euro, osservati sul campione sono quelli riportati in tabella.

Consumi mensili	[0, 500)	[500, 1000)	[1000, 1500)	[1500, 2000)	[2000, 2500)	[2500, 3000]
Numero di individui	8	12	80	50	22	28

Determina una stima puntuale del consumo medio mensile degli italiani. [1625 euro]

4 Da un lotto di arance se ne estrae un campione casuale di 500; di queste, 180 risultano avere un peso inferiore a 120 g, 220 risultano avere un peso compreso tra 120 e 180 g e 100 risultano avere un peso superiore a 200 g. Determina una stima puntuale della percentuale di arance del lotto aventi un peso superiore ai 120 g. [64%]

5 Si sono osservate le lunghezze di 10 pezzi prodotti da un certo macchinario, ottenendo i seguenti risultati:

11,7 cm   11,3 cm   9,8 cm   10,4 cm   9,2 cm   10,3 cm   9,9 cm   10,2 cm   10,3 cm   10,7 cm

Vengono dichiarati «conformi» i pezzi la cui lunghezza si discosta dalla lunghezza dichiarata, uguale a 10,5 cm, al massimo del 10%. Qual è la stima puntuale della percentuale di pezzi prodotti non conformi che si deduce dal campione analizzato? [20%]

2. Stimatori

Teoria p. 315

Esercizi introduttivi

6 Vero o falso?

a. uno stimatore è un numero calcolato sui dati campionari V F
b. uno stimatore è una variabile aleatoria, utilizzata per stimare un parametro, che rappresenta tutte le possibili stime del parametro che possono ottenersi al variare del campione V F
c. il concetto di stima e quello di stimatore sono equivalenti V F
d. uno stimatore la cui media non coincide con il parametro da stimare è detto distorto V F
e. uno stimatore la cui media coincide con il parametro da stimare è detto consistente V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

7 **Vero o falso?**

a. la media campionaria è uno stimatore corretto della media della popolazione V F

b. la varianza campionaria è uno stimatore non distorto della varianza della popolazione V F

c. per stimare su dei dati campionari la percentuale di una popolazione che soddisfa una data caratteristica, si calcola la percentuale degli elementi del campione che soddisfa quella caratteristica V F

d. per stimare su dei dati campionari la varianza di una popolazione, si calcola la varianza dei dati campionari V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

ESERCIZI

Proprietà degli stimatori

8 **ESERCIZIO SVOLTO**

Da una popolazione X di media μ e varianza σ^2 estraiamo un campione casuale (bernoulliano) X_1, X_2. Consideriamo quindi i seguenti due stimatori per μ:

$$T_1 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2 \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2$$

a. Verifichiamo che sono entrambi corretti. **b. Stabiliamo quale dei due è il più efficiente.**

---

a. Verificare che gli stimatori sono corretti equivale a verificare che il loro valore medio coincide con quello della popolazione, cioè con μ. A tale scopo bisogna ricordare che:

- le variabili aleatorie X_1, X_2 di un campione casuale sono identiche e identicamente distribuite a X, quindi $E(X_1) = E(X_2) = \mu$;
- la media di una variabile aleatoria gode della proprietà di linearità.

Tenendo conto di ciò si ha immediatamente che:

$$E(T_1) = E\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) = \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = \mu$$

$$E(T_2) = E\left(\frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2\right) = \frac{2}{5}E(X_1) + \frac{3}{5}E(X_2) = \frac{2}{5}\mu + \frac{3}{5}\mu = \mu$$

b. Lo stimatore più efficiente è quello che ha varianza minore, quindi occorre calcolare le varianze dei due stimatori e confrontarle. Per il calcolo della varianza, occorre ricordare che:

- $V(X_1) = V(X_2) = \sigma^2$ (poiché le variabili aleatorie estrazioni campionarie sono identiche ed identicamente distribuite a X);
- data una variabile aleatoria X, risulta: $V(aX + b) = a^2V(X)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$;
- se X e Y sono due variabili aleatorie *indipendenti* (il che si verifica per le variabili estrazioni campionarie in caso di campionamento *bernoulliano*) risulta:

  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Abbiamo perciò:

$$V(T_1) = V\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right) = \frac{1}{9}V(X_1) + \frac{4}{9}V(X_2) = \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{4}{9}\sigma^2 = \frac{5}{9}\sigma^2$$

$$V(T_2) = V\left(\frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2\right) = \frac{4}{25}V(X_1) + \frac{9}{25}V(X_2) = \frac{4}{25}\sigma^2 + \frac{9}{25}\sigma^2 = \frac{13}{25}\sigma^2$$

Poiché $\frac{13}{25} < \frac{5}{9}$, lo stimatore più efficiente è T_2.

9 Da una popolazione X di media μ e varianza σ^2 estraiamo un campione casuale (bernoulliano) di dimensione 2: X_1, X_2. Considera quindi i seguenti due stimatori per μ:

$$T_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{3}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2$$

a. Verifica che sono entrambi corretti.

b. Stabilisci quale dei due è il più efficiente. [b. È più efficiente T_1]

10 Da una popolazione X di media μ estraiamo un campione casuale (bernoulliano) di dimensione 3: X_1, X_2, X_3. Determina k in modo che T risulti uno stimatore corretto per μ:

$$T = \frac{1}{3}X_1 + (k-2)X_2 - \frac{k}{2}X_3$$

$\left[k = \frac{16}{3}\right]$

11 Da una popolazione X di media μ e varianza σ^2 estraiamo un campione casuale (bernoulliano) di dimensione 3: X_1, X_2, X_3.

a. Determina k in modo che $T = \frac{2}{5}X_1 + kX_2 - \frac{3}{5}X_3$ risulti uno stimatore corretto per μ.

b. In corrispondenza del valore di k trovato al punto **a**, determina la deviazione standard di T. $\left[\textbf{a. } k = \frac{6}{5}; \textbf{ b. } \frac{7}{5}\sigma\right]$

12 Da una popolazione X di media μ e varianza σ^2 estraiamo un campione casuale (bernoulliano) di dimensione 3: X_1, X_2, X_3.

a. Determina k in modo che $T = \frac{1}{4}X_1 + kX_2 - \frac{1}{2}X_3$ risulti uno stimatore corretto per μ.

b. In corrispondenza del valore di k trovato al punto **a**, determina la varianza di T. $\left[\textbf{a. } k = \frac{5}{4}; \textbf{ b. } \frac{15}{8}\sigma^2\right]$

13 Verifica che, estratto un campione casuale (bernoulliano) X_1, X_2, ..., X_n da una popolazione X di media μ e varianza σ^2, la variabile aleatoria media campionaria $\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$ ha media μ e varianza $\frac{\sigma^2}{n}$.

14 Data una popolazione normale di media μ e varianza σ^2, sia X_1, X_2, ..., X_n un campione casuale (bernoulliano) estratto dalla popolazione. Considera i seguenti due stimatori della media della popolazione:

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_{n-2} + 3X_{n-1} - X_n}{n} \qquad T_2 = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_{n-2} - 2X_{n-1} + 4X_n}{n}$$

a. Verifica che sono entrambi corretti.
b. Verifica che sono entrambi consistenti.
c. Stabilisci quale dei due è più efficiente.

15 Data una popolazione normale di media μ e varianza σ^2, sia X_1, X_2, ..., X_n un campione casuale (bernoulliano) estratto dalla popolazione. Considera i seguenti due stimatori della media della popolazione:

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_{n-2} - 4X_{n-1} + 6X_n}{n} \qquad T_2 = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_{n-2} + 5X_{n-1} - 3X_n}{n}$$

a. Verifica che sono entrambi corretti.
b. Verifica che sono entrambi consistenti.
c. Stabilisci quale dei due è più efficiente.

16 Data una popolazione normale di media μ e varianza σ^2, sia X_1, X_2, ..., X_n un campione casuale (bernoulliano) estratto dalla popolazione. Verifica che il seguente stimatore della media della popolazione è corretto ma non è consistente:

$$T = \frac{X_1 + ... + X_{n-2} + nX_{n-1} + (2-n)X_n}{n}$$

Stima puntuale della varianza e della deviazione standard

17 Si sono rilevati i prezzi mensili (in euro) per l'affitto di un bilocale in una certa zona di una città, su un campione di cinque immobili:

450 500 420 540 600

Determina una stima puntuale:

a. dell'affitto medio mensile per un bilocale in quella zona;

b. della varianza degli affitti mensili per un bilocale in quella zona. [**a.** 502 euro; **b.** 5120 euro^2]

18 Al fine di stimare la spesa media mensile sostenuta dalle famiglie italiane in alimenti e bevande, si estrae un campione casuale di 250 famiglie e si rileva, per ciascuna famiglia, la spesa (in euro) sostenuta nell'ultimo mese per i beni di cui sopra. Detti $x_1, \ldots, x_{250}$ i valori osservati, dall'esame del campione si ottiene:

$$x_1 + \ldots + x_{250} = 184\,600 \text{ euro} \qquad x_1^2 + \ldots + x_{250}^2 = 218\,500\,000 \text{ euro}^2$$

Determina una stima puntuale:

a. della spesa media mensile degli italiani in alimenti e bevande:

b. della deviazione standard della spesa media mensile degli italiani in alimenti e bevande.

[**a.** 738,40 euro; **b.** 574,53 euro]

19 In una sessione d'esami universitari sono state rilevate le votazioni di un campione casuale di 10 studenti:

28 30 24 26 30 22 27 28 25 24

Determina, relativamente a quella sessione d'esami, una stima puntuale:

a. del voto medio degli studenti;

b. della deviazione standard del voto degli studenti. [**a.** 26,4; **b.** circa 2,67]

20 I seguenti dati rappresentano le velocità (in km/h) di 8 auto, rilevate su un tratto di strada urbana:

64 70 69 75 80 74 82 76

Determina la stima puntuale che puoi dedurre da tale campione:

a. della velocità media delle auto che percorrono quel tratto;

b. della deviazione standard delle auto che percorrono quel tratto. [**a.** 73,75 km/h; **b.** circa 5,92 km/h]

Distribuzioni di probabilità degli stimatori

21 ESERCIZIO SVOLTO

Si lancia una moneta (regolare) 100 volte. Calcoliamo la probabilità che esca «testa» oltre 60 volte.

Il problema equivale a calcolare la probabilità che la frequenza campionaria $\widehat{F}$ sia superiore a $\frac{60}{100} = 0{,}6$. La media di $\widehat{F}$ è ovviamente $p = 0{,}5$ (la moneta è supposta regolare), mentre la deviazione standard è uguale a $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{100}} = 0{,}05$, pertanto $\widehat{F} \approx N(0{,}5;\ 0{,}05)$. Abbiamo:

$$p\left(\widehat{F} > 0{,}6\right) = 1 - p(\widehat{F} \le 0{,}6) = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}6 - 0{,}5}{0{,}05}\right) = 1 - \Phi(2) \simeq 0{,}023$$

In conclusione, la probabilità richiesta è approssimativamente del 2,3%.

22 Si getta un dado regolare 300 volte. Calcola la probabilità che il «6» esca un numero di volte compreso tra 45 e 55. [Circa 56,1%]

23 Il 40% degli adolescenti di un certo paese europeo pratica sport o attività fisica regolarmente. Qual è la probabilità che, in un campione (casuale e rappresentativo), costituito da 100 adolescenti, più della metà pratichi sport o attività fisica con regolarità? [Circa 2,1%]

24 **E se?** I simpatizzanti per il partito A sono il 20% dell'intera popolazione italiana. Qual è la probabilità che, in un campione (casuale e rappresentativo della popolazione italiana), costituito da 200 persone, i simpatizzanti per il partito A siano meno del 20%?

▶ Cambierebbe la risposta, considerando un campione costituito da 500 persone? [50%; no]

25 **ESERCIZIO SVOLTO**

L'età degli iscritti a un'associazione nazionale di escursionismo di montagna ha media $\mu = 45$ anni e deviazione standard $\sigma = 10$ anni. Calcoliamo la probabilità che la media dell'età di un campione estratto casualmente costituito da 100 iscritti sia superiore a 48 anni.

Il problema equivale a calcolare la probabilità che la media campionaria $\overline{X}$ relativa a campioni di 100 elementi sia superiore a 48. La media di $\overline{X}$ è 45, mentre la deviazione standard è $\frac{10}{\sqrt{100}} = 1$, pertanto $\overline{X} \approx N(45; 1)$, Abbiamo:

$$p(\overline{X} > 48) = 1 - p(\overline{X} \leq 48) = 1 - \Phi\left(\frac{48-45}{1}\right) = 1 - \Phi(3) \simeq 0{,}0013$$

La probabilità cercata è quindi circa dello 0,13%.

26 L'altezza media degli adulti di sesso maschile di un dato paese nordico si distribuisce normalmente con media $\mu = 180$ cm e deviazione standard $\sigma = 8$ cm. Calcola la probabilità che l'altezza media di un campione (casuale) costituito da 20 persone sia inferiore a 175 cm. [Circa 0,3%]

27 Le sbarre metalliche prodotte da un'azienda meccanica hanno una lunghezza media di 20 cm e una deviazione standard di 1 cm. Estratto un campione casuale di 100 sbarre, qual è la probabilità che la media delle lunghezze delle sbarre del campione sia maggiore di 19,8 cm? [Circa 0,98]

28 Un'azienda alimentare produce delle lattine il cui contenuto medio è di 33 cl con una varianza di 0,36 cl^2. Estratto un campione casuale di 50 lattine, qual è la probabilità che la media del contenuto delle lattine del campione sia minore di 33,1 cl? [Circa 0,88]

29 I dischi d'acciaio prodotti da un'azienda meccanica hanno un diametro medio di 8 cm con deviazione standard di 0,4 cm. Estratto un campione casuale di 40 dischi, qual è la probabilità che la media dei diametri del campione sia compresa tra 7,9 cm e 8,2 cm? [Circa 0,94]

Matematica e controllo della qualità

30 Un'azienda produce dei pezzi metallici a forma di sfera il cui diametro medio μ è di 2 cm, con una deviazione standard $\sigma = 0{,}15$ cm. Il controllo di qualità si basa sull'analisi di campioni casuali di 50 elementi. Indicata con $\overline{X}$ la variabile aleatoria che rappresenta il diametro medio delle sferette di un campione casuale e con I l'intervallo per cui la probabilità che $\overline{X}$ appartenga a I è del 95%, il controllo avviene precisamente come segue: estratto un singolo campione di 50 sferette, si verifica se la media $\overline{x}$ degli elementi di questo particolare campione appartiene o meno all'intervallo I: se vi appartiene, il processo sarà ritenuto in controllo, altrimenti occorrerà verificare il funzionamento dei macchinari.

a. Entro quali limiti deve essere contenuta la misura $\overline{x}$ del diametro medio delle sferette del campione estratto, affinché la produzione possa ritenersi in controllo?

b. Supponi che venga estratto questa volta un campione di 100 sferette, che la misura del diametro medio delle sferette del campione estratto risulti 1,95 cm e che si fissi una soglia di probabilità del 99% (anziché del 95%). La produzione può essere ritenuta in controllo?

c. Supponi che venga estratto questa volta un campione di 40 sferette e che le misure del diametro delle sferette del campione estratto siano quelle riportate in tabella.

Diametro (cm)	1,70	1,82	1,92	2,10	2,25
Frequenza	4	6	8	12	10

Calcola la media dei diametri rilevati sul campione e stabilisci se la produzione può essere ritenuta in controllo, fissando una soglia di probabilità del 95%. [**a.** $1{,}96 \text{ cm} \leq \overline{x} \leq 2{,}04$ cm; **b.** no; **c.** circa 2,02 cm; sì]

31 Il processo di produzione di un'azienda, quando funziona correttamente, dà luogo a una percentuale p di pezzi prodotti difettosi pari al 5%. Il controllo di qualità si basa sull'analisi di campioni casuali di 100 pezzi. Indicata con $\widehat{P}$ la variabile aleatoria che rappresenta la percentuale di pezzi difettosi di un campione casuale e con I l'intervallo per cui la probabilità che $\widehat{P}$ appartenga a I è del 95%, il controllo avviene precisamente come segue: si estrae un singolo campione di 100 pezzi e si verifica se la proporzione $\widehat{p}$ di pezzi difettosi rilevata sul campione estratto appartiene o meno all'intervallo I: se vi appartiene, il processo di produzione sarà ritenuto in controllo, altrimenti occorrerà verificare il funzionamento dei macchinari.

a. Entro quali limiti deve essere contenuta la percentuale $\widehat{p}$ di pezzi difettosi del campione estratto affinché la produzione possa ritenersi in controllo?

b. Supponi che venga estratto questa volta un campione di 150 pezzi e che 11 risultino difettosi. Stabilisci se la produzione può essere ritenuta in controllo, nel caso in cui venga fissata una soglia di probabilità del 99% (anziché del 95%)?

c. Supponi che venga estratto un campione di 200 pezzi e che 18 risultino difettosi. La produzione può essere ritenuta in controllo, nel caso in cui venga fissata una soglia di probabilità del 95%? [**a.** 0,7% $\leq \widehat{P} \leq$ 9,3%; **b.** sì; **c.** no]

3. Intervalli di confidenza

Teoria p. 320

Esercizi introduttivi

32 **Vero o falso?**

a. data una popolazione normale di cui è nota la varianza σ^2, al crescere del numero di elementi del campione, a parità di livello di confidenza, l'ampiezza dell'intervallo di confidenza per la media aumenta V F

b. data una popolazione bernoulliana, al crescere del numero di elementi del campione, a parità di livello di confidenza, l'ampiezza dell'intervallo di confidenza per una proporzione diminuisce V F

c. se scegliamo un livello di confidenza uguale al 95%, allora il 5% rappresenta la probabilità di sbagliare, cioè di estrarre un campione che conduce a una stima intervallare che non contiene il parametro ignoto che vogliamo stimare V F

d. in una stima intervallare il livello di confidenza è uguale alla semiampiezza dell'intervallo di confidenza V F

e. data una popolazione normale di cui è nota la varianza σ^2 e fissata la dimensione n del campione, all'aumentare del livello di confidenza aumenta anche l'ampiezza dell'intervallo di confidenza della media V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

Test

33 La stima intervallare della media di una popolazione di cui è nota la varianza:

A può essere costruita (in modo approssimato) anche senza conoscere la distribuzione di probabilità del fenomeno di cui si vuole stimare la media, a condizione che il campione sia molto numeroso

B necessita, per essere costruita, soltanto della stima puntuale del parametro

C è indipendente dalla dimensione del campione

D è indipendente dalla deviazione standard

34 La stima intervallare della proporzione di una popolazione che possiede una data caratteristica è valida:

A qualsiasi sia la popolazione

B se la popolazione non è bernoulliana

C se la popolazione è normale

D se la popolazione è bernoulliana e valgono le condizioni per cui la distribuzione binomiale è ben approssimata dalla normale

35 Nell'espressione che fornisce l'intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale di cui è nota la deviazione standard, quale valore bisogna sostituire a $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ se si vuole che il livello di confidenza sia del 90%?

A 1,282 B 1,645 C 1,960 D 2,576

36 Nell'espressione che fornisce l'intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale di cui è nota la deviazione standard, quale valore bisogna sostituire a $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ se si vuole che il livello di confidenza sia del 95%?

A 1,282 B 1,645 C 1,960 D 2,576

37 Nell'espressione che fornisce l'intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale di cui **non** è nota la deviazione standard, quale valore bisogna sostituire a $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ se si vuole che il livello di confidenza sia del 95%, nell'ipotesi che il campione abbia numerosità $n = 20$?

A 1,648 B 1,954 C 2,086 D 2,093

38 Nell'espressione che fornisce l'intervallo di confidenza per la proporzione di una popolazione, quale valore bisogna sostituire a $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ se si vuole che il livello di confidenza sia del 99%?

A 1,282 B 1,645 C 1,960 D 2,576

Problemi dalla realtà sugli intervalli di confidenza per la media

Varianza nota

39 **ESERCIZIO GUIDATO**

I prelievi effettuati dai clienti al bancomat di una banca sono distribuiti secondo una distribuzione normale di deviazione standard uguale a 82,50 euro. Su un campione di 150 operazioni di prelievo, è risultato un prelievo medio di 185 euro. Determina un intervallo di confidenza al 90% per l'ammontare del prelievo medio μ dei clienti della banca.

Siamo nel caso di una popolazione normale di varianza nota; perciò l'intervallo richiesto è del tipo:

$$\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad [*]$$

dove:

- $\overline{x}$ è la stima della media dei prelievi dedotta dal campione, in questo caso $\overline{x}$ = ...;
- n è la dimensione del campione, in questo caso n = ...;
- $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ è il quantile della normale standard di ordine $1-\frac{\alpha}{2}$; essendo in questo caso $1-\alpha = 90\%$, cioè $\alpha = 10\% = 0{,}1$ e dunque $1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0{,}1}{2} = 0{,}95$, devi determinare $z_{0,95}$ e puoi verificare (per esempio utilizzando la **Tab. 2** del **Paragrafo 5** di teoria) che risulta $z_{0,95}$ = ...

Sostituendo i valori di $\overline{x}$, n, $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ricavati nella [*], puoi trovare l'intervallo di confidenza richiesto.

[173,92 euro ≤ μ ≤ 196,08 euro]

40 Vogliamo stimare la statura media μ di una certa popolazione normale. La deviazione standard della statura della popolazione è nota ed è uguale a 6,5 cm. La media delle stature rilevate su un campione di 100 persone è 176,5 cm. Determina un intervallo di confidenza per la statura media al livello del 95%. [175,2 cm ≤ μ ≤ 177,8 cm]

41 In una popolazione di adulti la varianza del peso è uguale a 25 kg^2. Il peso medio di un campione di 16 adulti è risultato 78 kg. Determina l'intervallo di confidenza al 90% per il peso medio μ della popolazione.

[75,9 kg ≤ μ ≤ 80,1 kg circa]

42 Un laboratorio deve analizzare un farmaco per stabilire la concentrazione di principio attivo. Vengono effettuate 4 misurazioni del principio attivo, che forniscono i risultati seguenti:

2,40 2,25 2,30 2,05

I valori delle concentrazioni nelle varie prove seguono una distribuzione normale di media ignota e deviazione standard (dovuta agli strumenti di misura) $\sigma = 0{,}1$. Determina un intervallo di confidenza al 95% per la concentrazione media del principio attivo. [2,15 ≤ μ ≤ 2,35 circa]

43 In una data popolazione di adulti, la statura si può considerare una variabile aleatoria normale, di varianza 64 cm^2. In un campione di 100 persone, si è osservata una statura media di 173 cm. Determina l'intervallo di confidenza al 99% della statura media h della popolazione. [170,93 cm ≤ h ≤ 175,07 cm]

44 Un'azienda produce bulloni, il cui diametro è una variabile aleatoria di media μ incognita e varianza uguale a 0,01 cm^2. Il diametro medio di un lotto di 120 bulloni è risultato di 2,6 cm. Determina un intervallo di confidenza per μ, al livello del 90%. [2,58 cm ≤ μ ≤ 2,62 cm]

45 Da una popolazione normale di varianza uguale a 9 viene estratto un campione casuale. Si determina l'intervallo di confidenza al 95% per la media della popolazione, ottenendo: [18,89, 21,11]. Determina:

a. la media campionaria dei valori osservati;

b. la dimensione del campione. [**a.** 20; **b.** 28]

46 Da una popolazione normale di media incognita μ e varianza nota σ^2 si estrae un campione casuale di 64 osservazioni. Un intervallo di confidenza per μ ha ampiezza $\frac{1}{4}\sigma$. Qual è il livello di confidenza? [Circa 68,27%]

47 Nel progettare una cabina di pilotaggio di un aereo, occorre tenere conto dei valori antropometrici medi dei piloti. Si sa da precedenti studi statistici che la statura dei piloti può essere considerata una variabile aleatoria avente distribuzione normale, di media incognita e deviazione standard 6,2 cm. Su di un campione di 100 piloti, si rileva che la statura media è uguale a 179,4 cm.

a. Determina l'intervallo di confidenza al 95% per la statura media μ dei piloti.

b. Quale deve essere l'ampiezza minima n del campione affinché l'intervallo di confidenza (al 95%) abbia ampiezza al massimo uguale a 1 cm? [**a.** $178{,}18 \text{ cm} \le \mu \le 180{,}62 \text{ cm}$; **b.** $n = 591$]

48 Un intervallo di confidenza al livello del 95% per la media di una popolazione normale è uguale a [8,20, 9,40]. Determina:

a. la media campionaria delle osservazioni;

b. la dimensione del campione, se la varianza della popolazione è 4. [**a.** 8,8; **b.** $n \simeq 43$]

49 Uno strumento produce mine per matite; la lunghezza delle mine è una variabile aleatoria normale, di media ignota e deviazione standard $\sigma = 0{,}16$ cm. Misurando la lunghezza di cinque mine, si sono ottenuti i seguenti valori (in cm):

10,24 10,40 10,66 10,10 10,50

a. Determina un intervallo di confidenza al 99% per la lunghezza media delle mine.

b. Mantenendo lo stesso livello di confidenza, quante mine occorrerebbe misurare per ottenere un intervallo di confidenza di ampiezza minore o uguale a 0,1 cm? [**a.** $10{,}19 \text{ cm} \le \mu \le 10{,}57$ cm circa; **b.** almeno 68]

Varianza incognita

50 **ESERCIZIO GUIDATO**

I valori nell'aria di una certa sostanza tossica hanno una distribuzione normale. In uno studio statistico su 6 diversi campioni dell'aria si sono registrati i seguenti valori della sostanza tossica (in microgrammi per metro cubo):

3,2	2,1	1,8	2,5	1,6	2,8

Determina un intervallo di confidenza per il livello medio μ della sostanza inquinante nell'aria, al livello di confidenza del 95%.

Siamo nel caso di una popolazione normale di varianza incognita; perciò l'intervallo richiesto è del tipo:

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad [*]$$

dove:

- $\bar{x}$ è la stima della media dedotta dal campione, in questo caso:
$$\bar{x} = \frac{3{,}2 + \ldots.. + 2{,}8}{6} = \frac{7}{3} \simeq 2{,}33$$
- s è la deviazione standard campionaria corretta, in questo caso:
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{5}\left[(3{,}2)^2 + \ldots + (2{,}8)^2 - 6\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2\right]} \simeq 0{,}61$$
- n è la dimensione del campione, in questo caso $n = \ldots..$;
- $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ è il quantile della t-Student con $(n-1)$ gradi di libertà di ordine $1-\frac{\alpha}{2}$; essendo in questo caso $(n-1) = 6-1 = 5$ e $1-\alpha = 95\%$, cioè $\alpha = 5\% = 0{,}05$ e dunque $1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$, devi determinare $t_{0{,}975}(5)$ e puoi verificare (per esempio utilizzando la tavola del **Paragrafo 3** di teoria) che risulta $t_{0{,}975}(5) = \ldots..$.
- Sostituendo i valori di $\bar{x}$, s, n, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ ricavati nella [*], puoi trovare l'intervallo di confidenza richiesto.

[$1{,}69 \le \mu \le 2{,}98$]

51 Il numero di ore di volo mensili dei piloti di una compagnia segue una distribuzione normale. Su un campione di 25 piloti, il numero medio di ore di volo mensili è risultato pari a 52 ore e la deviazione standard campionaria corretta è risultata di 6,5 ore. Determina un intervallo di confidenza al 90% per il numero medio di ore di volo mensili dei piloti della compagnia. [$49,77 \leq \mu \leq 54,23$]

52 Un call center ha calcolato il tempo medio della durata delle telefonate (che si può assumere avere una distribuzione normale) su un campione di 20 telefonate. Il tempo medio delle telefonate nel campione è risultato di 8 minuti e la deviazione standard campionaria corretta è risultata di 5 minuti. Determina un intervallo di confidenza al 99% per la durata media μ delle telefonate che arrivano al call center. [$4,8 \text{ min} \leq \mu \leq 11,2 \text{ min}$]

53 La percentuale μ di metano contenuta in un certo gas naturale si può assumere avere una distribuzione normale. Quattro misurazioni hanno fornito le seguenti percentuali di metano:

76,4% 75,8% 76,2% 76,3%

Determina:

a. la percentuale media di metano contenuto nel gas, stimata sul campione;
b. la deviazione standard campionaria corretta;
c. un intervallo di confidenza per μ al livello del 95%. [**a.** 76,175%; **b.** circa 0,263%; **c.** $75,75\% \leq \mu \leq 76,6\%$]

54 Una banca assume che i prelievi effettuati con il bancomat si distribuiscano secondo una variabile aleatoria normale. Si rilevano i prelievi effettuati su un campione di 5 clienti, ottenendo i dati seguenti (in euro):

150 200 50 125 80

Determina:

a. l'ammontare del prelievo medio sul campione considerato;
b. la varianza campionaria corretta;
c. un intervallo di confidenza al 90% per il prelievo medio μ dei clienti della banca.

[**a.** 121 euro; **b.** 3455 euro^2; **c.** $64,96 \text{ euro} \leq \mu \leq 177,04 \text{ euro}$]

55 In un tratto autostradale in cui il limite di velocità è di 120 km/h, la polizia stradale ha rilevato la velocità di un campione casuale di 150 automobili. La velocità media rilevata sul campione è stata di 124 km/h e la varianza campionaria (corretta) di 225 km^2.

a. Determina un intervallo di confidenza, al livello del 95%, per la velocità media della auto in quel tratto autostradale.
b. Determina la numerosità minima n del campione per individuare la velocità media delle auto di quel tratto, al livello di confidenza del 95%, con un errore massimo di 2 km. [**a.** $121,59 \text{ km/h} \leq v \leq 126,41 \text{ km/h}$; **b.** $n = 217$]

Problemi dalla realtà sugli intervalli di confidenza per la proporzione

56 ESERCIZIO GUIDATO

Un'azienda ha commissionato un sondaggio per sapere se i propri clienti sono o meno soddisfatti. La società incaricata del sondaggio ha intervistato un campione casuale di 100 clienti: 25 rispondono di essere insoddisfatti e 75 di essere soddisfatti. Determina un intervallo di confidenza al 95% per la percentuale p di clienti dell'azienda che sono insoddisfatti.

L'intervallo richiesto è del tipo: $\widehat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \leq p \leq \widehat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$ [*]

dove:

- $\widehat{p}$ è la stima della percentuale dei clienti insoddisfatti deducibile dal campione, in questo caso: $\widehat{p} = \dfrac{25}{100} = ...$
- n è la dimensione del campione, in questo caso $n = ...$;
- $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ è il quantile della normale standard di ordine $1-\dfrac{\alpha}{2}$; essendo in questo caso $1-\alpha = 95\%$, cioè $\alpha = 5\% = 0,05$ e dunque $1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-\dfrac{0,05}{2} = 0,975$, devi determinare $z_{0,975}$ e puoi verificare (per esempio utilizzando la **Tab. 2** del **Paragrafo 3** di teoria) che risulta $z_{0,975} = ...$.

Sostituendo i valori di $\widehat{p}$, n, $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ricavati nella [*], puoi trovare l'intervallo di confidenza richiesto. [$16,5\% \leq p \leq 33,5\%$]

57 Si sperimenta un nuovo farmaco su un campione di 1000 pazienti. Si osserva che fra i 1000 pazienti, 680 guariscono in seguito alla somministrazione del farmaco. Determina un intervallo di confidenza al 95% per la percentuale p di pazienti che guariscono in seguito alla somministrazione del farmaco. [65% $\leq p \leq$ 71%]

58 Una settimana prima delle elezioni per il sindaco di una città, viene effettuata una indagine per stabilire le intenzioni di voto. Su 500 intervistati, 220 dichiarano che voteranno per il candidato A. Determina un intervallo di confidenza al 90% per la percentuale p di cittadini che intendono votare per A. [Circa 40% $\leq p \leq$ 48%]

59 Si vuole ottenere una stima della proporzione di fumatori presenti in una certa regione e verificare se essi sono aumentati o diminuiti rispetto a 5 anni prima, quando la percentuale di fumatori era del 42%. A tale scopo, viene osservato un campione di 200 persone e si trova che 120 di esse sono fumatori. Determina un intervallo di confidenza al livello del 95% per la percentuale p di fumatori e decidi, in base a questa stima, se la percentuale di fumatori si può ritenere aumentata o diminuita. [53% $\leq p \leq$ 67% circa; la percentuale è aumentata]

60 Viene svolta una indagine per stimare la percentuale dei ragazzi con età tra 15 e 20 anni che utilizzano la rete Internet. Dei 500 ragazzi intervistati, con età compresa nella fascia d'interesse, 420 dichiarano di utilizzare la rete. Determina l'intervallo di confidenza al 99% per la percentuale p di ragazzi che utilizzano Internet. [79% $\leq p \leq$ 89%]

61 Una casa editrice, per decidere se vendere i propri libri anche via Internet, vuole stimare la proporzione di utilizzatori della rete Internet che acquistano libri on-line. Dei 250 utilizzatori intervistati, 160 hanno dichiarato di acquistare libri tramite la Rete. Calcola l'intervallo di confidenza al 90% per la proporzione di utilizzatori della Rete che acquistano libri on-line. [59% $\leq p \leq$ 69% (arrotondando la percentuale a un numero intero)]

62 In un seggio elettorale sono state scrutinate 300 schede e si è ottenuto che in 72 di esse è stato espresso il voto per un dato partito. A un livello di confidenza del 99%, quale sarà la minima percentuale di voti ottenuta da quel partito? [17,6%]

63 Ai fini di sperimentare un nuovo farmaco, 200 individui vengono sottoposti a una terapia con tale farmaco e 65 di essi guariscono dalla patologia per cui quella medicina è stata formulata. Fornisci una stima, al 95% di confidenza, di quanto vale, come minimo, la probabilità che il farmaco sia efficace. [Circa 26%]

64 Si è svolto un sondaggio per stabilire se gli abitanti di una città sono o meno favorevoli a chiudere una via del centro al traffico. Il sondaggio è stato svolto su un campione e, in seguito ai risultati del sondaggio, si è stabilito l'intervallo di confidenza della percentuale p di abitanti favorevoli alla chiusura della via, trovando l'intervallo:

[42%, 48%]

a. Sapendo che sono state intervistate 1000 persone, qual è approssimativamente il livello di confidenza?
b. Sapendo che il livello di confidenza del sondaggio è il 90%, quante persone approssimativamente sono state intervistate? [**a.** Circa il 94%; **b.** circa 744]

65 Le fiale di un vaccino prodotto da un'azienda farmaceutica devono essere sottoposte a controllo, per accertare che soddisfino certi parametri di qualità imposti dalle direttive europee. Determina il minimo numero di fiale che devono essere campionate, per determinare la percentuale di fiale conformi, al livello di confidenza del 99%, con un errore che non superi il 5%. [664]

66 È noto che, durante le elezioni politiche, alcune società effettuano sondaggi allo scopo di riuscire a stimare le percentuali di voti ottenuti dai vari partiti politici fin dai primi minuti di scrutinio. Supponiamo che una di queste società voglia stimare, al livello di confidenza del 95% e con un errore massimo dell'1%, la percentuale di voti di un dato partito entro la prima mezz'ora di spoglio delle schede. Nell'ipotesi che in mezz'ora vengano scrutinate in media 130 schede per seggio, da quanti seggi elettorali (opportunamente scelti su tutto il territorio nazionale) devono essere prelevati i dati nella prima mezz'ora di scrutinio? [74]

4. Test statistici per la verifica di ipotesi

Teoria p. 330

Esercizi introduttivi

Test

67 Il livello di significatività di un test è:

A la probabilità di prendere la decisione corretta
B la probabilità di commettere un errore di primo tipo
C la probabilità di commettere un errore di secondo tipo
D la probabilità di commettere un errore di primo o secondo tipo

68 La statistica-test utilizzata per la verifica di ipotesi è:

A un numero osservato sul campione estratto
B una variabile aleatoria
C uno dei valori critici
D la regola in base alla quale si decide se rifiutare l'ipotesi nulla

69 Si commette un errore di primo tipo quando:

A si accetta l'ipotesi nulla, quando quest'ultima risulta falsa
B si rifiuta l'ipotesi nulla, quando quest'ultima è vera
C il test statistico non consente né di accettare né di rifiutare l'ipotesi nulla
D l'ipotesi nulla risulta vera e l'ipotesi alternativa risulta falsa

---

70 Qual è la regione critica di un test sulla media di una popolazione normale di varianza nota, che valuta l'ipotesi $H_0 : \mu = \mu_0$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu > \mu_0$?

A $U > z_{1-\alpha}$ B $U > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ C $|U| > z_{1-\alpha}$ D $|U| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

71 Qual è la regione critica di un test sulla proporzione per grandi campioni, che valuta l'ipotesi $H_0 : p = p_0$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : p \neq p_0$?

A $U > z_{1-\alpha}$ B $U > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ C $|U| > z_{1-\alpha}$ D $|U| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

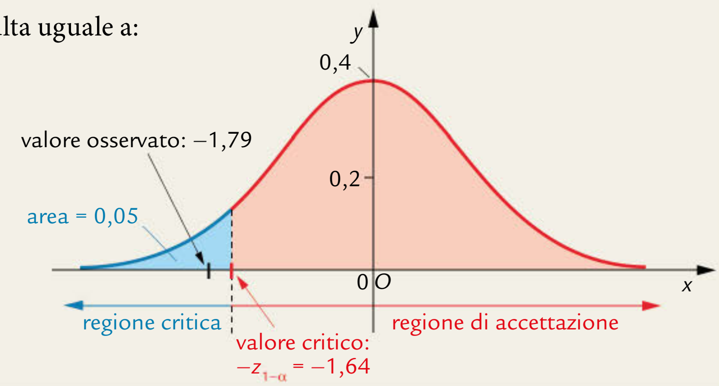
Problemi dalla realtà relativi a test sulla media

Varianza nota

72 ESERCIZIO SVOLTO

Una fabbrica di auto ha progettato delle modifiche da effettuare a un motore che dovrebbero consentire un minor consumo di carburante. I motori, in assenza di modifiche, presentano un consumo che segue una distribuzione normale, di media 7 litri per 100 km e deviazione standard uguale a 0,5 litri. Un campione di 20 motori modificati viene testato e si registra un consumo medio di 6,8 litri per 100 km. A un livello di significatività del 5%, la fabbrica può concludere che le modifiche progettate portano a una diminuzione dei consumi?

- Il sistema di ipotesi è: $H_0 : \mu = 7 \, (= \mu_0)$ $\quad H_1 : \mu < 7$
- Poiché siamo nel caso di una popolazione normale di cui è nota la varianza, la statistica-test da utilizzare è $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ e il valore osservato di U sul campione è: $u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{6{,}8 - 7}{0{,}5 / \sqrt{20}} \simeq -1{,}79$
- La regione critica è $U < -z_{1-\alpha}$ e il valore critico risulta uguale a:
  $-z_{1-\alpha} = -z_{1-0{,}05} = -z_{0{,}95} = -1{,}64$
- Poiché $u < -z_{1-\alpha}$, ossia il valore osservato cade nella regione critica, rifiutiamo l'ipotesi nulla, ovvero concludiamo (al 5% di significatività) che le modifiche progettate portano effettivamente a una diminuzione dei consumi.



73 Da una popolazione normale, di media μ e varianza $\sigma^2 = 1$, si estrae un campione casuale di 100 elementi e il valore osservato della media campionaria risulta uguale a 4,2. Verifica, con un livello di significatività $\alpha = 5\%$, l'ipotesi $H_0 : \mu = 4$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu \neq 4$.
$\left[u = 2 \text{ e } z_{1-\frac{\alpha}{2}} \simeq 1{,}96; \text{ si rifiuta } H_0\right]$

74 Un'azienda che produce lampadine dichiara che la durata media di un certo tipo di lampadine è di 900 ore, con una variabilità (misurata in termini di deviazione standard) di 50 ore. Una verifica effettuata su un campione di 150 lampadine ha dato come esito una durata media di 870 ore. Sottoponi a verifica l'ipotesi nulla che la durata delle lampadine sia quella dichiarata, contro l'ipotesi alternativa che la durata delle lampadine sia inferiore, al livello di significatività del 10%.
$\left[u \simeq -7{,}35 \text{ e } -z_{1-\alpha} \simeq -1{,}28; \text{ si rifiuta } H_0\right]$

75 Un'azienda che produce delle pile dichiara una durata media di 25 ore, con una variabilità (misurata in termini di deviazione standard) uguale a 3 ore. Dieci pile vengono esaminate e si accerta una durata media di 23 ore. Supponendo che la durata delle pile abbia una distribuzione normale, verifica al livello di significatività dell'1% la validità di quanto dichiarato dall'azienda, esaminando:

a. l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 25$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu \neq 25$;
b. l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 25$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu < 25$.
$\left[\textbf{a.}\ u \simeq -2{,}11,\ z_{1-\frac{\alpha}{2}} \simeq 2{,}58, \text{ si accetta } H_0; \textbf{ b.}\ -z_{1-\alpha} \simeq -2{,}33, \text{ si accetta } H_0\right]$

76 La durata media di una batteria è una variabile aleatoria normale, di media 600 ore e deviazione standard 40 ore. Al fine di incrementare la durata media delle batterie, l'azienda prova a produrre batterie secondo un nuovo processo di produzione, quindi sottopone a un test 20 batterie del nuovo tipo, trovando che la loro durata media risulta di 630 ore. A un livello di significatività del 5%, si può ritenere che il nuovo processo produttivo sia efficace nell'aumentare la durata delle batterie? Esamina l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 600$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu > 600$.
$\left[u \simeq 3{,}35,\ z_{1-\alpha} \simeq 1{,}64; \text{ si rifiuta l'ipotesi } H_0\right]$

77 La quantità di latte (in litri) contenuta nelle bottiglie prodotte da una certa azienda si può interpretare come una variabile aleatoria normale di varianza 0,1. Si estrae un campione casuale di 25 bottiglie e si trova una quantità media di latte contenuto uguale a 0,9 litri.

a. L'azienda ritiene che il processo di riempimento delle bottiglie sia in controllo se la quantità media di latte contenuta in esse è di 1 litro, come dichiarato sulle confezioni. Imposta un test per stabilire, sulla base dei dati del campione e con un livello di significatività del 5%, se il processo di riempimento è in controllo. Esamina l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu \neq 1$.

b. Un consumatore è disposto ad accettare un rischio al massimo del 5% di acquistare bottiglie che contengono in realtà meno latte di quanto dichiarato. Imposta un test per stabilire, sulla base dei dati del campione, se il consumatore dovrebbe acquistare le bottiglie o piuttosto astenersi. Esamina l'ipotesi nulla $H_0 : \mu < 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu \geq 1$.
$\left[\textbf{a.}\ u \simeq -1{,}58 \text{ e } z_{1-\frac{\alpha}{2}} \simeq 1{,}96, \text{ per cui si accetta } H_0; \textbf{ b.}\ u \simeq -1{,}58 \text{ e } z_{1-\alpha} \simeq 1{,}64, \text{ per cui si accetta } H_0\right]$

Varianza incognita

78 ESERCIZIO SVOLTO

Un'azienda specializzata è stata incaricata di monitorare la qualità delle acque di un fiume. L'anno scorso si è registrata nel fiume una concentrazione media di sostanze inquinanti uguali al 6,5%. Nel presente anno è stata fatta una rilevazione ogni mese, e si è rilevata una concentrazione media del 6,65% con una variabilità, espressa in termini di deviazione standard corretta, uguale al 2,5%. Supponendo che la distribuzione della concentrazione di sostanze inquinanti sia normale, stabiliamo, al livello di significatività del 5%, se è possibile ritenere che la concentrazione media di inquinanti nell'ultimo anno sia cambiata rispetto all'anno precedente.

——

- Il sistema di ipotesi è:

  $H_0 : \mu = 0{,}065 (= \mu_0)$ $\qquad$ $H_1 : \mu \neq 0{,}065$

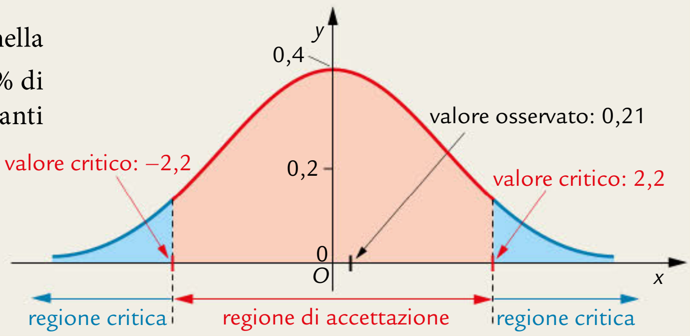
- Poiché siamo nel caso di una popolazione normale di cui **non** è nota la varianza, la statistica-test da utilizzare è $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$ e il valore osservato di U sul campione è:

  $$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{0{,}0665 - 0{,}065}{0{,}025 / \sqrt{12}} \simeq 0{,}21$$

- La regione critica è $|U| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ e il valore critico risulta uguale a:

  $$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{1-\frac{0{,}05}{2}}(12-1) = t_{0{,}975}(11) \simeq 2{,}2$$

- Poiché $|u| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, ossia il valore osservato cade nella regione di accettazione, **non** è possibile ritenere (al 5% di significatività) che la concentrazione degli inquinanti nell'ultimo anno sia cambiata.



79 Gli impiegati di una ditta che si occupa di vendita per corrispondenza affermano di riuscire a evadere un ordine giunto telefonicamente mediamente in 12 minuti. Il direttore decide di effettuare una verifica casuale su 200 ordini e registra un tempo medio di evasione di 14 minuti e una variabilità, misurata in termini di varianza corretta, di 81 minuti^2. A un livello di significatività del 5%, che cosa può concludere il direttore a proposito della valutazione dell'ipotesi H_0 che il tempo medio dichiarato dagli impiegati sia corretto, contro l'ipotesi H_1 che risulti in realtà maggiore?

[$u \simeq 3{,}14$, $z_{1-\alpha} \simeq 1{,}64$; si rifiuta H_0]

80 Una casa farmaceutica afferma che un antidolorifico di sua produzione impiega in media 15 minuti per agire. In base alle analisi effettuate su un campione di 80 pazienti, il beneficio è stato ottenuto in media in 18 minuti con una variabilità, espressa in termini di varianza campionaria corretta, uguale a 25 minuti^2. A un livello di significatività dell'1%, che cosa si può concludere a proposito dell'ipotesi H_0 che il farmaco agisca mediamente in 15 minuti, contro l'ipotesi H_1 che agisca in più di 15 minuti?

[$u \simeq 5{,}37$, $t_{1-\alpha}(n-1) \simeq 2{,}37$; si rifiuta H_0]

81 Si vuole sperimentare se un nuovo farmaco permette di guarire da una malattia più rapidamente che con il farmaco utilizzato fino a quel momento. Un gruppo di 20 pazienti scelti a caso viene sottoposto alla terapia e si registra un tempo medio di guarigione di 9 giorni, con una variabilità, misurata in termini di deviazione standard corretta, uguale a 2 giorni. Dai dati sul farmaco in uso è noto che il tempo medio di guarigione risulta di 11 giorni. Supponendo che il tempo di guarigione segua una distribuzione normale, è possibile affermare, a un livello di significatività dell'1%, che il nuovo farmaco consente di guarire più rapidamente? Esamina l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 11$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu < 11$.

[$u \simeq -4{,}47$, $-t_{1-\alpha}(n-1) \simeq -2{,}54$; si rifiuta H_0]

82 Da una popolazione normale si è estratto un campione di 8 unità e si sono osservati i seguenti valori campionari:

28	32	27	31	40	27	30	24

Sottoponi a test l'ipotesi che la media della popolazione sia uguale a 28, contro l'ipotesi alternativa che non lo sia, al livello di significatività dell'1%.

[$\overline{x} = 29{,}875$, $s \simeq 4{,}82$, $u \simeq 1{,}1$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \simeq 3{,}5$; si accetta H_0]

83 In un reparto di una azienda si effettuano mediamente 10 interventi di manutenzione al mese. Negli ultimi quattro mesi, gli interventi di manutenzione sono stati: 12, 8, 11 e 13. Supponendo che il numero di interventi mensili sia una variabile aleatoria avente distribuzione normale, stabilisci se i dati rilevati negli ultimi 4 mesi sono statisticamente significativi per affermare, a un livello di significatività del 5%, che è sopraggiunto qualche fattore che ne ha fatto aumentare la media. Esamina l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 10$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu > 10$.

[$\overline{x} = 11$, $s \simeq 2{,}16$, $u \simeq 0{,}93$, $t_{1-\alpha}(n-1) \simeq 2{,}35$ quindi si accetta l'ipotesi H_0, ovvero i dati non supportano in modo statisticamente significativo un aumentodel numero medio di interventi mensili]

Problemi dalla realtà relativi a test sulla proporzione

84 **ESERCIZIO SVOLTO**

Un'azienda vuole studiare se le polveri respirate dagli operai hanno effetti dannosi sulla salute. Su un campione casuale di 250 operai, 28 affermano di avere problemi respiratori. È noto che l'8% della popolazione soffre dei medesimi disturbi. Sulla base dei dati campionari si può affermare, a un livello di significatività dell'1%, che la proporzione di operai che accusano disturbi respiratori è maggiore di quella della popolazione? E al livello del 5%?

- Il sistema di ipotesi è:

  $H_0 : p = 0{,}08\,(= p_0) \qquad H_1 : p > 0{,}08$

- Osserviamo che il campione è sufficientemente numeroso per applicare il test basato sull'approssimazione normale. Infatti la proporzione $\hat{p}$ di lavoratori che accusano disturbi respiratori sul campione è:

  $$\hat{p} = \frac{28}{250} = 0{,}112$$

  e risultano verificate le condizioni per utilizzare l'approssimazione normale:

  $$\underbrace{250 \cdot 0{,}112}_{n \cdot \hat{p}} = 28 > 5$$

  $$\underbrace{250(1 - 0{,}112)}_{n(1-\hat{p})} = 222 > 5$$

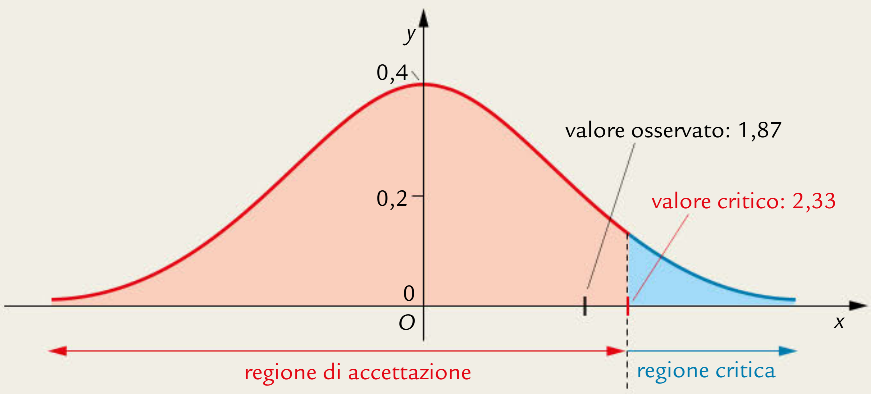
- La statistica-test da utilizzare è:

  $$U = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

  Il valore osservato di U sul campione è:

  $$u = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}112 - 0{,}08}{\sqrt{\frac{0{,}08(1-0{,}08)}{250}}} \simeq 1{,}87$$

- La regione critica è $U > z_{1-\alpha}$ e il valore critico risulta uguale a: $z_{1-\alpha} = z_{1-0{,}01} = z_{0{,}99} \simeq 2{,}33$.
- Poiché $u < z_{1-\alpha}$, ossia il valore osservato cade nella regione di accettazione, al livello di significatività dell'1% **non** possiamo affermare che la proporzione di operai che accusano disturbi sia superiore a quella della popolazione (ovvero non possiamo ritenere che le polveri respirate siano nocive).
- Al livello del 5%, risulta invece $z_{1-\alpha} \simeq 1{,}64$, quindi $u > z_{1-\alpha}$; dunque, a tale livello di significatività, dobbiamo rifiutare l'ipotesi nulla, ovvero ritenere che la proporzione di operai che accusano disturbi sia *superiore* a quella della popolazione.



85 **E se?** Alle ultime elezioni un dato partito ha ottenuto il 28% dei voti. In previsione di nuove elezioni, una società effettua un sondaggio su un campione di 500 elettori; per il campione analizzato è risultato che 158 voteranno il partito. A un livello di significatività del 5% è possibile concludere che ci sia stato nella popolazione un aumento di consensi nei confronti del partito? Considera l'ipotesi nulla $H_0 : p = 28\%$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : p > 28\%$.

▸ Cambierebbe la risposta, al livello dell'1%?

[$u \simeq 1{,}79$, $z_{1-\alpha} \simeq 1{,}64$ (con $\alpha = 5\%$), quindi si rifiuta H_0; invece se $\alpha = 1\%$, $z_{1-\alpha} \simeq 2{,}33$, quindi si accetta H_0]

86 Un'azienda ritiene che il processo di produzione sia in controllo se la percentuale p degli articoli prodotti senza difetti è almeno del 96%. In un campione di 150 articoli, 8 sono risultati difettosi. A un livello di significatività del 5% si può ritenere che il processo di produzione sia in controllo? Esamina l'ipotesi nulla $H_0 : p \geq 96\%$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : p < 96\%$. $\left[u \simeq -0{,}83, -z_{1-\alpha} \simeq -1{,}64, \text{ quindi si accetta } H_0\right]$

87 Un'azienda sostiene di non fare discriminazione di genere tra i dipendenti, che sono per la metà maschi e per l'altra metà femmine. A causa di un piano di ristrutturazione dell'azienda, non viene rinnovato il contratto ad alcuni dipendenti assunti a tempo determinato. Su un campione di 40 dipendenti cui non viene rinnovato il contratto, 22 risultano donne. È lecito, a un livello di significatività del 10%, ritenere che l'azienda faccia discriminazioni di genere? Indicata con p la percentuale di donne dipedenti, esamina l'ipotesi nulla $H_0 : p = 0{,}5$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : p \neq 0{,}5$. $\left[u \simeq 0{,}63, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \simeq 1{,}64, \text{ quindi si accetta } H_0\right]$

88 Paolo e Barbara giocano a «testa» o «croce». Barbara sospetta che la moneta sia truccata in modo che la probabilità p che esca «testa» sia superiore a quella che esca «croce», poiché, su 100 lanci, l'evento «è uscita 'testa'» si è verificato 65 volte. Imposta un opportuno test statistico per stabilire, al livello di significatività dell'1%, se questi dati sono significativi per supportare i sospetti di Barbara. Esamina l'ipotesi nulla $H_0 : p = 0{,}5$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : p > 0{,}5$. $\left[u = 3, z_{1-\alpha} \simeq 2{,}33, \text{ quindi si rifiuta } H_0\right]$

89 Il sindaco di una città desidera sapere se i cittadini sono favorevoli all'iniziativa di chiudere al traffico alcune vie del centro. A tale scopo viene intervistato un campione di 500 persone: 265 si dichiarano favorevoli e le restanti contrarie. Il sindaco è disposto ad accettare un rischio al massimo del 5% di chiudere al traffico le vie del centro nonostante la maggioranza dei cittadini sia contraria; in base ai dati rilevati sul campione, che decisione deve prendere il sindaco? Indicata con p la percentuale di cittadini contrari, considera l'ipotesi nulla $H_0 : p > 0{,}5$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : p \leq 0{,}5$. $\left[u \simeq -1{,}34, -z_{1-\alpha} \simeq -1{,}64, \text{ quindi si accetta } H_0\right]$

90 Una fabbrica modifica il suo ciclo produttivo per cercare di diminuire la percentuale di pezzi difettosi prodotti. Prima delle modifiche, la percentuale di pezzi difettosi era dell'8%. A modifiche avvenute, si estrae dalla produzione un campione di 200 pezzi e si trova che 15 sono difettosi. A un livello di significatività del 5% c'è sufficiente evidenza per ritenere che le modifiche apportate sono state efficaci? Indicata con p la percentuale di pezzi difettosi, considera l'ipotesi nulla $H_0 : p = 0{,}08$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : p < 0{,}08$. $\left[u \simeq -0{,}26 \text{ e } -z_{1-\alpha} \simeq -1{,}64; \text{ si accetta } H_0\right]$

91 Un'azienda che vende i propri prodotti on line ha rilevato che più del 50% dei clienti che iniziano la procedura di acquisto la abbandona prima di completarla. Al fine di diminuire la percentuale dei clienti che abbandonano l'acquisto, decide di riprogettare il proprio sito web. Dopo che il sito è stato riprogettato, si esamina un campione di 400 clienti e si rileva che 175 hanno abbandonato l'acquisto prima di completarlo. A un livello di significatività dell'1% c'è sufficiente evidenza per ritenere che la riprogettazione del sito abbia ottenuto gli effetti sperati? Indicata con p la percentuale di clienti che abbandona l'acquisto dopo averlo iniziato, considera l'ipotesi nulla $H_0 : p > 0{,}5$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : p \leq 0{,}5$. $\left[u = -2{,}5 \text{ e } -z_{1-\alpha} \simeq -2{,}33; \text{ si rifiuta } H_0\right]$

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

92 **Vero o falso?**

a. la media campionaria è uno stimatore corretto e consistente della media della popolazione V F
b. l'intervallo di confidenza di una media non è influenzato dalla numerosità del campione V F
c. il livello di confidenza può essere rappresentato da qualsiasi numero reale positivo V F
d. il livello di significatività di un test statistico rappresenta la probabilità di commettere un errore del primo tipo V F
e. per effettuare un test di verifica di ipotesi basato su un campione piccolo, è necessario conoscere la distribuzione di probabilità della popolazione V F
f. si commette un errore di primo tipo quando si rifiuta erroneamente l'ipotesi nulla V F
g. quando un test statistico porta a rifiutare l'ipotesi nulla, si può concludere che l'ipotesi nulla è certamente falsa V F

Test

93 Per una variabile aleatoria X distribuita normalmente si sa che $p(X > 4{,}6) = 0{,}00069$ e $p(X < 3{,}9) = 0{,}96407$. Quanto valgono il valor medio e la deviazione standard della distribuzione?

A $\mu = 3$ e $\sigma = 0{,}5$
B $\mu = 4{,}25$ e $\sigma = 0{,}35$
C $\mu = 2{,}5$ e $\sigma = 0{,}7$
D Non abbiamo dati a sufficienza per determinarli

94 Da una popolazione normale di media incognita μ e varianza nota σ^2 si estrae un campione casuale formato da 100 elementi; il corrispondente intervallo di confidenza per la media, al livello del 95%, ha ampiezza uguale a 2. Qual è il valore di σ, arrotondato alla prima cifra decimale?

A 4,2
B 5,1
C 6,7
D Nessuna delle altre risposte è esatta

95 La semiampiezza di un intervallo di confidenza al livello 95% per la media, nel caso di una popolazione normale, è uguale:

A al livello di confidenza
B al reciproco della radice quadrata della numerosità del campione
C a 1,96
D nessuna delle altre risposte è esatta

96 Un'azienda vuole stimare la proporzione p dei suoi clienti soddisfatti. Viene perciò realizzato un sondaggio su un campione di 400 clienti; fra i clienti del campione risulta che l'80% sono soddisfatti. A un livello di confidenza del 95% possiamo affermare che:

A almeno il 76% della clientela complessiva dell'azienda è soddisfatto
B almeno il 78% della clientela complessiva dell'azienda è soddisfatto
C almeno l'82% della clientela complessiva dell'azienda è soddisfatto
D nessuna delle altre risposte è esatta

---

97 Il periodo di degenza dei ricoverati in un grande ospedale è bene interpretato da una variabile aleatoria normale. I periodi di degenza (in giorni) rilevati su un campione casuale di 10 pazienti sono i seguenti:

6 2 8 3 3 7 4 5 8 4

Determina:

a. la media campionaria e la varianza campionaria corretta;
b. l'intervallo di confidenza al 90% del tempo medio $\overline{t}$ di degenza.

$\left[\textbf{a. } \overline{x} = 5,\ s^2 = \frac{14}{3};\ \textbf{b. } 3{,}74 \le \overline{t} \le 6{,}26\right]$

98 Un'università svolge un'indagine statistica per stimare la spesa media sostenuta dagli studenti per l'acquisto dei libri. Sceglie un campione casuale di 80 studenti e trova che la spesa media sostenuta è di 76 euro, con una varianza campionaria corretta di 225 euro^2.

a. Determina un intervallo di confidenza al 95% per la spesa media μ sostenuta dagli studenti che frequentano quella università.
b. Verifica l'ipotesi nulla che la spesa media sia uguale a 74 euro, contro l'ipotesi alternativa che non lo sia, al livello di significatività dell'1%. $\left[\textbf{a.}\ 72{,}66 \text{ euro} \le \mu \le 79{,}34 \text{ euro}; \textbf{b.}\ u \simeq 1{,}19 \text{ e } t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \simeq 2{,}64, \text{ si accetta } H_0\right]$

99 Una società, incaricata di svolgere un'indagine pre-elettorale, intervista un campione di 120 persone, 75 delle quali dichiarano che voteranno per un certo partito politico. Determina:

a. la minima percentuale di persone che voteranno quel partito, al livello di confidenza del 95%;
b. la minima dimensione del campione, per riuscire a stimare la percentuale della popolazione che voterà quel partito, al livello di confidenza del 95%, con una percentuale di errore al massimo del 5%. [**a.** 53,8%; **b.** $n = 385$]

100 Da una popolazione normale, di media μ e varianza incognita, viene estratto un campione di 20 elementi. La stima della media calcolata sul campione estratto risulta uguale a 1,8 e la deviazione campionaria corretta risulta uguale a 0,6. Verifica, al livello di significatività del 5%, l'ipotesi $H_0 : \mu = 2$ contro $H_1 : \mu \neq 2$.

[Non si può rifiutare l'ipotesi nulla]

101 Sia p la probabilità di vittoria dei «sì» a un referendum. Su un campione di 500 persone, 225 hanno dichiarato che voteranno «sì» e le restanti che voteranno «no».

a. Determina un intervallo di confidenza per p al livello del 95%.
b. Verifica, al livello di significatività dell'1%, l'ipotesi nulla $H_0 : p \geq 50\%$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : p < 50\%$. Ripeti la verifica al livello di significatività del 5%.

[**a.** $40{,}6\% \le p \le 49{,}4\%$; **b.** H_0 non può essere rifiutata all'1%, mentre può esserlo al 5%]

102 Un'azienda produce palline da golf il cui peso dovrebbe essere di 45,92 g. In un lotto di 50 palline si osserva che il peso medio è di 43,25 g e la deviazione standard corretta risulta di 2,5 g. Supponendo che il peso delle palline abbia una distribuzione normale:

a. determina un intervallo di confidenza al livello del 95% per il peso medio μ delle palline;
b. verifica, al livello di significatività del 5%, l'ipotesi nulla che il processo di produzione dell'azienda rispetti le normative (cioè che il peso medio sia quello dichiarato). [**a.** $42{,}5 \le \mu \le 44$; **b.** si rifiuta H_0]

103 In una popolazione di parecchi milioni di persone, si sceglie a caso un campione di 250 persone.

a. Se nel campione ci sono 25 mancini, determina un intervallo di confidenza al livello del 95% per la percentuale di mancini della popolazione.
b. Si formula l'ipotesi che l'85% degli individui siano biondi; se nel campione di 250 persone ci sono 190 biondi, si può accettare l'ipotesi a un livello di significatività del 5%? [**a.** $6{,}28\% \le p \le 13{,}72\%$; **b.** l'ipotesi va rifiutata]

104 Un'azienda deve valutare due potenziali mercati per un certo bene che essa produce. A tale scopo, l'azienda effettua un'indagine statistica sui due mercati potenziali A e B: su un campione di 125 soggetti del mercato A, 100 soggetti rispondono che acquisterebbero il bene; su un campione di 185 soggetti del mercato B, 148 rispondono che acquisterebbero il prodotto. Per ciascuno dei due mercati:

a. determina la stima puntuale p della percentuale di potenziali clienti;
b. determina un intervallo di confidenza al 95% per p;
c. verifica, a un livello di significatività del 5%, l'ipotesi nulla che p sia maggiore o uguale all'85%, contro l'ipotesi alternativa che p sia minore dell'85%.

In base ai risultati ottenuti, quale dei due mercati ti sembra più promettente?

[**a.** $p_A = p_B = 80\%$; **b.** $73\% \le p_A \le 87\%$, $74{,}2\% \le p_B \le 85{,}8\%$; **c.** $u_A \simeq -1{,}56$, $u_B \simeq -1{,}9$, $-z_{1-\alpha} \simeq -1{,}64$, quindi H_0 non si rifiuta nel caso del mercato A e si rifiuta nel caso del mercato B]

Esercizi *più*

Collegamenti **Campionamenti e calcolo combinatorio**

Nei seguenti esercizi indichiamo come di consueto con N la numerosità della popolazione e con n la dimensione dei campioni statistici.

105 **E se?** Tenendo conto dell'ordine di estrazione delle unità statistiche, qual è il numero $D'_{N,n}$ di tutti i possibili campioni bernoulliani (cioè dei campioni costruiti tramite estrazioni con reimmissione)?

▸ Quale è invece il numero $D_{N,n}$ di tutti i possibili campioni, se le estrazioni avvengono in blocco (cioè senza reimmissione), sempre tenendo conto dell'ordine?

106 **E se?** Assumi che l'ordine di estrazione delle unità statistiche di un campione sia *inessenziale*. Qual è il numero $C'_{N,n}$ di tutti i possibili campioni bernoulliani (cioè dei campioni costruiti tramite estrazioni con reimmissione)?

▸ Qual è invece il numero $C_{N,n}$ di tutti i possibili campioni, se le estrazioni avvengono in blocco (cioè senza reimmissione), sempre ritenendo inessenziale l'ordine?

107 In riferimento ai due esercizi precedenti, dopo aver osservato che

$$\frac{D_{N,n}}{D'_{N,n}} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right) \cdot \ldots\ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)$$

dimostra che $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{D_{N,n}}{D'_{N,n}} = 1$. Successivamente, sfruttando le due uguaglianze

$$C'_{N,n} = C_{N+n-1,n} \qquad \text{e} \qquad C_{N,n} = \frac{D_{N,n}}{n!}$$

e procedendo similmente a prima, dimostra che $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{C_{N,n}}{C'_{N,n}} = 1$. Alla luce di quanto appena provato, commenta la seguente affermazione: «per popolazioni numerose e campioni di modeste dimensioni, la probabilità che un campione bernoulliano presenti, ripetuta, la stessa unità statistica è trascurabile».

108 **Dalle gare** Il sindaco della tua città vuole avere una stima del tempo medio di attesa di tutti gli utenti cittadini dello Sportello Unico. Intervisti un campione di 250 utenti dello Sportello Unico del tuo comune e chiedi loro quanti minuti sono stati in coda allo sportello. Calcolando media e deviazione standard ottieni:

$\mu = 9{,}8$ minuti e $\sigma = 3{,}2$ minuti

Ti accorgi però di avere commesso un errore quando hai calcolato il tempo medio di attesa, il quale risulta essere pari a $\mu = 8{,}9$ minuti. Ricalcoli quindi un secondo intervallo di confidenza, questa volta corretto. A causa dell'errore commesso, l'ampiezza di questo secondo intervallo di confidenza risulta essere, rispetto all'ampiezza del primo intervallo:

A invariata
B minore
C maggiore
D i dati sono insufficienti per rispondere

(Olimpiadi della statistica 2013)

ESERCIZI

Prova di autoverifica

ESERCIZI

Inferenza statistica

1 **Vero o falso?**

a. uno stimatore che mediamente sovrastima il parametro non è corretto V F

b. calcolando la media aritmetica degli estremi di un intervallo di confidenza per la media si ottiene la stima della media ricavata dai dati campionari V F

c. estraendo campioni diversi, un intervallo di confidenza non cambia V F

d. il livello di significatività di un test statistico è la probabilità di commettere un errore di primo tipo V F

e. in un test statistico, la probabilità di commettere un errore di primo tipo è uguale a quella di commettere un errore di secondo tipo V F

2 Da una popolazione X di media μ estraiamo un campione casuale bernoulliano di dimensione 3: X_1, X_2, X_3. Individua quale dei seguenti tre è uno stimatore corretto per μ:

$$T_1 = \frac{5}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - X_3 \qquad T_2 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{5}{3}X_2 - X_3 \qquad T_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{2}X_2 - \frac{2}{3}X_3$$

3 Si sperimenta un nuovo farmaco su un campione di 1000 pazienti. Si osserva che fra i 1000 pazienti, 720 guariscono in seguito alla somministrazione del farmaco. Determina un intervallo di confidenza al 99% per la percentuale p di pazienti che guariscono in seguito alla somministrazione del farmaco.

4 Uno strumento produce mine per matite; la lunghezza delle mine ha una distribuzione normale. Su un campione di 5 mine, la lunghezza media è risultata uguale a 8,18 cm con una deviazione standard corretta uguale a 0,25 cm. Determina un intervallo di confidenza al 95% per la lunghezza delle mine.

5 Per stabilire una stima della percentuale p della popolazione italiana che voterà «sì» a un referendum, una società specializzata in indagini statistiche intervista un campione di n persone scelte a caso. A un livello del 95%, quanto deve valere n, affinché la stima di p ricavata dal campione differisca da p al massimo del 5%?

6 Un terreno trattato con un nuovo concime chimico viene coltivato con piante di una certa specie. È noto che la crescita di una pianta di quella specie, su un terreno non trattato con il concime, ha una distribuzione normale di media 96 cm e varianza di 64 cm^2. In un campione di 10 piante coltivate sul terreno trattato si è registrata una crescita media di 102 cm. Si può affermare, a un livello di significatività del 5%, che il concime aumenta la crescita media delle piante?

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	**Totale**
Punteggio massimo	$0{,}2 \cdot 5 = 1$	1	2	2	2	2	10
Punteggio ottenuto							

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 391

Risolvere problemi e costruire modelli

1 Due Stati, scelti tra Belgio, Paesi Bassi, Lussemburgo, Germania e Grecia, devono contribuire a una iniziativa internazionale. Purtroppo non si raggiunge un accordo sulla designazione dei due Stati contribuenti; si decide, allora, di effettuare un sorteggio.

a. Calcola la probabilità che almeno uno stato del Benelux (Belgio, Paesi Bassi, Lussemburgo) venga designato dal sorteggio.

b. In vista di questo sorteggio, un funzionario della Comunità Europea fa la seguente scommessa con un suo collega: per ciascuno Stato del Benelux designato dal sorteggio, egli riceverà 10 euro dal suo collega, ma si impegna a pagare 100 euro se nessuno Stato del Benelux risulterà designato dal sorteggio. Ha operato saggiamente il funzionario che ha proposto questa scommessa? Giustifica la risposta servendoti della nozione di speranza matematica.

[**a.** $\frac{9}{10}$; **b.** la speranza matematica di guadagno è di 2 euro, quindi a favore del funzionario]

2 Un test è costituito da 10 domande. Ogni domanda ha 4 risposte possibili, di cui solamente una è corretta. Un alunno, che non ha studiato, risponde a caso a ognuna delle domande. Calcola la probabilità:

a. che non abbia risposto correttamente a nessuna domanda;

b. che abbia dato la risposta corretta esattamente a 7 domande;

c. che abbia dato la risposta corretta ad almeno 2 domande.

Esprimi tutti i risultati in forma approssimata, arrotondati a meno di un millesimo. [**a.** 0,056; **b.** 0,003; **c.** 0,756]

3 Un gioco consiste nell'estrarre a caso una pallina da un'urna contenente 10 palline, numerate da 1 a 10. Se il numero estratto è maggiore di 4 si vincono 10 euro, altrimenti non si vince nulla. La pallina estratta viene poi rimessa nell'urna e si può ripetere il gioco. Calcola la probabilità:

a. di vincere 10 euro, estraendo una pallina;

b. di giocare tre volte di seguito senza vincere nulla;

c. di vincere 30 euro giocando 6 volte di seguito. [**a.** 0,6; **b.** 0,064; **c.** 0,27648]

4 Andrea è come sempre puntualissimo agli appuntamenti con Giorgia: ore 20.00. La fidanzata, invece, si presenta sistematicamente con un ritardo che varia da 0 a 15 minuti, in modo casuale.

a. Calcola il tempo medio di attesa di Andrea.

b. Stanco di aspettare, Andrea decide di presentarsi agli appuntamenti, d'ora in poi, alle ore 20.05. Calcola la probabilità che sia Giorgia ad aspettare, al prossimo appuntamento.

c. Verifica che, nel caso **b**, il tempo medio di attesa per Andrea si riduce a 3′ 20″ (cioè 200 secondi), mentre per Giorgia il tempo medio di attesa è 50″.

[**a.** 7′ 30″; **b.** $\frac{1}{3}$]

5 Supponi che la statura degli uomini di un dato paese si distribuisca normalmente, con parametri $\mu = 175$ cm e $\sigma = 5$ cm. Si scelgono a caso due di essi.

a. Calcola la probabilità che entrambi abbiano statura inferiore a 170 cm.

b. Calcola la probabilità che entrambi abbiano statura superiore a 185 cm. [**a.** Circa 2,5%; **b.** circa 0,05%]

6 Un benzinaio si rifornisce di gasolio una volta la settimana. La sua vendita settimanale in migliaia di litri è una variabile aleatoria con densità del tipo: $f(x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

a. Determina il valore di k.

b. Determina la probabilità che il benzinaio venda più di 500 litri alla settimana.

c. Stabilisci la minima capacità del serbatoio in modo che la probabilità che il gasolio si esaurisca in una settimana sia minore o uguale all'1%. Fornisci il risultato arrotondato ai litri.

[**a.** $k = 3$; **b.** $\frac{1}{8}$; **c.** 785 litri]

7 Un dado viene lanciato n volte, con $n \geq 2$. Qual è la probabilità che esca un multiplo di 3 esattamente due volte? Per quale/i valore/i di n tale probabilità è massima?

$\left[\frac{n(n-1)}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}; n = 5 \vee n = 6\right]$

8 Un'indagine statistica ha riguardato le ore di sonno di un gruppo di studenti. Si è trovato che in un giorno tipico gli studenti del gruppo dormono mediamente 9 ore, con una deviazione standard di 2 ore. Supposto che la distribuzione del numero di ore di sonno per questo gruppo di studenti sia normale, calcola la probabilità che uno studente in una giornata tipica dorma approssimativamente tra le 8 e le 10 ore. Fornisci il risultato arrotondato alla terza cifra decimale. [0,383]

9 **Matematica e controllo della qualità** Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare la cui lunghezza ottimale dovrebbe essere di 5 m e la cui sezione ottimale dovrebbe avere diametro di 4 cm. Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno:

- una lunghezza che è bene interpretata da una variabile aleatoria con distribuzione normale di media $\mu_1 = 5$ m e deviazione standard $\sigma_1 = 4$ cm;
- un diametro che è bene interpretato da una variabile aleatoria con distribuzione normale di media $\mu_2 = 4$ cm e deviazione standard $\sigma_2 = 0{,}8$ cm.

La lunghezza e il diametro di una barra sono tra loro indipendenti.
Una generica barra prodotta può essere direttamente venduta senza modifiche se la sua lunghezza è compresa tra 4,95 m e 5,05 m e il suo diametro è compreso tra 2,8 cm e 5,2 cm.
Calcola la probabilità di poter mettere in vendita senza modifiche una generica barra prodotta. [Circa 0,68]

10 **Matematica ed elettronica** Una ditta acquista uno stock di componenti elettronici da due fornitori: il 20% dal fornitore A e l'80% dal fornitore B. La percentuale di componenti difettosi è del 3% per il fornitore A e del 2% per il fornitore B.

a. Scelto a caso un componente dello stock, qual è la probabilità che sia difettoso?

b. Se il componente scelto a caso risulta difettoso, qual è la probabilità che sia stato acquistato dal fornitore A?

c. La ditta acquista 20 componenti dal fornitore A: qual è la probabilità che almeno due di essi siano difettosi? Esprimi il risultato arrotondato a meno di un centesimo.

La durata di vita, misurata in anni, di ciascuno dei componenti elettronici è una variabile aleatoria di densità esponenziale di parametro λ. Tenendo conto di ciò, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

d. La probabilità che la durata di vita di un componente elettronico sia superiore a 2 anni è uguale a 0,25. Qual è il valore di λ?

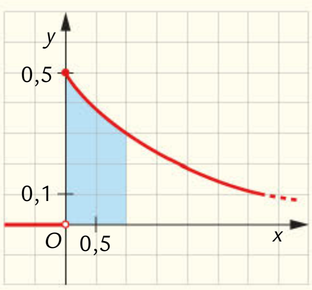
e. Nell'ipotesi che il valore di λ sia quello determinato al punto precedente, qual è la probabilità che un componente duri meno di 6 anni? Qual è la probabilità che duri più di 6 anni?

f. Nell'ipotesi che il valore di λ sia quello determinato al punto **d**, qual è la probabilità che un componente elettronico duri più di 8 anni, sapendo che è durato più di 6 anni?

$\left[\textbf{a.}\ \frac{11}{500};\ \textbf{b.}\ \frac{3}{11};\ \textbf{c.}\ 1-\frac{97^{20}}{10^{40}}-\frac{3\cdot 97^{19}}{5\cdot 10^{38}}\simeq 0{,}12;\ \textbf{d.}\ \lambda=\ln 2;\ \textbf{e.}\ \frac{63}{64},\ \frac{1}{64};\ \textbf{f.}\ \frac{1}{4}\right]$

Interpretare grafici e dati

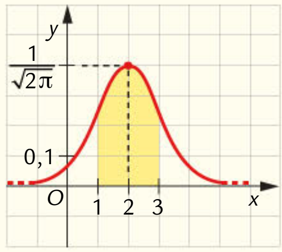
11 In figura è rappresentata la densità di probabilità di una variabile aleatoria X distribuita esponenzialmente.



a. In base alle indicazioni fornite, determina il parametro λ della distribuzione.
b. Calcola l'area della regione colorata.
c. Determina il valor medio μ di X.

$\left[\textbf{a.}\ \lambda=\frac{1}{2};\ \textbf{b.}\ 1-\frac{\sqrt{e}}{e};\ \textbf{c.}\ \mu=2\right]$

12 In figura è rappresentata una curva gaussiana il cui punto di massimo ha coordinate $\left(2, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$. Individua i parametri della distribuzione rappresentata, quindi calcola l'area della parte colorata.



[Circa 0,68]

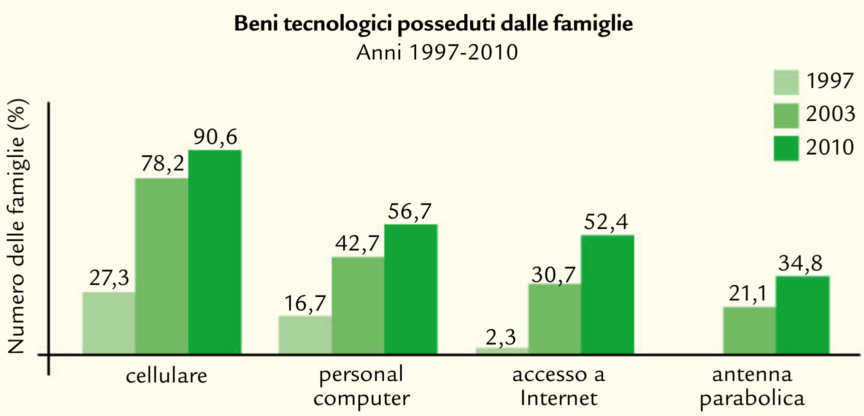
13 Una società di prodotti surgelati vende in media 500 000 pizze all'anno. Su ogni pizza venduta, la società guadagna 1 euro. Una catena di supermercati propone alla società di produrre pizze per il marchio della catena, offrendo alla società un guadagno di 0,40 euro per ogni pizza venduta. La produzione delle pizze sotto il marchio della catena di supermercati fa perdere alla società una parte della quota di mercato sul marchio originario della società, ma la nuova quota di mercato guadagnata sotto il marchio dei supermercati è stimata ampiamente superiore alla quota persa sotto il marchio originario. Precisamente, in base ad alcune analisi di mercato, si stima che possano verificarsi le tre possibilità nella tabella qui sotto riportata, ciascuna con le probabilità indicate.

Possibilità	1	2	3
Probabilità che si verifichi	25%	40%	35%
Quota di mercato perduta sotto il marchio originario della società	–10%	–15%	–20%
Quota di mercato guadagnata sotto il nuovo marchio dei supermercati	+25%	+40%	+50%

a. Nell'ipotesi che la società accetti la proposta dei supermercati, il guadagno annuale complessivo, ottenuto sia dalla vendita di pizze sotto il marchio originario sia dalle vendite di pizze sotto il nuovo marchio, è una variabile aleatoria X. Determina la distribuzione di probabilità di X.

b. Confronta il guadagno annuale normalmente ottenuto dalla società dalla vendita di 500 000 pizze con quello atteso nel caso accetti la proposta della catena di supermercati e stabilisci se accettare l'offerta è conveniente.

14 Osserva il seguente diagramma, derivante dalle rilevazioni Istat (*Italia in cifre*, 2011).



Si scelgono a caso e in modo indipendente 10 famiglie italiane.

a. Se le famiglie fossero state scelte nel 1997, quale sarebbe stata la probabilità che almeno una di esse avesse un personal computer?

b. Se le famiglie fossero state scelte nel 2003, quale sarebbe stata la probabilità che esattamente la metà di esse avessero un accesso a Internet?

c. Se le famiglie fossero state scelte nel 2010, quale sarebbe stata la probabilità che esattamente 6 di esse avessero una antenna parabolica?

Fornisci tutti i risultati arrotondati, in percentuale. [**a.** 84%; **b.** 11%; **c.** 7%]

Verso la prova Invalsi

1 La seguente tabella descrive la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta X.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	k	0

a. Qual è il valore di k?

A $\frac{1}{21}$ B $\frac{1}{22}$ C $\frac{1}{14}$ D $\frac{1}{42}$

b. Un'urna contiene 4 palline rosse, 3 verdi e 2 bianche. Si estraggono simultaneamente 4 palline dall'urna. La tabella precedente descrive la distribuzione di probabilità di quale delle seguenti variabili aleatorie?

A La variabile aleatoria che conta il numero complessivo di palline rosse estratte
B La variabile aleatoria che conta il numero complessivo di palline verdi estratte
C La variabile aleatoria che conta il numero complessivo di palline bianche estratte
D Nessuna delle precedenti

c. Qual è il valore medio della variabile aleatoria individuata al punto **b**?

Risposta: ....

2 Per quale valore di k la funzione $f(x)=\begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ rappresenta una densità di probabilità?

A Per $k=\frac{1}{8}$ C Per ogni valore reale di k

B Per $k=\frac{1}{9}$ D Per nessun valore reale di k

3 Il tempo di attesa (espresso in minuti) presso un ufficio postale si può modellizzare tramite una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 0{,}125$. Qual è il tempo medio di attesa presso quell'ufficio postale?

A 5 minuti
B 8 minuti
C 10 minuti
D 12 minuti e mezzo

4 Un gioco consiste nel lanciare un dado regolare a sei facce. Se esce un numero minore o uguale a 4 si perdono 2 euro, mentre se esce un numero maggiore di 4 si vincono 4 euro. Paolo ripete questo gioco moltissime volte. Ritieni che alla fine avrà perso, avrà guadagnato o si ritroverà all'incirca con la stessa cifra iniziale?

A Avrà perso
B Si ritroverà all'incirca con la stessa cifra iniziale
C Avrà guadagnato

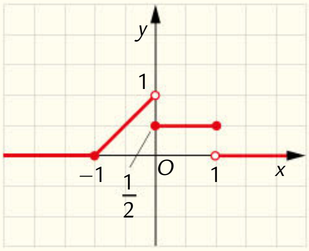
Motiva la tua risposta:

....

....

5 In riferimento alla funzione in figura, quale affermazione è *falsa*?

A La funzione è continua in $x=-1$.
B La funzione è derivabile per ogni valore reale di x con $x \neq 0$ e $x \neq 1$.
C La funzione rappresenta una densità di probabilità.
D La funzione non è invertibile.



6 Scelto a caso un numero nell'intervallo [0, 10], qual è la probabilità che tale numero verifichi la disequazione $x^2 - 9x + 18 \geq 0$?

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{7}{10}$ C $\frac{3}{5}$ D $\frac{1}{3}$

7 Un'urna contiene una sola pallina bianca e due palline nere. Si effettuano 10 estrazioni successive dall'urna con reimmissione a ogni estrazione della pallina precedentemente estratta. La probabilità che tra le 10 palline estratte quelle bianche siano esattamente 3 è uguale a:

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7$	$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7$	$\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7$	$\binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7$	$\frac{2^9 \cdot 5}{3^9}$
V F	V F	V F	V F	V F

8 Una variabile aleatoria X ha come densità la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Qual è il valore medio di X?

A ln 4

B ln 8

C ln 9

D Nessuno dei precedenti

9 Scrivi al di sotto di ciascuno dei fenomeni descritti nella prima riga quale modello (tra quello uniforme, esponenziale o normale) è il più adatto a descriverlo.

L'altezza degli uomini italiani	Il tempo di vita (ossia il tempo prima che si verifichi il primo guasto) di un componente elettronico non soggetto a usura.	La misura di una grandezza fisica tramite uno strumento.	La scelta a caso di un punto su un segmento.
Modello:	Modello:	Modello:	Modello: ....

10 La durata di vita (in ore) di un componente elettronico è modellizzata da una variabile aleatoria di distribuzione esponenziale, con parametro $\lambda = 0{,}0002$. Qual è la probabilità che la durata di vita del componente sia superiore alle 10 000 ore? I risultati sono arrotondati alla terza cifra decimale.

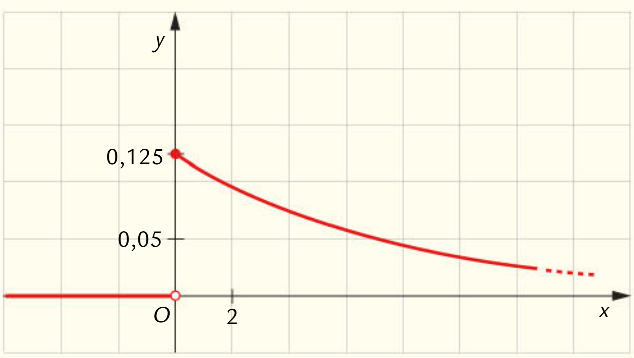
A 0,271

B 0,135

C 0,865

D 0,729

11 Il tempo di attesa, in minuti, allo sportello di un ufficio bancario è una variabile aleatoria di densità esponenziale, il cui grafico è quello riportato in figura. Qual è il tempo medio di attesa allo sportello?



Risposta: ....

12 Un'urna contiene 10 palline, di cui 6 nere e 4 rosse. Vengono estratte successivamente 5 palline dall'urna. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. se le estrazioni avvengono senza reimmissione, la variabile aleatoria X che conta il numero di palline nere complessivamente estratte ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 5$ e $p = 0{,}6$ V F

b. se le estrazioni avvengono senza reimmissione, la probabilità di estrarre nelle cinque estrazioni esattamente 3 palline nere è uguale a $\frac{10}{21}$ V F

c. se le estrazioni avvengono con reimmissione, la variabile aleatoria X che conta il numero di palline nere complessivamente estratte ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 5$ e $p = 0{,}6$ V F

d. se le estrazioni avvengono con reimmissione, la probabilità di estrarre nelle cinque estrazioni esattamente 3 palline nere è uguale a $\frac{216}{625}$ V F

13 Il primo dei due esami da affrontare per il conseguimento della patente di guida «B» è una prova a quiz. Si tratta di una scheda costituita da 40 domande, per ciascuna delle quali bisogna indicare una risposta (VERO o FALSO). Per superare la prova non si devono commettere più di 4 errori.

a. Mario si presenta all'esame senza essersi preparato e decide che risponderà alle domande in modo casuale, lanciando una moneta per scegliere ciascuna risposta.
Qual è la probabilità che superi l'esame?

A $\left(\frac{1}{2}\right)^{36}$ B Circa $\frac{1}{100}$ C Circa $\frac{1}{1\,000\,000}$ D Circa $\frac{1}{100\,000\,000}$

b. Luca si è preparato, ma conosce la risposta esatta solo di 34 quesiti; decide allora che risponderà alle altre 6 domande in modo casuale, lanciando una moneta per scegliere ciascuna risposta.
Qual è la probabilità che superi l'esame?

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{21}{32}$ C $\frac{3}{32}$ D $\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$

14 In un'indagine condotta per valutare gli effetti della velocità delle automobili sulla gravità degli incidenti, si sono esaminati 5000 verbali di incidenti automobilistici mortali e per ciascuno di essi si è registrata la velocità dell'impatto. Si è calcolato che la velocità media era di 110 km/h e la deviazione standard di 20 km/h. Assumi che la velocità di impatto sia una variabile aleatoria di distribuzione normale.

a. Qual era approssimativamente la percentuale di veicoli che al momento dell'impatto aveva una velocità compresa tra i 90 km/h e i 130 km/h?

A Circa 68%
B Circa 95%
C Circa 99%
D Nessuna delle precedenti

b. Approssimativamente, quanti veicoli avevano velocità superiore ai 100 km/h? Arrotonda il risultato a un numero intero.

Risposta: ....

....

Compito di realtà 1

Controllo di qualità

La quantità di acqua effettivamente contenuta in una bottiglia di una certa marca, dichiarata da 1 litro, è una variabile aleatoria normale di deviazione standard $\sigma = 0{,}03$ litri e media μ che dipende da come è regolato il sistema di riempimento automatico delle bottiglie. Una bottiglia è conforme se la quantità di acqua in essa contenuta è al massimo del 5% in meno della quantità dichiarata, altrimenti è da scartare.

1 Supposto che sia $\mu = 1$, qual è la probabilità che una bottiglia scelta a caso tra quelle prodotte sia da scartare?

Le bottiglie vengono vendute in confezioni da 6; supponi che ciascuna bottiglia contenuta nella confezione possa risultare eventualmente non conforme indipendentemente dalle altre.

2 Calcola la probabilità che in una singola confezione ci sia *almeno* una bottiglia non conforme.

3 Calcola la probabilità che in una singola confezione ci siano *esattamente* due bottiglie non conformi.

4 Calcola il numero medio di bottiglie **non** conformi contenute in 10 confezioni.

Il sistema di riempimento automatico si ritiene funzionare correttamente quando la probabilità che una bottiglia prodotta risulti conforme è del 99%.

5 Quale deve essere il valore di μ affinché il sistema di riempimento funzioni correttamente?

6 Si effettua un controllo di qualità su un campione di 1000 bottiglie e 20 non risultano conformi. Ritieni che il sistema di produzione funzioni correttamente, al livello del 95%?

Risposte p. 392

Compito di realtà 2

Test diagnostico

Gli studi effettuati su un test per diagnosticare una certa malattia hanno portato a concludere che:

- **la probabilità che una persona affetta dalla malattia risulti positiva al test è uguale al 98%;**
- **la probabilità che una persona non affetta dalla malattia risulti positiva al test è uguale all'1%.**

Si definisce *sensibilità* di un test diagnostico la probabilità (espressa in percentuale) che una persona malata che si sottopone al test risulti positiva e *specificità* del test la probabilità che una persona sana che si sottopone al test risulti negativa.

1 Individua la sensibilità e la specificità del test diagnostico in esame.

Su un campione di 1000 individui è risultato, senza margini di errore (perché più volte sottoposti al test), che 6 sono affetti dalla malattia.

2 Determina un intervallo di confidenza, al livello del 95%, dell'incidenza della malattia, cioè della percentuale di individui della popolazione che ne sono affetti.

Supponiamo che l'incidenza della malattia sia uguale allo 0,6%. Si definisce *valore predittivo* di un esito *positivo* la probabilità di presenza effettiva della malattia in un soggetto con test positivo.

3 Calcola il valore predittivo di esito positivo del test diagnostico in esame.

4 Supponi ora, più in generale, che l'incidenza della malattia sia p (mentre prima del punto **3** abbiamo supposto $p = 0{,}6\% = 0{,}006$). Esprimi in funzione di p il valore predittivo V^+ di esito positivo. Al crescere dell'incidenza della malattia nella popolazione, cioè al crescere di p, il valore predittivo V^+ cresce o decresce? Per una malattia rara (quindi con p molto piccolo), come risulta V^+? Come deve essere p affinché V^+ risulti superiore al 90%?

Si definisce *accuratezza* del test la probabilità di corretta diagnosi (ossia di un esito positivo in presenza della malattia o di un esito negativo in assenza della malattia).

5 Calcola l'accuratezza del test diagnostico, nel caso in cui $p = 0{,}6\%$.

Risposte p. 393

Simulazione 1

1 Nell'istituto scolastico di Marcello, il rapporto tra il numero di studenti di sesso maschile e il numero di studentesse è decisamente sfavorevole a queste ultime: precisamente, è $\frac{17}{2}$. Sapendo che il numero complessivo degli studenti (di entrambi i sessi) iscritti alla scuola è 779, quante sono le studentesse?

Risposta: ....

2 Il numero dei residenti nel comune di Valentina è in lieve ma costante aumento, negli ultimi anni. La tabella riporta i residenti nel 2003 e nel 2018:

Anno	2003	2018
Residenti	12 340	12 610

a. Assumendo che la popolazione aumenti *linearmente* (cioè con tasso di crescita costante nel tempo), la legge che esprime il numero y dei residenti nel comune di Valentina in funzione dell'anno x considerato è:

$$y = m(x - 2003) + 12\,340$$

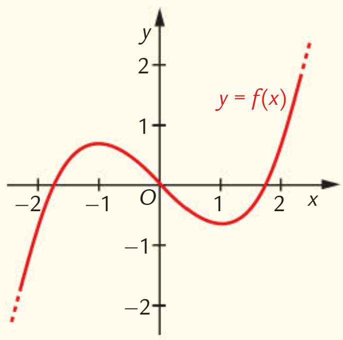
con m coefficiente opportuno. Qual è l'esatto valore di m?

Risposta: $m =$ ....

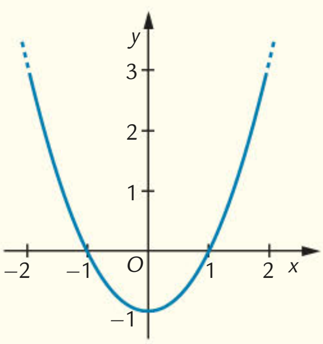
b. Stando a questo modello, quale sarà il numero dei residenti nell'anno 2028?

Risposta: ....

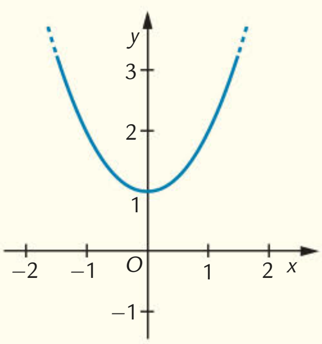
3 La funzione $y = f(x)$ ha il grafico rappresentato.



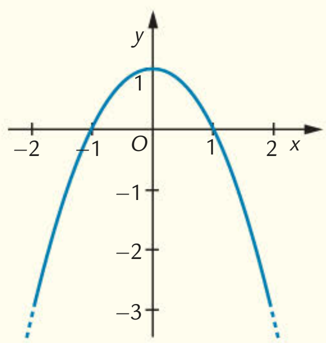
Quale dei seguenti quattro grafici rappresenta il grafico della sua derivata prima?



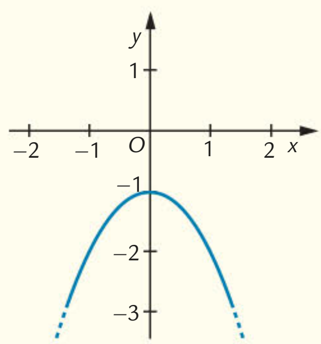
A



B



C



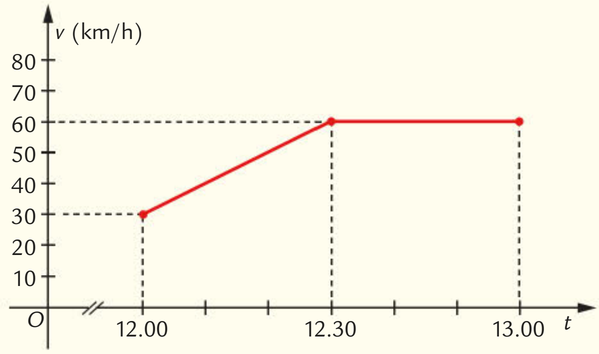
D

4 La finale del singolare di Wimbledon è molto combattuta: i due tennisti A e B hanno infatti la stessa probabilità di vincere un set: 50%. Il tennista B è in vantaggio di 2 set a 0, ma A potrebbe recuperare e vincere l'incontro per 3 set a 2 (gli incontri disputati al torneo di Wimbledon sono al meglio dei 5 set). Qual è la probabilità che il giocatore A vinca la partita?

A 12,5%
B 25%
C 50%
D Nessuna delle precedenti risposte è corretta

5 In figura è tracciato il grafico della velocità v, in km/h, dell'autovettura del prof. Graziani, dalle ore 12.00 alle ore 13.00. Calcola lo spazio, in kilometri, percorso da Graziani nell'intervallo di tempo considerato.

Risposta: ....,..... km



6 La pizza «baby» che prepara Raffaele mantiene la stessa forma circolare e lo stesso spessore della normale pizza margherita, ma è preparata utilizzando metà dell'impasto necessario per quest'ultima. Se il raggio della pizza normale è 18 cm, qual è (in centimetri) il *diametro* della pizza «baby» di Raffaele? Fornisci la soluzione arrotondata a un numero intero.

Risposta: .... cm

7 **a.** Considera l'equazione $x\,(x+4) = -5$. Che cosa puoi affermare circa le sue soluzioni?

- A Ha due soluzioni intere.
- B Ha due soluzioni reali irrazionali.
- C Ha due soluzioni complesse non reali.
- D Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

b. Secondo Laura, l'equazione $x\,(x+4) = c$, ove c è una costante *positiva*, ha sempre due soluzioni reali distinte. Ha ragione? Fornisci una breve ma convincente spiegazione.

☐ Sì, Laura ha ragione perché ....

☐ No, Laura non ha ragione perché ....

8 Considera i quattro numeri seguenti:

$a = 8^{64} \quad b = 2^{2^{64}} \quad c = 2^{128} \quad d = 2^{64^2}$

a. Disponili in ordine crescente.

Risposta: ..... < ..... < ..... < .....

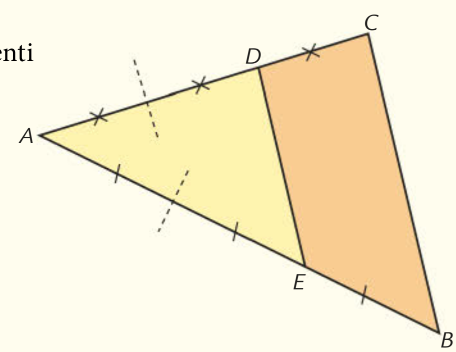
b. Sfruttando la (buona) approssimazione $2^{10} = 1024 \simeq 1000 = 10^3$, individua qual è la potenza di 10 che più si avvicina al numero 2^{300}.

- A 10^{60}
- B 10^{70}
- C 10^{80}
- D 10^{90}

9 Osserva il triangolo ABC in figura e le indicazioni in essa riportate. Sapendo che l'area del triangolo è 45 cm^2, è possibile determinare l'area del trapezio $DEBC$?

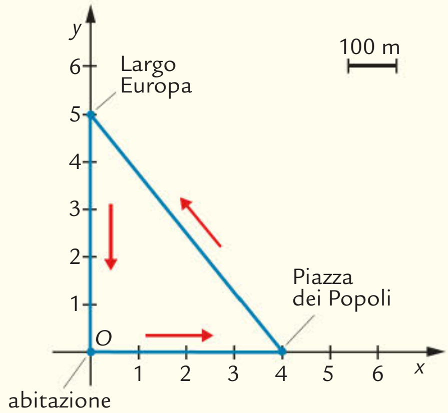
☐ Sì, l'area è uguale a ..... cm^2

☐ No, le informazioni sono insufficienti



10 Per mantenersi in forma, il dottor Zanone ha la buona abitudine di correre lungo le vie del centro cittadino. Per ben 7 volte egli completa il percorso indicato nel piano cartesiano in figura: da casa procede verso Piazza dei Popoli; successivamente si dirige verso Largo Europa; infine, punta nuovamente verso la propria abitazione. Quanti kilometri percorre il dottor Zanone? Riporta il numero *intero* che meglio approssima tale distanza.

Risposta: .... km



11 Un punto materiale si muove di moto rettilineo; la legge oraria del moto, cioè la funzione che esprime la posizione $s(t)$ (in metri) del punto in dipendenza dal tempo t (in secondi) trascorso, è la seguente:

$$s(t) = \frac{t^2}{4} + t$$

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) oppure falsa (F).

a. l'accelerazione del punto è costante nel tempo (cioè il moto è uniformemente accelerato) V F

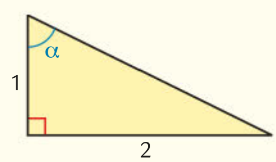
b. all'istante $t = 4$ il punto occupa la stessa posizione iniziale, cioè quella occupata quando $t = 0$ V F

c. la velocità del punto è funzione crescente del tempo V F

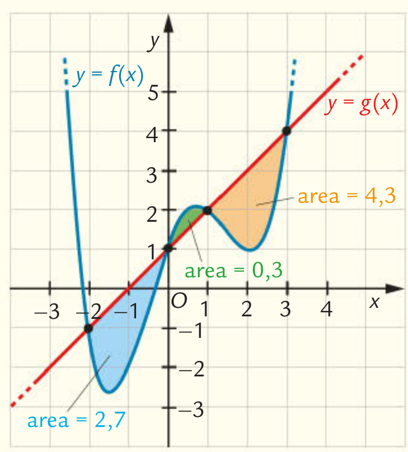
d. la velocità dopo 10 s è 6 m/s V F

12 Quale delle seguenti affermazioni, relative all'ampiezza dell'angolo α in figura, è vera?

A È minore di 45°.
B È compresa tra 45° e 60°.
C È esattamente 60°.
D È maggiore di 60°.



13 In figura sono tracciati il grafico di una funzione di equazione $y = f(x)$ e il grafico di una retta di equazione $y = g(x)$. La retta interseca il grafico della funzione f nei quattro punti di ascisse –2, 0, 1 e 3 e le aree delle tre regioni finite di piano colorate, limitate dai grafici di f e di g, sono annotate in figura.



a. Qual è il valore dell'integrale $\int_{-2}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx$?

Risposta: ....

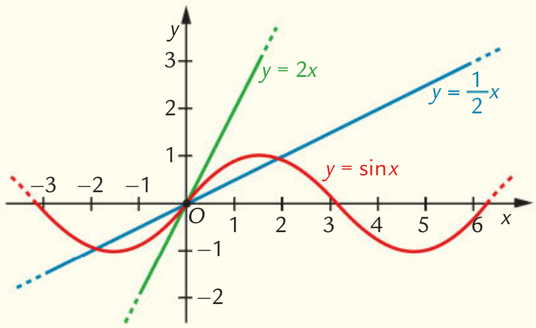
b. Qual è il valore dell'integrale $\int_{-2}^{3} |f(x) - g(x)|\,dx$?

Risposta: ....

14 Federica deve risolvere l'equazione $\log_{10} x^2 = \log_{10}^2 x$. Aiutala a stabilire per quali valori reali di x essa è verificata.

A Per nessun numero reale
B Per tutti i numeri reali positivi
C Per tutti i numeri reali diversi da 0
D Per due numeri reali

15 In figura sono rappresentati:
– la sinusoide di equazione $y = \sin x$;
– due rette del fascio (proprio) di rette aventi centro nell'origine, di equazione $y = mx$.



Sia $N(m)$ la funzione che esprime il numero delle soluzioni dell'equazione $\sin x = mx$ in dipendenza dal coefficiente angolare m. Avvalendoti dell'interpretazione grafica, indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera (V) oppure falsa (F):

a. $N(2) = 1$ V F

b. $\lim_{m \to 0^+} N(m) = +\infty$ V F

c. $N\left(\frac{1}{3}\right) = 5$ V F

d. $\lim_{m \to +\infty} N(m) = 0$ V F

16 La velocità $v(t)$ (in metri al secondo) di un paracadutista in caduta libera (cioè prima che si apra il paracadute):
– è nulla al tempo iniziale $t = 0$;
– aumenta all'aumentare del tempo t trascorso dal lancio;
– a causa delle varie forze di attrito, non può superare la velocità di 80 m/s.

Quale delle seguenti funzioni costituisce un modello adatto per rappresentare la velocità del paracadutista?

A $v(t) = 80\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$

B $v(t) = 80\left(1 + e^{-\frac{t}{10}}\right)$

C $v(t) = 40\left(e^{\frac{t}{10}} - 1\right)$

D $v(t) = 80\left(1 - 2e^{-\frac{t}{10}}\right)$

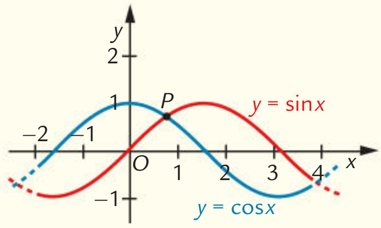
17 Considera le due rette r ed s di equazioni:

r: $2x + 3y - 1 = 0$ s: $2x - 3y + 4 = 0$

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) oppure falsa (F).

a. il coefficiente angolare di r è 2 V F
b. le rette r ed s sono perpendicolari V F
c. la retta s attraversa il quarto quadrante V F
d. le rette r ed s si intersecano in un punto del secondo quadrante V F

18 Quali sono le coordinate del punto P in figura?



Risposta: $P\left(\frac{\pi}{.....}, \frac{\sqrt{.....}}{.....}\right)$

19 **a.** Considera i polinomi $P(x) = x^2 - 4$ e $Q(x) = x^2 - 3x + 2$.

Relativamente al limite $\lim_{x \to 2} \frac{P(x)}{Q(x)}$, individua l'unica affermazione corretta.

A Il limite non esiste, perché $Q(2) = 0$ (il denominatore si annulla in corrispondenza di $x = 2$).

B Il limite non esiste, perché $P(2) = Q(2) = 0$ (il limite si presenta nella forma d'indecisione $\frac{0}{0}$).

C Il limite esiste ed è uguale a 4.

D Il limite esiste ed è uguale 1.

b. Considera la funzione $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, definita nel suo dominio naturale. Individua l'unica affermazione corretta.

A La funzione $f(x)$ ha due asintoti verticali e due asintoti orizzontali.

B La funzione $f(x)$ ha un asintoto verticale e un asintoto obliquo.

C La funzione $f(x)$ ha un asintoto verticale e un asintoto orizzontale.

D La funzione $f(x)$ ha due asintoti verticali e un asintoto orizzontale.

20 **a.** In matematica finanziaria, la formula che esprime, in regime di capitalizzazione composta, il montante M in funzione del capitale investito C, del tasso d'interesse annuo i e del periodo t misurato in anni, è $M = C(1+i)^t$. Quale delle quattro formule seguenti esprime il periodo t dell'investimento finanziario in funzione di M, C e i?

A $t = \log_{1+i} M - \log_{1+i} C$

B $t = \log_1\left(\frac{M}{C}\right) + \log_i\left(\frac{M}{C}\right)$

C $t = \sqrt[1+i]{\frac{M}{C}}$

D $t = \log_{1+i}(MC)$

b. Qual è la formula che esprime il tasso d'interesse annuo i in funzione di M, C e t?

A $i = \left(\frac{M}{C} - 1\right)^{\frac{1}{t}}$

B $i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$

C $i = \log_t\left(\frac{M}{C} - 1\right)$

D $i = \log_t\left(\frac{M}{C}\right) - 1$

21 La circonferenza in figura ha centro $C(1, 1)$ e passa per l'origine O degli assi e per il punto P.

a. Qual è l'equazione della circonferenza?

Risposta: ....

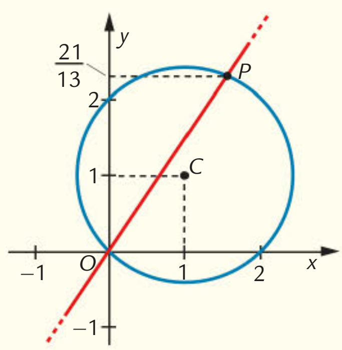
b. Qual è la pendenza della retta OP?

A $\frac{3}{2}$

B $\frac{9}{5}$

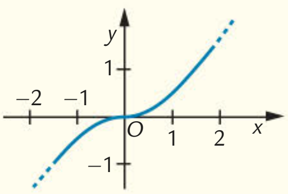
C 2

D Nessuna delle precedenti

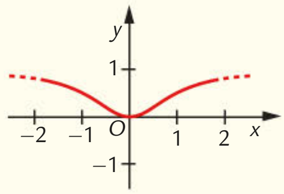


22 Completa la tabella, associando a ciascuna funzione il rispettivo grafico, scelto tra i quattro in figura.

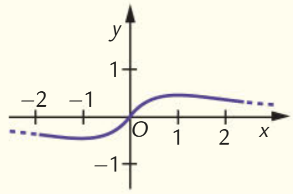
a. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ **b.** $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ **c.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **d.** $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$



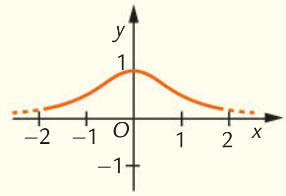
A



B



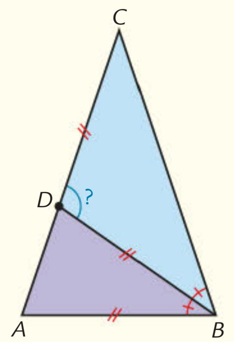
C



D

Funzione	Grafico
a	....
b	....
c	....
d	....

23 Il triangolo ABC in figura gode di una proprietà interessante: esso viene suddiviso dalla bisettrice dell'angolo alla base $\widehat{B}$ in due triangoli isosceli, ABD e BCD. Determina l'ampiezza in gradi dell'angolo $B\widehat{D}C$.



Risposta: $B\widehat{D}C=$ ....

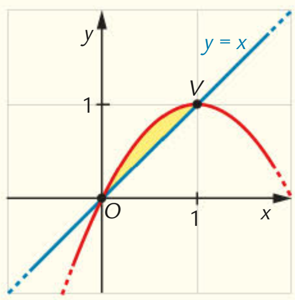
24 **a.** Riferisciti alla figura e deduci dalle indicazioni l'equazione cartesiana della parabola, tra quelle proposte. Osserva in particolare che la retta di equazione $x=1$ è l'asse di simmetria della parabola.

A $y=x^2-2x$

B $y=x^2+2x$

C $y=-x^2-2x$

D $y=-x^2+2x$



b. Calcola l'area A del segmento parabolico colorato in giallo. Per rispondere, ti basterà completare il risultato qui di seguito.

Risposta: $A=\dfrac{1}{\dots\dots}$

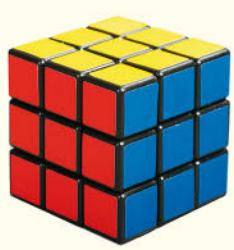
25 Il familiare cubo di Rubik è formato da $3^3=27$ cubetti uguali. Indichiamo con a la lunghezza degli spigoli di tali cubetti. Quale delle seguenti formule esprime la superficie totale S del solido ottenuto asportando dal cubo di Rubik gli otto cubetti posti «agli angoli»?

A $S=48a^2$

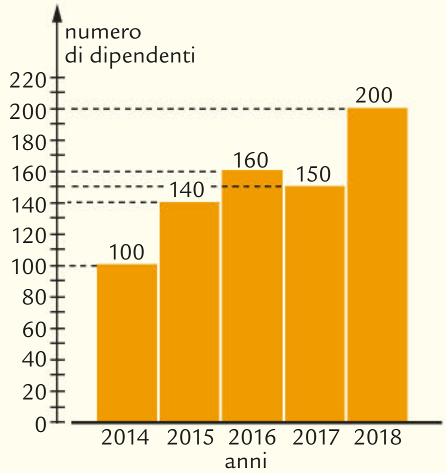
B $S=54a^2$

C $S=60a^2$

D $S=68a^2$



26 Il diagramma riporta il numero dei dipendenti di un'azienda meccanica nel corso del quinquennio 2014-2018.



Marco afferma che l'anno di massimo incremento assoluto del numero dei dipendenti dell'azienda non corrisponde all'anno di massimo incremento relativo (cioè rapportato al numero di dipendenti dell'anno precedente). Marco ha ragione? Riporta il tuo argomento a favore o contro la sua affermazione.

☐ Sì, Marco ha ragione perché

....

....

....

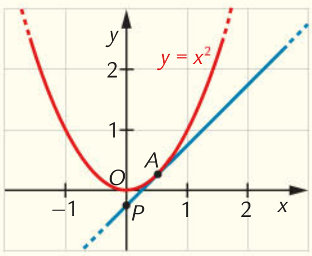
☐ No, Marco è in errore perché

....

....

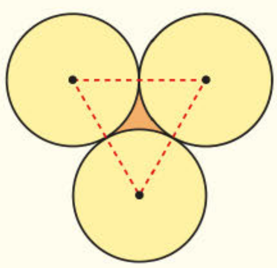
....

27 Riferisciti alla figura. Determina l'ordinata del punto P in cui la retta *tangente* alla parabola di equazione $y = x^2$ nel punto $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ interseca l'asse y.



Risposta: $y_P = -\frac{\dots}{\dots}$

28 Paolo vuole calcolare l'area A della regione (colorata in arancione) racchiusa dalle sue tre medaglie, di forma circolare e raggio 4 cm, disposte come in figura (cioè a due a due tangenti). Aiuta Paolo, scrivendo il risultato arrotondato alla prima cifra decimale.



Risposta: $A \simeq$ ..... cm^2

29 **a.** Il signor Aldo ha appena acquistato un paio di scarpe, scontate una prima volta del 20% sul prezzo iniziale e poi ulteriormente scontate del 20% sul prezzo ribassato. Calcola lo sconto complessivo applicato sul paio di scarpe, esprimendolo (come di consueto) in percentuale.

Risposta: .... %

b. Aldo ha pagato per il paio di scarpe 48 euro. Qual era il loro prezzo prima degli sconti?

Risposta: .... euro

30 Giorgio pedala per 5 km in salita, alla velocità costante di 10 km/h. Poi percorre a ritroso lo stesso tragitto, sfrecciando in discesa alla velocità costante di 50 km/h. Qual è la velocità media tenuta da Giorgio lungo l'intero percorso di 10 km (andata e ritorno)?

A Inferiore a 20 km/h

B Esattamente 20 km/h

C Compresa tra 20 km/h e 30 km/h

D Esattamente 30 km/h

31 Secondo Alberto, per nessun valore del parametro reale k la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2kx-1 & x\le 0\\ 2x+k & x>0\end{cases}$$

risulta derivabile in $x = 0$. Al contrario, Paola ribatte che per $k = 1$ la funzione $f(x)$ risulta derivabile in $x = 0$. Chi dei due ha ragione?

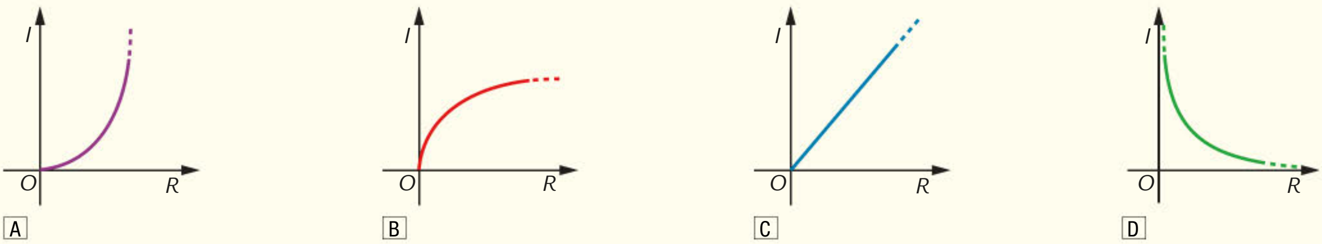
☐ Alberto, perché ....

☐ Paola, perché ....

32 In un circuito elettrico, la relazione tra la tensione V, la resistenza R e l'intensità di corrente I che lo percorre è espressa dalla nota legge di Ohm:

$V = RI$

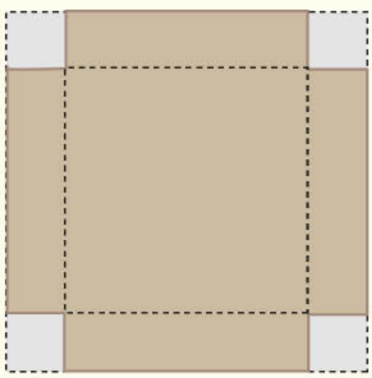
Supponendo V costante e maggiore di zero, quale dei grafici proposti in figura rappresenta bene la relazione tra l'intensità di corrente I e la resistenza R?



33 Alberto ha a disposizione un pezzo di cartone di forma quadrata di 2500 cm^2 e vuole costruire una scatola senza coperchio, a forma di parallelepipedo rettangolo. Alberto ritaglia dai quattro angoli del cartone quattro quadrati congruenti di lato opportuno e poi costruisce la scatola con la parte di cartone rimasta.

a. Supponi che i quattro quadrati ritagliati abbiano lato di lunghezza (in centimetri) uguale a x. Scrivi l'espressione analitica della funzione che esprime il volume V della scatola in funzione di x.

Risposta: $V(x) =$ ....



b. Alberto vuole ottenere la scatola avente la massima capacità possibile. Quanto cartone dovrà eliminare?

A Circa 69 cm^2

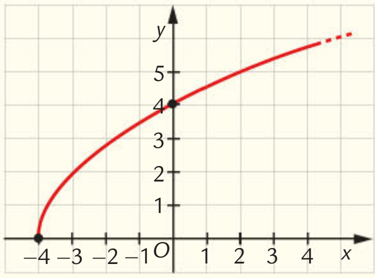
B Circa 277 cm^2

C Circa 400 cm^2

D Circa 533 cm^2

E I dati non sono sufficienti per rispondere

34 Il diagramma in figura è quello di una funzione avente espressione analitica del tipo $f(x) = k\sqrt{x+a}$, con a e k costanti opportune.



Quali sono i valori di a e di k, in base alle informazioni leggibili sul grafico?

Risposta: $a =$ ...., $k =$ ....

35 Il professore ha chiesto a Riccardo quale figura geometrica è rappresenta nel piano cartesiano dall'equazione $(x+y)^2 = 1$. In tutta fretta, ma erroneamente, Riccardo ha risposto: «una retta». Invitato a prestare maggiore attenzione, Riccardo ha successivamente corretto il proprio errore. Qual è la risposta giusta?

A Una parabola
B Una circonferenza
C Un'iperbole
D L'unione di due rette parallele (non concidenti)

36 Sibilla vuole registrarsi a un sito Internet che fornisce le tracce degli esami di Stato degli ultimi dieci anni, con le relative soluzioni. Deve scegliere una password composta da 8 caratteri e che risponda ai seguenti requisiti:
– i caratteri ammessi sono lettere e cifre;
– le lettere devono essere scelte tra le 26 dell'alfabeto anglosassone (non si distingue tra maiuscole e minuscole);
– la password deve contenere almeno una cifra e almeno una lettera.

Tra quante password può scegliere Sibilla?

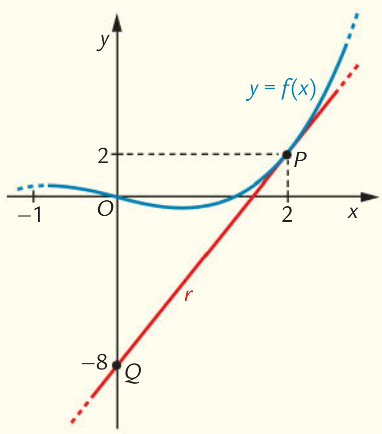
A $\dfrac{36!}{(36-8)!}$
B $26^8 + 10^8$
C $36^8 - 26^8 - 10^8$
D $\dfrac{36!}{(36-8)!} - \dfrac{26!}{(26-8)!} - \dfrac{10!}{(10-8)!}$

37 Considera la funzione $f(x) = x^3 + 2(a+1)x^2 + 4a$, dipendente dal parametro reale a. Per quale valore (quali valori) di a risulta $f'(x) = 3x^2$ per ogni $x \in \mathbf{R}$?

A Per nessun valore reale di a
B Per qualsiasi valore reale di a
C Per $a = 1$
D Nessuna delle precedenti risposte è corretta

38 La retta r in figura rappresentata in un sistema di riferimento **non** monometrico è tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ in $x = 2$. Qual è la derivata della funzione f in $x = 2$?

Risposta: $f'(2) =$ ....



39 Mario e Luca sono due studenti universitari e nel corso di studi hanno conseguito rispettivamente i seguenti voti:
– Mario: 27, 29, 27, 28, 24, 27
– Luca: 23, 22, 21, 23, 20, 22

Chi tra i due studenti ha dimostrato di avere un rendimento più costante? Giustifica in breve la tua risposta.

Risposta: ....

40 Anna ha comprato un cartone da 2 litri di succo d'arancia per la colazione. Mentre porta a casa la spesa, a causa del peso degli altri articoli che sono nella borsa della spesa il cartone si rompe e dal foro che si è formato inizia a uscire del succo. Supponi che dal foro vada perso l'8% del contenuto al minuto.

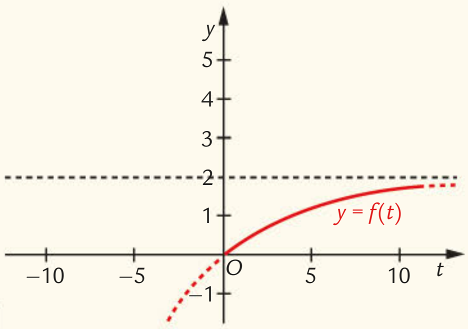
a. Completa la tabella

Minuti trascorsi	Succo rimasto nel cartone (in litri)
0	2
1	$2 \cdot 0{,}92$
2	....
3	....

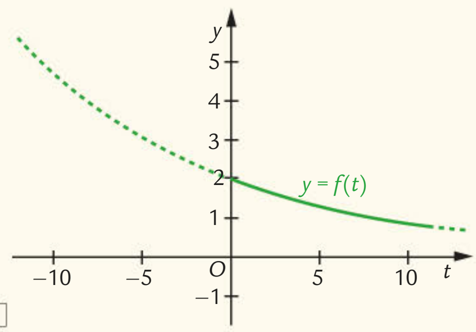
b. Scrivi l'espressione analitica della funzione che esprime la quantità di succo rimasto (in litri) dopo un tempo t (in minuti):

$f(t) =$ ....

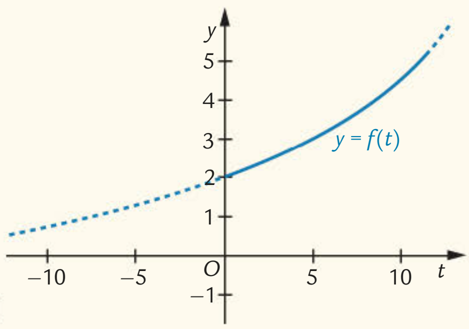
c. Quale dei seguenti quattro grafici rappresenta la funzione $y = f(t)$?



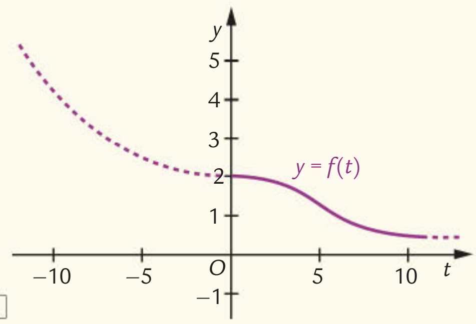
A



C



B



D

d. In quanto tempo va persa la metà del contenuto del cartone?

Risposta: ....

Risposte p. 393

Simulazione 2

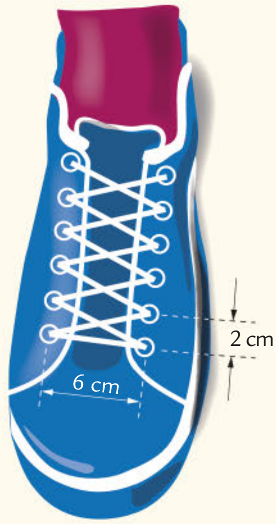
1 Osserva la scarpa di Stefano: presenta 12 occhielli, separati trasversalmente da una distanza di 6 cm e longitudinalmente da una distanza di 2 cm. Qual è la lunghezza L (in centimetri) del laccio della scarpa di Stefano? Supponi rettilinei tutti i tratti che uniscono gli occhielli.

A $L = 2(5\sqrt{10} + 3)$

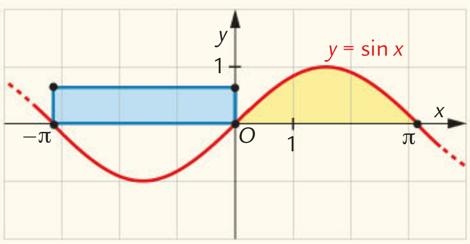
B $L = 2(10\sqrt{10} + 6)$

C $L = 2(10\sqrt{10} + 3)$

D $L = 2(5\sqrt{10} + 6)$



2 Il rettangolo colorato in azzurro in figura è equivalente alla regione colorata in giallo. Quanto misura l'altezza h del rettangolo? Arrotonda il risultato alla seconda cifra decimale.



Risposta: $h \simeq 0$,......

3 Siano x e y due numeri reali tali che $\log_2 x = y$. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) oppure falsa (F).

a. necessariamente $y > 0$ V F

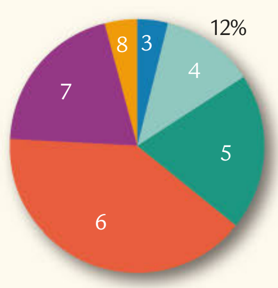
b. necessariamente $x > 0$ V F

c. $\log_2 x^2 = y^2$ V F

d. $\log_2 2x = y + 1$ V F

4 I voti ottenuti dagli studenti della III C in una verifica di matematica sono rappresentati nella tabella e nel grafico seguenti.

Voto	Numero studenti
3	1
4	3
5	5
6	10
7	?
8	1



a. Qual è il numero di studenti della classe?

Risposta: ....

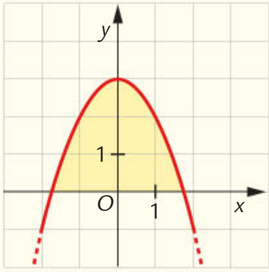
b. Qual è la media dei voti?

Risposta: ....

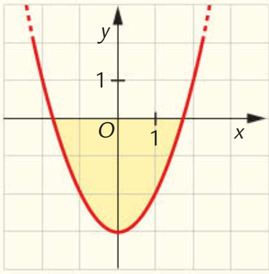
5 Considera il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$:

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < 3 - x^2\}$

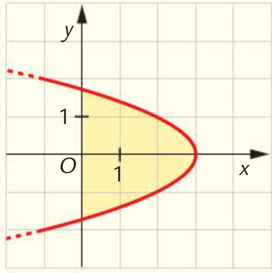
a. Qual è la sua rappresentazione nel piano cartesiano?



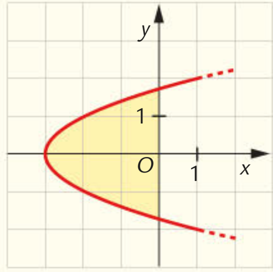
A



B



C

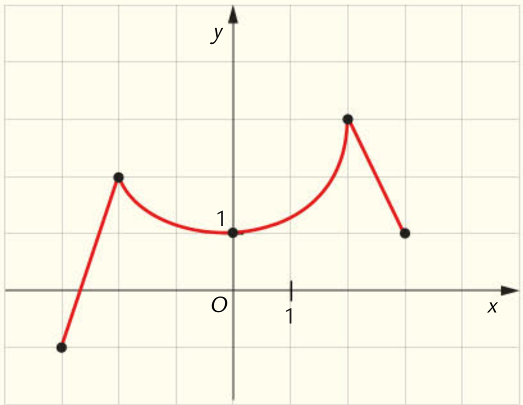


D

b. Quanti sono i punti appartenenti all'insieme Ω aventi coordinate *intere*?

Risposta: ....

6 Sulla base del grafico della funzione reale $f(x)$ riportato, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) oppure falsa (F).



a. vi è un solo punto di massimo assoluto per la funzione $f(x)$ V F

b. la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in tutto il suo dominio di definizione V F

c. la funzione $f(x)$ ha esattamente due zeri V F

d. in corrispondenza del punto di minimo assoluto della funzione $f(x)$, la tangente al grafico della funzione è orizzontale V F

7 La Commissione Olimpica deve compilare una lista di nomi tra cui scegliere quello della mascotte dei giochi che si terranno nel 2030. Affinché il nome sia facile da pronunciare in tutte le lingue, si è deciso che dovrà essere di quattro lettere e così composto: consonante, vocale, consonante, vocale. Le consonanti dovranno essere scelte tra le seguenti: C, D, F, G, K, L, M, N, P, S, T, V e le vocali tra A, E, I, O, U. Fra quanti nomi è possibile scegliere?

Risposta: ....

8 **a.** Nella scuola di Michele quest'anno ci sono tre prime. Esattamente l'80% degli studenti della classe 1A è stato promosso in seconda. Ancora meglio è andata in 1B, con una percentuale di promossi del 90%; per la classe 1C la percentuale dei promossi, purtroppo, è stata del 70%. Che cosa puoi concludere circa la percentuale *complessiva* dei promossi dalla prima alla seconda classe, nella scuola di Michele?

A È uguale all'80%

B È sicuramente diversa dall'80%

C È sicuramente compresa tra il 70% e il 90%

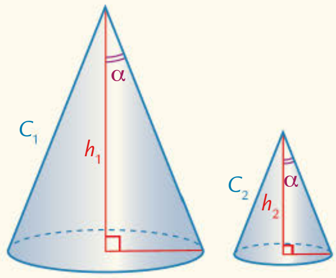
D Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta

b. Ora hai un'informazione supplementare: il numero degli studenti in 1B è uguale al numero degli studenti in 1C. Per determinare la percentuale complessiva dei promossi, questa informazione aggiuntiva è rilevante oppure no? Spiega.

☐ Sì, è rilevante, perché ....

☐ No, non è rilevante, perché ....

9 I due coni circolari retti in figura, C_1 e C_2, hanno lo stesso angolo di apertura α: sono quindi *simili*. Inoltre, il rapporto tra le rispettive altezze h_1 e h_2 è 2.



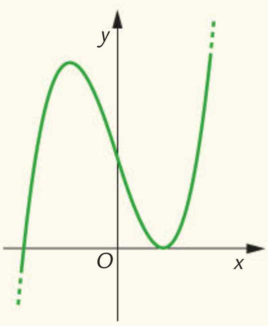
a. Stabilisci, se possibile, il rapporto tra i rispettivi volumi, V_1 e V_2:

A 4
B 6
C 8
D Non è possibile stabilirlo: dipende dall'angolo d'apertura α

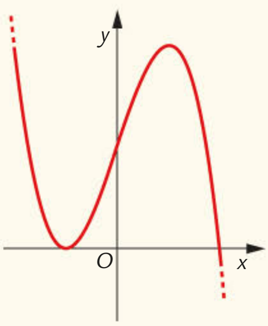
b. Se si vuole che il rapporto tra i volumi V_1 e V_2 sia 2, in quale rapporto devono stare le rispettive altezze?

A $\sqrt[3]{2}$
B $\sqrt[3]{4}$
C $\sqrt{2}$
D Non è possibile stabilirlo: dipende dall'angolo d'apertura α

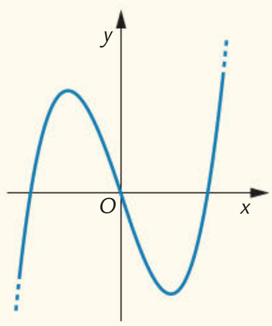
10 **a.** Associa alla funzione polinomiale di terzo grado $f(x) = x^3 - 3x + 2$ il grafico corrispondente.



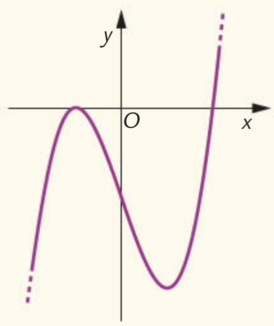
A



B



C



D

b. Qual è il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico di $f(x)$ in corrispondenza del punto di flesso?

Risposta: $m =$ ....

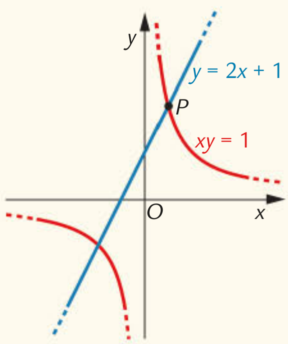
c. Alessio afferma che ogni funzione polinomiale di terzo grado ha un unico punto di flesso. Ritieni che abbia ragione? Se sì, giusitfica la risposta; altrimenti, fornisci un controesempio.

☐ Sì, Alessio ha ragione
☐ No, Alessio è in errore

Giustificazione: ....

....

11 Il punto P in figura, appartenente al primo quadrante, è il punto d'intersezione della retta di equazione $y = 2x + 1$ e dell'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$. Che cosa puoi dire circa le coordinate di P?



A Sono entrambe numeri razionali
B Sono entrambe numeri irrazionali
C L'ascissa è razionale ma non l'ordinata
D L'ordinata è razionale ma non l'ascissa

12 Considera la successione a_n di numeri naturali definita per ricorrenza come segue:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases} \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

a. Indica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa.

1. qualunque sia il numero naturale n, il termine a_n è dispari V F
2. $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ V F
3. il numero 11 è un termine della successione a_n (cioè per qualche numero naturale $n \neq 0$ risulta $a_n = 11$) V F
4. la successione a_n è strettamente crescente V F

b. Quale dei seguenti è il termine generale della successione definita ricorsivamente all'inizio?

A $a_n = 2n + 1$

B $a_n = 2n - 1$

C $a_n = 2^n + 1$

D $a_n = 2^n - 1$

13 Se $4^x = 3$, allora:

A $12^x = 9$

B $16^x = 9$

C $2^x = \dfrac{3}{2}$

D $8^x = 6$

14 Una sola delle quattro funzioni elencate è *primitiva* della funzione $f(x) = x(3x - 6)$. Quale?

A $F(x) = 6x - 6$

B $F(x) = \dfrac{x^2}{2} \cdot \left(\dfrac{3x^2}{2} - 6x\right)$

C $F(x) = x^3 - 3x^2$

D $F(x) = 3x^3 - 6x^2$

15 Tina estrae un numero della tombola. Qual è la probabilità p che esso non sia multiplo *né* del 10 *né* del 6? Ricorda che i numeri della tombola vanno dall'1 al 90 (inclusi). Fornisci la risposta in percentuale, arrotondando all'intero.

Risposta: $p \simeq$ ...%.

16 Ordina in senso *crescente* i tre numeri seguenti:

$x = \log_2 5 \qquad y = 3\log_3 2 \qquad z = 2\log_5 2$

Risposta: ..... < ..... < .....

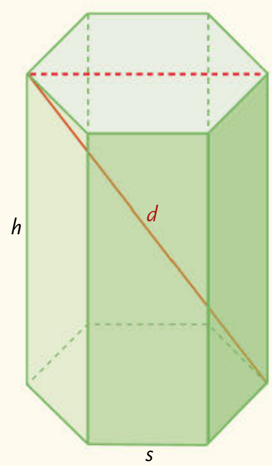
17 Si vuole determinare la misura della diagonale *maggiore* di un prisma regolare (quindi retto) a basi esagonali, sapendo che lo spigolo di base misura s e che l'altezza del prisma è h. Quale delle seguenti formule fornisce tale misura?

A $d = \sqrt{s^2 + h^2}$

B $d = \sqrt{2s^2 + h^2}$

C $d = \sqrt{3s^2 + h^2}$

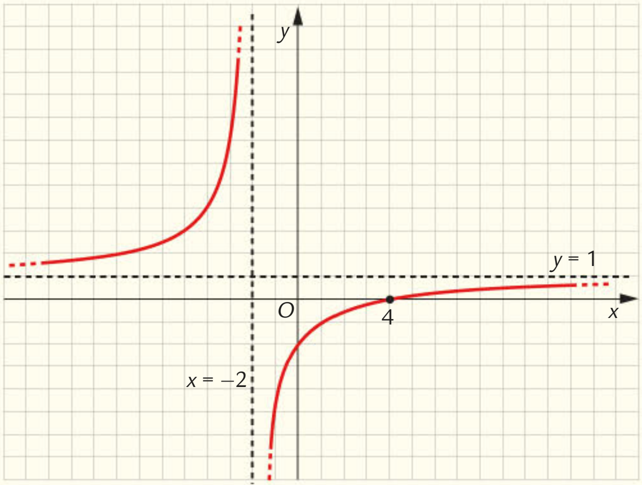
D $d = \sqrt{4s^2 + h^2}$



18 Il peso specifico dell'oro puro è (circa) 20 g al centimetro cubo. Esprimi il peso, in kilogrammi, di un lingotto d'oro a forma di parallelepipedo rettangolo le cui dimensioni, in millimetri, sono $125 \times 100 \times 80$.

Risposta: .... kg

19 L'iperbole equilatera in figura è grafico della funzione omografica $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+4}$, essendo a, b e c numeri opportuni, ricavabili dalle informazioni leggibili sul grafico.



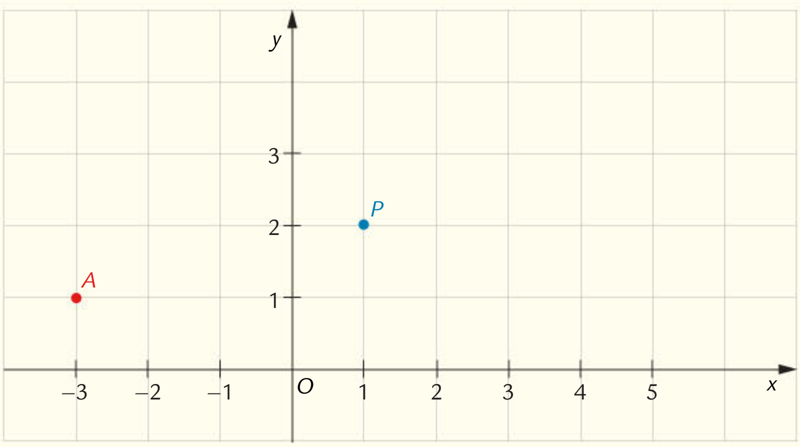
a. Quali sono i valori di a, b e c?

Risposta: $a =$ ..... $b =$ ..... $c =$ .....

b. Per ciascuna delle seguenti uguaglianze, stabilisci se è vera o falsa.

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ V F
2. $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$ V F
3. $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$ V F
4. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ V F

20 **a.** I punti A e P in figura hanno coordinate intere. Determina le coordinate del punto A', simmetrico del punto A rispetto al punto P.



Risposta: $A'(\dots, \dots)$

b. Sia ora P un punto generico del piano di coordinate (x_P, y_P). Determina le coordinate del punto A', simmetrico di A rispetto a P.

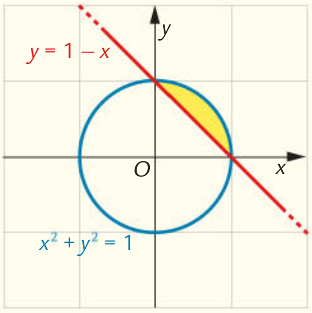
A $A'(2x_P + 3, 2y_P - 2)$

B $A'(2x_P + 3, 2y_P - 1)$

C $A'(3x_P + 2, 2y_P - 1)$

D $A'(2x_P + 4, 2y_P - 1)$

21 Considera il segmento circolare colorato in figura, delimitato *inferiormente* dalla retta di equazione cartesiana $y=1-x$ e *superiormente* dalla circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$. Qual è la sua area?



A $\dfrac{\pi-2}{4}$ B $\dfrac{\pi-2}{2}$ C $\dfrac{\pi-1}{4}$ D $\dfrac{\pi-4}{4}$

22 **a.** Si è osservato che nell'azienda del dott. Bruni il numero di pezzi P prodotti giornalmente da un operaio qualificato dipende dal numero di giorni n di lavoro prestato: per $n=0$ anche $P=0$ (senza la minima esperienza l'operaio non è in grado di produrre alcun pezzo); all'aumentare di n aumenta anche il numero di pezzi P prodotti al giorno, senza tuttavia mai oltrepassare il numero di 50 (la produttività aumenta di pari passo con l'esperienza, senza superare certi limiti fisiologici). Quale delle seguenti funzioni costituisce un modello adeguato per rappresentare il numero di pezzi P prodotti al giorno da un operaio qualificato in dipendenza dal numero n di giorni di servizio?

A $P=\dfrac{60n-10}{n+30}$

B $P=\dfrac{20+30n}{n+30}$

C $P=\dfrac{50n}{n+30}$

D $P=\dfrac{60n}{n+30}$

b. Stando al modello, dopo quanti giorni n di servizio l'operaio è in grado di produrre 25 pezzi giornalmente?

Risposta: $n=$ ......

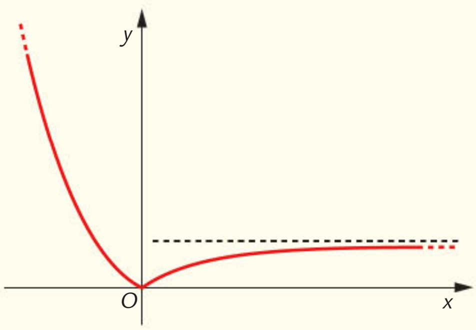
23 Quale tra le seguenti potrebbe essere l'equazione della funzione di cui è tracciato il grafico?

A $y=|2^{-x}+1|$

B $y=|2^{x}-1|$

C $y=|2^{x}+2|$

D $y=|2^{-x}-2|$



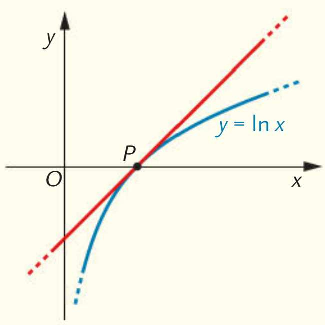
24 Nella figura è rappresentata la retta tangente al grafico della funzione $y=f(x)=\ln x$ nel suo punto d'intersezione P con l'asse x. Qual è la sua equazione?

A $y=x-e$

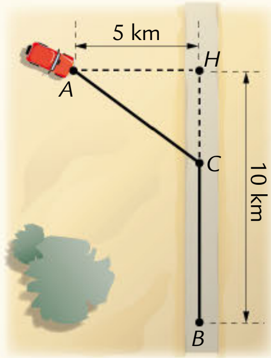
B $y=x-1$

C $y=ex-1$

D $y=e(x-1)$



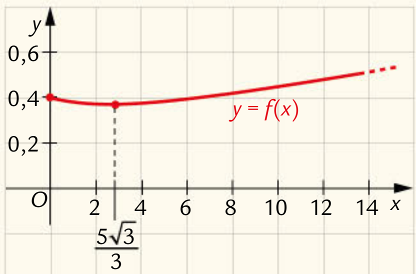
25 Un veicolo fuoristrada si trova nel punto A, situato in un terreno sabbioso, a 5 km da una strada sterrata, e deve raggiungere il punto B che si trova su questa strada. Il fuoristrada sul terreno sabbioso può viaggiare a 25 km/h mentre sulla strada sterrata può procedere a 50 km/h. Il conducente potrebbe viaggiare perpendicolarmente alla strada fino al punto H e quindi percorrere su questa i 10 km del tratto HB, ma ritiene che raggiungendo la strada in un punto C, più vicino a B, potrebbe ridurre la durata del viaggio.



a. Indica con x la lunghezza, in kilometri, del tratto HC e scrivi l'espressione analitica della funzione $f(x)$ che esprime il tempo necessario a percorrere prima il tratto AC e poi il tratto BC.

Risposta: $f(x) = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} + \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

b. Il grafico della funzione scritta al punto **a** è quello rappresentato in figura.



Qual è il tempo minimo necessario a raggiungere B?

A Circa 24 minuti
B Circa 26 minuti
C Circa 22 minuti
D Circa 12 minuti

26 La radice quadrata di un numero reale x è uguale al numero stesso diminuito di 6. Di quale numero si tratta?

Risposta: ....

27 **a.** In merito all'equazione $(x+2)^2 = x^2 + 4$, una sola delle seguenti affermazioni è corretta. Quale?

A È un'identità (è verificata qualunque sia il numero reale x).
B Ha infinite soluzioni, pur non essendo un'identità.
C È impossibile (non ha soluzioni).
D Ha un'unica soluzione reale.

b. In merito alla disequazione $(x+2)^2 > x^2 + 4$, una sola delle seguenti affermazioni è corretta. Quale?

A È verificata qualunque sia il numero reale x.
B Ha infinite soluzioni reali, tutte positive.
C Ha infinite soluzioni reali, tutte negative.
D È impossibile (non ha soluzioni reali).

28 **a.** Considera, nel suo dominio naturale, la funzione reale così definita:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x-1}$$

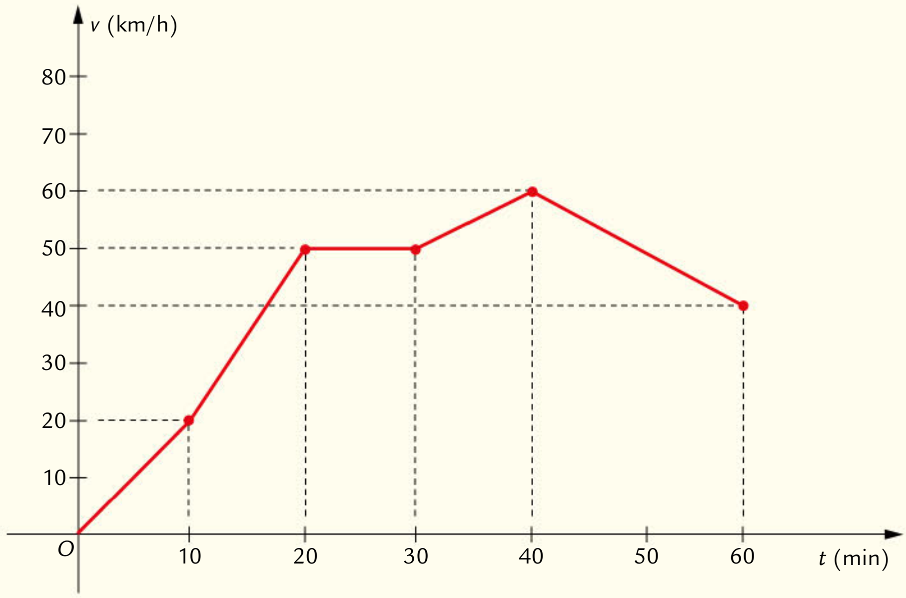
Stabilisci il numero N degli zeri di $f(x)$, cioè il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

Risposta: $N =$ ......

b. Calcola il limite $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Risposta: $\lim_{x \to 1} f(x) = \dots$

29 Il sig. Porfido, provetto ciclista, ha appena concluso l'allenamento quotidiano. Il diagramma riporta la sua velocità, in kilometri orari, tenuta nel corso dei primi 60 minuti.



a. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) oppure falsa (F).

1. Porfido ha impresso alla bicicletta la massima accelerazione nell'intervallo compreso tra il decimo e il ventesimo minuto. V F
2. Porfido non ha mai decelerato. V F
3. La velocità di Porfido è stata superiore ai 50 km/h per un tempo inferiore ai 30 minuti. V F
4. In un solo momento Porfido ha corso alla velocità (istantanea) di 30 km/h. V F

b. Calcola lo spazio percorso (in kilometri) dal sig. Porfido tra il ventesimo e il trentesimo minuto. Arrotonda il risultato alla prima cifra decimale.

Risposta: .... km

30 Indica la potenza di 10 che più si avvicina al risultato dell'espressione $10^{100}+10^{99}+10^{98}+\ldots+10^{2}+10^{1}+10^{0}$.

A 10^{100}

B 10^{101}

C 10^{200}

D $10^{10^{10}}$

31 **a.** Lo sportello automatico della banca del sig. Cecconi eroga esclusivamente banconote da 20 e 50 euro. Egli ha prelevato 16 banconote in tutto. Quale delle seguenti formule esprime, in funzione del numero N di banconote da 20 euro, la somma (in euro) prelevata dal sig. Cecconi?

A $800-50N$

B $800-30N$

C $320+30N$

D $320+20N$

b. È possibile che Cecconi abbia prelevato esattamente 570 euro?

☐ Sì

☐ No

Giustifica la risposta: ....

....

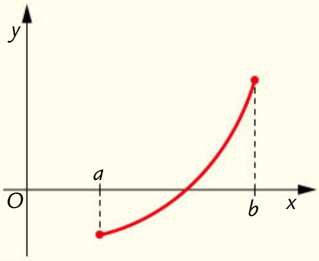
....

....

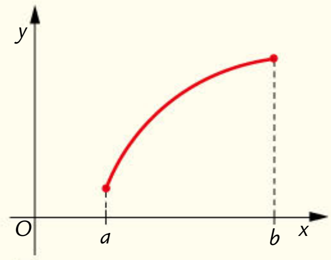
32 Determina, fra i quattro possibili grafici della funzione f, definita nell'intervallo $[a, b]$, quale verifica entrambe le seguenti condizioni per ogni $x \in (a, b)$:

$f'(x) > 0$

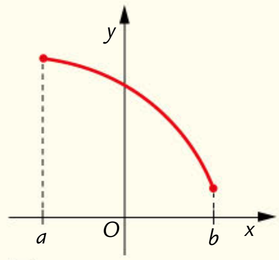
$f''(x) < 0$



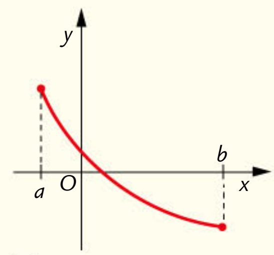
A



B

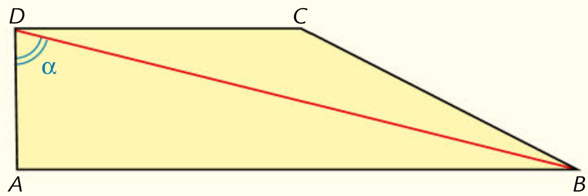


C



D

33 La base maggiore AB del trapezio rettangolo $ABCD$ è il doppio della base minore CD; quest'ultima, a sua volta, è il doppio dell'altezza AD.



Quale formula consente di ricavare l'ampiezza dell'angolo $\alpha = A\widehat{D}B$?

A $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$

B $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$

C $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

D $\alpha = \arctan 4$

34 Considera la seguente funzione reale, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} k - \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ e^{kx} + x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a. Stabilisci per quale valore del parametro k la funzione $f(x)$ risulta continua in 0.

Risposta: $k =$ .....

b. In corrispondenza del valore di k trovato in precedenza, la funzione $f(x)$ risulta derivabile in 0 (oltre che continua)?

☐ Sì

☐ No

Giustifica la risposta: ....

....

....

35 Un muratore deve ottenere un composto da costruzione miscelando, in parti uguali: acqua, bitume, cemento, ghiaia e sabbia. Deve mescolarli esattamente in un particolare ordine, che però non ricorda più.

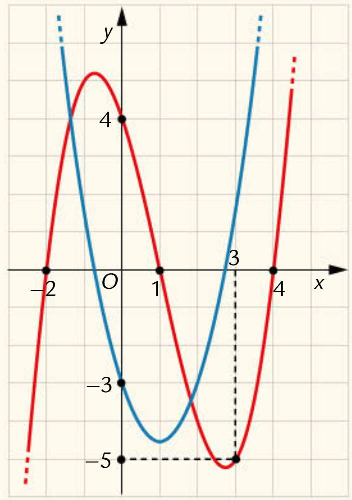
a. Quale probabilità ha di indovinare la giusta sequenza, se li mescola seguendo un ordine del tutto casuale?

A $\frac{1}{5}$ B $\frac{1}{25}$ C $\frac{1}{120}$ D $\frac{1}{125}$ E $\frac{1}{625}$

b. Se il muratore ricorda che acqua e cemento sono i primi due elementi, quale diventa la probabilità di indovinare la giusta sequenza?

Risposta: ....

36 Nella figura sono stati tracciati il grafico di una funzione $y = f(x)$ e il grafico di una sua primitiva $y = F(x)$.



a. Quale dei due grafici è quello della funzione $F(x)$?

Risposta: il grafico della funzione $F(x)$ è quello colorato in ....

b. Qual è l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto d'intersezione con l'asse y?

Risposta: ....

c. Quanto vale $\int_0^3 f(x)\,dx$?

Risposta: ....

37 Relativamente all'equazione $3^{2x-1} = k - 1$, stabilisci quali affermazioni sono vere e quali false.

a. l'equazione ammette sempre un'unica soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$ V F

b. se $k = 1$ l'equazione equivale a $2x - 1 = 0$ V F

c. l'equazione non ammette alcuna soluzione reale per ogni k tale che $k \leq 1$ V F

d. l'equazione ammette una soluzione reale positiva se e solo se $k > \frac{4}{3}$ V F

38 Un atleta si allena ogni giorno percorrendo un numero differente di kilometri di corsa. La media e la varianza delle lunghezze dei tratti percorsi negli ultimi dieci giorni sono rispettivamente 8 km e 20 km. Quali sarebbero stati i valori della media e della varianza se ogni giorno avesse percorso un numero di kilometri esattamente uguali a una volta e mezza quelli percorsi?

A 12 km, 30 km

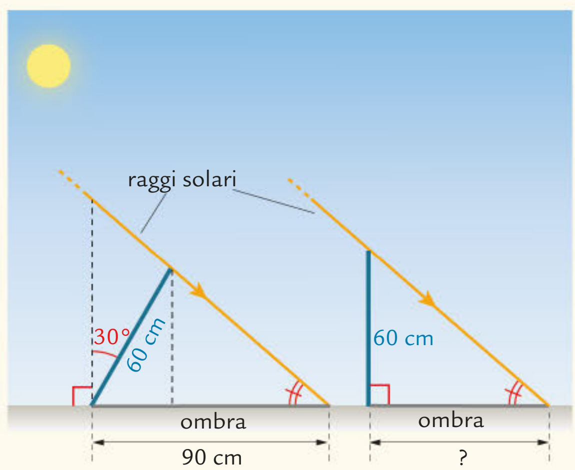
B 12 km, 45 km

C Rimarrebbero invariati

D I dati sono insufficienti per rispondere

39 Un'asta di lunghezza 60 cm è inclinata di 30° rispetto alla perpendicolare al terreno. L'ombra proiettata dall'asta è lunga 90 cm. Quanto sarebbe lunga l'ombra se, nello stesso istante, l'asta fosse perpendicolare al terreno? Fornisci la risposta arrotondando il risultato al centimetro.

Risposta: ....



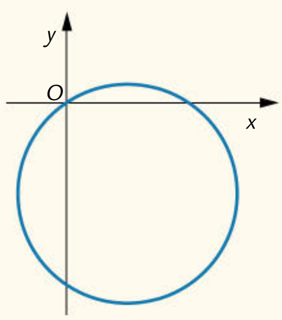
40 La circonferenza in figura, passante per l'origine O, ha equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Che cosa si può dire dei coefficienti a, b, c?

A $a < 0, b > 0, c < 0$

B $a > 0, b < 0, c = 0$

C $a = 0, b < 0, c > 0$

D $a < 0, b > 0, c = 0$



Risposte p. 395

Risposte alle prove proposte nel volume

Prove di autoverifica

Unità 1

1. V, F, V, F

2. a. L'intersezione è costituita dalla retta EF; **b.** l'intersezione è costituita dalla retta EN; poiché $AB \parallel NH$ e $BC \parallel EH$, i due piani sono paralleli distinti, quindi la loro intersezione è vuota.

3. Il volume del parallelepipedo è uguale a 216π cm^3. La soluzione dell'equazione $\frac{4}{3}\pi r^3 = 216\pi$ è $r = \sqrt[3]{3^4 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{6}$.

4. a. 48π cm^2; **b.** $\frac{64}{3}\pi\sqrt{3}$ cm^3

5. Volume $= 126\pi$ cm^3; Area $= 96\pi$ cm^2

6. Volume $= \frac{\sqrt{2}}{6}$ mm^3; Area $= (1+\sqrt{3})$ mm^2

7. La costante di proporzionalità è $k = \sqrt[3]{4}$, per cui il rapporto tra le superfici totali è $k^2 = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$.

8. a. I volumi della semisfera, del cilindro e del cono che rappresentano le parti dei bicchieri destinate a contenere le bevande sono rispettivamente $\frac{128}{3}\pi$ cm^3, 72π cm^3, 192π cm^3: questo è l'ordine di capacità crescente; **b.** 6 cm

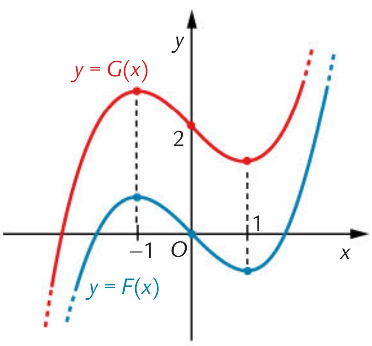
9. Sia il rapporto tra i volumi sia quello tra le aree delle superfici totali è uguale a 2.

10. $(96+8\sqrt{3})$ cm^2

Unità 2

1. $F(x) = x^4 - x^2 - x + 5$

2. Vedi la figura.



3. a. $\frac{4}{7}x^7 - x^4 + x + c$; **b.** $\ln|x| - \frac{1}{3x^3} + c$; **c.** $\frac{4}{3}x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x}(2x-9) + c$

4. a. $\frac{1}{9}(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1} + c$; **b.** $-\frac{1}{2\ln^2|x|} + c$

5. a. $\frac{3}{2}\ln|x+4| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + c$; **b.** $\ln|x+3| + \frac{2}{x+3} + c$; **c.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+6x+10) - 2\arctan(x+3) + c$

6. $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$

7. $-\frac{1}{3}(x+3)\sqrt{3-2x} + c$

8. $P_A(t) = 8000e^{0,01t} + 2000$, $P_B(t) = 5000e^{0,02t} + 2000$, dopo circa 47 anni

Unità 3

1. $2+\ln 2$

2. $\ln 3-\ln 2$

3. $\frac{8}{3}$

4. $2e-3$

5. $a=-\frac{3}{13}$

6. $\int_{-3}^{0}(-2x^2-6x)\,dx=9$

7. $\pi\int_{0}^{9}(9-x)\,dx=\frac{81}{2}\pi$

8. $\int_{0}^{1}(3x-1)^2\,dx=1$, quindi la forza compie un lavoro di 1 J

9. Deve essere $\int_{0}^{k}\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$, da cui $\arctan k=\frac{\pi}{4}$, cioè $k=1$.

Unità 4

1. F, V, V, F

2. $3x^2e^{x^3}=3x^2(e^{x^3}+k)-15x^2$ implica $3k-15=0$, cioè $k=5$

3. $y=ce^{x^2}+1$

4. $y=e^{-2x}+ce^{-4x}$

5. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

6. $y=2-\sqrt{x^2+1}$

7. $y=3e^{5x}-3e^{-x}$

8. **a.** $p'(t)=0{,}3\,p(t)$, $p(t)=ce^{0{,}3t}$; **b.** circa 55 coccinelle

Unità 5

1. V, F, F, F, V, V

2. La distribuzione di probabilità di X è la seguente:

x_i	$+5$	$+10$	-5
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{8}{25}$

La media di X è 2, essendo $E(X)>0$ il gioco è favorevole al giocatore.

3. La disequazione è soddisfatta per $x\le 1\vee x\ge 3$. Detta X la variabile aleatoria che rappresenta il numero arbitrariamente scelto, si tratta allora di calcolare $P(X\in[0,1]\cup[3,4])$. Tenendo conto che X ha la distribuzione uniforme sull'intervallo [0, 4], si conclude che la probabilità richiesta è uguale a $\frac{1}{2}$.

4. **a.** $f(x)=0{,}01e^{-0{,}01x}$ per $x\ge 0$ ed $f(x)=0$ per $x<0$; **b.** 1 minuto e 40 secondi; **c.** $e^{\frac{-6}{5}}\simeq 0{,}3$.

5. **a.** $k=\frac{1}{2}$; **b.** $\frac{1}{4}$

6. $\mu=-1$ e $\sigma=\frac{1}{2}$; l'area misura circa 0,82.

Unità 6

1. V, V, F, V, F

2. Risulta $E(T_1)=\mu$, $E(T_2)=\frac{4}{3}\mu$, $E(T_3)=\frac{1}{6}\mu$, quindi lo stimatore corretto è T_1.

3. $68\% \leq p \leq 76\%$ circa.

4. $7{,}87\text{ cm} \leq \mu \leq 8{,}39\text{ cm}$ (circa).

5. Bisogna determinare n in modo che la semiampiezza dell'intervallo di confidenza sia minore o uguale al 5%. Questa condizione è certamente soddisfatta scegliendo il minimo intero n per cui risulta $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\frac{5}{100}$. Si trova $n=385$.

6. Le ipotesi da verificare sono H_0: $\mu=96(=\mu_0)$ contro H_1: $\mu>96$. L'ipotesi nulla è da rifiutare se il valore osservato è tale che $u>z_{1-\alpha}$. Poiché risulta $u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{102-96}{8/\sqrt{10}}\simeq 2{,}37$ e $z_{1-\alpha}=z_{0{,}95}\simeq 1{,}64$, e dunque $u>z_{1-\alpha}$, rifiutiamo l'ipotesi nulla. Al livello di significatività del 5% possiamo allora affermare che il concime fa aumentare la crescita media delle piante.

Compiti di realtà

Tema L

Compito di realtà 1

1. Il volume del primo bicchiere è $49\pi\simeq 154\text{ cm}^3$ mentre quello del secondo è $\frac{128}{3}\pi\simeq 134\text{ cm}^3$.

2. La parte di bicchiere riempita d'acqua è un cono simile al cono che rappresenta l'intera parte del bicchiere destinata a contenere le bevande, con rapporto di similitudine $\frac{1}{2}$. Perciò il volume occupato dall'acqua è $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ del volume originario.

3. Indicato con h il livello (in cm) raggiunto dall'acqua nel primo bicchiere e con r la misura (in cm) del raggio di base del cono occupato dall'acqua, vale la proporzione $h:12=r:\frac{7}{2}$, da cui $r=\frac{7}{24}h$. Pertanto il volume occupato dall'acqua risulta $V_{acqua}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{7h}{24}\right)^2h=\frac{49\pi}{3\cdot 24^2}h^3$.

4. Tenendo conto di quanto ricavato al punto **3**, si ha l'equazione $\frac{49\pi}{3\cdot 24^2}h^3=\frac{128}{3}\pi$ da cui si ricava $h\simeq 11{,}5$ cm.

5. Il volume del cilindro di altezza 2 cm e raggio di base 4 cm è $32\pi\text{ cm}^3$, mentre il volume del cilindro di altezza 2 cm e raggio di base $\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$ cm è $24\pi\text{ cm}^3$. Il volume V (in cm^3) occupato dall'acqua si stima per differenza, ricordando che il volume del bicchiere semisferico è $\frac{128}{3}\pi\text{ cm}^3$; si ha:

$$\frac{128}{3}\pi-32\pi=\frac{32}{3}\pi<V<\frac{128}{3}\pi-24\pi=\frac{56}{3}\pi$$

Compito di realtà 2

1. Se $D=d$, la formula diventa $V=\frac{\pi h}{4}D^2=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2h=\pi r^2h$.

2. Circa 343 litri.

3. Detto V il volume della botte originaria e V' quello della botte piccola, risulta $\frac{V}{V'}=k^3$; la condizione $\frac{V}{V'}=2$ fornisce l'equazione binomia $k^3=2$ e ha per soluzione $k=\sqrt[3]{2}$, quindi la risposta corretta è la **C**. Le dimensioni della botte desiderata risultano $h=D\simeq 63{,}5$ cm e $d\simeq 47{,}6$ cm.

4. Utilizzando la formula [2], si ottiene che le botti prodotte da Vincenzo hanno una capacità di circa 308 litri, cioè 35 litri in meno rispetto ai 343 litri calcolati in base alla formula [1]. L'errore commesso (per difetto) è dunque effettivamente superiore al 10% (che corrisponde a 34,3 litri).

5. Risulta $V>V^*$ se e solo se $\frac{\pi h}{12}(2D^2+d^2)>\pi h\left(\frac{D+d}{4}\right)^2$. Quest'ultima disequazione equivale a $5D^2-6dD+d^2>0$ che, nell'ipotesi $D>0$ e $d>0$, è soddisfatta per $0<D<\frac{1}{5}d \vee D>d$. In particolare quindi risulta sempre $V>V^*$ se $D>d$.

Tema M

Compito di realtà 1

1. 120 batteri

2. $P(t)=350-\dfrac{150}{t+1}$

3. La funzione $P(t)$ è strettamente crescente e, poiché $\lim_{t\to+\infty} P(t)=350$, la popolazione tende ad avvicinarsi alla soglia di 350 batteri.

4. La velocità di crescita della popolazione di batteri della seconda specie decresce, al crescere del tempo, più lentamente rispetto alla specie originaria; pertanto la crescita nelle prime 4 ore sarà maggiore.

5. Dopo 4 ore la popolazione della seconda specie sarà cresciuta di circa 241 unità; la differenza è di circa 121 batteri.

6. Non è possibile stabilire l'esatto numero di batteri della seconda specie dopo 4 ore, perché i dati non forniscono il numero di batteri della seconda specie in $t=0$.

7. Indicato con $P_0{}^*$ il numero di batteri della seconda specie in $t=0$, si ha che $P^*(t)=P_0^*+150\ln(t+1)$. Poiché $\lim_{t\to+\infty} P^*(t)=+\infty$, indipendentemente dal valore di $P_0{}^*$, se ne deduce che il modello non è adatto a descrivere l'evoluzione della popolazione batterica per periodi molto lunghi, anche se la crescita della popolazione, essendo la funzione $P^*(t)$ logaritmica, è assai lenta.

Compito di realtà 2

1. I grafici in figura rappresentano le derivate, calcolate rispetto al tempo, delle funzioni che esprimono la concentrazione del farmaco nel sangue nei due diversi casi di somministrazione. Nel caso in cui il farmaco sia assunto per via endovenosa, la concentrazione parte da un valore iniziale non nullo e poi decresce nel tempo; la derivata della concentrazione deve essere quindi una funzione che assume solo valori negativi, per cui il suo grafico può essere soltanto quello rappresentato in rosso. Nel caso in cui invece il farmaco venga assunto per via orale, la concentrazione parte dal valore 0 iniziale, aumenta fino a un valore massimo e in seguito decresce; la sua derivata è quindi inizialmente positiva, poi assume il valore 0 in corrispondenza della concentrazione massima e infine diventa infine negativa: il grafico riportato in blu è l'unico dei due che si adatta a questo andamento.

2. Dal grafico in blu si deduce che $f(0)=64$, da cui $A=16$. Dal grafico in rosso si deducono le condizioni $\begin{cases} g(0)=-20 \\ g'(0)=8 \end{cases}$, da cui $B=-20$ e $k=-\dfrac{2}{5}$. Pertanto $f(t)=16\left(5e^{-2t}-e^{-\frac{2}{5}t}\right)$ e $g(t)=-20e^{-\frac{2}{5}t}$.

3. La massima concentrazione del farmaco somministrato per via orale corrisponde all'istante t per cui $f(t)=0$. Ne segue l'equazione $5e^{-2t}-e^{-\frac{2}{5}t}=0$, che è verificata quando $t=\dfrac{5}{8}\ln 5\simeq 1$.

4. La funzione $C_o(t)$ è la primitiva di $f(t)$ che verifica la condizione $C_o(0)=0$; si ottiene che $C_o(t)=40\left(e^{-\frac{2}{5}t}-e^{-2t}\right)$. La funzione $C_e(t)$ è la primitiva di $g(t)$ che verifica la condizione $C_e(0)=50$; si ottiene che $C_e(t)=50e^{-\frac{2}{5}t}$.

5. Circa 12,3 mg/L e circa 7,8 mg/L.

6. Risulta $\dfrac{\int_0^{+\infty} C_o(t)\,dt}{\int_0^{+\infty} C_e(t)\,dt}=\dfrac{\int_0^{+\infty} 40\left(e^{-\frac{2}{5}t}-e^{-2t}\right)dt}{\int_0^{+\infty} 50e^{-\frac{2}{5}t}\,dt}=\dfrac{40\lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{5}{2}e^{-\frac{2}{5}t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^k}{50\lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{5}{2}e^{-\frac{2}{5}t}\right]_0^k}=\dfrac{16}{25}=64\%.$

Tema N

Compito di realtà 1

1. Circa il 4,78%.

2. Circa il 25,46%; infatti $1-(1-0{,}0478)^6\simeq 0{,}2546$.

3. Circa il 2,82%; infatti $\binom{6}{2}\cdot(0{,}0478)^2\cdot(0{,}9522)^4\simeq 0{,}0282$.

4. Mediamente $60\cdot 0{,}0478\simeq 3$ bottiglie non conformi su 10 confezioni (cioè su 60 bottiglie).

5. Si può ricavare, per esempio dalle tavole, che $p(Z<k)=0{,}01$ quando $k\simeq -2{,}33$: tenendo conto di questa osservazione si deduce che il valore di μ deve essere circa 1,02.

6. La percentuale di bottiglie non conformi in un campione di 1000 bottiglie è compresa nell'intervallo $[0{,}38\%, 1{,}62\%]$ con una probabilità del 95%; poiché la percentuale di bottiglie difettose del campione esaminato è del 2% e questo valore non appartiene all'intervallo $[0{,}38\%, 1{,}62\%]$, il processo di riempimento delle bottiglie non sta funzionando correttamente.

Compito di realtà 2

1. Sensibilità = 98% e specificità = 99%.

2. A un livello di confidenza del 95%, la percentuale di incidenza della malattia è compresa tra lo 0,12% e l'1,08%.

3. Valore predittivo di esito positivo ≃ 37%.

4. Valore predittivo di esito positivo $= \dfrac{0{,}98\,p}{0{,}97\,p + 0{,}01}$.

La funzione che esprime il valore predittivo è crescente al crescere di p, cioè all'aumentare dell'incidenza della malattia nella popolazione; pertanto, per una malattia rara, il valore predittivo è piccolo. Deve essere all'incirca $p > 8{,}5\%$ (approssimando la percentuale per eccesso alla prima cifra decimale).

5. Accuratezza ≃ 99%.

Simulazioni della prova Invalsi

Simulazione 1

1. Il numero di studentesse è $779 : (17 + 2) \cdot 2 = 82$.

2. **a.** $m = \dfrac{12\,610 - 12\,340}{15} = 18$; **b.** $12\,610 + 18 \cdot 10 = 12\,790$

3. Risposta **A**

4. Il tennista A deve necessariamente vincere tutti i restanti 3 set. La probabilità pertanto è pari a $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$. La risposta giusta è quindi la **A**.

5. $22{,}5 + 30 = 52{,}5$ km

6. $18\sqrt{2} \simeq 25$ cm

7. **a.** Il discriminante dell'equazione è negativo, quindi la risposta è **C**; **b.** Laura ha ragione: se $c > 0$, il discriminante del polinomio $x^2 + 4x - c$ è $\Delta = 16 + 4c$, certamente positivo.

8. **a.** $c < a < d < b$; **b.** $2^{300} = (2^{10})^{30} \simeq (10^3)^{30} = 10^{90}$; la risposta corretta è dunque la **D**.

9. Il triangolo ADE è simile al triangolo ABC, e il rapporto di similitudine è $\dfrac{2}{3}$. Il rapporto tra le rispettive aree è $\dfrac{4}{9}$; di conseguenza, l'area del trapezio è $\dfrac{5}{9} \cdot 45\ \text{cm}^2 = 25\ \text{cm}^2$.

10. $7\left(0{,}4 + 0{,}5 + \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}5^2}\right) \simeq 11$ km

11. V, F, V, V

12. $\alpha = \arctan 2 > \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, quindi la risposta esatta è la **D**.

13. **a.** −6,7; **b.** 7,3

14. L'equazione data ha esattamente due soluzioni: $x = 1$ e $x = 100$. Essa si risolve (per esempio) ponendo $\log x = y$ e studiando l'equazione ausiliaria $2y = y^2$. La risposta è quindi la **D**.

15. V, V, F, F

16. Risposta **A**

17. F, F, F, V

18. $P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

19. a. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{4}{1}=4$, quindi la risposta esatta è la **C**; **b.** la funzione $f(x)$ ha un asintoto verticale di equazione $x=1$ e un asintoto orizzontale di equazione $y=1$. Nota che la retta di equazione $x=2$ **non** è un asintoto verticale perché $\lim_{x\to 2} f(x)$ è un numero reale**.** Quindi la risposta esatta è la **C.**

20. a. $(1+i)^t=\frac{M}{C}\Rightarrow t=\log_{1+i}\left(\frac{M}{C}\right)=\log_{1+i}M-\log_{1+i}C$, quindi la risposta esatta è la **A**; **b.** risposta **B**

21. a. $x^2+y^2-2x-2y=0$; **b.** risposta **A**

22. a - D; b - C; c - B; d - A

23. Indicato con α l'angolo al vertice $\widehat{C}$, si ha che $\widehat{A}=\widehat{B}=2\alpha$ e da $5\alpha=180°$ si deduce che $\alpha=36°$.
Dunque $B\widehat{D}C=180°-2\cdot 36°=108°$.

24. a. risposta **D**; **b.** $\int_0^1(2x-x^2)dx-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

25. La superficie del solido è uguale a quella del cubo, che vale $6\cdot(3a)^2=54a^2$; risposta **B.**

26. Marco ha ragione. Nell'anno 2018 si è registrato il massimo incremento assoluto: 50 dipendenti in più rispetto all'anno 2017; ma è nell'anno 2015 che si è avuto il massimo incremento relativo: 40% in più di dipendenti rispetto all'anno precedente.

27. L'equazione della retta tangente è $y=x-\frac{1}{4}$, per cui l'ordinata di P è $-\frac{1}{4}$.

28. $\frac{8^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi 4^2}{2}\simeq 2{,}6\ \text{cm}^2$

29. a. 36%; **b.** 75 euro

30. Risposta **A.** Giorgio impiega $30+6=36$ minuti per completare il percorso di andata e ritorno. Si può già concludere che la velocità media è inferiore a 20 km/h.

31. Ha ragione Alberto: infatti la funzione f è continua in 0 se e solo $k=-1$, ma per $k=-1$ la funzione f **non** è derivabile in $x=0$.

32. Risposta **D**

33. a. $V(x)=x(50-2x)^2$; **b.** la funzione $V(x)$ è massima nel punto $x=\frac{25}{3}$; se ne deduce che la parte di cartone da eliminare è $\left(\frac{25}{3}\right)^2\cdot 4\simeq 277\ \text{cm}^2$ (risposta **B**).

34. $a=4$ e $k=2$

35. L'equazione $(x+y)^2$ equivale a $(x+y+1)(x+y-1)=0$, ovvero a $x+y=\pm 1$: essa individua pertanto l'unione di due rette parallele distinte, di equazioni $x+y+1=0$ e $x+y-1=0$. La risposta esatta è quindi la **D.**

36. Risposta **C** (occorre sottrarre dal numero di tutte le password possibili il numero delle password costituite solo da lettere e il numero delle password costituite solo da cifre).

37. Risposta **B**

38. $f'(2)=5$

39. Il coefficiente di variazione dei voti di Mario è circa 0,057; il coefficiente di variazione dei voti di Luca è circa 0,049. Il rendimento più costante è stato quello di Luca.

40. a. $2\cdot(0{,}92)^2$, $2\cdot(0{,}92)^3$; **b.** $f(t)=2\cdot(0{,}92)^t$; **c.** risposta **C**; **d.** circa 8 minuti e 19 secondi

Simulazione 2

1. La lunghezza del laccio è $L = 2 \cdot 5\sqrt{2^2+6^2} + 6 = 20\sqrt{10} + 6 = 2\left(10\sqrt{10}+3\right)$. Risposta **C**.

2. Basta applicare il teorema della media integrale; $h = \dfrac{\int_0^{\pi} \sin x\, dx}{\pi} = \dfrac{2}{\pi} \simeq 0{,}64$.

3. F, V, F, V

4. **a.** 25 studenti; **b.** 5,72

5. **a.** Risposta A; **b.** quattro punti, precisamente $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$.

6. V, F, F, F

7. 3600

8. **a.** Risposta C; **b.** essendo equinumerose, la percentuale dei promossi nelle due classi 1B e 1C congiunte è dell'80%. Perciò, indipendentemente dal numero degli studenti in 1A, la percentuale dei promossi in seconda è dell'80%.

9. **a.** Il rapporto tra i volumi è $2^3 = 8$, risposta **C**; **b.** risposta **A**.

10. **a.** Risposta **A**; **b.** $m = -3$; **c.** Alessio ha ragione: la derivata seconda $f''(x)$ è un polinomio di primo grado, che ha una unica radice nell'intorno della quale cambia il segno di $f''(x)$.

11. Il sistema $\begin{cases} xy = 1 \\ y = 2x+1 \end{cases}$ ha per soluzioni $(-1, -1)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$: la risposta giusta è **A**.

12. **a.** V, V, F, V; **b.** risposta **D**

13. Risposta **B**. Infatti da $4^x = 3$ si ricava $16^x = 4^{2x} = (4^x)^2 = 3^2 = 9$.

14. Risposta **C**

15. Vi sono nove numeri multipli di 10 e quindici numeri multipli di 6; di questi, tre sono multipli di entrambi (precisamente: 30, 60, 90). Quindi ci sono 9 + 15 − 3 = 21 numeri multipli del 10 oppure del 6 (o entrambi). In definitiva, la probabilità che non si estragga un multiplo né del 10 né del 6 è pari a $\dfrac{90-21}{90} = \dfrac{23}{30} \simeq 77\%$.

16. $z < 1 < y < 2 < x$

17. Risposta **D**. Occorre ricordare che la diagonale maggiore di un esagono regolare è il doppio del lato e applicare il teorema di Pitagora: $d = \sqrt{(2s)^2 + h^2} = \sqrt{4s^2 + h^2}$.

18. Il volume del lingotto è un decimetro cubo, ovvero 1000 centimetri cubi; il suo peso è perciò 20 kg (circa).

19. **a.** $a = c = 2$, $b = -8$; **b.** V, F, V, V

20. **a.** $A'(5, 3)$; **b.** Risposta **B**

21. Risposta **A**. Si tratta della differenza tra l'area di un quarto di cerchio e l'area di un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti hanno lunghezza unitaria: $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$.

22. **a.** Risposta **C**; **b.** $N = 30$

23. Risposta **A**

24. Risposta **B**. La retta passa per $P(1, 0)$ e ha coefficiente angolare 1.

25. **a.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{25} + \dfrac{10-x}{50}$; **b.** risposta **C**

26. L'equazione $\sqrt{x} = x - 6$ ammette come unica soluzione il numero $x = 9$.

27. a. Risposta **D.** Infatti l'equazione data è equivalente a $4x = 0$, cioè a $x = 0$; **b.** Risposta **B.** Infatti la disequazione data è equivalente a $4x > 0$, cioè a $x > 0$.

28. a. $N = 2$. Precisamente, i due zeri di $f(x)$ sono $x = 0$ e $x = -4$; **b.** scomponendo il numeratore e semplificando, oppure applicando il teorema di de l'Hôpital, si ottiene che $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.

29. a. V, F, V, V; **b.** $50 \cdot \frac{10}{60} \simeq 8{,}3$ km

30. Risposta **A.** Infatti, ricordando la formula per il calcolo dei primi n termini di una progressione geometrica, si ha $10^{100} + 10^{99} + 10^{98} + ... + 10^2 + 10^1 + 10^0 \simeq 1{,}1 \cdot 10^{100}$.

31. a. Risposta **B.** Infatti: $20N + 50(16 - N) = 800 - 30N$; **b.** No, è impossibile: la soluzione dell'equazione $800 - 30N = 570$ non è intera.

32. Risposta **B**

33. Risposta **D.** Infatti il rapporto $AB : AH$ è 4. Basta ricordare il secondo teorema dei triangoli rettangoli.

34. a. Uguagliando i limiti (destro e sinistro) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, si ottiene l'equazione $k - 1 = 1$, da cui $k = 2$; **b.** non è derivabile in 0, essendo diverse le derivate destra e sinistra in 0: $f'(0^+) = 3$ ma $f'(0^-) = 0$.

35. a. Risposta **C.** La probabilità cercata è infatti $\frac{1}{5!}$; **b.** $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

36. a. Quello in rosso; **b.** $y = -3x + 4$ (osserva che $F'(0) = f(0) = -3$); **c.** l'integrale dato è uguale a $F(3) - F(0) = -9$.

37. a. F, **b.** F, **c.** V, **d.** V (riferisciti infatti all'interpretazione grafica dell'equazione: il grafico di $y = 3^{2x-1}$ interserca l'asse y nel punto $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ e la retta $y = k - 1$ interseca il grafico della funzione $y = 3^{2x-1}$ in un punto di ascissa positiva se e solo se risulta $k - 1 > \frac{1}{3}$).

38. Risposta **B**

39. Circa 139 cm

40. Risposta **D.** Infatti il centro ha ascissa positiva (da cui $a < 0$) e ordinata negativa (da cui $b > 0$). Inoltre deve essere $c = 0$ perché la circonferenza passa per l'origine.

Indice analitico

Petrini

internet: deascuola.it

e-mail: info@deascuola.it

Redattore responsabile: Monica Martinelli
Redazione: Giovanni Malafarina
Redazione multimediale: Rachele Ambrosetti
Progetto grafico: Carla Devoto, Marco Satta
Impaginazione: M.T.M.
Ricerca iconografica: Laura Fiorenzo
Ricerca iconografica per la copertina: Alice Graziotin
Copertina: Silvia Bassi, Simona Speranza
Disegni: Leprechaun

Art Director: Nadia Maestri

Le animazioni «Con GeoGebra» sono state realizzate dalla dott.ssa Simona Riva
Le Videolezioni sono a cura di Marco D'Isanto (*Lezionidimate*)

Attività interattive e laboratori realizzati con il software *GeoGebra* (www.geogebra.org)
Microsoft Excel è un marchio depositato di *Microsoft Corporation*
Per ogni informazione relativa agli esercizi tratti dalle gare *Kangourou della Matematica* visitare il sito www.kangourou.it

Numerosi insegnanti e colleghi hanno contribuito al perfezionamento dell'opera, fornendo agli Autori preziosi spunti didattici, stimolanti osservazioni e puntuali segnalazioni. A tutti è indirizzata la loro riconoscenza.
Leonardo Sasso ringrazia in modo particolare gli insegnanti dell'Istituto Tecnico «Guglielmo Marconi» di Verona, dell'Istituto Tecnico «Guglielmo Marconi» di Padova e dell'Istituto Tecnico «Galileo Ferraris» di Verona. Enrico Zoli ringrazia i colleghi dell'Istituto Tecnico «Luigi Bucci» di Faenza.

1ª edizione: gennaio 2019
Printed in Italy

Le fotografie di questo volume sono state fornite da: Archivio Dea Picture Library; Shutterstock; iStockphoto

Foto di copertina: iStockphoto