Leonardo Sasso
Enrico Zoli

Colori della Matematica

GeoGebra

COMPETENZE

DIDATTICA INCLUSIVA

EDIZIONE VERDE

VOLUME 4

- Limiti e continuità
- Calcolo differenziale
- Funzioni in due variabili

DeA SCUOLA | Petrini

Leonardo Sasso
Enrico Zoli

Colori della Matematica

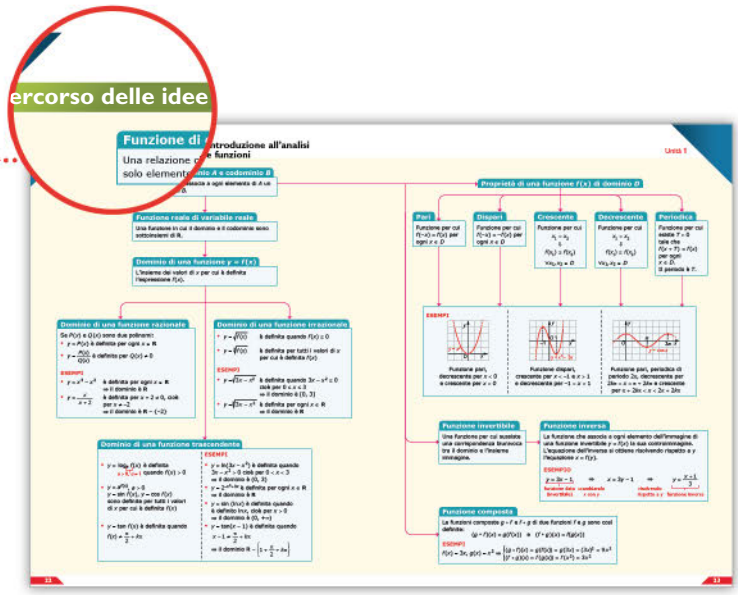
EDIZIONE VERDE

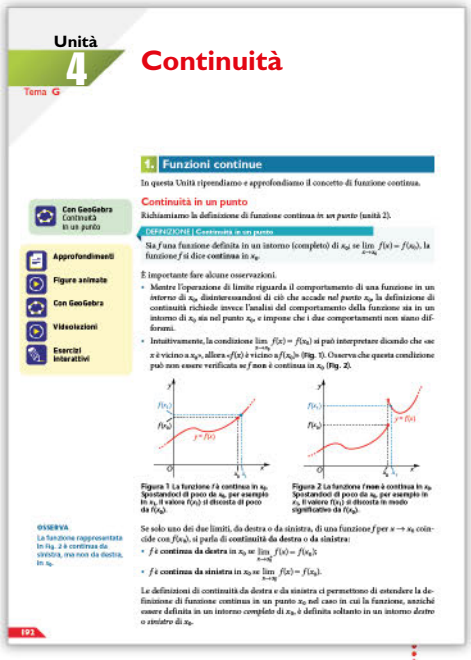
VOLUME 4

DeA SCUOLA | Petrini

Colori della Matematica

Modellizzazione, visualizzazione, inclusività



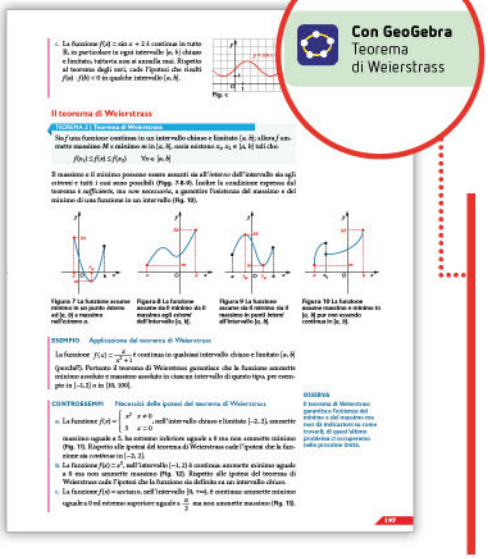


Didattica inclusiva e videolezioni

I **Percorsi delle idee**, realizzati in font ad **alta leggibilità**, presentano in modo visuale i **concetti fondamentali** di ciascuna unità.
Le **videolezioni** hanno una efficace funzione di tutoraggio.

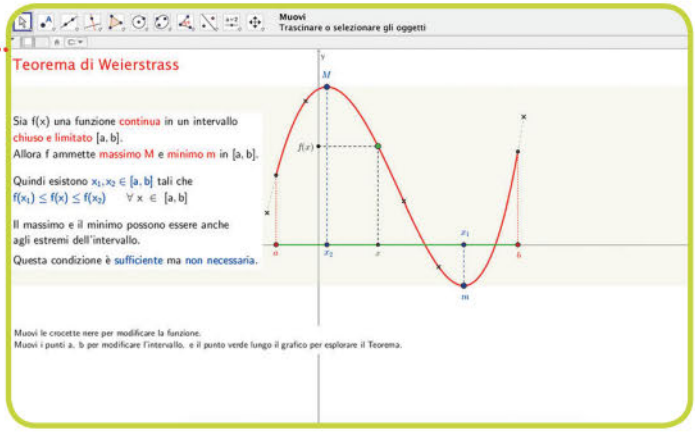
Visualizzazioni e metodo di studio

La teoria si avvale di schemi e tabelle per **visualizzare** e collegare, applica il **problem solving** e la **modellizzazione** per comprendere, propone strumenti per acquisire un corretto **metodo di studio** e per tracciare costanti **collegamenti con la realtà**.



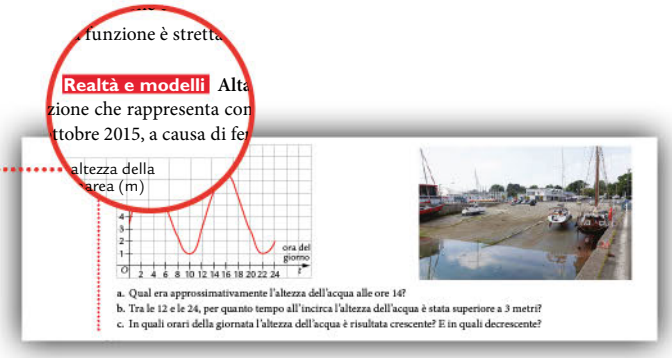
GeoGebra

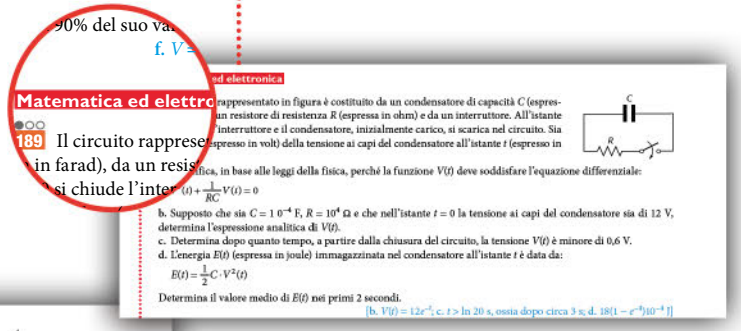
La **visualizzazione** e la comprensione dei concetti è facilitata dalla presenza costante di **animazioni in GeoGebra** di figure geometriche e grafici di funzione.

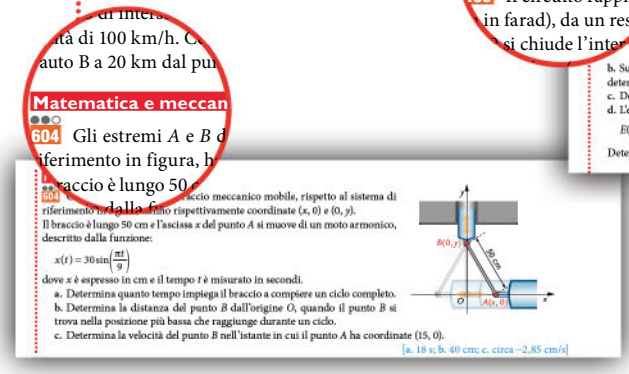


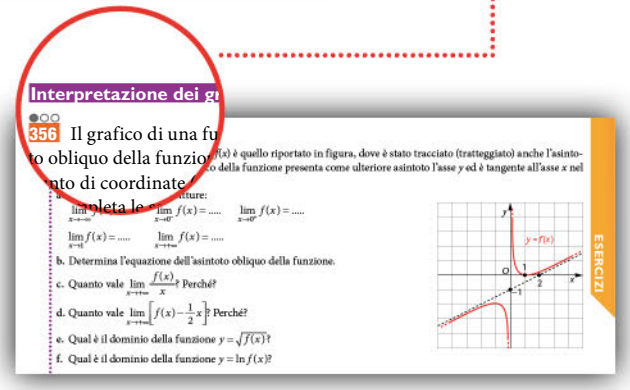
Esercizi motivanti

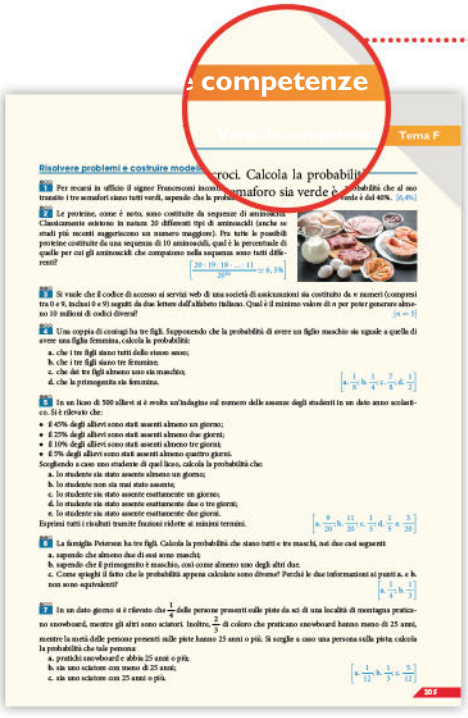
Numerose le **tipologie di esercizi**: "realtà e modelli", "a mente", "interpretazione di grafici", "matematica e...", "collegamenti", "giustificare e argomentare", "zoom sull'enunciato", "dal giornale", "dalle gare"... Per ogni esercizio è indicato il **grado di difficoltà**. Molte attività sono orientate ad **applicazioni specifiche** in ambito tecnico.











Competenze e Invalsi

Le **schede di fine tema** allenano all'**acquisizione delle competenze** e alla prova **Invalsi**.



Compiti di realtà

I **Compiti di realtà** consolidano le competenze in contesti diversi, perlopiù in **ambito lavorativo**.

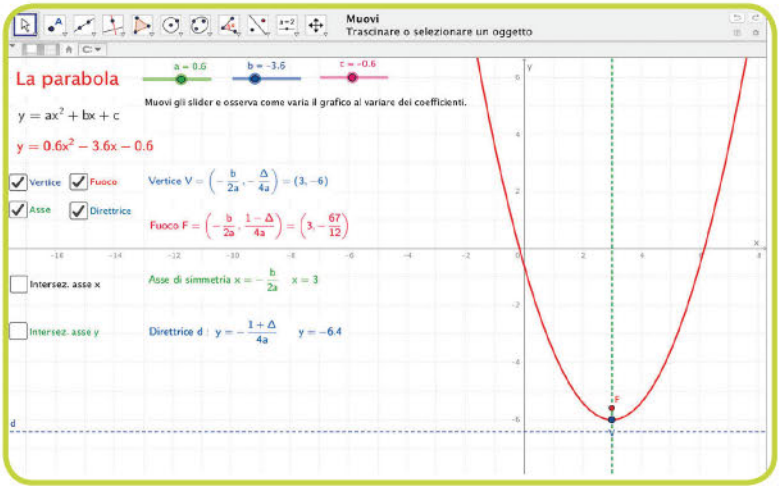
L'ambiente educativo digitale di Colori della Matematica

Le risorse digitali dell'eBook

In tutte le pagine dell'eBook si trovano icone che segnalano la presenza di una o più risorse digitali.
Queste risorse espandono il libro di testo e sono di diverse tipologie, ciascuna caratterizzata da un'icona.

Con GeoGebra

Costruzioni e animazioni in GeoGebra per esplorare dinamicamente grafici di funzione e figure geometriche.



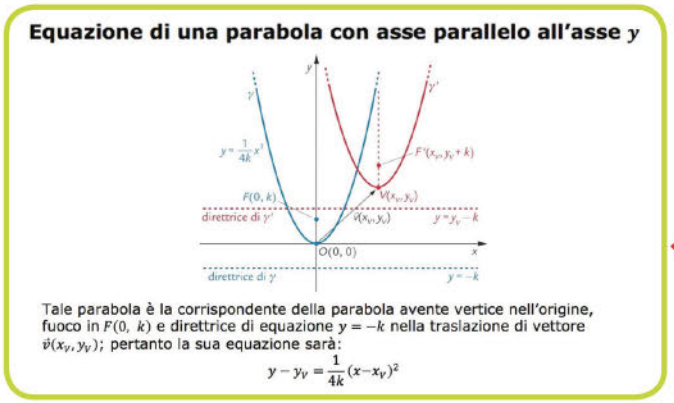
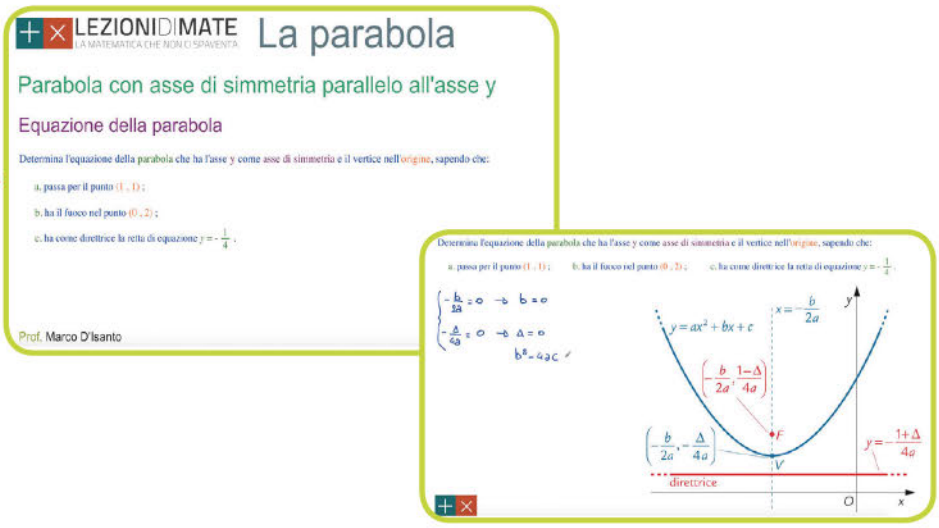


Figure animate

Brevi **filmati** in cui viene rappresentata una proprietà matematica o una figura geometrica.

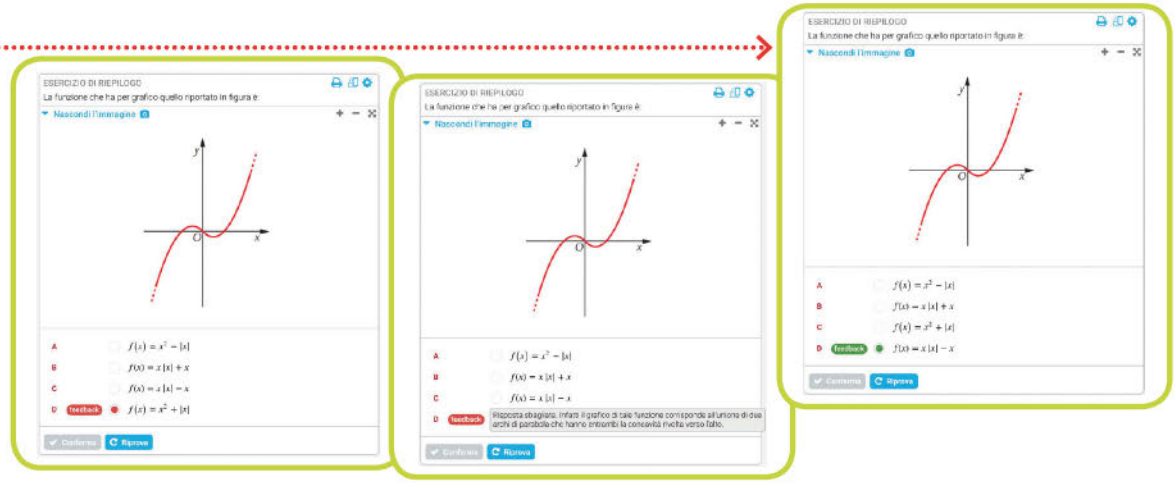
Videolezioni

Svolgimenti commentati di esercizi-modello con richiami alle regole teoriche da applicare.



Esercizi interattivi

Esercizi autocorrettivi con feedback delle risposte sbagliate e guida alla risoluzione corretta.



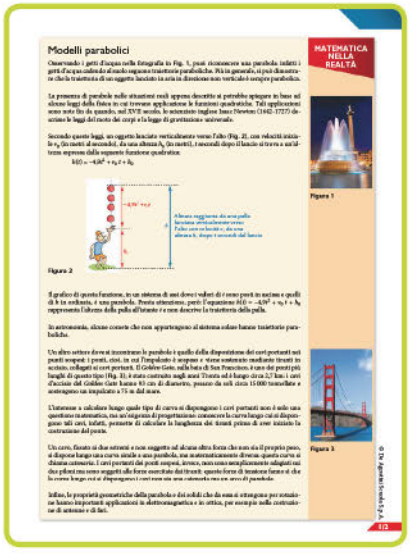
Approfondimenti

Schede in pdf (scaricabili e stampabili) che integrano e approfondiscono i concetti trattati nel libro.



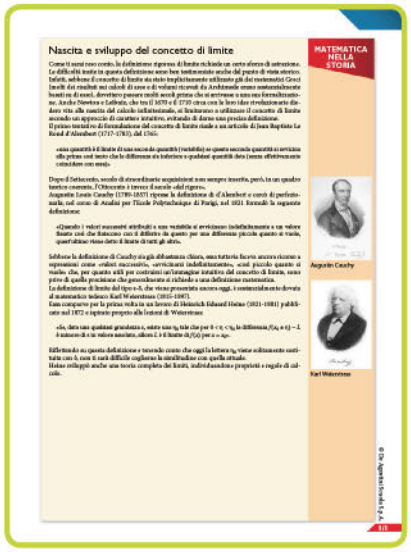
Matematica nella realtà

Schede in pdf (scaricabili e stampabili) di collegamento con la realtà.



Matematica nella storia

Schede in pdf (scaricabili e stampabili) dedicate alla storia della matematica.



In più

SITO DI PRODOTTO

SITO SASSO VERDE

Tutte le risorse digitali del libro, organizzate per indice e tipologia, sono disponibili all'indirizzo **sassoverde.deascuola.it**.

PERCORSO INVALSI

PERCORSO INVALSI

Ambiente dedicato alla preparazione della Prova INVALSI di Matematica con palestre e simulazioni.

INDICE

- Metodo di studio Come studiare la Matematica e utilizzare questo libro X

Tema G Limiti e continuità

Unità 1 **Introduzione all'analisi e funzioni** 2

1. Che cos'è l'analisi matematica? 2
2. L'insieme R: richiami e complementi 6
- Visualizziamo i concetti 9
3. Funzioni reali di variabile reale: dominio e studio del segno 9
4. Funzioni reali di variabile reale: prime proprietà 14

Percorso delle idee 22
ESERCIZI 24
Prova di autoverifica 55

Unità 2 **Limiti di funzioni reali di variabile reale** 56

1. Introduzione intuitiva al concetto di limite 56
2. Dagli intorni alla definizione generale di limite 62
3. Dalla definizione generale alle definizioni particolari 66
4. Teoremi di esistenza e unicità sui limiti 70
5. Le funzioni continue e l'algebra dei limiti 75
6. Forme di indecisione di funzioni algebriche 82
7. Forme di indecisione di funzioni trascendenti 85
8. Infinitesimi e infiniti 90
- In un altro modo Il calcolo dei limiti con il metodo dell'equivalenza asintotica 94

Percorso delle idee 96
ESERCIZI 98
Prova di autoverifica 150

Unità 3 **Successioni e principio di induzione** 151

1. Introduzione alle successioni 151
2. Progressioni aritmetiche e geometriche 154
- Colleghiamo i concetti Progressioni e funzioni 156
3. Limiti di successioni 158
4. Principio di induzione 161

Percorso delle idee 166
ESERCIZI 168
Prova di autoverifica 191

Glossario

Figure animate

Con GeoGebra

Videolezioni

Esercizi interattivi

Approfondimenti

Matematica nella storia

Con GeoGebra

Videolezioni

Esercizi interattivi

Approfondimenti

Con GeoGebra

Videolezioni

Esercizi interattivi

Unità 4 **Continuità** 192

1. Funzioni continue 192
2. Punti singolari e loro classificazione 194
3. Proprietà delle funzioni continue 196
4. Asintoti e grafico probabile di una funzione 199

Percorso delle idee 208
ESERCIZI 210
Prova di autoverifica 242
Verso le competenze 243
Verso la prova Invalsi 249
Verso l'Università 254
Compiti di realtà 255

Approfondimenti
Figure animate
Con GeoGebra
Videolezioni
Esercizi interattivi

Tema H Calcolo differenziale

Unità 5 **La derivata** 258

1. Il concetto di derivata 258
2. Continuità e derivabilità 262
3. Derivate delle funzioni elementari 264
4. Algebra delle derivate 267
5. Derivata della funzione composta e della funzione inversa 271

Colleghiamo i concetti Il calcolo delle derivate 275

6. Classificazione e studio dei punti di non derivabilità 276
7. Applicazioni geometriche del concetto di derivata 279
8. Applicazioni del concetto di derivata nelle scienze e nella tecnica 280
9. Il differenziale 283

Percorso delle idee 284
ESERCIZI 286
Prova di autoverifica 330

Unità 6 **Teoremi sulle funzioni derivabili** 331

1. I teoremi di Fermat, di Rolle e di Lagrange 331
2. Funzioni crescenti e decrescenti e criteri per l'analisi dei punti stazionari 338
3. Problemi di ottimizzazione 343
4. Funzioni concave e convesse, punti di flesso 347
5. Il teorema di de l'Hôpital 351
6. La formula di Taylor 353

Percorso delle idee 356
ESERCIZI 358
Prova di autoverifica 417

Matematica nella storia
Figure animate
Con GeoGebra
Videolezioni
Esercizi interattivi

Approfondimenti
Figure animate
Con GeoGebra
Videolezioni
Esercizi interattivi

Unità 7 **Lo studio di funzione** 418

1. Schema per lo studio del grafico di una funzione. Funzioni algebriche 418
2. Funzioni trascendenti 424
3. Funzioni con valori assoluti 430
4. Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata prima 432
5. Applicazioni dello studio di funzione alle equazioni 433
6. L'approssimazione delle radici di una equazione 435

Percorso delle idee 444
ESERCIZI 446
Prova di autoverifica 483

Verso le competenze 484
Verso la prova Invalsi 490
Verso l'Università 495
Compiti di realtà 497

Con GeoGebra
Videolezioni
Esercizi interattivi

Tema I Complementi di analisi

Unità 8 **Funzioni di due variabili** 500

1. Introduzione alle funzioni di due variabili 500
2. Dominio, limiti, continuità 507
3. Derivate parziali 514
   - Visualizziamo i concetti Il significato geometrico delle derivate parziali 515
4. Massimi e minimi 520
   - Visualizziamo i concetti Ottimizzazione vincolata 524
   - In un altro modo Il metodo dell'hessiano orlato 527

Percorso delle idee 530
ESERCIZI 532
Prova di autoverifica 565

Verso le competenze 566
Verso la prova Invalsi 568
Compito di realtà 571

Risposte alle prove di autoverifica 572
Indice analitico 578

Figure animate
Esercizi interattivi

Soluzioni degli esercizi interattivi (solo nell'eBook)

Unità 9 **Introduzione al calcolo integrale** (solo nell'eBook)

1. Primitive e integrale indefinito
2. Integrali immediati e integrazione per scomposizione
3. Integrazione di funzioni composte
4. Dalle aree al concetto di integrale definito

● Colleghiamo i concetti Il problema del calcolo di un'area

5. Le proprietà dell'integrale definito e il suo calcolo

Sintesi

ESERCIZI

■ Prova di autoverifica

Unità 10 **Problemi di scelta in condizioni di certezza in due variabili. La programmazione lineare** (solo nell'eBook)

1. Richiami su disequazioni e sistemi di disequazioni lineari in due incognite
2. Problemi di programmazione lineare in due incognite
3. Problemi di programmazione lineare in più incognite riconducibili a due

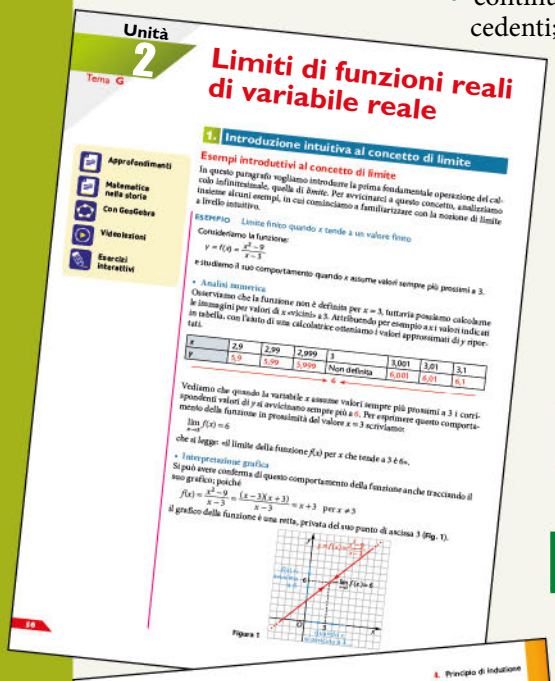
● Matematica nella realtà Problemi di programmazione lineare

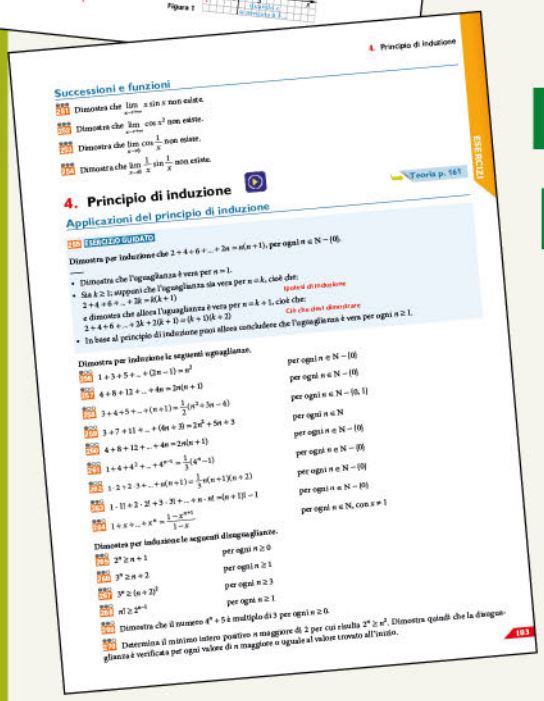
Sintesi

ESERCIZI

■ Prova di autoverifica

Qualche consiglio per «studiare matematica» e utilizzare questo libro


Unità 2
Tema G
Limiti di funzioni reali di variabile reale
1. Introduzione intuitiva al concetto di limite
Esempi introduttivi al concetto di limite
Approfondimenti
Matematica nella storia
Con GeoGebra
Videolezioni
Esercizi interattivi


Successioni e funzioni
4. Principio di induzione
Applicazioni del principio di induzione
ESERCIZI

Se stai studiando da solo, ti consigliamo di:

- farti scoprire alcune applicazioni della matematica nel mondo in cui viviamo;
- contribuire a farti acquisire quegli strumenti scientifici sempre più essenziali per partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica.

Per raggiungere questi scopi, ti diamo qualche consiglio su come studiare matematica.

1 Lo studio della matematica, come hai già avuto modo di constatare, richiede **impegno e partecipazione**. Non puoi imparare molto limitandoti ad assistere alle lezioni: devi partecipare, porti domande e confrontarti, anche da solo, con problemi ed esercizi.

2 È importante che studi matematica **con regolarità**: potrai così assimilare più agevolmente i concetti e il tuo insegnante potrà aiutarti più facilmente a superare le difficoltà.

3 Dovresti **leggere** le lezioni di questo libro e cercare di capire ciò che hai letto. A questo proposito ti diamo alcuni suggerimenti:

- leggi lentamente, prestando attenzione a ogni parola e ai simboli;
- rileggi le parti che non ti risultano chiare;
- prova a rifare da solo gli **esempi** che compaiono svolti nel testo.

4 Risolvi gli esercizi che trovi al termine di ciascuna Unità, suddivisi in paragrafi, con l'aiuto degli **esercizi svolti** e **guidati**.

5 Alla fine di ogni **tema** trovi una serie di esercizi sulle **competenze** da acquisire sugli argomenti trattati nel tema stesso; cerca di risolvere anche gli esercizi di **verso le prove INVALSI**, strutturate secondo la nuova tipologia di test d'esame.

6 Sfrutta i materiali multimediali relativi al libro disponibili **nell'e-book**: potrai trovare **figure dinamiche** per visualizzare meglio i concetti fondamentali presentati nella teoria, **figure animate**, **esercizi interattivi autocorrettivi**, **videolezioni** sulla risoluzione degli esercizi, un **glossario multimediale** in italiano e in inglese, ulteriori **complementi** e **approfondimenti**.

7 Quando risolvi un problema, non limitarti a scrivere la tua soluzione: sforzati di **illustrare ciò che stai facendo** e di **giustificare i vari passaggi**, con spiegazioni sintetiche ma esaurienti.

8 Se non riesci a rispondere a una domanda o a risolvere un esercizio immediatamente, non preoccuparti! Rileggi la lezione e gli esempi. Se puoi, abbandona momentaneamente la questione e affrontala in un secondo tempo. Quando qualcosa non ti è chiaro, **poni domande** e parlane con altri.

9 Cerca di studiare con **spirito critico**: la matematica non è solo calcolo, ma soprattutto una *forma di pensiero*. Nell'epoca di innovazioni tecnologiche in cui viviamo, questo secondo aspetto è sempre più essenziale: i calcoli si possono spesso demandare alle macchine, mentre è essenziale saper ragionare in modo corretto, risolvere e porsi problemi, unire fantasia e razionalità.

A tutti auguriamo buon lavoro

Gli Autori

TEMA G

Limiti e continuità



In questo Tema iniziamo lo studio di una nuova parte della matematica: il *calcolo infinitesimale*, o *analisi matematica*.
Essa ha delle caratteristiche che la differenziano in modo sostanziale dalla matematica che hai studiato finora: possiamo dire che è «meno statica» e «più dinamica». Infatti, mentre sin qui ci siamo occupati di problemi «statici» (quali per esempio contare, misurare, studiare proprietà di figure geometriche), ora, con lo studio del calcolo infinitesimale, introdurremo nuovi strumenti, adatti ad affrontare problemi legati al movimento e al cambiamento.
Problemi di questo tipo si incontrano in tutte le scienze, per cui sono vasti e numerosi i campi in cui il calcolo infinitesimale ha trovato applicazioni: lo studio del moto dei pianeti, della dinamica dei fluidi, dell'espansione dei gas, del diffondersi di epidemie, della fluttuazione dei mercati e così via.
Alla base di tutti gli argomenti di cui si occupa l'analisi c'è un concetto cardine, quello di *limite*, che sarà l'oggetto principale delle prossime Unità.

Unità 1
Introduzione all'analisi e funzioni

Unità 2
Limiti di funzioni reali di variabile reale

Unità 3
Successioni e principio di induzione

Unità 4
Continuità

PREREQUISITI

- Gli insiemi numerici
- Equazioni e disequazioni

COMPETENZE

- Utilizzare i primi strumenti dell'analisi per affrontare situazioni problematiche, elaborando opportune soluzioni

Unità 1

Tema G

Introduzione all'analisi e funzioni

- Figure animate
- Con GeoGebra
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

1. Che cos'è l'analisi matematica?

Questo volume è dedicato allo studio dell'**analisi matematica** (detta anche **calcolo infinitesimale**). Cerchiamo di capire di che cosa si tratta, partendo dai problemi che storicamente hanno portato alla nascita di questo importantissimo ramo della matematica.

I problemi matematici del XVII secolo

L'analisi matematica nasce nel XVII secolo in concomitanza con lo studio di problemi scientifici di grande rilevanza, che fecero sorgere la necessità di introdurre nuove tecniche nell'ambito del *calcolo*. I problemi che più stimolarono le ricerche furono sostanzialmente di tre tipi:

- la ricerca di soluzioni ottimali;
- la ricerca della retta tangente a una curva;
- il calcolo di aree di superfici a contorni curvilinei.

Molti di questi problemi erano già noti ai grandi matematici greci, in formulazioni diverse ma sostanzialmente equivalenti; essi però non riuscirono a superarli, sia per un certo timore ad avvicinarsi al concetto di «infinito» (di cui avevano svelato alcuni paradossi), sia perché non disponevano ancora dei simboli e delle scritture adeguate, fornite dal linguaggio dell'algebra.

Di seguito vediamo in dettaglio quali furono i più importanti problemi di ciascuno dei tre gruppi elencati che i matematici del Seicento si trovarono ad affrontare, e le geniali intuizioni che essi ebbero per cercare di risolverli.

Il problema della ricerca di soluzioni ottimali

Durante il nostro corso di Matematica abbiamo incontrato varie volte **problemi di ottimizzazione**, cioè problemi in cui si chiede di trovare il valore di una grandezza che rende minima o massima una certa quantità. Per esempio, abbiamo risolto alcuni problemi di questo tipo in geometria analitica studiando la parabola e, successivamente, in trigonometria.
Ai matematici del XVII secolo si erano presentati vari problemi di ottimizzazione. Per esempio, un problema classico che li aveva a lungo interessati consisteva nel trovare l'angolo di lancio di una palla di cannone, rispetto al suolo, in corrispondenza del quale si ottiene la **gittata massima**. **Galileo** (1564-1642) riuscì a risolvere il problema, dimostrando che la gittata massima (nel vuoto) si ottiene in corrispondenza di un angolo di lancio di 45° (**Fig. 1**).

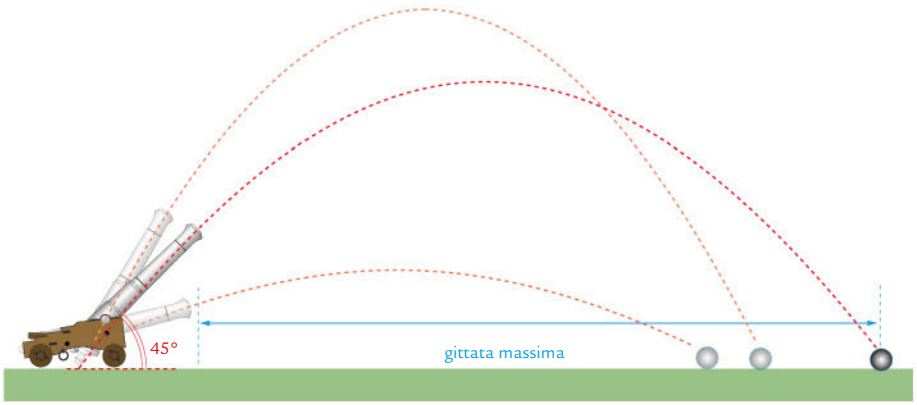


Figura 1 Ottimizzazione della gittata balistica in funzione dell'angolo di lancio.

Altri problemi di ottimizzazione nascevano dallo studio dell'*ottica*. Già nel 1626 **Willebrord Snell** (1580-1626) scoprì la famosa **legge di rifrazione**:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}$$

nella quale $\hat{i}$ è l'angolo che un raggio luminoso incidente sulla superficie di separazione fra due mezzi forma con la retta perpendicolare a tale superficie, $\hat{r}$ è l'angolo di rifrazione con cui il raggio prosegue nel secondo mezzo e v_1 e v_2 sono rispettivamente le velocità di propagazione della luce nei due mezzi.
La legge scoperta da Snell era però stata dedotta solo *sperimentalmente*, senza essere inserita in un contesto teorico più generale. Il primo a cercare di trovarne una giustificazione fu **Cartesio** (1596-1650), ma la sua spiegazione, espressa in un linguaggio piuttosto oscuro, fece sorgere varie perplessità. Successivamente **Pierre de Fermat** (1601-1665) mise in luce le lacune nelle argomentazioni di Cartesio e riuscì a derivare la legge di rifrazione dal proprio principio di **minimo cammino ottico**: «in un mezzo non omogeneo, un raggio luminoso che passa da un punto a un altro segue un cammino per cui il tempo impiegato è minimo rispetto a tutti i cammini che congiungono i due punti» (**Fig. 2**).
Per dimostrare la sua legge del cammino minimo Fermat si trovò dunque di fronte a un problema di ottimizzazione. Per risolvere questo problema, e altri analoghi, Fermat ideò nuovi metodi di calcolo, su cui ora non possiamo soffermarci, ma che effettivamente precorrono alcune idee fondamentali dell'analisi matematica.

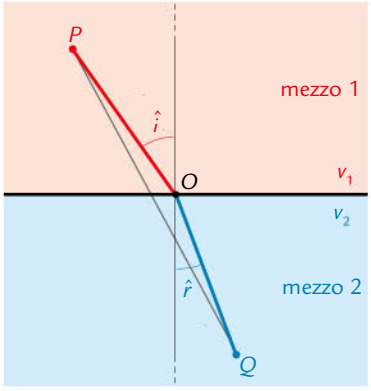


Figura 2 Il segmento PQ ha lunghezza minore della poligonale POQ ma la luce impiega più tempo a percorrere il segmento che la poligonale.

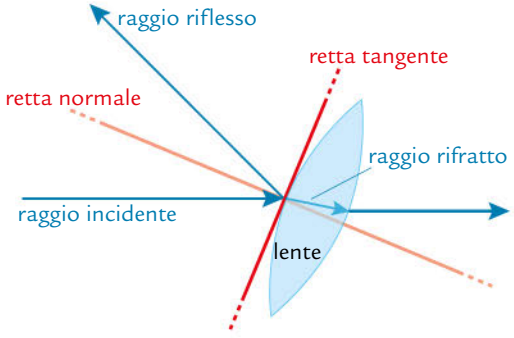


Figura 3 Un raggio luminoso che incide su una lente viene in parte riflesso e in parte rifratto. Gli angoli di incidenza e di rifrazione sono quelli che esso forma con la normale alla superficie curva.

Il problema della ricerca della retta tangente

Il problema di determinare la retta tangente a una curva in un punto dato si era presentato ai matematici del Seicento in svariati ambiti. Anzitutto in ambito puramente geometrico, in relazione al rinnovato interesse nei confronti della geometria che era stato stimolato dalla nascita della *geometria analitica*, a opera di **Cartesio** e **Fermat**. Anche alcuni problemi di *ottica*, però, portavano in modo naturale alla questione della retta tangente. Per studiare il passaggio della luce attraverso una lente era infatti necessario conoscere l'angolo con cui il raggio colpiva la superficie della lente, per poter applicare la legge di rifrazione. L'angolo che interessava era quello formato dal raggio luminoso e dalla *normale* alla superficie curva della lente nel punto di incidenza (**Fig. 3**); poiché la normale a una curva in un punto è definita come perpendicolare alla retta tangente alla curva passante per quel punto, il problema si riconduceva in ultima analisi alla ricerca della retta tangente.
Un altro problema che riconduceva alla tangente, anche se in modo meno esplicito, era infine quello di dare un senso al concetto di *velocità istantanea*. Non c'erano problemi a definire la velocità *media* di un corpo in un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$

come rapporto tra lo spazio percorso in quell'intervallo, Δs, e la variazione di tempo corrispondente, $\Delta t = t_1 - t_0$:

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Tuttavia, nel momento in cui si volesse definire, seguendo questa via, la velocità *istantanea*, sarebbe $\Delta s = \Delta t = 0$, quindi ci troveremmo di fronte a un rapporto del tipo $\frac{0}{0}$, che non ha significato! La chiave per risolvere il problema fu quella di osservare che il rapporto $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ non è altro che il coefficiente angolare della retta passante per i due punti $P_0(t_0, s(t_0))$ e $P_1(t_1, s(t_1))$ (**Fig. 4**), secante la traiettoria. Emerse allora l'idea di definire la velocità istantanea in t_0 come il coefficiente angolare della *retta tangente in* P_0, rappresentando tale retta la posizione «limite» cui tendono le rette secanti quando l'intervallo Δt diventa sempre più piccolo (**Fig. 5**).
Come vedremo, sarà proprio sulla base di questa intuizione che il problema della retta tangente verrà definitivamente risolto, sia per quanto riguarda una definizione del tutto generale di retta tangente, sia per quanto riguarda il calcolo della sua equazione.

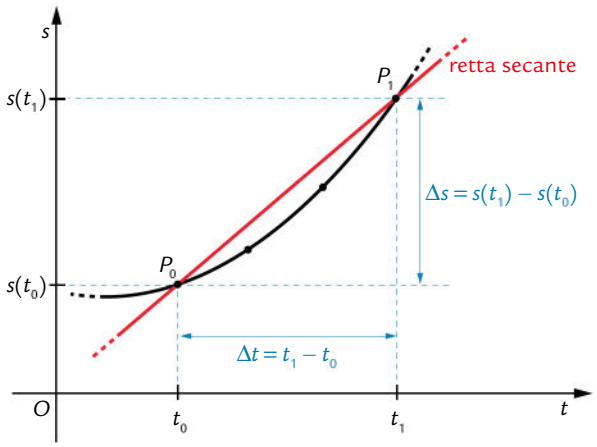


Figura 4

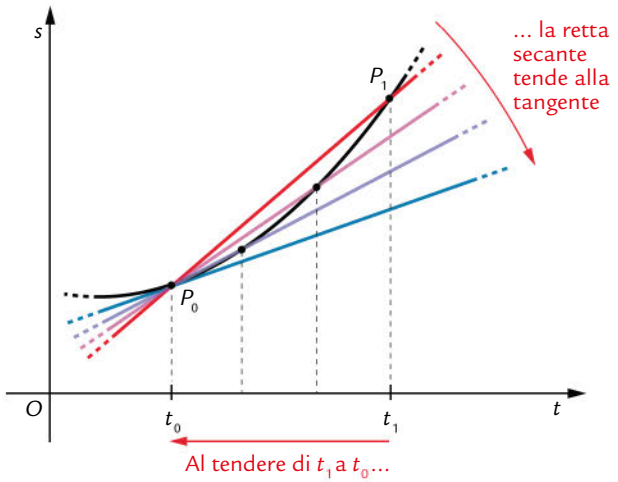


Figura 5

Figura animata
Ricerca della retta tangente a una curva in un punto

Il problema della misura

I problemi di misura hanno interessato i matematici fin dall'antichità; notevoli risultati erano già stati ottenuti dai Greci, in particolare da **Archimede** (287 a.C. - 212 a.C.), che era riuscito a determinare la lunghezza di una circonferenza, l'area di un segmento parabolico e il volume di una sfera. Archimede si era avvalso del cosiddetto metodo di *esaustione*; per esempio, per dimostrare la formula che fornisce l'area del segmento parabolico aveva ragionato così: aveva dimostrato che l'area del segmento parabolico non poteva essere né minore né maggiore dei $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo di area massima inscritto nel segmento parabolico e aveva concluso quindi, *per esclusione*, che il rapporto tra le aree doveva essere $\frac{4}{3}$.
Questo metodo, seppur rigoroso dal punto di vista logico, richiedeva però di conoscere preventivamente il risultato: come aveva fatto Archimede a intuire che l'area del segmento parabolico fosse $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo di area massima in esso inscritto? Nel Rinascimento si diffuse la convinzione che Archimede possedesse un metodo «segreto» che gli consentiva di scoprire i risultati che successivamente dimostrava. Un gruppo di matematici, tra cui **Keplero** (1571-1630), **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) ed **Evangelista Torricelli** (1608-1647), si mise così alla ricerca di un metodo «pratico» che consentisse di calcolare aree e volumi, evitando le sottigliezze logiche del metodo di esaustione; le loro ricerche culminarono nell'elaborazione del cosiddetto **metodo degli indivisibili**.

L'area del cerchio, per esempio, venne trovata da Keplero immaginando di dividere un cerchio in triangoli isosceli infinitamente «sottili» aventi i vertici nel suo centro e gli estremi delle basi sulla circonferenza. Indichiamo con b_1, b_2, ..., b_n le misure delle basi (*vedi* la **Fig. 6**, in cui $n = 16$). Se immaginiamo che le misure b_1, b_2, ..., b_n siano infinitamente piccole, allora possiamo assumere che l'altezza h di ciascuno dei triangolini sia assimilabile al raggio r del cerchio. L'area del cerchio, cioè la somma delle aree dei triangoli, sarà allora:

$$\frac{1}{2}b_1r + \frac{1}{2}b_2r + \ldots + \frac{1}{2}b_nr$$

ossia:

$$\frac{1}{2}r(b_1 + \ldots + b_n)$$

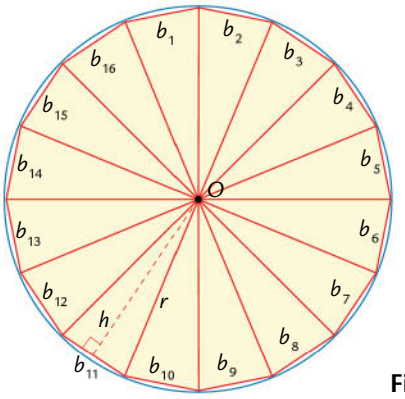


Figura 6

Poiché la somma delle basi (immaginandole infinitamente piccole e perciò identificabili con un archetto di circonferenza) è la lunghezza C della circonferenza, si avrà:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}rC$$

Il metodo degli indivisibili per il calcolo delle aree e dei volumi era basato su un modo di ragionare simile a quello appena descritto per il calcolo dell'area del cerchio. Le aree venivano calcolate immaginando di dividere le figure piane in «fili» (cioè considerandole come costituite da un numero indefinito di segmenti paralleli) e i volumi in «fogli» (cioè considerandoli come costituiti da un numero indefinito di figure piane parallele). Questi metodi vennero descritti da un allievo di Galileo, **Bonaventura Cavalieri**, in un libro intitolato appunto *Geometria degli indivisibili*, stampato nel 1635. Il metodo degli indivisibili, pur non essendo fondato su una teoria rigorosa, fu decisivo per la nascita del moderno calcolo infinitesimale ed esercitò una forte influenza sui matematici che successivamente ne delinearono i contorni in modo più netto. **Isaac Newton** (1642-1727) riprese da Cavalieri alcune nozioni e i nomi di «fluenti» e «flussioni» (che nel linguaggio moderno vengono chiamate «derivate»); **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), per definire un particolare oggetto del calcolo infinitesimale che studieremo più avanti, l'*integrale*, utilizzò una «esse» allungata, simile a quella utilizzata da Cavalieri per indicare la somma degli indivisibili.

Verso l'analisi matematica

Le idee sviluppate dai matematici del Seicento, grazie al contributo di più scuole scientifiche (inglese, tedesca, francese, italiana), permisero il delinearsi dei concetti fondamentali dell'analisi e culminarono con le opere di **Newton** e di **Leibniz**. I risultati ottenuti, pur non ancora fondati su una teoria coerente e rigorosa, erano di tale portata e sintonia con l'esperienza fisica da far intuire che si era di fronte a idee di straordinaria profondità. La fondazione rigorosa dell'analisi passò successivamente attraverso una revisione critica dei concetti di *numero reale* e di *funzione* e sfociò alla fine del XVIII secolo nella formulazione del concetto di *limite*. Possiamo infatti definire l'**analisi matematica** come quella parte della matematica che studia le proprietà delle funzioni reali di variabile reale sulla base del concetto di *limite*. Anche noi inizieremo lo studio dell'analisi proprio a partire dal concetto di limite; prima però è bene riprendere e approfondire gli altri due concetti fondamentali che, come abbiamo detto, sono alla base del calcolo infinitesimale: il concetto di *numero reale* e di *funzione reale di variabile reale*.

PER LA PRECISIONE

In realtà l'analisi matematica non si occupa solo delle funzioni da **R** a **R**, ma anche di altri oggetti matematici che ancora non conosci, quali serie, funzioni definite su insiemi più generali di **R** ecc. Noi però ci limiteremo a studiare la parte dell'analisi che si occupa delle funzioni da **R** a **R**.

Esercizi p. 24

Con GeoGebra
Intervalli sulla retta reale

2. L'insieme R: richiami e complementi

L'insieme R

Nei tuoi studi precedenti hai già visto come sono definiti i numeri reali e quali sono le principali proprietà delle operazioni in **R**. Ricordiamo brevemente i punti salienti dell'argomento.

1. La necessità di ampliare l'insieme **Q** e di introdurre l'insieme **R** viene dall'esigenza di poter eseguire l'operazione di estrazione di radice. Per esempio, nell'insieme **Q** non è possibile risolvere l'equazione:

   $$x^2 = 2$$

   perché non esiste, in **Q**, la radice quadrata di 2. In **R**, invece, l'equazione ammette le due soluzioni $\pm\sqrt{2}$.

2. Per definire l'insieme **R** abbiamo anzitutto introdotto i numeri *irrazionali* (per esempio: $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ e π):

DEFINIZIONE | Numero irrazionale

Ogni numero (positivo o negativo) la cui rappresentazione decimale è illimitata e non periodica si dice **irrazionale**.

Abbiamo quindi potuto definire l'insieme dei numeri reali:

DEFINIZIONE | Insieme R

L'insieme formato dall'unione dell'insieme dei numeri razionali e dell'insieme dei numeri irrazionali viene chiamato insieme dei numeri **reali** e viene indicato con la lettera **R**.

3. Abbiamo visto che l'insieme **R** dei numeri reali possiede un'importante proprietà che lo distingue da **Q**: la **completezza**. I numeri razionali lasciano infatti sulla retta dei «posti vuoti»: per esempio, se disegniamo un quadrato di lato 1 e riportiamo, con il compasso, la diagonale sulla retta otteniamo un punto che non corrisponde ad alcun numero razionale (**Fig. 7**). L'insieme dei numeri reali è invece completo: a ogni punto della retta corrisponde un solo numero reale e, viceversa, a ogni numero reale corrisponde un solo punto della retta.

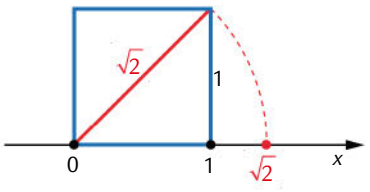


Figura 7

MODI DI DIRE

Nella notazione usata in tabella, il numero a è l'**estremo sinistro** dell'intervallo, il numero b è l'**estremo destro** e il numero $b - a$ è l'**ampiezza** dell'intervallo. Inoltre, in virtù dell'identificazione tra numeri reali e punti sulla retta, per indicare un elemento di un intervallo si parla indifferentemente di *numero* o di *punto*.

Massimo e minimo, estremo inferiore ed estremo superiore

Prima di introdurre alcune nuove definizioni ricordiamo tramite la seguente tabella le notazioni utilizzate per indicare alcuni particolari sottoinsiemi di **R**, gli **intervalli limitati**, che utilizzeremo di frequente nei prossimi esempi.

Intervalli limitati			
Tipo di intervallo	**Notazione con le parentesi**	**Notazione algebrica**	**Rappresentazione grafica**
Intervallo **chiuso**	$[a, b]$	$a \le x \le b$	
Intervallo **aperto**	(a, b)	$a < x < b$	
Intervallo **chiuso a sinistra** e **aperto a destra**	$[a, b)$	$a \le x < b$	
Intervallo **chiuso a destra** e **aperto a sinistra**	$(a, b]$	$a < x \le b$	

Consideriamo ora un insieme A non vuoto di numeri reali. Può accadere che esista in $\mathbf{R}$ un numero M *maggiore o uguale* a tutti gli elementi di A: in tal caso il numero M si dice **maggiorante** dell'insieme A e l'insieme A si dice **superiormente limitato**.

ESEMPI

a. L'insieme $A = [0, 2)$ è superiormente limitato: un suo maggiorante è 2, ma ne esistono infiniti altri: 3, 4, $\frac{5}{2}$, $\sqrt{5}$, ...; 2 è il maggiorante «più piccolo».

b. L'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 \geq 1\}$ è costituito da tutti i valori di x reali tali che $x \leq -1 \vee x \geq 1$; questo insieme **non** è superiormente limitato.

In modo analogo diremo che un numero reale m è un **minorante** dell'insieme A se è *minore o uguale* a tutti gli elementi dell'insieme; in tal caso l'insieme A si dice **inferiormente limitato**.
Un insieme sia superiormente sia inferiormente limitato si dice **limitato**.

MODI DI DIRE
Un insieme **non** superiormente (inferiormente) limitato si dice anche superiormente (inferiormente) **illimitato**.

ESEMPI

a. L'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$ è inferiormente limitato: un minorante è 1, ma ne esistono infiniti altri: -1, 0, $\frac{1}{2}$, ...; 1 è il minorante «più grande». L'insieme A **non** è invece limitato superiormente.

b. L'insieme $A = (-1, 2] \cup (4, 5]$ ammette, per esempio, -2 come minorante e 6 come maggiorante, quindi è sia inferiormente sia superiormente limitato. Pertanto A è un insieme limitato.

c. L'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali non ammette né minoranti né maggioranti in $\mathbf{R}$, quindi non è limitato né inferiormente né superiormente.

Se esiste un elemento **appartenente** all'insieme A che è anche un suo *maggiorante*, allora questo elemento si dice *massimo* dell'insieme. Analogamente si può definire il *minimo*, come precisato di seguito.

DEFINIZIONE | Massimo e minimo di un insieme

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$.

a. Un numero reale M si dice **massimo** di A (e si scrive $M = \max A$) quando sono verificate entrambe le seguenti condizioni:
- M appartiene ad A;
- M è un maggiorante di A.

b. In maniera analoga, un numero reale m si dice **minimo** di A (e si scrive $m = \min A$) quando appartiene ad A ed è un minorante di A.

ESEMPI Ricerca del minimo e del massimo di un insieme

Insieme	Minimo	Massimo
Intervallo [0, 1]	0	1
Intervallo (0, 1]	Non esiste **0 non è minimo perché non appartiene all'insieme**	1
Intervallo [0, 1)	0	Non esiste **1 non è massimo perché non appartiene all'insieme**
Intervallo (0, 1)	Non esiste	Non esiste
$\mathbf{R}$	Non esiste	Non esiste

Come abbiamo visto negli esempi precedenti, ci sono insiemi per cui non esistono il massimo e il minimo, per esempio l'intervallo (0, 1); il numero 1 **non** può dirsi il massimo di questo insieme perché non vi appartiene, tuttavia siamo portati ad attribuirgli l'idea intuitiva di «elemento più grande», nel senso che:

- è un *maggiorante* dell'insieme;
- è il *minimo* tra i maggioranti (per esempio altri maggioranti sono 3, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{10}$ ma non ci sono maggioranti minori di 1).

Per esprimere queste caratteristiche si dice che 1 è l'**estremo superiore** dell'insieme (0, 1). Analogamente, si può dire che 0 è l'**estremo inferiore** di tale insieme.

PER SAPERNE DI PIÙ

Si potrebbe dimostrare che l'estremo inferiore e l'estremo superiore di un insieme, se esistono, sono **unici**.

DEFINIZIONE | Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$.

a. Si chiama **estremo superiore** di A (e si scrive $\sup A$), se esiste, il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.
b. Si chiama **estremo inferiore** di A (e si scrive $\inf A$), se esiste, il massimo dell'insieme dei minoranti di A.

ESEMPI Ricerca dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore

Insieme	Estremo inferiore	Estremo superiore
$A = (0, 1]$	0 (che **non** è minimo di A) Infatti l'insieme dei minoranti di A è l'insieme $\{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$ e il suo massimo è 0	1 (che è anche massimo di A) Infatti l'insieme dei maggioranti di A è l'insieme $\{x \in \mathbf{R} : x \leq 1\}$ e il suo minimo è 1
$A = [0, 1)$	0 (che è anche minimo di A)	1 (che **non** è massimo di A)
$A = (0, 1)$	0 (che **non** è minimo di A)	1 (che **non** è massimo di A)
$A = \{x \in \mathbf{R} : x < 2\}$	Non esiste in $\mathbf{R}$ A non è inferiormente limitato	2 (che **non** è massimo di A)
$A = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 3\}$	3 (che è anche minimo di A)	Non esiste in $\mathbf{R}$ A non è superiormente limitato

RIFLETTI

Dagli esempi qui a fianco puoi notare che se un insieme ammette massimo, quest'ultimo coincide con l'estremo superiore dell'insieme, mentre se un insieme ammette estremo superiore non è detto che abbia massimo. Analogamente per l'estremo inferiore.

I simboli di più infinito e meno infinito

È possibile «estendere» l'insieme dei numeri reali con due nuovi elementi, che permettono di attribuire estremo inferiore e superiore anche a insiemi inferiormente o superiormente illimitati. Per convenzione definiamo:

- $+\infty$ (più infinito) l'estremo superiore di ogni insieme superiormente illimitato;
- $-\infty$ (meno infinito) l'estremo inferiore di ogni insieme inferiormente illimitato.

RIFLETTI

In base a quanto abbiamo detto, possiamo affermare che in $\mathbf{R}^*$ ogni sottoinsieme di $\mathbf{R}$ ammette estremo inferiore e superiore. Inoltre, come vedremo nella prossima Unità, una delle operazioni fondamentali dell'analisi, quella di *limite*, risulta particolarmente significativa se ambientata in $\mathbf{R}^*$ anziché in $\mathbf{R}$.

Intuitivamente, si può pensare al simbolo $+\infty$ come a un elemento «più grande» di tutti i numeri reali, rappresentato da un punto «all'estrema destra» della retta reale; analogamente, si può pensare a $-\infty$ come a un elemento «più piccolo» di tutti i numeri reali, rappresentato da un punto «all'estrema sinistra» della retta reale.
Gli elementi $+\infty$ e $-\infty$ **non** sono numeri reali ma simboli introdotti per ragioni di comodità.
L'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$ con l'aggiunta dei due elementi $+\infty$ e $-\infty$ viene indicato con $\mathbf{R}^*$:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$$

e si chiama **sistema ampliato dei numeri reali**.

VISUALIZZIAMO I CONCETTI

Una rappresentazione geometrica di $-\infty$ e $+\infty$ si può ottenere proiettando i punti della semicirconferenza in **Fig. 8** dal suo centro C sulla retta reale. In questo modo, a ogni punto della semicirconferenza corrisponde un punto della retta e viceversa (per esempio considera i punti P e P', Q e Q'), con la sola eccezione dei due punti A e B, estremi della semicirconferenza, cui non corrisponde sulla retta alcun punto: diremo che $-\infty$ è il corrispondente di A e $+\infty$ il corrispondente di B.

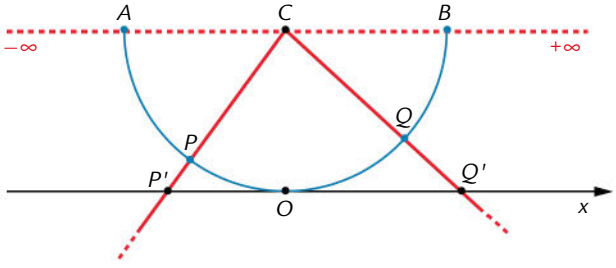
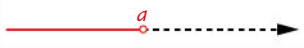


Figura 8

I simboli $+\infty$ e $-\infty$, come ricorderai, vengono utilizzati anche per rappresentare gli intervalli illimitati.

Intervalli illimitati			
Tipo di intervallo	**Notazione con le parentesi**	**Notazione algebrica**	**Rappresentazione grafica**
Chiuso, illimitato a destra	$[a, +\infty)$	$x \geq a$	
Aperto, illimitato a destra	$(a, +\infty)$	$x > a$	
Aperto, illimitato a sinistra	$(-\infty, a)$	$x < a$	
Chiuso, illimitato a sinistra	$(-\infty, a]$	$x \leq a$	
R	$(-\infty, +\infty)$	$\forall x \in \mathbf{R}$	

Spesso, in analisi, sarà utile scrivere sottoinsiemi di **R** sotto forma di intervalli o di unione di intervalli.

ESEMPI

a. L'insieme **R** può essere indicato come l'intervallo $(-\infty, +\infty)$.
b. L'insieme $\mathbf{R} - \{0\}$ si può scrivere come $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
c. L'insieme $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$ si può scrivere come $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
d. L'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - 2x \geq 0$ si può scrivere come $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

Esercizi p. 26

3. Funzioni reali di variabile reale: dominio e studio del segno

Definizione e funzioni elementari

DEFINIZIONE | **Funzione**

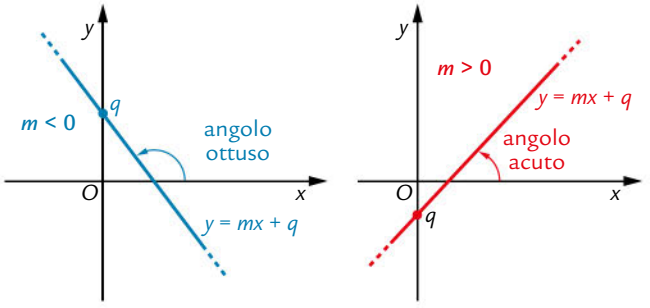
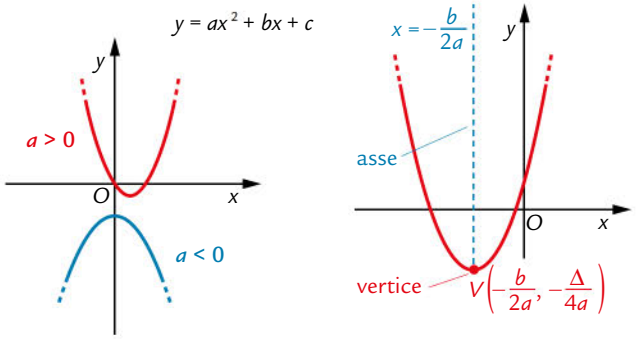
Si chiama funzione f di **dominio** A e **codominio** B una relazione che associa a **ogni** elemento di A **uno e un solo** elemento di B (si scrive $f: A \to B$).

Se A e B sono sottoinsiemi di **R**, la funzione si dice **reale di variabile reale**. Le legge che definisce una funzione $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ può essere assegnata tramite una delle seguenti due scritture:

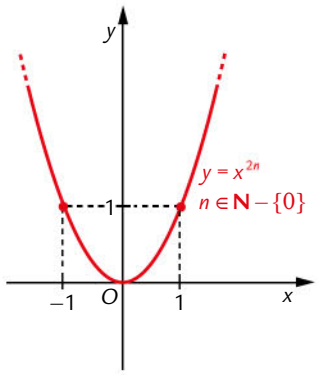
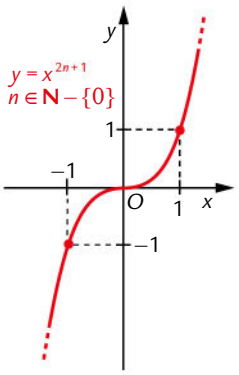
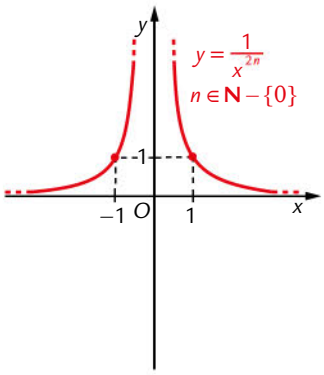
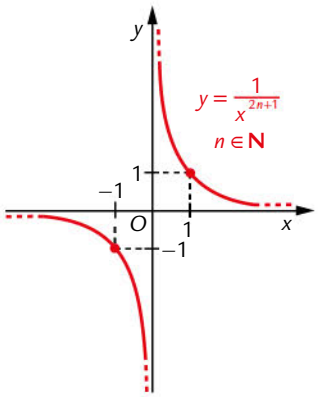
$\underbrace{y = f(x)}_{\text{equazione della funzione}}$ oppure $\underbrace{f(x) = \ldots\ldots}_{\text{espressione analitica della funzione}}$

Le principali funzioni elementari che sono state via via introdotte durante il corso di Matematica e i loro grafici sono riassunti nelle tabelle seguenti.

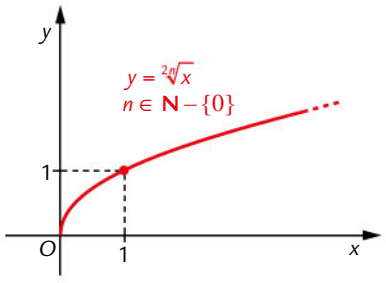
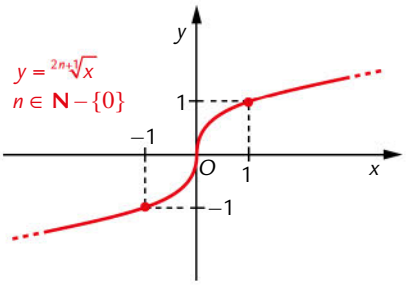
Funzione lineare e funzione quadratica

Funzione lineare	Funzione quadratica
	

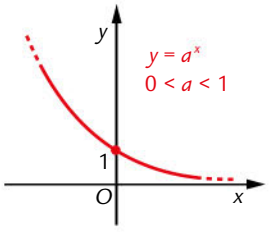
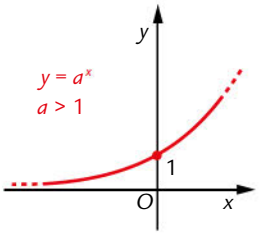
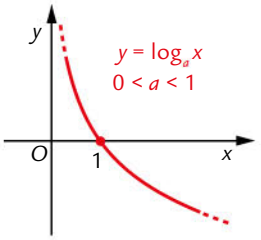
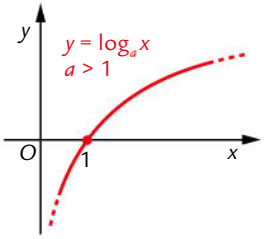
Funzioni potenza con esponente intero

Esponente intero positivo pari	Esponente intero positivo dispari	Esponente intero negativo pari	Esponente intero negativo dispari
			

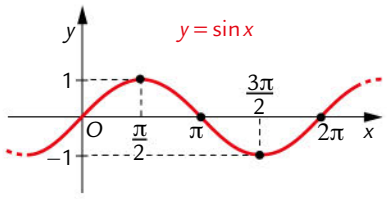
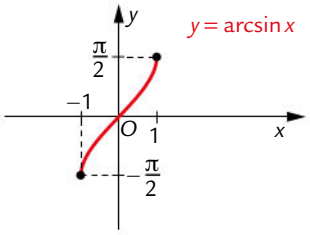
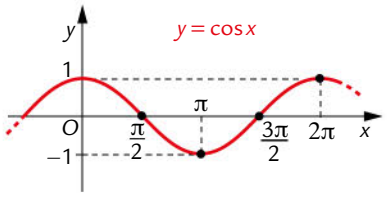
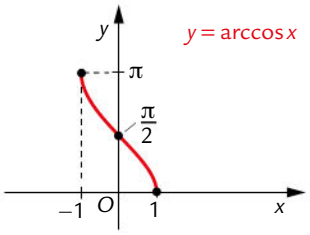
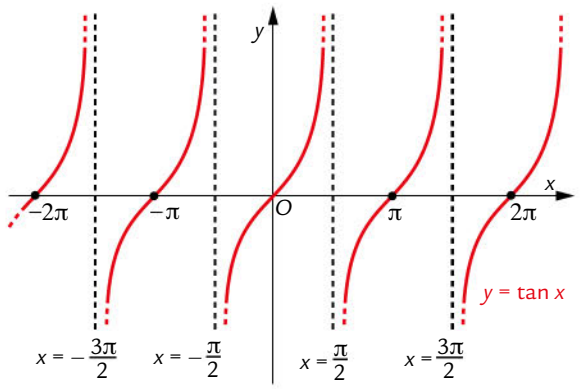
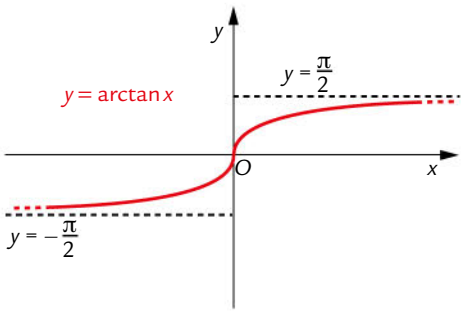
Funzioni radice

Radici di indice pari	Radici di indice dispari
	

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzione esponenziale, base minore di 1	Funzione esponenziale, base maggiore di 1	Funzione logaritmica, base minore di 1	Funzione logaritmica, base maggiore di 1
			

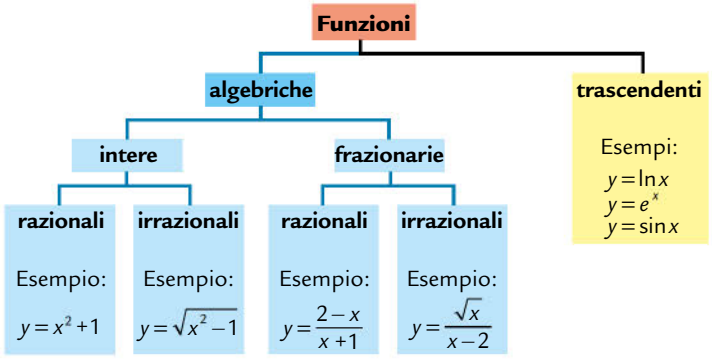
Funzioni goniometriche e goniometriche inverse

Funzione goniometrica	Corrispondente funzione goniometrica inversa
	
	
	

Classificazione

Le funzioni si possono classificare in base al tipo di operazioni che compaiono nell'espressione analitica $f(x)$.

- Se compare soltanto un numero finito di operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza a esponente razionale o estrazione di radice si dice che la funzione è **algebrica**, altrimenti si dice che è **trascendente**.
- Nell'insieme delle funzioni algebriche si distinguono: le funzioni **intere** (o **polinomiali**), nelle quali la variabile indipendente non compare in alcun denominatore, da quelle **frazionarie** (o fratte); le funzioni **razionali**, nelle quali la variabile indipendente non compare sotto alcun segno di radice, da quelle **irrazionali**:



Con GeoGebra
Funzioni: dominio e immagine

Dominio

Quando si assegna l'equazione $y = f(x)$ che definisce una funzione reale di variabile reale (o la sua espressione analitica $f(x) = ...$) senza specificare il dominio, si sottintende che esso sia quello «naturale», cioè l'insieme costituito dai valori reali di x per cui tutte le operazioni che compaiono nell'espressione $f(x)$ hanno significato. Per determinare il dominio basta allora tenere presente le indicazioni riassunte nella seguente tabella.

Indicazioni per determinare il dominio di una funzione	Esempi
1. Le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione sono sempre definite, mentre l'operazione di divisione è definita purché il divisore sia non nullo.	• $y = x^4 - x^2$ ha come dominio **R**. • $y = \frac{x+1}{x^2+3x-4}$ è definita purché risulti: $x^2 + 3x - 4 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -4$ Il suo dominio è perciò **R** – {–4, 1}
2. Un radicale di indice *pari* è definito solo se il radicando è positivo o nullo, mentre un radicale di indice *dispari* è sempre definito purché esista il radicando.	• $y = \sqrt{5x - x^2}$ è definita purché risulti: $5x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 5$ Il suo dominio è l'intervallo [0, 5]. • $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$ è definita per ogni valore reale di x. Il suo dominio è **R**.
3. Il logaritmo è definito se l'argomento è positivo e la base è positiva e diversa da 1.	• $y = \ln(x^2 - 4)$ è definita purché risulti: $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$ Il suo dominio è l'insieme $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
4. L'esponenziale (con base positiva costante) è sempre definito purché esista l'esponente.	• $y = e^{\frac{x}{x+1}}$ è definita purché esista l'esponente, cioè per: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ Il suo dominio è **R** – {–1}.
5. Seno e coseno sono definiti purché sia definito il loro argomento, mentre la tangente è definita purché il suo argomento sia diverso da $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$.	• $y = \sin x^2$ e $y = \cos(5 - 3x)$ hanno come dominio **R**. • $y = \tan(2x - 1)$ è definita purché: $2x - 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}$ Il suo dominio è $\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}\right\}$.
6. Arcoseno e arcocoseno sono definiti a condizione che l'argomento sia compreso tra –1 e 1, estremi inclusi, mentre l'arcotangente è definito purché sia definito il suo argomento.	• $y = \arcsin(x - 1)$ è definita purché: $-1 \leq x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$ Il suo dominio è l'intervallo [0, 2]. • $y = \arctan(\sin^2 x + 1)$ ha come dominio **R**.

PER SAPERNE DI PIÙ **Dominio di funzioni potenza con base variabile ed esponente irrazionale o variabile**

1. Una potenza con *base variabile ed esponente irrazionale positivo* è definita per valori positivi o nulli della base: per esempio, la funzione $f(x) = (x-3)^{\sqrt{2}}$ è definita per $x \geq 3$.
2. Una potenza *con base variabile ed esponente irrazionale negativo* è definita per valori positivi della base: per esempio, la funzione $f(x) = (x-3)^{-\sqrt{2}}$ è definita per $x > 3$.
3. Una potenza con *base ed esponente variabili* è definita quando la base è positiva oppure quando la base è nulla e l'esponente è positivo oppure quando la base è negativa e l'esponente è intero; a rigore il dominio della funzione $f(x) = x^x$ sarebbe dunque $\{x \in \mathbf{Z} \mid x < 0\} \cup (0, +\infty)$. Tuttavia nelle applicazioni il caso in cui la base è nulla o negativa sono poco interessanti, per cui, data una funzione potenza con base ed esponente variabili della forma $y = [f(x)]^{g(x)}$, si conviene di assumere come dominio l'insieme dei valori di x per cui $f(x) > 0$ e $g(x)$ è definito. Questa scelta dipende anche dal fatto che consente di identificare la funzione $y = [f(x)]^{g(x)}$ con la funzione $y = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln[f(x)]}$.

Il dominio è fondamentale per definire il concetto di *uguaglianza* di due funzioni.

DEFINIZIONE | Funzioni uguali

Due funzioni f e g si dicono **uguali** se hanno lo stesso dominio D e risulta:

$$f(x) = g(x) \qquad \text{per ogni } x \in D$$

Esempio	Controesempio
Le due funzioni: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4}}$ e $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$ sono uguali perché hanno lo stesso dominio ($x \geq 0$) e risulta: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$ per ogni $x \geq 0$	Le due funzioni: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$ e $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x+4}}$ **non** sono uguali perché hanno dominio diverso: la funzione f è definita per $x \geq 0$, mentre la funzione g è definita per: $x < -4 \vee x \geq 0$

Il segno di una funzione

Dopo aver determinato il dominio di una funzione $y = f(x)$, la «seconda fase» di uno studio elementare della funzione consiste nel determinare i suoi eventuali *punti d'intersezione con gli assi cartesiani* e nello studiare il *segno* della funzione.

- Le ascisse degli eventuali punti di intersezione con l'asse x si ottengono ponendo $y = 0$ nell'equazione che definisce la funzione, ossia risolvendo l'equazione $f(x) = 0$; essi si dicono **zeri** della funzione.
- Il punto di intersezione con l'asse y esiste a condizione che la funzione sia definita per $x = 0$; l'ordinata del punto di intersezione si calcola semplicemente ponendo $x = 0$ nell'equazione che definisce la funzione, ossia calcolando $f(0)$.
- Lo studio del segno consiste nello stabilire per quali valori di x risulta $f(x) < 0$ e per quali risulta $f(x) > 0$. Si conviene di risolvere la disequazione $f(x) > 0$, che individua gli intervalli dove la funzione è *positiva*, ossia dove il suo grafico è «al di sopra» dell'asse x; la funzione sarà *negativa* ovunque essa non sia positiva o nulla nell'ambito del dominio.

ESEMPIO Studio del segno di una funzione razionale

Determiniamo il dominio, gli eventuali punti di intersezione con gli assi e il segno della funzione $y = x^5 - 9x^3$ e rappresentiamo i risultati ottenuti nel piano cartesiano.

- **Dominio**

Si tratta di una funzione polinomiale, quindi è definita in **R**.

- **Punti di intersezione con gli assi**

Asse x

Per determinare i punti di intersezione con l'asse x dobbiamo porre $y = 0$ nell'equazione $y = x^5 - 9x^3$ che definisce la funzione:

$$y = 0 \Rightarrow x^5 - 9x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^3(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$$

Ci sono quindi tre punti di intersezione con l'asse x, di coordinate:

$$(-3, 0); \ (0, 0); \ (3, 0)$$

Asse y

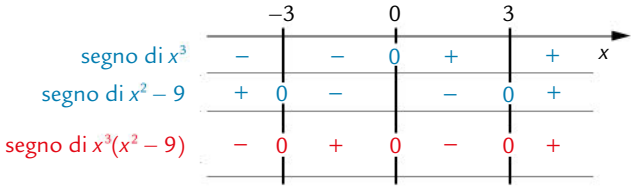
Per determinare i punti di intersezione con l'asse y dobbiamo porre $x = 0$ nell'equazione $y = x^5 - 9x^3$ che definisce la funzione:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^5 - 9 \cdot 0^3 = 0$$

Il punto di intersezione del grafico della funzione con l'asse y è quindi l'origine.

- **Studio del segno**

$$y > 0 \implies x^3(x^2 - 9) > 0 \implies -3 < x < 0 \vee x > 3$$ Vedi schema qui sotto



- **Rappresentazione nel piano cartesiano**

Dalle informazioni acquisite deduciamo che il grafico della funzione appartiene alla regione di piano cartesiano **non** esclusa dal tratteggio in **Fig. 9**. Nel grafico abbiamo indicato con un punto pieno gli *zeri* della funzione.

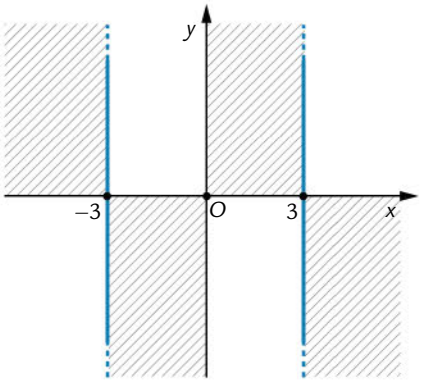


Figura 9 Per $-3 < x < 0 \vee x > 3$ la funzione è *positiva*, quindi il suo grafico è al di sopra dell'asse x; per $x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$ è nulla, quindi interseca l'asse x; per $x < -3 \vee 0 < x < 3$ la funzione è *negativa*, ovvero il suo grafico è al di sotto dell'asse x. Abbiamo indicato ciò «cancellando» con un tratteggio le parti del piano cartesiano dove «non vive» il grafico della funzione.

Esercizi p. 27

4. Funzioni reali di variabile reale: prime proprietà

In questo paragrafo introduciamo alcuni nuovi concetti sulle funzioni legati alle definizioni di massimo, minimo, estremo inferiore ed estremo superiore che abbiamo presentato nel **Paragrafo 2**, e proseguiamo il richiamo di alcune nozioni che già dovresti conoscere.

Immagine, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione

Abbiamo visto che, se non altrimenti specificato, il dominio di una funzione $y = f(x)$ è l'insieme costituito dai valori di x per cui è definita l'espressione $f(x)$.
L'**insieme immagine** (o semplicemente **immagine**) della funzione è formato invece dai valori assunti da y al variare di x nel dominio della funzione. Per esempio, la funzione $y = \sin x$ assume al variare di $x \in \mathbf{R}$ tutti e soli i valori compresi tra -1 e 1, inclusi -1 e 1, quindi ha come immagine l'intervallo $[-1, 1]$.

Introduciamo ora alcune nuove definizioni, applicando all'insieme immagine i concetti di estremo inferiore, estremo superiore, massimo e minimo.

DEFINIZIONE | Estremo superiore (inferiore), massimo (minimo) di una funzione

a. Sia $f: D \to \mathbf{R}$ una funzione e sia I l'insieme immagine della funzione. L'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme I vengono chiamati rispettivamente **estremo superiore** ed **estremo inferiore della funzione** e si indicano con i simboli:

$$\sup f(x) \quad \text{e} \quad \inf f(x)$$

b. Analogamente, se esistono il massimo o il minimo dell'insieme I, vengono chiamati **massimo** e **minimo (assoluti) della funzione** e si indicano con i simboli:

$$\max f(x) \quad \text{e} \quad \min f(x)$$

ATTENZIONE!
Se l'insieme immagine della funzione è superiormente illimitato, l'estremo superiore della funzione è $+\infty$. Se l'insieme immagine è inferiormente illimitato, l'estremo inferiore della funzione è $-\infty$.

DEFINIZIONE | Funzione limitata

Sia $f: D \to \mathbf{R}$ una funzione. La funzione si dice:

a. **superiormente limitata**, se il suo estremo superiore è un numero reale;
b. **inferiormente limitata**, se il suo estremo inferiore è un numero reale;
c. **limitata**, se è sia superiormente sia inferiormente limitata.

Il grafico di una funzione limitata è contenuto in una striscia orizzontale.

ESEMPI Estremo superiore ed estremo inferiore, massimo e minimo di una funzione

Determiniamo, di ciascuna delle seguenti funzioni, l'immagine, l'estremo superiore, l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo.

a. $y = \sin x$ b. $y = e^x$ c. $y = \ln x$ d. $y = \arctan x$ e. $y = e^{-|x|}$

a. La funzione $y = \sin x$ ha come insieme immagine l'intervallo chiuso $[-1, 1]$ (**Fig. 10**). Perciò il minimo della funzione è -1 e il massimo è 1. Si tratta dunque di una funzione limitata.

b. La funzione $y = e^x$ ha come immagine l'intervallo $(0, +\infty)$ (**Fig. 11**). L'estremo inferiore della funzione è 0 e l'estremo superiore è $+\infty$. La funzione è quindi limitata inferiormente ma non superiormente. Non esistono né minimo né massimo della funzione.

c. La funzione $y = \ln x$ ha come immagine $\mathbf{R}$ (**Fig. 12**). L'estremo inferiore della funzione è $-\infty$ e l'estremo superiore è $+\infty$. La funzione non è limitata né inferiormente né superiormente. Non esistono né minimo né massimo della funzione.

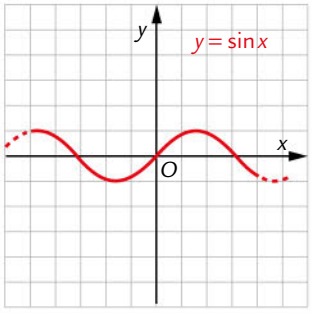


Figura 10

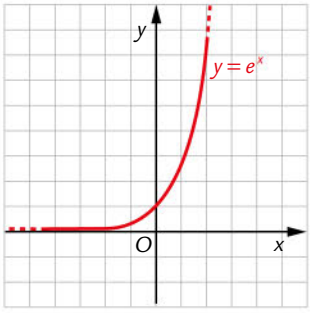


Figura 11

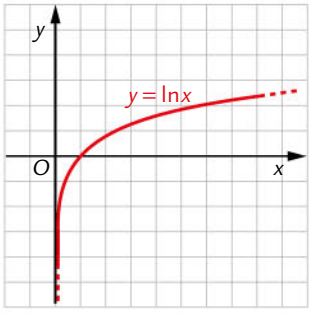


Figura 12

d. La funzione $y = \arctan x$ ha come immagine l'intervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (**Fig. 13**). L'estremo inferiore della funzione è $-\frac{\pi}{2}$ e l'estremo superiore è $\frac{\pi}{2}$. Si tratta quindi di una funzione limitata. Non esistono né minimo né massimo della funzione.

e. Il grafico della funzione $y = e^{-|x|}$ si può ottenere tracciando per $x \geq 0$ il grafico di $y = e^{-x}$ e per $x < 0$ il simmetrico rispetto all'asse y del grafico tracciato per $x \geq 0$. Dal grafico risultante (**Fig. 14**) è facile dedurre che l'immagine della funzione è l'intervallo $(0, 1]$. Perciò la funzione ha come estremo inferiore 0 (ma non ha minimo) e ha come massimo 1. Si tratta quindi di una funzione limitata.

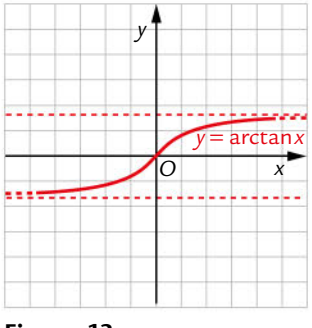


Figura 13

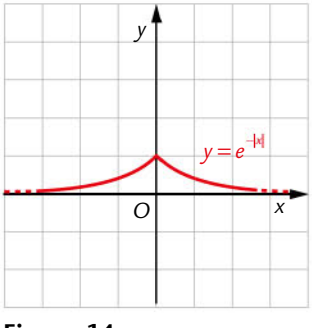


Figura 14

ATTENZIONE!

Se M è il **massimo** (assoluto) di una funzione $y = f(x)$, il punto x_0 in cui la funzione assume il valore massimo M si dice **punto di massimo** della funzione. Bisogna prestare attenzione al linguaggio: con l'espressione «*punto di* massimo» si indica in genere il valore x_0 in cui la funzione assume valore massimo, quindi un elemento del *dominio* della funzione; con l'espressione «*massimo* della funzione» si indica invece il valore assunto dalla funzione in x_0, cioè un elemento del *codominio*. Analoga differenza vale per le espressioni «minimo» e «punto di minimo».

Con GeoGebra
Funzioni crescenti e funzioni decrescenti

OSSERVA

I può coincidere con il dominio o essere un suo sottoinsieme proprio.

Funzioni crescenti e funzioni decrescenti

DEFINIZIONE | Funzioni strettamente crescenti e strettamente decrescenti

Sia I un sottoinsieme del dominio della funzione $y = f(x)$.

a. f si dice **strettamente crescente** in I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in I$$

b. f si dice **strettamente decrescente** in I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in I$$

In pratica le funzioni strettamente crescenti (**Fig. 15**) *conservano* l'ordine, mentre le funzioni strettamente decrescenti (**Fig. 16**) *invertono* l'ordine.

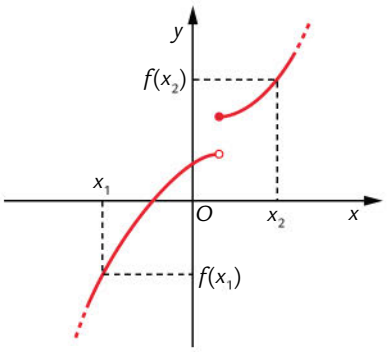


Figura 15 Funzione strettamente crescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

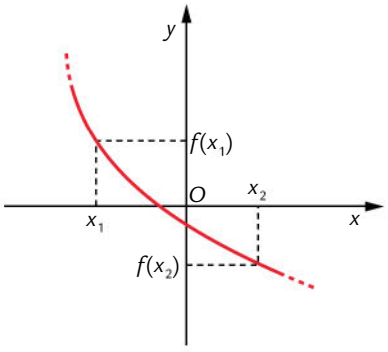


Figura 16 Funzione strettamente decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Sostituendo nelle precedenti definizioni i simboli di disuguaglianza stretta con i simboli di disuguaglianza debole otteniamo le definizioni di funzioni crescenti e decrescenti *in senso lato* (*vedi* anche le **Figg. 17** e **18**).

DEFINIZIONE | Funzioni crescenti e decrescenti in senso lato

Sia I un sottoinsieme del dominio della funzione $y = f(x)$.

a. f si dice **crescente in senso lato** in I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in I$$

b. f si dice **decrescente in senso lato** in I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in I$$

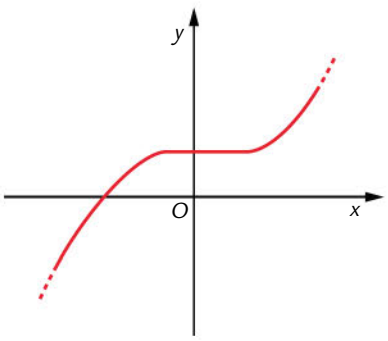


Figura 17 Funzione crescente in senso lato (nota il tratto di grafico orizzontale).

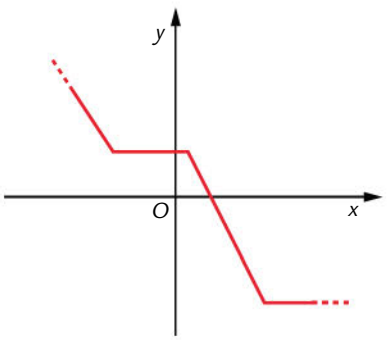


Figura 18 Funzione decrescente in senso lato (nota i tratti di grafico orizzontali).

Le funzioni crescenti o decrescenti, in senso stretto o in senso lato, nel loro dominio prendono l'appellativo comune di **funzioni monotòne**.

ESEMPI Riconoscere gli intervalli dove una funzione cresce o decresce

a. La funzione seno negli intervalli $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ è strettamente crescente, mentre nell'intervallo $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ è strettamente decrescente (**Fig. 19**).

b. La funzione esponenziale $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è strettamente decrescente (**Fig. 20**), così come tutte le funzioni esponenziali $y = a^x$, con $0 < a < 1$.

c. La funzione logaritmica $y = \ln x$ è strettamente crescente (**Fig. 21**), così come tutte le funzioni logaritmiche $y = \log_a x$, con $a > 1$.

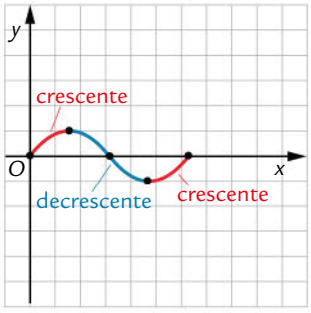


Figura 19

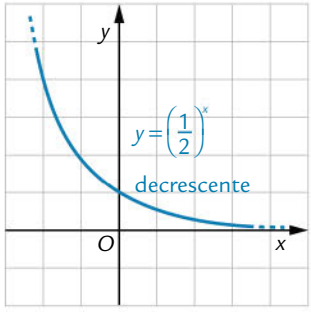


Figura 20

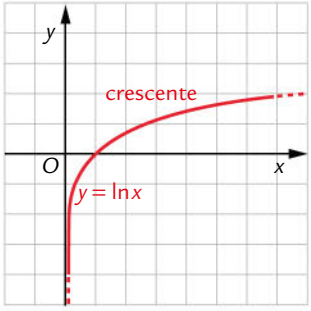


Figura 21

Funzioni pari, funzioni dispari e funzioni periodiche

Il grafico di una funzione può presentare alcune particolari *simmetrie* oppure ripetersi sempre uguale a intervalli regolari: queste caratteristiche vengono formalizzate dalle definizioni di funzione pari, dispari e periodica.

DEFINIZIONE | Funzioni pari e dispari

Sia data una funzione $y = f(x)$, avente dominio D, tale che per ogni $x \in D$ anche $-x \in D$.

a. Se risulta: $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in D$
la funzione si dice **pari** e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

b. Se invece: $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$
la funzione si dice **dispari** e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Con GeoGebra
Funzioni pari e funzioni dispari

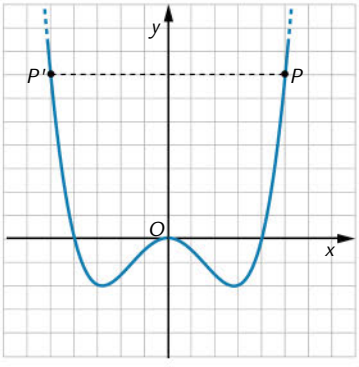


Figura 22 Funzione pari.

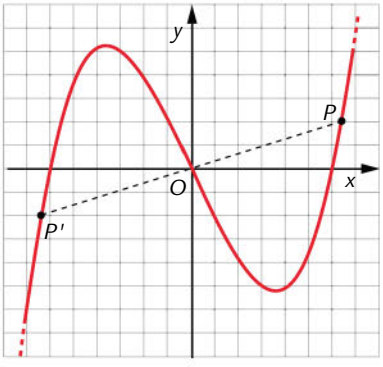


Figura 23 Funzione dispari.

ESEMPI Riconoscere se una funzione è pari o dispari

Stabiliamo se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

a. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ b. $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ c. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

a. Calcoliamo anzitutto $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x}$$

Poiché $f(-x) \neq f(x)$, f **non** è pari. D'altra parte, è anche $f(-x) \neq -f(x)$, quindi f **non** è nemmeno dispari.

b. Calcoliamo anzitutto $f(-x)$:

$$f(-x) = \ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

Poiché $f(-x) \neq f(x)$, f **non** è pari.
Osserviamo poi che:

$$-f(x) = -\ln\frac{1-x}{1+x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

Ricorda che $-\ln a = \ln a^{-1}$

dunque $f(-x) = -f(x)$, ossia f è dispari.

c. Calcoliamo anzitutto $f(-x)$:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} + \cos(-x) = e^{-x^2} + \cos x = f(x)$$

Ricorda che $\cos(-x) = \cos x$

dunque f è pari.

Con GeoGebra
Funzione periodica

DEFINIZIONE | Funzione periodica

Una funzione $f: D \to \mathbf{R}$ si dice **periodica** se e solo se esiste un numero $T > 0$ tale che $f(x) = f(x+T)$ per ogni $x \in D$. Il minimo valore di T, se esiste, per cui è verificata questa proprietà si dice **periodo** (minimo) della funzione f.

I più noti esempi di funzioni periodiche sono le funzioni *goniometriche*. Ricordiamo a questo proposito quanto segue.

- Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π.
- La funzione tangente è periodica di periodo π.
- Se la funzione $f(x)$ è periodica di periodo T, allora la funzione $f(kx)$, con $k > 0$, ha periodo $\frac{T}{k}$.
- Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono periodiche, rispettivamente di periodo T_1 e T_2, le funzioni $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ sono periodiche di periodo minore o uguale al m.c.m. tra T_1 e T_2, se $\frac{T_1}{T_2}$ è un numero *razionale*, mentre **non** sono periodiche in caso contrario.

Osserva gli esempi nella seguente tabella.

RIFLETTI
In base alla definizione anche tutte le funzioni costanti sono particolari funzioni periodiche, per cui non esiste però periodo minimo.

Funzione	Studio della periodicità
$f(x) = \sin 4x$	È periodica di periodo $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
$f(x) = \tan 2x$	È periodica di periodo $\frac{\pi}{2}$.
$f(x) = \underbrace{\sin x}_{\text{periodo } 2\pi} + \underbrace{\cos 3x}_{\text{periodo } \frac{2\pi}{3}}$	È periodica di periodo 2π $\left(= \text{m.c.m. tra } 2\pi \text{ e } \frac{2\pi}{3}\right)$.
$f(x) = \underbrace{\sin x}_{\text{periodo } 2\pi} + \underbrace{\cos(\pi x)}_{\text{periodo } 2}$	**Non** è periodica (il rapporto tra i periodi è irrazionale).

Funzione inversa

Ricordiamo brevemente le questioni più importanti relative al concetto di funzione *inversa*.

Con GeoGebra
Funzione inversa

1. Definizione e condizione di invertibilità

DEFINIZIONE | Funzione invertibile

Una funzione f si dice **invertibile** se e solo se esiste una **corrispondenza biunivoca** tra il dominio della funzione e il suo insieme immagine. In tal caso, si chiama funzione **inversa** di f, e si indica con il simbolo f^{-1}, la funzione che associa a ciascun elemento dell'immagine di f la sua (unica) controimmagine.

Per una funzione reale di variabile reale la condizione di invertibilità equivale alla seguente proprietà: **ogni retta orizzontale che interseca il grafico della funzione deve avere *un solo* punto di intersezione con esso** (**Figg. 24** e **25**).

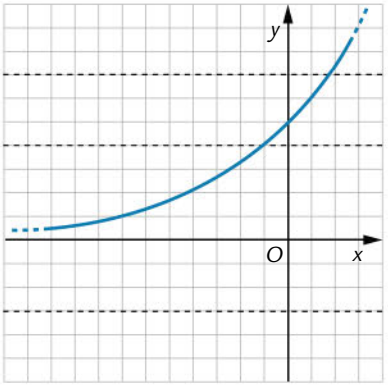


Figura 24 Funzione invertibile.

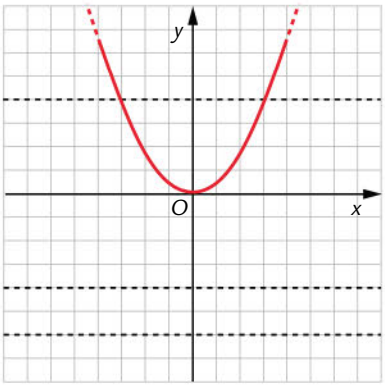


Figura 25 Funzione non invertibile.

Una condizione *sufficiente* perché una funzione, **definita in un intervallo**, sia *invertibile* è che essa sia **strettamente crescente** (o **strettamente decrescente**).

ATTENZIONE!
La condizione espressa qui a fianco non è necessaria per l'invertibilità.

2. Relazioni tra il grafico di una funzione e quello della sua inversa

Il grafico della funzione f^{-1}, inversa della funzione f, è il *simmetrico* del grafico di f rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Per esempio, come ricorderai, la funzione $y = \ln x$ è l'inversa della funzione esponenziale $y = e^x$: i grafici di queste due funzioni sono simmetrici rispetto alla suddetta bisettrice (**Fig. 26**).

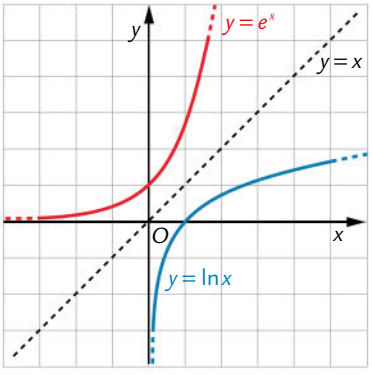


Figura 26

3. Procedimento per ricavare l'equazione dell'inversa di una funzione

Una volta accertato che una funzione $y = f(x)$ è invertibile, per cercare di determinare l'equazione dell'inversa si può procedere come segue:

a. nell'equazione $y = f(x)$ si sostituisce y al posto di x e x al posto di y, ottenendo così l'equazione $x = f(y)$;

b. se possibile, si risolve l'equazione $x = f(y)$ rispetto a y in modo da ottenere l'equazione *esplicita* di f^{-1}.

ATTENZIONE!
Non sempre è possibile determinare l'espressione analitica dell'inversa. Per esempio, consideriamo la funzione $y = x + \ln x$. Essa è la somma di due funzioni strettamente crescenti, dunque è strettamente crescente e perciò invertibile. Tuttavia l'equazione $x = y + \ln y$ che dovremmo risolvere per determinare l'equazione esplicita dell'inversa non è risolvibile algebricamente. In altre parole, possiamo essere certi che f^{-1} esiste, ma non siamo in grado di scriverne esplicitamente l'espressione analitica.

ESEMPIO Determinare l'inversa di una funzione

Determiniamo l'equazione dell'inversa della funzione $y = e^{x+1} - 1$, dopo aver giustificato perché è invertibile.

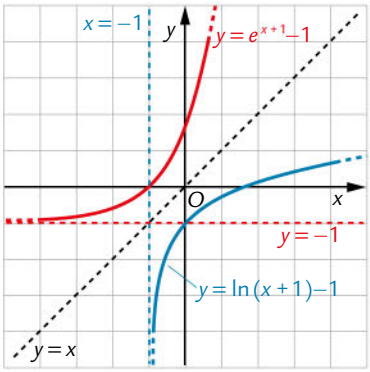
- **Invertibilità della funzione**

È facile dimostrare che la funzione $y = e^{x+1} - 1$ è strettamente crescente in **R** ed è perciò invertibile (prova a effettuare la verifica per esercizio).

- **Equazione dell'inversa**

a. Scambiando x con y nell'equazione data otteniamo:

$$x = e^{y+1} - 1$$



b. Risolvendo ora questa equazione rispetto all'incognita y otteniamo:

$$e^{y+1} = x + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y + 1 = \ln(x + 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \ln(x + 1) - 1$$

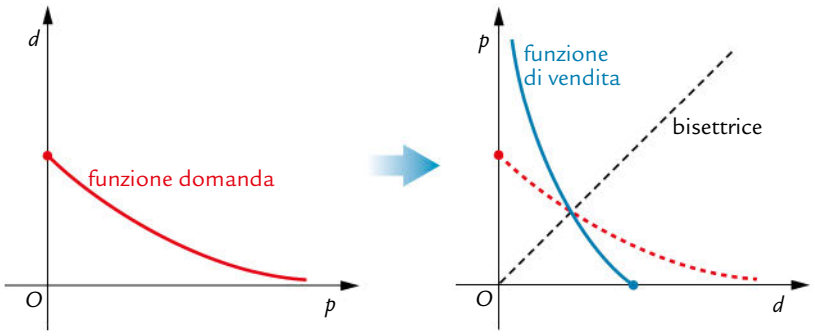
quindi:

$$y = f^{-1}(x) = \ln(x + 1) - 1$$

Nell'ambito delle applicazioni nelle scienze, nella tecnica e nell'economia, si usa spesso saltare il punto **a** del procedimento poc'anzi descritto, risolvendo subito l'equazione della funzione di cui si vuole ricavare l'inversa rispetto alla variabile non esplicitata. Lo «scambio» delle due variabili viene operato successivamente sui due assi del piano cartesiano dove si vuole rappresentare il grafico della funzione inversa.

ESEMPI Funzione domanda e funzione di vendita

In economia si chiama *funzione domanda* $d = f(p)$ di un dato bene la funzione che esprime la quantità di esso che viene richiesta dal mercato in funzione del prezzo p di vendita. Una funzione domanda è generalmente *strettamente decrescente* (**Fig. 27a**) e quindi invertibile; supposto che ciò si verifichi, la funzione inversa $p = f^{-1}(d)$ viene chiamata *funzione di vendita* e viene rappresentata in un piano cartesiano in cui le variabili dei due assi sono *invertite* rispetto al caso della funzione domanda (**Fig. 27b**).



a. **b.** **Figura 27**

4. Restrizione di una funzione

A volte una funzione può risultare non invertibile nel suo dominio, ma invertibile se la si considera definita in un opportuno sottoinsieme del suo dominio. Quando si opera in questo modo, si dice che si è effettuata una **restrizione** della funzione.

ESEMPI Restrizione di una funzione

a. La funzione definita da $y = x^2$ non è invertibile perché non soddisfa il «test» delle rette orizzontali (**Fig. 28**). È invece invertibile la sua restrizione all'intervallo $x \geq 0$ e la sua inversa è $y = \sqrt{x}$ (**Fig. 29**).

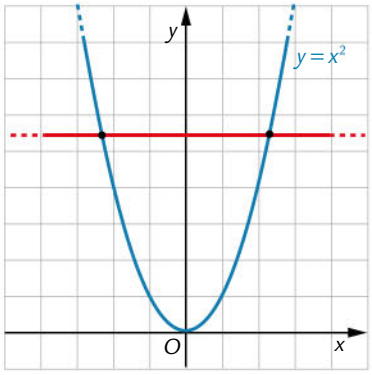


Figura 28 Ogni retta orizzontale che giace nel primo e secondo quadrante incontra il grafico di $y = x^2$ in due punti distinti.

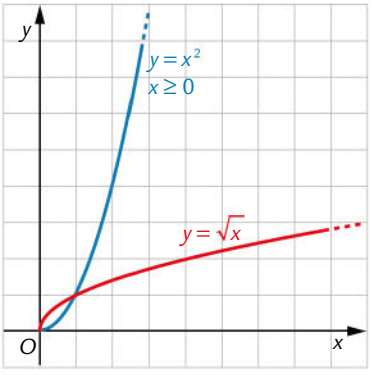


Figura 29 Il grafico della restrizione di $y = x^2$ all'intervallo $x \geq 0$ e quello della sua funzione inversa.

b. Le funzioni goniometriche elementari non sono invertibili in **R**; abbiamo visto tuttavia che si definiscono delle funzioni inverse delle funzioni goniometriche, considerando loro opportune restrizioni; precisamente:

- la funzione arcoseno è l'inversa della restrizione della funzione seno all'intervallo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
- la funzione arcocoseno è l'inversa della restrizione della funzione coseno all'intervallo $0 \leq x \leq \pi$;
- la funzione arcotangente è l'inversa della restrizione della funzione tangente all'intervallo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Funzione composta

Un'importante operazione tra funzioni è quella di *composizione*, che permette di definire una nuova funzione a partire da due funzioni f e g assegnate.

DEFINIZIONE | Funzione composta

Date due funzioni f e g, si dice **funzione composta** di f e g, e si indica con il simbolo $g \circ f$ (che si legge: «g composto f»), la funzione definita da:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Con GeoGebra
Funzioni composte

Una rappresentazione grafica del modo di operare della funzione composta è la seguente:

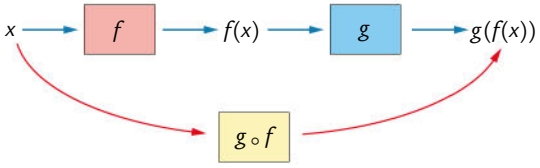


Figura animata
Funzione composta

Affinché sia possibile calcolare $g(f(x))$, $f(x)$ deve appartenere al dominio di g. Perciò il **dominio** di $g \circ f$ è costituito da tutti gli elementi appartenenti al dominio di f tali che $f(x)$ appartiene al dominio di g.

ESEMPI Funzione composta di due funzioni

Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 2$, determiniamo l'espressione analitica delle due funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

Abbiamo: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 2$
Il dominio di $g \circ f$ è chiaramente $x \geq 0$.
Inoltre: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = \sqrt{x - 2}$
Il dominio di $f \circ g$ è $x \geq 2$.

Come puoi osservare dal precedente esempio, in generale $f \circ g \neq g \circ f$.

PER SAPERNE DI PIÙ

Siano f e g due funzioni di domini rispettivamente D_f e D_g. Si può provare che g è l'inversa di f se e solo se risulta: $f(g(x)) = x$ per ogni $x \in D_g$ e $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in D_f$.

Esercizi p. 38

Introduzione all'analisi e funzioni

Funzione di dominio A e codominio B

Una relazione che associa a ogni elemento di A un solo elemento di B.

Funzione reale di variabile reale

Una funzione in cui il dominio e il codominio sono sottoinsiemi di **R**.

Dominio di una funzione $y = f(x)$

L'insieme dei valori di x per cui è definita l'espressione $f(x)$ (se non specificato diversamente).

Dominio di una funzione razionale

Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi:

- $y = P(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$
- $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ è definita per $Q(x) \neq 0$

ESEMPI

- $y = x^3 - x^2$ è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ⇒ il dominio è **R**
- $y = \dfrac{x}{x+2}$ è definita per $x + 2 \neq 0$, cioè per $x \neq -2$ ⇒ il dominio è $\mathbf{R} - \{-2\}$

Dominio di una funzione irrazionale

- $y = \sqrt{f(x)}$ è definita quando $f(x) \geq 0$
- $y = \sqrt[3]{f(x)}$ è definita per tutti i valori di x per cui è definita $f(x)$

ESEMPI

- $y = \sqrt{3x - x^2}$ è definita quando $3x - x^2 \geq 0$ cioè per $0 \leq x \leq 3$ ⇒ il dominio è $[0, 3]$
- $y = \sqrt[3]{3x - x^2}$ è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ⇒ il dominio è **R**

Dominio di una funzione trascendente

- $y = \log_a f(x)$ è definita quando $f(x) > 0$ ($a > 0, a \neq 1$)
- $y = a^{f(x)}$, $a > 0$; $y = \sin f(x)$, $y = \cos f(x)$ sono definite per tutti i valori di x per cui è definita $f(x)$
- $y = \tan f(x)$ è definita quando $f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

ESEMPI

- $y = \ln(3x - x^2)$ è definita quando $3x - x^2 > 0$ cioè per $0 < x < 3$ ⇒ il dominio è $(0, 3)$
- $y = 2^{-x^2+3x}$ è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ⇒ il dominio è **R**
- $y = \sin(\ln x)$ è definita quando è definito $\ln x$, cioè per $x > 0$ ⇒ il dominio è $(0, +\infty)$
- $y = \tan(x - 1)$ è definita quando $x - 1 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ⇒ il dominio è $\mathbf{R} - \left\{1 + \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

Proprietà di una funzione $f(x)$ di dominio D

Pari
Funzione per cui $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in D$

Dispari
Funzione per cui $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$

Crescente
Funzione per cui

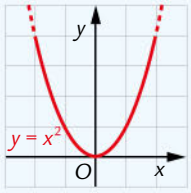
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$$

Decrescente
Funzione per cui

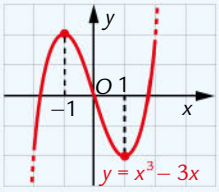
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$$

Periodica
Funzione per cui esiste $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in D$.

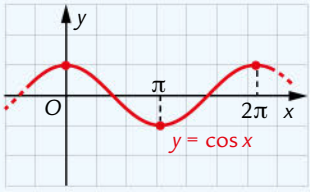
ESEMPI



Funzione pari, decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$



Funzione dispari, crescente per $x < -1$ e $x > 1$ e decrescente per $-1 < x < 1$



Funzione pari, periodica di periodo 2π, decrescente per $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ e crescente per $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

Funzione invertibile
Una funzione per cui sussiste una corrispondenza biunivoca tra il dominio e l'insieme immagine.

Funzione inversa
La funzione che associa a ogni elemento dell'immagine di una funzione invertibile $y = f(x)$ la sua controimmagine. L'equazione dell'inversa si ottiene risolvendo rispetto a y l'equazione $x = f(y)$.

ESEMPIO

$$\underbrace{y = 3x - 1}_{\text{funzione data (invertibile)}} \Rightarrow \underbrace{x = 3y - 1}_{\text{scambiando } x \text{ con } y} \Rightarrow \underbrace{y = \frac{x+1}{3}}_{\text{risolvendo rispetto a } y \text{ / funzione inversa}}$$

Funzione composta
Le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ di due funzioni f e g sono così definite:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ESEMPI

$$f(x) = 3x,\ g(x) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = (3x)^2 = 9x^2 \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 \end{cases}$$

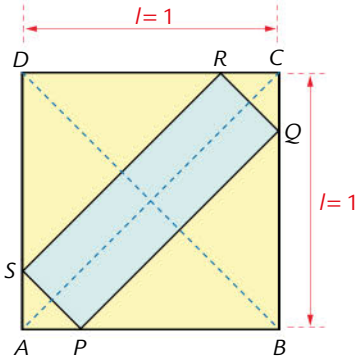
Esercizi

1. Che cos'è l'analisi matematica?

Teoria p. 2

Esercizi di ripasso sui problemi di massimo e di minimo: problemi di secondo grado

1 Tra i rettangoli inscritti in un quadrato di lato unitario, aventi i lati paralleli alle diagonali del quadrato, determina quello di area massima.



[Ponendo $\overline{AP} = x$, si trova che l'area del rettangolo è espressa dalla funzione $A(x) = -2x^2 + 2x$; l'area è massima per $x = \frac{1}{2}$, cioè quando il rettangolo coincide con il quadrato inscritto in $ABCD$ avente i lati paralleli alle diagonali]

2 Considera un triangolo rettangolo isoscele ABC i cui cateti AB e AC misurano a. Sia P un punto sul cateto AC, Q la proiezione di P su BC ed R la proiezione di Q su AB. Determina P in modo che l'area del trapezio $APQR$ sia massima.

[Ponendo $\overline{AP} = x$, si trova che l'area del trapezio è espressa dalla funzione $A(x) = \frac{1}{8}(-3x^2 + 2ax + a^2)$; l'area è massima per $x = \frac{a}{3}$]

3 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e la retta r di equazione $y = x + 4$, determina il punto P della parabola che ha distanza minima dalla retta r.

$\left[P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)\right]$

4 È dato un parallelogramma $ABCD$, in cui $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 4$ e $B\widehat{A}C = 30°$. Siano P, Q, R ed S quattro punti, appartenenti rispettivamente ai lati AB, BC, CD e AD, tali che $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = x$. Determina x in modo che l'area del parallelogramma $PQRS$ sia minima, specificando qual è il valore minimo di tale area.

[L'area del parallelogramma $PQRS$ vale $x^2 - 6x + 16$ ed è minima per $x = 3$; il valore minimo dell'area è 7]

Esercizi di ripasso sui problemi di massimo e di minimo: problemi risolvibili per via trigonometrica

5 È dato un settore circolare AOB, di centro O, raggio 1 e ampiezza 90°. Sul prolungamento di OA, dalla parte di A, considera il punto C tale che $\overline{OA} = \overline{AC}$. Indicato con P un punto sull'arco $\overset{\frown}{AB}$, determina P in modo che la somma $2\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ sia minima.

$\left[\text{Ponendo } A\widehat{O}P = x, \text{ si trova } 2\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 9 - 4\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \text{ minimo per } x = \frac{\pi}{4}\right]$

6 Sia ABC un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r. Traccia una corda PQ, parallela ad AB, con P appartenente al minore dei due archi $\overset{\frown}{AC}$ e Q appartenente al minore dei due archi $\overset{\frown}{BC}$. Determina $A\widehat{C}P = x$ in modo che il perimetro del pentagono $APCQB$ sia massimo.

$\left[\text{Il perimetro del pentagono è espresso dalla funzione } P(x) = r\sqrt{3} + 4r\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \text{ il massimo si ottiene per } x = \frac{\pi}{6}\right]$

7 Sia $ABCD$ un quadrato di lato a. Traccia la semicirconferenza di diametro BC interna al quadrato e determina su tale circonferenza il punto P tale che la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici del quadrato sia minima.

$\left[\text{Ponendo } B\widehat{C}P = x, \text{ si trova } \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 4a^2 - 2a^2\sin 2x; \text{ minimo per } x = \frac{\pi}{4}\right]$

8 Considera un settore circolare AOB, di centro O e raggio 1, di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Sia P un punto sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ tale che $A\widehat{O}P = x$ e $PQRS$ il rettangolo inscritto nel settore, avente il vertice Q sul raggio OB e il lato RS sul raggio OA. Determina x in modo che sia massima l'area del rettangolo $PQRS$.

$\left[\text{L'area, espressa in funzione di } x, \text{ vale } \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ ed è massima per } x = \frac{\pi}{6}\right]$

Esercizi di ripasso sulle rette tangenti

9 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 4$ passanti per l'origine.

$[y = -6x,\ y = 2x]$

10 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = 2x^2 + x - 3$ nei suoi punti d'intersezione con l'asse x.

$\left[y = -5x - \frac{15}{2},\ y = 5x - 5\right]$

11 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

$[y = x - 1,\ y = 3 - x]$

12 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x = 0$, parallele alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

$[y = x - 3 \pm 3\sqrt{2}]$

13 Determina le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 = 36$, passanti per il punto $P(2, 4)$.

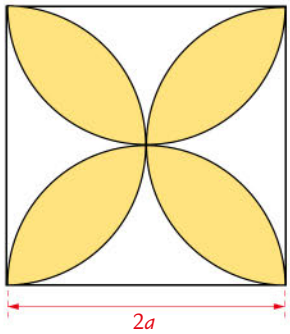
$\left[x = 2,\ y = \frac{7}{16}x + \frac{25}{8}\right]$

14 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti e passante per $P(2, 3)$. Determina l'equazione della retta tangente all'iperbole in P.

$\left[y = -\frac{3}{2}x + 6\right]$

Esercizi di ripasso sul calcolo delle aree

15 Determina l'area della regione colorata nella figura qui sotto. Gli archi tracciati sono semicirconferenze e il lato del quadrato misura $2a$.

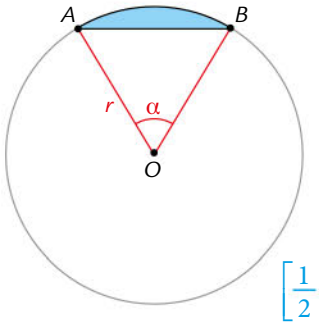


$[a^2(2\pi - 4)]$

16 Considera la retta di equazione $y = -x\sqrt{3} + 2$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$. Determina la misura della corda AB che la retta stacca sulla circonferenza e l'area del minore dei due segmenti circolari aventi come base AB.

$\left[\overline{AB} = 2\sqrt{3};\ \text{Area} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right]$

17 Determina l'area del segmento circolare colorato nella figura qui sotto, individuato da un angolo al centro la cui ampiezza, in radianti, è α.

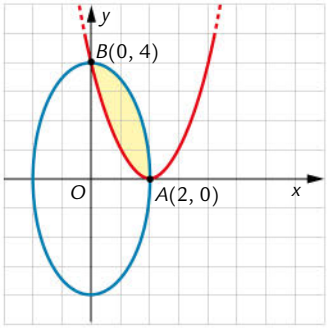


$\left[\frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha)\right]$

18 Considera i cerchi che hanno come contorno le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Determina l'area della regione di piano che costituisce l'intersezione dei due cerchi.

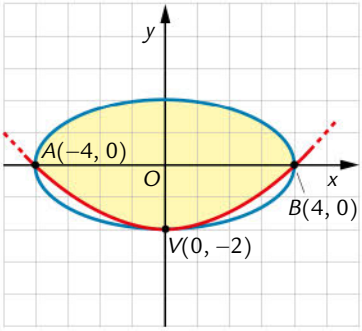
$\left[\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right]$

19 La parabola in figura ha vertice in A e passa per B; l'ellisse ha due vertici in A e B. Scrivi l'equazione dell'ellisse e quella della parabola, quindi determina l'area della regione colorata in figura, limitata da tali curve.



$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1,\ y = (x-2)^2;\ 2\pi - \frac{8}{3}\right]$

20 La parabola in figura ha vertice in V e passa per i due punti A e B. Scrivi l'equazione della parabola e dell'ellisse, quindi determina l'area della regione colorata in figura, limitata da tali curve.



$\left[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1,\ y = \frac{1}{8}x^2 - 2;\ 4\pi + \frac{32}{3}\right]$

21 Determina l'area della regione finita di piano definita dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \le 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$[4\pi]$

2. L'insieme R: richiami e complementi

Teoria p. 6

Esercizi introduttivi

22 **Associazione.** Associa a ogni insieme la frase corrispondente.

a. $A = (1, 4]$	**A.** Ha minimo, ma non ha massimo
b. $A = [1, 4]$	**B.** Ha massimo, ma non ha minimo
c. $A = (1, 4)$	**C.** Ha sia minimo sia massimo
d. $A = [1, 4)$	**D.** Non possiede né massimo né minimo

Inventa tu.

23 Fornisci l'esempio di un insieme superiormente limitato che non ammette massimo.

24 Fornisci l'esempio di un insieme limitato che ammette massimo ma non ammette minimo.

25 Fornisci l'esempio di un sottoinsieme di **R**, avente -1 come minimo, non superiormente limitato, e tale che 3 non appartiene all'insieme.

26 **Giustificare e argomentare** Spiega perché l'estremo superiore dell'insieme $\{x \in \mathbf{Q}: x^2 < 5\}$ esiste in **R**, ma non in **Q**. Che cosa accadrebbe se considerassimo l'insieme $\{x \in \mathbf{Q}: x^2 < 0{,}25\}$?

Intervalli

Rappresenta con le notazioni degli intervalli i seguenti insiemi.

27 $A = \mathbf{R} - \{0\}$

28 $A = \mathbf{R} - \{\pm 1\}$

29 $A = \mathbf{R} - \{-3, -2, 4\}$

30 $A = \mathbf{R}^+ - \{2\}$

31 $A = \{x \in \mathbf{R}: x^2 - 6x + 8 \geq 0\}$

32 $A = \left\{x \in \mathbf{R}: \frac{x+1}{x-1} \geq 1\right\}$

33 $A = \{x \in \mathbf{R}: x^3 - 6x < 0\}$

34 $A = \{x \in \mathbf{R}: x^5 - x > 0\}$

Estremo inferiore ed estremo superiore, massimi e minimi

Determina l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi e, se esistono, il massimo e il minimo in R.

35 **Videolezione** $A = (-1, 2] \cup [2, +\infty)$ $[\inf A = -1, \sup A = +\infty]$

36 **Videolezione** $A = [-2, 3] \cup \{-7\} \cup [5, +\infty)$

37 $A = (-\infty, -1) \cup [5, 7]$ $[\inf A = -\infty, \max A = 7]$

38 $A = (-\infty, -1) \cup (4, 8] \cup \{10\}$

39 $A = \{x \in \mathbf{R}: x^2 \leq 3\}$ $[\min A = -\sqrt{3},\ \max A = \sqrt{3}]$

40 $A = \{x \in \mathbf{Q}: x^2 < 3\}$

41 $A = \{x^2: x \in \mathbf{Z}\}$ $[\min A = 0, \min A = +\infty]$

42 $A = \{x^3: x \in \mathbf{Z}\}$

43 $A = \{x \in \mathbf{R}: x \geq -1 \wedge x^2 - 3x > 0\}$ $[\min A = -1, \sup A = +\infty]$

44 $A = \{x \in \mathbf{R}: 2x^2 - x \leq 1\}$

45 $A = \left\{x \in \mathbf{R}: \frac{x^2 - 2x}{x+3} \leq 0\right\}$ $[\inf A = -\infty, \max A = 2]$

46 $A = \left\{x \in \mathbf{R}: \frac{x+2}{x^2 - 3x} \geq 0\right\}$

47 $A = \left\{x \in \mathbf{R}: e^{\frac{1}{x}} \leq e^x\right\}$ $[\min A = -1, \sup A = +\infty]$

48 $A = \{x \in \mathbf{R}: 0{,}5^{x^2} \geq 0{,}5^x\}$

---

49 **Test.** Individua, tra i seguenti insiemi, l'unico il cui massimo è 0:

A $A = \{x \in \mathbf{R}: e^{x^5} \leq 1\}$ B $A = \{x \in \mathbf{R}: \cos x \leq 0\}$ C $A = \left\{x \in \mathbf{R}: \sqrt[3]{x} < 0\right\}$ D $A = \left\{x \in \mathbf{R}: \frac{1}{x^3} \leq 0\right\}$

50 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo l'estremo superiore e l'estremo inferiore del seguente insieme e, se esistono, il massimo e il minimo.

$$A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ x=\frac{(-1)^n}{n+2},\ \text{con}\ n\in\mathbf{N}\right\}$$

Osserviamo che $(-1)^n=1$ se n è pari e $(-1)^n=-1$ se n è dispari. Per n pari si ottengono i seguenti elementi dell'insieme:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{n=0},\ \underbrace{\frac{1}{4}}_{n=2},\ \underbrace{\frac{1}{6}}_{n=4},\ \underbrace{\frac{1}{8}}_{n=6},\ \underbrace{\frac{1}{10}}_{n=8},\ \ldots\ldots \qquad n \text{ pari}$$

Per n dispari si ottengono i seguenti elementi dell'insieme:

$$\underbrace{-\frac{1}{3}}_{n=1},\ \underbrace{-\frac{1}{5}}_{n=3},\ \underbrace{-\frac{1}{7}}_{n=5},\ \underbrace{-\frac{1}{9}}_{n=7},\ \ldots\ldots \qquad n \text{ dispari}$$

Dunque $A=B\cup C$, dove: $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\ldots\right\}$ e $C=\left\{-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},-\frac{1}{7},-\frac{1}{9},\ldots\right\}$.

A questo punto è facile vedere che: $\max A=\max B=\frac{1}{2}$ e $\min A=\min C=-\frac{1}{3}$.

Determina l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi e, se esistono, il massimo e il minimo.

51 $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ x=\frac{(-1)^n}{n+4},\ \text{con}\ n\in\mathbf{N}\right\}$ $\left[\min=-\frac{1}{5},\ \max=\frac{1}{4}\right]$

52 $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ x=(-1)^n\left(\frac{1}{n}+2\right),\ \text{con}\ n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\}$

53 $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ x=\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right),\ \text{con}\ n\in\mathbf{N}\right\}$ $\left[\min=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \max=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

54 $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ x=\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right),\ \text{con}\ n\in\mathbf{N}\right\}$

55 Considera l'insieme $A=\left\{y\in\mathbf{R}:\ y=3-2^{-x},\ \text{con}\ x\geq\log_2\frac{1}{3}\right\}$. Determina estremo inferiore ed estremo superiore, ed eventuale massimo o minimo.

56 Considera l'insieme $A=\left\{y\in\mathbf{R}:\ y=(0{,}25)^x-1,\ \text{con}\ x\geq\log_2\frac{1}{2}\right\}$. Determina estremo inferiore ed estremo superiore, ed eventuale massimo o minimo.

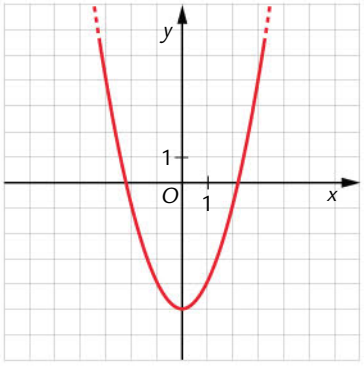
3. Funzioni reali di variabile reale: dominio e studio del segno

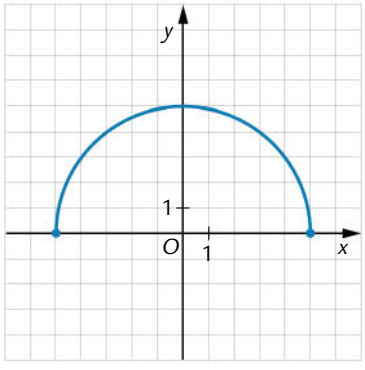
Teoria p. 9

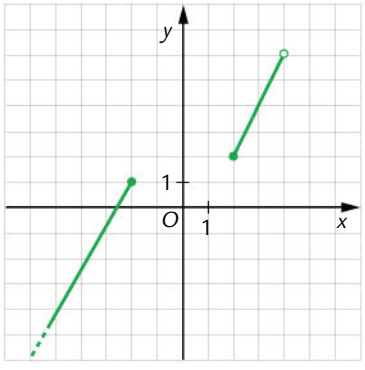
Esercizi introduttivi

Interpretazione di grafici

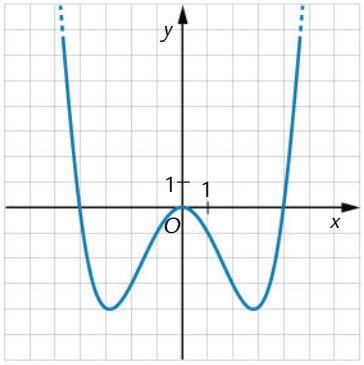
57 Deduci, dal grafico, il dominio delle seguenti funzioni (il tratteggio agli estremi del grafico indica che esso prosegue indefinitamente).

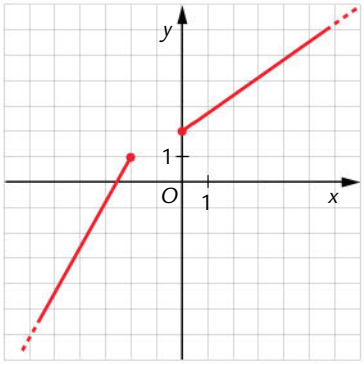


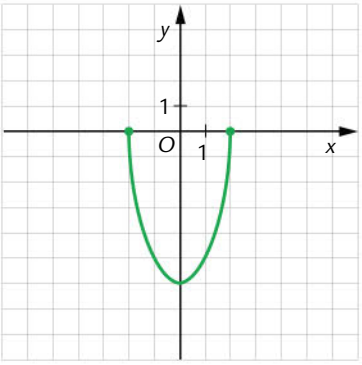




58 Deduci, dal grafico, il dominio delle seguenti funzioni (il tratteggio agli estremi del grafico indica che esso prosegue indefinitamente).





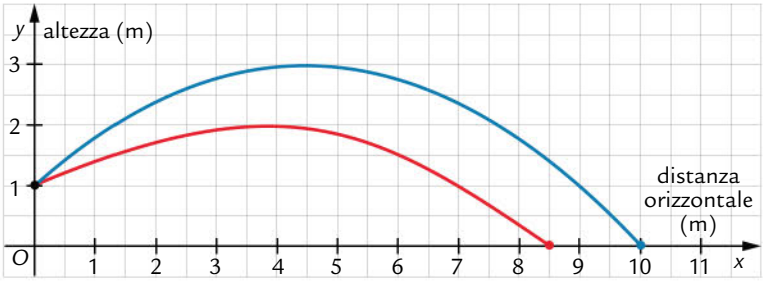


59 **Realtà e modelli** Paola lancia due frecce al tiro con l'arco. Le traiettorie delle punte delle due frecce sono rappresentate dai grafici delle due funzioni in figura.

a. Da quale altezza vengono lanciate le punte delle due frecce?

b. Qual è il dominio della funzione rappresentata in blu? Qual è il dominio della funzione rappresentata in rosso?

c. Qual è la massima altezza raggiunta dalla punta della freccia la cui traiettoria è rappresentata in blu? E quale la massima altezza raggiunta dalla punta della freccia la cui traiettoria è rappresentata in rosso?



Test.

60 Quale delle seguenti funzioni ha come dominio l'intervallo $(-4, 4)$?

A $y = e^{x^2-16}$ B $y = \ln(16 - x^2)$ C $y = \sqrt[3]{x^2 - 16}$ D $y = \sqrt{16 - x^2}$

61 Quale delle seguenti funzioni ha come dominio l'insieme $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$?

A $y = e^{16-x^2}$ B $y = \ln(x^2 - 16)$ C $y = \sqrt[3]{16 - x^2}$ D $y = \sqrt{x^2 - 16}$

62 **Videolezione** Quale delle seguenti funzioni è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$?

A $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ B $y = \sqrt{x^2-1}$ C $y = \ln(x^2 - 1)$ D $y = \sqrt[3]{x^2-1}$

63 **Videolezione** Quale delle seguenti funzioni **non** è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$?

A $y = e^{\sin x}$ B $y = \sin e^x$ C $y = \arccos(\sin x)$ D $y = \sin(\arcsin x)$

64 **Vero o falso?**

a. il dominio della funzione $y = e^{\frac{1}{x}}$ è $x > 0$ V F

b. il dominio della funzione $y = \ln(\ln x)$ è $x > 0$ V F

c. il dominio della funzione $y = \sqrt[3]{x} + x$ è $x > 0$ V F

d. il dominio della funzione $y = \dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ è $x > 0$ V F

e. il dominio della funzione $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$ è $x > 0$ V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

Ricerca del dominio di una funzione

65 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

a. $y=\dfrac{1}{2x^2+1}+\dfrac{1}{2x^2-x-1}$ b. $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+\sqrt[3]{x^2-4}+\sqrt[4]{4-x}$

a. Per l'esistenza della funzione i due denominatori devono essere entrambi *diversi da zero*:

$$\begin{cases}2x^2+1\neq 0\\ 2x^2-x-1\neq 0\end{cases}$$

Osserviamo che la prima condizione è *sempre verificata* (perché?), mentre la seconda equivale a:

$$2x^2-x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}\Rightarrow x\neq -\frac{1}{2}\wedge x\neq 1$$

Il dominio della funzione è quindi $\mathrm{R}-\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$, cioè $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)\cup(1+\infty)$.

b. Per l'esistenza della radice quadrata e della radice di indice 4 dobbiamo imporre che i radicandi siano maggiori o uguali a 0, mentre non è necessario porre condizioni per l'esistenza della radice cubica. In definitiva dovrà essere:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}\geq 0\\ 4-x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 0\vee x>1\\ x\leq 4\end{cases}\Rightarrow x\leq 0\vee 1<x\leq 4$$

Il dominio si può anche scrivere nella forma $(-\infty, 0]\cup(1, 4]$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni algebriche.

66 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+6x-7}$ $[\mathrm{R}-\{-7, 1\}]$

67 $y=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x^2-2x-1}$ $\left[\mathrm{R}-\left\{-\frac{1}{3}, 0, 1\right\}\right]$

68 $y=\dfrac{1}{x^3-4x^2}$ $[\mathrm{R}-\{0,4\}]$

69 $y=\dfrac{1}{5x-x^3}$ $\left[\mathrm{R}-\left\{0,\pm\sqrt{5}\right\}\right]$

70 $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x+5}$ $[\mathrm{R}-\{0\}]$

71 $y=\dfrac{1}{10-2x}+\dfrac{1}{x^2-2x-1}$ $\left[\mathrm{R}-\left\{1\pm\sqrt{2},5\right\}\right]$

72 $y=\sqrt{10x-x^2}$ $[0\leq x\leq 10]$

73 $y=\dfrac{1}{3x^2+3x}+\sqrt[3]{x}$ $[\mathrm{R}-\{-1, 0\}]$

74 $y=\dfrac{x^2-1}{25x^2+10x+1}+\sqrt{-x}$ $\left[x\leq 0\wedge x\neq -\frac{1}{5}\right]$

75 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}+\dfrac{1}{x^2-6x}$ $[x>5\wedge x\neq 6]$

76 $y=\sqrt{-x-5}+\sqrt{x+10}$ $[-10\leq x\leq -5]$

77 $y=\sqrt[3]{x^2-6}+\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2-1}$ $\left[x\leq -\sqrt{2}\vee x\geq\sqrt{2}\right]$

78 $y=\sqrt{-x^2-3}+\sqrt{x}$ $[\varnothing]$

79 $y=\sqrt{-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x-1}$ $[1\leq x\leq 2]$

80 $y=\sqrt{\dfrac{4}{5}x^2+\dfrac{1}{5}x-1}+\sqrt{x+3}$ $\left[-3\leq x\leq -\frac{5}{4}\vee x\geq 1\right]$

81 $y=\dfrac{1}{x^3+x^2+2x}$ $[\mathrm{R}-\{0\}]$

82 $y=\dfrac{x}{(2x+1)^2-(x-1)^2}$ $[\mathrm{R}-\{-2, 0\}]$

83 $y=(1+5x-6x^2)^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$ $\left[-\frac{1}{6}<x<1\right]$

84 $y=(3x^2-2x-1)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}$ $[x\geq 1]$

85 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4-4x^2+3}}$ $[\mathrm{R}-\{\pm 1, \pm\sqrt{3}\}]$

86 $y=\dfrac{1}{x^3+3x^2-4x-12}$ $[\mathrm{R}-\{\pm 2, -3\}]$

87 $y=\dfrac{x^2-1}{x^3+7x^2-8}$ $[\mathrm{R}-\{1, -4\pm 2\sqrt{2}\}]$

88 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ $[x\leq -1\vee x\geq 3]$

89 $y = \dfrac{\sqrt{3-|x|}}{x^3+1}$ $[-3 \le x \le 3 \wedge x \ne -1]$

90 $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x^2-4}$ $[x \le -2 \vee 2 \le x \le 5]$

91 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x}}$ $\left[x \ge \dfrac{1}{2} \wedge x \ne 1\right]$

92 Videolezione $y = \sqrt{x^2+5x-6} + \sqrt{8-x^3}$ $[x \le -6 \vee 1 \le x \le 2]$

93 $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+3}}$ $[-3 < x \le -2 \vee x \ge 2]$

94 $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{x^2+10x-75}}$ $[x < -15 \vee 3 \le x \le 5]$

95 $y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ $[-2 < x < -1 \vee x \ge 2]$

96 $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{x+1}}$ $\left[x \ge -1 \wedge x \ne \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

97 $y = \dfrac{x}{2x - \sqrt{x+2}}$ $\left[x \ge -2 \wedge \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}\right]$

98 $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{4-|x|}}$ $[x < -4 \vee 3 \le x < 4]$

99 $y = \sqrt{\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right| - 2}$ $\left[-8 \le x \le -\dfrac{4}{3} \wedge x \ne -3\right]$

100 Videolezione $y = \dfrac{\sqrt{-x^3+4x}}{3|x|-6}$ $[x < -2 \vee 0 \le x < 2]$

101 $y = \sqrt{\dfrac{9-x^2}{\sqrt[3]{x}}} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{|2x-1|-3}}$ $[x \le -3 \vee 2 < x \le 3]$

---

102 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

a. $y = \ln(5x - x^2)$ **b.** $y = \dfrac{\ln x}{2^x - 8}$

a. Per l'esistenza del logaritmo dobbiamo imporre che il suo argomento sia maggiore di 0: $5x - x^2 > 0$

Risolvendo quest'ultima disequazione si trova che il dominio della funzione data è l'intervallo: $0 < x < 5$

b. Per l'esistenza del logaritmo dobbiamo imporre che il suo argomento sia maggiore di zero; inoltre dobbiamo imporre che il denominatore della frazione sia diverso da zero. In definitiva, deve essere soddisfatto il sistema seguente, che risolviamo:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2^x - 8 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2^x \ne 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 3 \end{cases}$$

Il dominio della funzione data è quindi: $x > 0 \wedge x \ne 3$

103 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo il dominio della seguente funzione:

$$y = \frac{e^{-x}}{\ln(x^2-1)}$$

Per l'esistenza del logaritmo dobbiamo imporre che il suo argomento sia maggiore di 0; inoltre dobbiamo imporre che il denominatore sia diverso da 0. Non è necessario porre invece alcuna condizione per l'esistenza dell'esponenziale. In definitiva dovrà essere soddisfatto il sistema seguente, che risolviamo.

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \ln(x^2-1) \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x^2 - 1 \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x \ne \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Il dominio si può anche scrivere nella forma:

$$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

Determina il dominio delle seguenti funzioni trascendenti, contenenti funzioni esponenziali e/o logaritmiche.

104 $y = \sqrt{2^{1-3x} - 4}$ $\left[x \le -\dfrac{1}{3}\right]$

105 $y = \dfrac{1}{e^{2x} - \sqrt{e}}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{4}\right\}\right]$

106 $y = \dfrac{5^{-x}}{25^x - 125}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}\right]$

107 $y = \sqrt{\sqrt{5} - (0,2)^x}$ $\left[x \ge -\dfrac{1}{2}\right]$

108 $y = \sqrt{1 - e^{2x-x^2}}$ $[x \le 0 \vee x \ge 2]$

109 $y = \ln(e^{1-x^2} - 1)$ $[-1 < x < 1]$

110 $y = \dfrac{1}{3\ln x - 6}$ $[x > 0 \wedge x \ne e^2]$

111 $y = \sqrt{5 - \ln x}$ $[0 < x \le e^5]$

112 $y = \dfrac{1}{\ln^2 x + 3\ln x}$ $[x > 0 \wedge x \ne e^{-3} \wedge x \ne 1]$

113 $y = \sqrt{1 - \ln^2 x}$ $[e^{-1} \le x \le e]$

114 $y = \sqrt{e^{2x} - e^{3x}}$ $[x \le 0]$

115 $y = \sqrt{2^{4x-1} - 16^{3-x}}$ $\left[x \ge \dfrac{13}{8}\right]$

116 $y = \ln(e^{2x} - 5e^x + 6)^2$ $[\mathbb{R} - \{\ln 2, \ln 3\}]$

117 $y = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3x} - 25^{2x}}$ $[-1 \le x \le 0]$

118 $y = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} - \left(\frac{4}{9}\right)^{2x-6}}$ $[3 \le x \le 4]$

119 $y = \log(\log x - 1)$ $[x > 10]$

120 $y = \sqrt{\ln(x+2)}$ $[x \ge -1]$

121 $y = \ln(x^2 - 4) + \sqrt{25 - x^2}$ $[-5 \le x < -2 \vee 2 < x \le 5]$

122 $y = \ln\left(\frac{x^2 - 4x}{3 - x}\right)$ $[x < 0 \vee 3 < x < 4]$

123 $y = \ln(3x - x^2) + \ln(2x - 1)$ $\left[\frac{1}{2} < x < 3\right]$

124 $y = \ln\left(\frac{4x^2 - 1}{x^2 + 3x + 4}\right)$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}\right]$

125 $y = \ln(x^2 - 5) + \ln(4 - x^2)$ $[\varnothing]$

126 $y = \sqrt{2^{x^2-1} - 8}$ $[x \le -2 \vee x \ge 2]$

127 $y = \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$ $[0 < x \le 1 \vee x \ge e]$

128 $y = \log_2(1 - \log_2 \log_4 x)$ $[1 < x < 16]$

129 $y = \sqrt{\ln(2x + 3) - \ln(10 - x)}$ $\left[\frac{7}{3} \le x < 10\right]$

130 $y = \sqrt{\ln(4 - x) - 2\ln(x - 2)}$ $[2 < x \le 3]$

131 $y = \sqrt{\ln(x^2 - 4) - 2\ln(x + 3)}$ $\left[-3 < x \le x - \frac{13}{6}\right]$

132 $y = \ln \frac{e^x - \sqrt{e^{x+1}}}{x - 2}$ $[x < 1 \vee x > 2]$

133 $y = \sqrt{2 - \log_{\frac{1}{2}} x} + \ln(3 - \log_2 x)$ $\left[\frac{1}{4} \le x < 8\right]$

134 **Videolezione** $y = \sqrt{\ln^3 x - 3\ln x}$ $\left[e^{-\sqrt{3}} \le x \le 1 \vee x \ge e^{\sqrt{3}}\right]$

135 $y = \sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^4 + 3}$ $[0 < x \le 2 \vee x \ge 8]$

136 $y = \sqrt{e^x} + \ln|2x^2 + x - 3|$ $\left[\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}\right]$

137 $y = \ln\left(\frac{x^4 - 81}{x^2 + 2x}\right)$ $[x < -3 \vee -2 < x < 0 \vee x > 3]$

138 $y = \frac{\ln|e^x - 1|}{e^{x^2+4x-5} - 1}$ $[\mathbb{R} - \{-5, 0, 1\}]$

139 $y = \ln(\ln^2 x^2 - 1) + \sqrt{x}$ $\left[0 < x < e^{-\frac{1}{2}} \vee x > e^{\frac{1}{2}}\right]$

140 $y = \ln\left(e^x - \frac{1}{e^{x+1}}\right)$ $\left[x > -\frac{1}{2}\right]$

141 $y = \frac{1}{2\ln^3 x - \ln x^4}$ $\left[x > 0, x \ne e^{\pm\sqrt{2}} \wedge x \ne 1\right]$

142 $y = \ln\left(\frac{e^x - 3}{\sqrt{e} - e^{-x}}\right)$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > \ln 3\right]$

143 $y = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 20}$ $[x \le -2]$

144 $y = \ln\left(\frac{2 - \ln x}{\ln x}\right)$ $[1 < x < e^2]$

145 $y = \ln(8 \cdot 2^x + 2^x - 8 - 4^x)$ $[0 < x < 3]$

146 $y = \sqrt{\frac{1}{e^{-x}} - e^{\frac{1}{x}}}$ $[-1 \le x < 0 \vee x \ge 1]$

147 $y = e^{\frac{x+1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}}$ $[\mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}]$

148 $y = \sqrt{2^{x+1} - \sqrt{\frac{1}{2^x}}} + \log_2(3 - \log_2 x)$ $[0 < x < 8]$

149 $y = \sqrt{e^x - e^2 - 1 + e^{2-x}}$ $[x \le 0 \vee x \ge 2]$

150 $y = \log(1 - \sqrt{1 - \log x})$ $[1 < x \le 10]$

151 $y = \ln(3 - |x + 2|) + \ln(2|x| - |x - 1|)$ $\left[-5 < x < -1 \vee \frac{1}{3} < x < 1\right]$

152 $y = \sqrt{\sqrt{\ln x} + \ln \sqrt{x}}$ $[x \ge 1]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni trascendenti, contenenti anche funzioni goniometriche.

153 $y=\sqrt{\frac{1}{\cos x}}$ $\left[\mathrm{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\right]$

154 $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x+5}}$ [R]

155 $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x-6}}$ [R]

156 $y=\sqrt{\frac{1}{6\sin x-3}}$ $\left[\mathrm{R}-\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}\right]$

157 $y=3\tan x-1$ $\left[\mathrm{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\right]$

158 $y=\frac{1}{3\tan x+3}$ $\left[\mathrm{R}-\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\right]$

159 $y=\ln(2\cos x-\sqrt{2})$ $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]$

160 $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$ $\left[\mathrm{R}-\left\{k\frac{\pi}{2}\right\}\right]$

161 $y=\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}$ $\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi\le x\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$

162 $y=1+\sqrt{2\sin x-1}$ $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$

---

163 $y=1+\sqrt{(\sin x-\cos x)^3}$ $\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi\le x\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$

164 $y=\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$ $\left[\frac{3\pi}{2}+2k\pi\le x\le 2\pi+2k\pi\right]$

165 $y=\sqrt{4\cos^2 x-3}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$ $\left[\pi+2k\pi\le x\le\frac{7\pi}{6}+2k\pi\vee\frac{11\pi}{6}+2k\pi\le x\le 2\pi+2k\pi\right]$

166 $y=\log|4\sin^2 x-1|+\sqrt{4\sin^2 x-1}$ $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]$

167 $y=\ln|2\sin^2 x-\sin(-x)|$ $\left[\mathrm{R}-\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\pi,\ \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right\}\right]$

168 $y=\ln(2-2\sin^2 x-\cos x)$ $\left[2k\pi\le x<\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi\vee\frac{5\pi}{3}+2k\pi<x\le 2\pi+2k\pi\right]$

169 $y=\sqrt{1-\log_2(4\sin x)}$ $\left[2k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee\frac{5\pi}{6}+2k\pi\le x\le\pi+2k\pi\right]$

170 $y=\ln\sin x-\ln(2\cos x-1)$ $\left[2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$

171 $y=\frac{1}{\sin 2x+\cos x}$ $\left[\mathrm{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right\}\right]$

172 $y=\sqrt{1-|\tan x|}$ $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

173 $y=\ln\left(\frac{2\cos x-1}{\sin x}\right)$ $\left[2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee\pi+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]$

174 $y=\ln\left(\frac{\cos x-2}{1-2\sin x}\right)$ $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right]$

175 $y=\ln(e^{\sin x+\cos x}-1)$ $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right]$

176 $y=e^{\sin x-\cos x-1}+\sqrt{e^{\sin x+\cos x-1}}+\ln(1-\sin x\cos x)$ [R]

177 $y=\log_4(\log_{\frac{1}{2}}\sin x-1)$ $\left[2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee\frac{5\pi}{6}+2k\pi<x<\pi+2k\pi\right]$

178 $y=\tan\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$ $\left[\mathrm{R}-\left\{\pm\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}\right\}\right]$

179 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo il dominio della seguente funzione:

$y = \arcsin(\tan x)$

Per l'esistenza dell'arcoseno dobbiamo imporre che il suo argomento sia compreso tra -1 e 1, estremi inclusi, per l'esistenza della tangente che il suo argomento sia diverso da $\frac{\pi}{2} + k\pi$. In definitiva dovrà essere soddisfatto il sistema seguente, che risolviamo:

$$\begin{cases} -1 \le \tan x \le 1 \\ x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi$$

La funzione è quindi definita in tutti gli intervalli del tipo $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni trascendenti, contenenti anche funzioni goniometriche inverse.

180 $y = \arcsin(e^x - 1)$ $[x \le \ln 2]$

181 $y = \arccos\frac{2x}{x+1}$ $\left[-\frac{1}{3} \le x \le 1\right]$

182 $y = \arcsin\frac{2x}{x^2+1}$ $[\mathbb{R}]$

183 $y = \arctan\frac{x-1}{x+1}$ $[\mathbb{R} - \{-1\}]$

184 $y = \arcsin(x^2 - 3)$ $\left[-2 \le x \le -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} \le x \le 2\right]$

185 $y = \arcsin \ln x$ $[e^{-1} \le x \le e]$

186 $y = \arcsin\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $[\mathbb{R}]$

Esercizi riassuntivi: il dominio di una funzione

Determina il dominio delle seguenti funzioni di vario tipo.

187 $y = \sqrt{\frac{x+2}{x+5}}$ $[x < -5 \vee x \ge -2]$

188 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+5}}$ $[x \ge -2]$

189 $y = \log_2(2x+3) - \log_2(10 - 5x)$ $\left[-\frac{3}{2} < x < 2\right]$

190 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+5}}$ $[x \ge -2]$

191 $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x+5}}$ $[\mathbb{R} - \{-5\}]$

192 $y = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+5}}$ $[x > -5]$

193 $y = \frac{1}{25^x - 125}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}\right]$

194 $y = \frac{1}{3 - \ln x} + \frac{1}{4 - 8^x}$ $\left[\mathbb{R}^+ - \left\{\frac{2}{3}, e^3\right\}\right]$

195 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$ $[2 < x \le 3]$

196 $y = \frac{1}{\ln(x^2 + x + 1)}$ $[\mathbb{R} - \{-1, 0\}]$

197 $y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x - 6}{x}}$ $[-6 \le x < 0 \vee x \ge 1]$

198 $y = \sqrt{2x^2 - 18} + \sqrt{7 - x}$ $[x \le -3 \vee 3 \le x \le 7]$

199 $y = \frac{\sqrt{5x - x^2}}{x - 3}$ $[0 \le x \le 5 \wedge x \ne 3]$

200 $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

201 $y = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x}$ $\left[x \le -\frac{1}{2} \vee x \ge 0\right]$

202 $y = \ln(7 - 6x - x^2)$ $[-7 < x < 1]$

203 $y = \ln\left(\frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 1}\right)$ $[x < -1 \vee x > 6]$

204 $y = \frac{\sqrt{5^x - 25}}{3^x - 1}$ $[x \ge 2]$

205 $y = \ln(5 - 2x - 3x^2) + \ln(1 - 10x)$ $\left[-\frac{5}{3} < x < \frac{1}{10}\right]$

206 $y = \ln\frac{1}{8x^2 - 24}$ $\left[x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}\right]$

207 $y = \sqrt{e^{\frac{x}{x-2}} - \sqrt{e}}$ $[x \le -2 \vee x > 2]$

208 $y = \ln(25^x - 5\sqrt{5})$ $\left[x > \frac{3}{4}\right]$

209 $y = 5^{\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-4}}}$ $[\mathbb{R} - \{\pm 2\}]$

210 $y = \ln(x^2 + x + 1)$ $[\mathbb{R}]$

211 $y = \frac{1}{\log_2(x+2)}$ $[x > -2 \wedge x \neq -1]$

212 $y = \frac{x^2 - 4x^4}{x^4 - 2x}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{0, \sqrt[3]{2}\right\}\right]$

213 $y = \frac{2^x - 2}{4^x - 8^{2x+1}}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{4}\right\}\right]$

214 $y = \frac{\sqrt{2^{-2x} - 1}}{8^x - 4^{x-1}}$ $[x \leq 0 \wedge x \neq -2]$

215 $y = \sqrt{(25 - x^2)\ln x}$ $[1 \leq x \leq 5]$

216 $y = \frac{1}{1 - e^{\ln^2 x - \ln x}}$ $[x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq e]$

217 $y = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{x}{x+2}}}$ $[\mathbb{R} - \{-2, -1, 0, 2\}]$

218 $y = \frac{1}{\ln x - \ln(2x-1)}$ $\left[x > \frac{1}{2} \wedge x \neq 1\right]$

219 $y = \frac{x^2}{x^2 - 4|x| + 4}$ $[\mathbb{R} - \{\pm 2\}]$

220 $y = \sqrt{\frac{1 - \ln x}{2 - \ln x}} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{e}\right)^{-x} - 1}$ $[0 < x \leq e \vee x > e^2]$

221 $y = \frac{1}{2|x| - |x-5|}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{-5, \frac{5}{3}\right\}\right]$

222 $y = \sqrt{\frac{3^x - 1}{3^{3x-1} - 9^x}}$ $[x \leq 0 \vee x > 1]$

223 $y = \ln(3 - |x-6|)$ $[3 < x < 9]$

224 $y = \sqrt{9^x - 27} - \frac{1}{\sqrt{81 - 3^x}}$ $\left[\frac{3}{2} \leq x < 4\right]$

225 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 100}}{|x-2| - 9}$ $[x \leq -10 \vee x \geq 10, \text{ con } x \neq 11]$

226 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{1 - e^{1-3x}}}{\sqrt{e^{2x} + e^x}}$ $\left[x \geq \frac{1}{3}\right]$

227 $y = \frac{x}{\ln(x-1)}$ $[x > 1 \wedge x \neq 2]$

228 $y = \frac{\sqrt[3]{e^{2x} - e^x}}{\ln(2x^2 + 3x + 1)}$ $\left[x < -1 \vee x > -\frac{1}{2}, \text{ con } x \neq -\frac{3}{2} \wedge x \neq 0\right]$

229 $y = \frac{\ln(x^2 - 2x - 15)}{1 - e^{x^2 - 6x}}$ $[x < -3 \vee x > 5, \text{ con } x \neq 6]$

230 $y = \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\tan x}}$ $\left[2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

---

231 $y = \frac{1}{\ln(2\sin x + 1)}$ $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < 2k\pi \vee 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$

232 $y = \ln(7x - x^2 - 10) + \ln(2x^2 - 3x + 2)$ $[2 < x < 5]$

233 $y = \frac{\sin x}{e^x(\sin x + \sqrt{3}\cos x)}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi\right\}\right]$

234 $y = \sqrt{\frac{\sin x}{2\cos x - 1}}$ $\left[2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$

235 $y = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{x^2 - 5}}\right)$ $\left[x < -\sqrt{5} \vee 0 < x < \sqrt{5}\right]$

236 $y = \sqrt{\frac{4^x - 8}{16^x - 2^{-x+10}}}$ $\left[x \leq \frac{3}{2} \vee x > 2\right]$

237 $y = \sqrt{e^{2x} - \sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e^{-x^2+2x} - 1}}$ $\left[\frac{1}{4} \leq x < 2\right]$

238 $y = \sqrt{\frac{e^x}{e^x - 3}} + \sqrt{\sqrt{e} - \sqrt[3]{e^x}}$ $\left[\ln 3 < x \leq \frac{3}{2}\right]$

239 $y = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{25 - x^2}}{e^{-3x}\ln(x-2)}$ $[2 < x \leq 5 \wedge x \neq 3]$

240 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio:
a. di una funzione razionale fratta che abbia come dominio l'insieme $D = \mathbf{R} - \{1, 2, 3, 4\}$;
b. di una funzione irrazionale che abbia come dominio l'insieme $D = [-3, 5]$.

241 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio:
a. di una funzione esponenziale che abbia come dominio l'insieme $D = (0, +\infty)$;
b. di una funzione logaritmica che abbia come dominio l'insieme $D = (2, 10)$.

Determina per quali valori di k le seguenti funzioni hanno come dominio tutto R.

242 $y = \dfrac{x}{x^2 + 8x + k}$ $[k > 16]$

243 $y = 3\sqrt{x^2 + kx + 5}$ $\left[-2\sqrt{5} \le k \le 2\sqrt{5}\right]$

244 $y = \sqrt{e^{-x} + e^{2k} - \sqrt{e}}$ $\left[k \ge \dfrac{1}{4}\right]$

245 $y = \ln(x^2 + k) + \ln(x^2 + 9 - k^2)$ $[0 < k < 3]$

246 **Caccia all'errore.** Dopo avere (correttamente) stabilito che il dominio della funzione $\arccos(2^x - 1)$ è l'intervallo $(-\infty, 1]$, Elisa ritiene che per ogni $k > 0$ il dominio della funzione $\arccos(2^x - k)$ sia l'intervallo $(-\infty, k]$. Correggi l'errata deduzione di Elisa.

Giustificare e argomentare

247 Stabilisci, giustificando la risposta, se le due funzioni $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$ e $g(x) = x + 2$ sono uguali.

248 Stabilisci, giustificando la risposta, se le due funzioni $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+3}{3x-4}}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{3x-4}}$ sono uguali.

249 Stabilisci se le due funzioni $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 - 2}{2x^2 + 4}$ e $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$ sono uguali. Giustifica la risposta.

250 Stabilisci se le due funzioni $f(x) = \ln(x^2 - 1) - \ln x$ e $g(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$ sono uguali. Giustifica la risposta.

251 Stabilisci se le due funzioni $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x}}$ sono uguali. Giustifica la risposta.

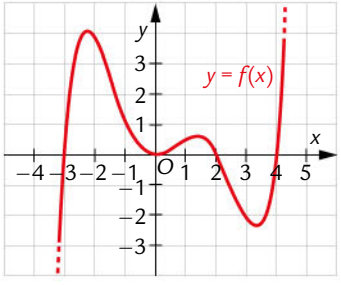
252 **E se?** Verifica che le due funzioni $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $g(x) = \sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{1 + x}$ sono uguali.

▶ Cambierebbe la risposta considerando le due funzioni $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1}$?

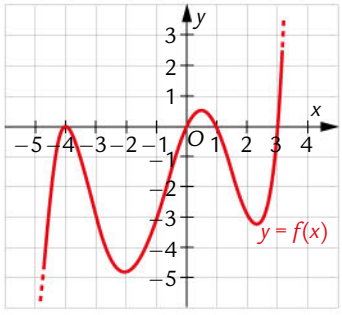
Segno di una funzione

Interpretazione di grafici

253 Data la funzione il cui grafico è rappresentato in figura, determina:
a. l'insieme dei valori di x per cui è positiva, ossia per cui $f(x) > 0$
b. l'insieme dei valori di x per cui è negativa, ossia per cui $f(x) < 0$



254 Data la funzione il cui grafico è rappresentato in figura, determina:
a. l'insieme dei valori di x per cui è positiva o nulla, ossia per cui $f(x) \ge 0$
b. l'insieme dei valori di x per cui è negativa o nulla, ossia per cui $f(x) \le 0$



255 ESERCIZIO SVOLTO

Data la funzione $y = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$, determiniamone: il dominio, gli eventuali punti di intersezione con gli assi cartesiani, il segno. Rappresentiamo i risultati ottenuti nel piano cartesiano.

Dominio

La funzione è definita purché il denominatore sia diverso da 0, cioè per: $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$; quindi il dominio della funzione è $\mathbf{R} - \{2\}$.

Punti di intersezione con l'asse *x*

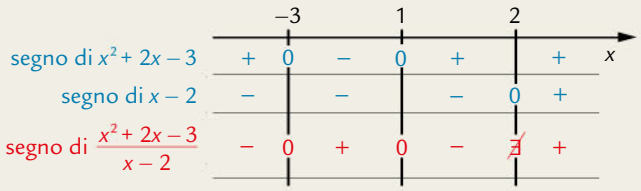
Poniamo $y = 0$ nell'equazione della funzione; otteniamo: $\frac{x^2+2x-3}{x-2} = 0 \underset{\text{con } x \neq 2}{\Rightarrow} x^2+2x-3=0 \Rightarrow x = -3 \vee x = 1$

Ci sono quindi due punti di intersezione con l'asse x, di coordinate: $(-3, 0)$, $(1, 0)$.

Punti di intersezione con l'asse *y*

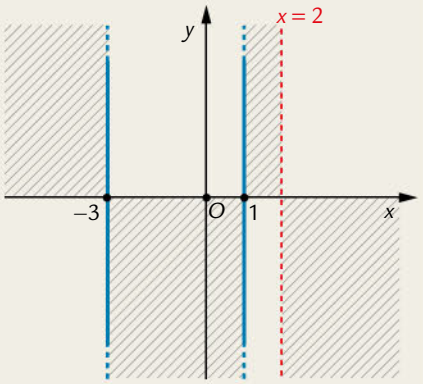
Ponendo $x = 0$ nell'equazione della funzione, otteniamo $y = \frac{3}{2}$; quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Studio del segno



$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x-2} > 0 \Rightarrow -3 < x < 1 \vee x > 2$

Rappresentazione nel piano cartesiano delle regioni dove giace il grafico della funzione e degli elementi trovati.



Determina il dominio, eventuali punti di intersezione con gli assi cartesiani e il segno delle seguenti funzioni.

256 $y = x^2 + 5x - 6$ [$D = \mathbf{R}$; intersezioni con gli assi: $(-6, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -6)$; $y > 0$ per $x < -6 \vee x > 1$]

257 $y = -x^2 + 3x$ [$D = \mathbf{R}$; intersezioni con gli assi: $(0, 0)$, $(3, 0)$; $y > 0$ per $0 < x < 3$]

258 $y = x^3 + 4x^2$ [$D = \mathbf{R}$; intersezioni con gli assi: $(0, 0)$, $(-4, 0)$; $y > 0$ per $x > -4 \wedge x \neq 0$]

259 $y = x^3 - 25x$ [$D = \mathbf{R}$; intersezioni con gli assi: $(0, 0)$, $(\pm 5, 0)$; $y > 0$ per $-5 < x < 0 \vee x > 5$]

260 $y = x^5 - x^3$ [$D = \mathbf{R}$; intersezioni con gli assi: $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$; $y > 0$ per $-1 < x < 0 \vee x > 1$]

261 $y = x^3 + 10x^2 - 11x$ [$D = \mathbf{R}$; intersezioni con gli assi: $(-11, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$; $y > 0$ per $-11 < x < 0 \vee x > 1$]

262 $y = x^4 - 5x^2 + 4$ [$D = \mathbf{R}$; intersezioni con gli assi: $(\pm 1, 0)$, $(\pm 2, 0)$, $(0, 4)$; $y > 0$ per $x < -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2$]

263 $y = -x^4 + 6x^2 - 5$ [$D = \mathbf{R}$; intersezioni con gli assi: $(\pm 1, 0), (\pm\sqrt{5}, 0), (0, -5)$; $y > 0$ per $-\sqrt{5} < x < -1 \vee 1 < x < \sqrt{5}$]

264 $y = \frac{x}{x^2+4x-5}$ [$D = \mathbf{R} - \{-5, 1\}$; intersezioni con gli assi: $(0, 0)$; $y > 0$ per $-5 < x < 0 \vee x > 1$]

265 $y = \frac{x^2-2x-3}{x^2-4}$ [$D = \mathbf{R} - \{\pm 2\}$; intersezioni con gli assi: $(-1, 0), (3, 0), \left(0, \frac{3}{4}\right)$; $y > 0$ per $x < -2 \vee -1 < x < 2 \vee x > 3$]

266 $y = \dfrac{x^2-3x}{x^2+5x-6}$ $[D = \mathbf{R} - \{-6, 1\}$; intersezioni con gli assi: $(0, 0)$ e $(3, 0)$; $y > 0$ per $x < -6 \vee 0 < x < 1 \vee x > 3]$

267 $y = \dfrac{x^2-3x}{8-x^3}$ $[D = \mathbf{R} - \{2\}$; intersezioni con gli assi: $(0,0),(3,0)$; $y > 0$ per $x < 0 \vee 2 < x < 3]$

268 $y = \dfrac{x^3-1}{4-x^2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{\pm 2\};\ \text{intersezioni con gli assi: } (1, 0), \left(0, -\dfrac{1}{4}\right);\ y > 0 \text{ per } x < -2 \vee 1 < x < 2\right]$

269 $y = \sqrt{4-|x|}$ $[D = [-4, 4]$; intersezioni con gli assi: $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$; $y \geq 0$ per ogni $x \in D]$

270 $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{9x-x^2}}$ $[D = (0, 9)$; intersezioni con gli assi: $(1, 0)$; $y > 0$ per $1 < x < 9]$

271 **Videolezione** $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x-2}}$ $[D = (-\infty, 2) \cup [4, +\infty)$; intersezioni con gli assi: $(4, 0)$, $(0, \sqrt{2})$; $y \geq 0$ per ogni $x \in D]$

272 $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}}}$ $[D = [4, +\infty)$; intersezioni con gli assi: $(4, 0)$; $y \geq 0$ per ogni $x \in D]$

273 $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{9-x^2}$ $[D = [-3, -1] \cup [1, 3]$; intersezioni con gli assi: nessuna; $y \geq 0$ per ogni $x \in D]$

274 $y = \sqrt{x+2-\sqrt{x^2+8}}$ $[D = [1, +\infty)$; intersezioni con gli assi: $(1, 0)$; $y \geq 0$ per ogni $x \in D]$

275 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo il dominio, gli eventuali punti di intersezione con gli assi e il segno della funzione $y = \ln^2 x - \ln x$ e rappresentiamo i risultati ottenuti nel piano cartesiano.

Dominio

La funzione è definita purché gli argomenti dei logaritmi siano positivi, cioè per:

$x > 0$

quindi il dominio della funzione è l'intervallo $(0, +\infty)$.

Punti di intersezione con gli assi

Asse *x*

$y = 0 \Rightarrow \ln^2 x - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x(\ln x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = e$

Ci sono quindi due punti di intersezione con l'asse x, di coordinate:

$(1, 0)$; $(e, 0)$ Ricorda che $e \simeq 2{,}7$

Asse *y*

Poiché il valore $x = 0$ **non** appartiene al dominio della funzione, il grafico della funzione non interseca l'asse y in alcun punto.

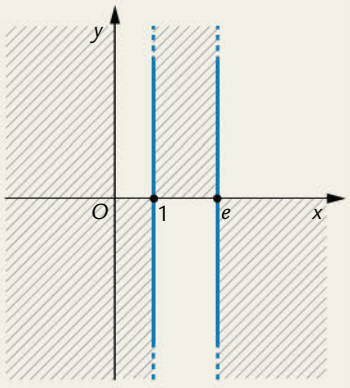
Studio del segno

$y > 0 \Rightarrow \ln^2 x - \ln x > 0 \Rightarrow \ln x(\ln x - 1) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x < 0 \vee \ln x > 1 \Rightarrow 0 < x < 1 \vee x > e$ Risolvendo le disequazioni

Rappresentazione nel piano cartesiano

In base alle informazioni che abbiamo raccolto, possiamo dedurre che il grafico della funzione appartiene alla regione di piano cartesiano **non** tratteggiata in figura.



276 $y = 2^{\frac{2x-1}{x+1}} - \sqrt{2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{-1\};\ \text{intersezioni con gli assi: } (1, 0), \left(0, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right);\ y > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1\right]$

277 $y = e^{2x} - e^{-2x}$ $[D = \mathbf{R};\ \text{intersezioni con gli assi: } (0, 0);\ y > 0 \text{ per } x > 0]$

278 $y = \frac{x}{2 - \log_2 x}$ $[D = \mathbf{R}^+ - \{4\};\ \text{intersezioni con gli assi: nessuna};\ y > 0 \text{ per } 0 < x < 4]$

279 $y = \ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)$ $\left[D = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty);\ \text{intersezioni con gli assi: } (-2, 0);\ y > 0 \text{ per } -2 < x < -\frac{1}{2}\right]$

280 $y = \ln\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ $\left[D = (-1, 0) \cup (1, +\infty);\ \text{intersezioni con gli assi: } (1 \pm \sqrt{2}, 0);\ y > 0 \text{ per } 1 - \sqrt{2} < x < 0 \vee x > 1 + \sqrt{2}\right]$

281 $y = \frac{1 - \ln x}{\ln x - 2}$ $\left[D = (0, e^2) \cup (e^2, +\infty);\ \text{intersezione con gli assi: } (e, 0);\ y > 0 \text{ per } e < x < e^2\right]$

282 $y = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$ $[D = (0, e) \cup (e, +\infty);\ \text{intersezioni con gli assi: } (1, 0);\ y > 0 \text{ per } 0 < x < 1 \vee x > e]$

283 $y = \frac{2^x - 4^{x+1}}{8^x - 2\sqrt{2}}$ $\left[D = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right);\ \text{intersezioni con gli assi: } (-2, 0); \left(0, \frac{3 + 6\sqrt{2}}{7}\right);\ y > 0 \text{ per } 2 < x < \frac{1}{2}\right]$

284 $y = \frac{1 - e^{-x}}{e^x - \frac{1}{e}}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{-1\};\ \text{intersezioni con gli assi: } (0, 0);\ y > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 0\right]$

285 $y = \ln(e^x - 1)$ $[D = (0, +\infty);\ \text{intersezioni con gli assi: } (\ln 2; 0);\ y > 0 \text{ per } x > \ln 2]$

286 $y = \sqrt{6 - 2\tan^2 x}$ $\left[D = \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right];\ \text{intersezioni con gli assi: } \left(\pm\frac{\pi}{3} + k\pi, 0\right), (0, \sqrt{6});\ y \geq 0 \text{ per ogni } x \in D\right]$

287 $y = 1 - \sqrt{1 + \sin x - \cos x}$ $\left[D = \left[2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right];\ \text{intersezioni con gli assi: } (0, 1), \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right);\ y > 0 \text{ per } 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$

288 $y = \ln(4\sin^2 x + 4\sin x + 1)$

$\left[D = \mathbf{R} - \left\{\frac{7\pi}{6}\pi + 2k, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\};\ \text{intersezioni con gli assi: } (k\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 0\right);\ y > 0 \text{ per } 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right]$

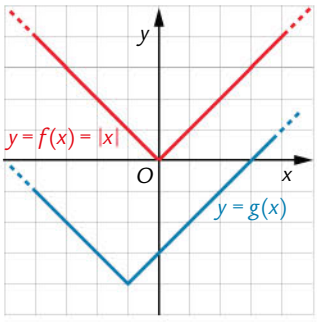
4. Funzioni reali di variabile reale: prime proprietà

Teoria p. 14

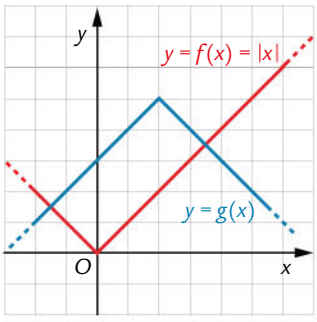
Esercizi di ripasso su grafici e trasformazioni

Interpretazione di grafici

289 Scrivi l'equazione di una trasformazione che trasforma il grafico della funzione f nel grafico della funzione g.



290 Scrivi l'equazione di una trasformazione che trasforma il grafico della funzione f nel grafico della funzione g.



Mediante opportune trasformazioni geometriche deduci, a partire dal grafico di *f*, il grafico della funzione *g*.

291 $f(x) = x^2$ $g(x) = -(x-2)^2$

292 $f(x) = e^x$ $g(x) = e^{1-x} - 2$

293 $f(x) = \ln x$ $g(x) = |\ln(x+1)|$

294 $f(x) = e^x$ $g(x) = -e^{-|x|}$

295 $f(x) = \sin x$ $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

296 $f(x) = \cos x$ $g(x) = -2\cos x + 3$

297 $f(x) = x^3$ $g(x) = 1 - (x+2)^3$

298 $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \left|2 - \frac{1}{x}\right|$

299 $f(x) = |x|$ $g(x) = |3 - |x||$

300 $f(x) = \ln x$ $g(x) = 2\ln|x| - 1$

---

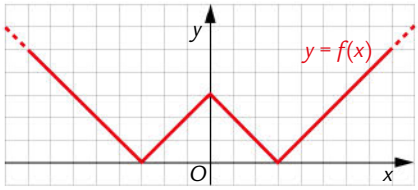
301 Data la funzione *f*, il cui grafico è quello in figura, traccia il grafico di ciascuna delle seguenti funzioni.

a. $y = -2f(x)$

b. $y = f(x-2) - 2$

c. $y = 3 - f(x+2)$

d. $y = -f\left(-\frac{x}{2}\right)$



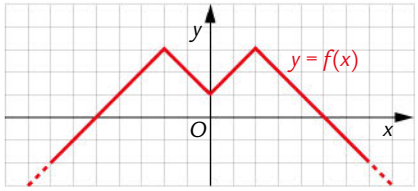
302 Data la funzione *f*, il cui grafico è quello in figura, traccia il grafico di ciascuna delle seguenti funzioni.

a. $y = -f(x) - 1$

b. $y = |f(x) - 1|$

c. $y = 5 - 2f(x+2)$

d. $y = f\left(\frac{x-4}{2}\right)$



303 Sia $f(x) = x^2$. Mediante opportune trasformazioni geometriche, deduci e traccia il grafico delle seguenti funzioni.

a. $y = f(x-2)$ **b.** $y = -2f(x+3) + 1$ **c.** $y = f(-x) - 3$ **d.** $y = -2f\left(1 + \frac{x}{2}\right)$

304 Sia $f(x) = |x|$. Mediante opportune trasformazioni geometriche, deduci e traccia il grafico delle seguenti funzioni.

a. $y = 3f(x+3)$ **b.** $y = -f(x-2) + 1$ **c.** $y = |-3 + f(-x)|$ **d.** $y = 2f\left(\frac{x-3}{2}\right)$

Matematica ed elettronica

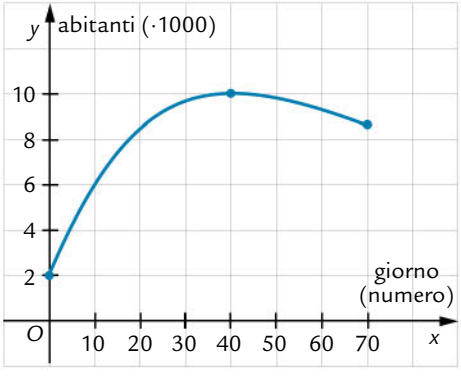
305 Il segnale definito dalla funzione $s(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, dove t è il tempo (misurato in s), è detto *impulso triangolare*. Traccia il grafico del segnale $s(t)$ e deduci quello del segnale $2s(t-4)$. Quest'ultimo è ritardato o anticipato rispetto a $s(t)$? E di quanto tempo?

306 Il segnale definito dalla funzione $s(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, dove t è il tempo (misurato in s), è detto *impulso rettangolare*. Traccia il grafico del segnale $s(t)$ e deduci quello del segnale $-3s\left(\frac{t}{4} + \frac{1}{2}\right)$. Quest'ultimo è ritardato o anticipato rispetto a $s(t)$? E di quanto tempo?

Immagine, estremo inferiore/superiore, massimo/minimo di una funzione

Realtà e modelli

307 **Al mare.** La funzione in figura rappresenta il numero di abitanti di una località di mare durante la stagione balneare. Si suppone che la stagione inizi il primo giugno, che corrisponde a $x = 0$ (quindi per esempio, $x = 20$ corrisponde al 21 giugno).
Individua il dominio e l'insieme immagine della funzione rappresentata, precisando eventuali massimo e minimo della funzione. A quale data corrisponde il massimo della funzione?



308 In riferimento alla funzione avente il grafico qui riportato, e che ha come dominio l'intervallo $-6 < x \leq 6$, rispondi alle seguenti domande.

a. Qual è l'estremo superiore della funzione nel suo dominio?

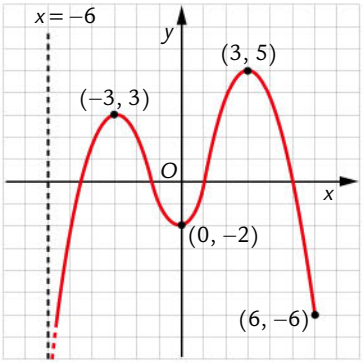
b. L'estremo superiore è anche massimo?

c. Qual è l'estremo inferiore della funzione nel suo dominio?

d. L'estremo inferiore è anche minimo?

e. La funzione è inferiormente limitata? È superiormente limitata? È limitata?

f. Qual è l'immagine della funzione?



309 In riferimento alla funzione avente il grafico qui riportato, e che ha come dominio l'intervallo $x \leq 5$, rispondi alle seguenti domande.

a. Qual è l'estremo superiore della funzione nel suo dominio?

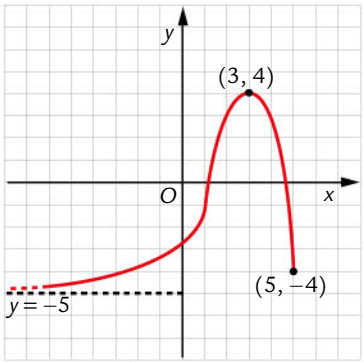
b. L'estremo superiore è anche massimo?

c. Qual è l'estremo inferiore della funzione nel suo dominio?

d. L'estremo inferiore è anche minimo?

e. La funzione è inferiormente limitata? È superiormente limitata? È limitata?

f. Qual è l'immagine della funzione?



310 ESERCIZIO SVOLTO

Tracciamo il grafico delle seguenti funzioni e determiniamo immagine, estremo inferiore e superiore e, se esistono, massimo e minimo della funzione nel suo dominio.

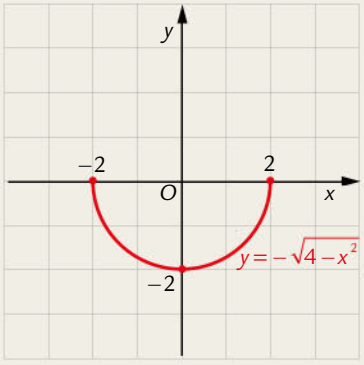
a. $y = -\sqrt{4 - x^2}$ **b.** $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ 2 - 2^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$

a. Osservando che l'equazione data equivale a $-y = \sqrt{4 - x^2}$, quindi al sistema:

$$\begin{cases} -y \geq 0 \\ y^2 = 4 - x^2 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y \leq 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

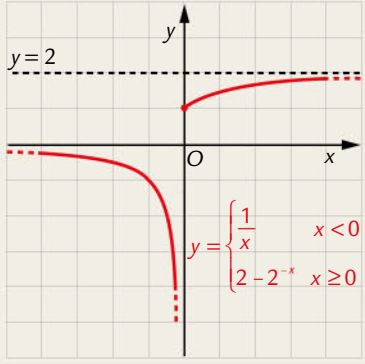
si ricava che il grafico della funzione è quello della semicirconferenza avente centro nell'origine e raggio 2, che giace nel semipiano $y \leq 0$. Ne deduciamo che l'immagine della funzione è l'intervallo $[-2, 0]$. Perciò la funzione ha minimo uguale a -2 e massimo uguale 0.

a.



b. Il grafico della funzione si ottiene tracciando per $x < 0$ il grafico di $y = \dfrac{1}{x}$ (iperbole equilatera) e per $x \geq 0$ il grafico di $y = 2 - 2^{-x}$ (quest'ultimo si può ottenere dal grafico di $y = 2^{-x}$ applicando una simmetria rispetto all'asse x e una traslazione verticale di due unità verso l'alto). Si ha così il grafico in figura, da cui si deduce che l'immagine della funzione è l'insieme $(-\infty, 0) \cup [1, 2)$.
Perciò l'estremo inferiore della funzione è $-\infty$ e l'estremo superiore è 2, e non esistono né massimo né minimo.

b.



Per ciascuna delle seguenti funzioni di equazione $y = f(x)$, traccia il grafico nel suo dominio D e determina immagine I, estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo della funzione in D.

311 $y = (x-1)^2 - 1$ $[I = [-1, +\infty), \min f = -1, \sup f = +\infty]$

312 $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

313 $y = -2\cos x + 1$ $[I = [-1, 3], \min f = -1, \max f = 3]$

314 $y = -\sqrt{4-x}$

315 **Videolezione** $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} + 2$ $[I = (2, +\infty), \inf f = 2, \sup f = +\infty]$

316 $y = \sqrt{4x - x^2}$

317 $y = 3 - \log_2 |x|$ $[I = \mathbb{R}, \inf f = -\infty, \sup f = +\infty]$

318 $y = |2 - x|$

319 $y = \begin{cases} 3\sin x & x < 0 \\ 2^{-x} + 1 & x \geq 0 \end{cases}$

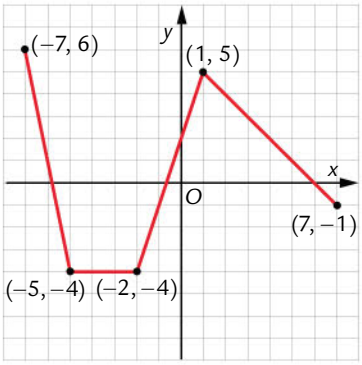
320 $y = \begin{cases} -x^2 + 1 & x < 0 \\ \dfrac{x}{x+2} & x \geq 0 \end{cases}$ $[I = (-\infty, 1), \sup f = 1, \inf f = -\infty]$

321 $y = \begin{cases} e^x - 1 & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$ $[I = (-1, +\infty), \inf f = -1, \sup f = +\infty]$

322 $y = \begin{cases} \dfrac{2x+4}{x} & x < 0 \\ \log_2 x + 1 & x > 0 \end{cases}$

Funzioni crescenti e decrescenti

323 **Interpretazione di grafici** In riferimento alla figura a fianco riportata, stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.



a. La funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[-7, -5]$. V F

b. La funzione è costante nell'intervallo $[-4, -2]$. V F

c. La funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[-1, 1]$. V F

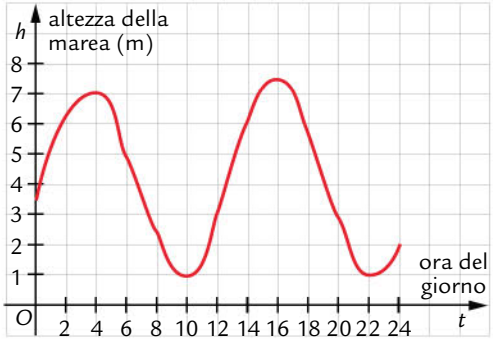
d. La funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $[1, 7]$. V F

e. La funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[-2, 7]$. V F

f. La funzione è crescente in senso lato nell'intervallo $[-5, 1]$. V F

g. La funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $[-7, -2]$. V F

324 **Realtà e modelli** **Alta e bassa marea.** In figura è riportato il grafico della funzione che rappresenta come è variata l'altezza dell'acqua nel porto di Brest il 26 ottobre 2015, a causa di fenomeni di alta e bassa marea.





a. Qual era approssimativamente l'altezza dell'acqua alle ore 14?

b. Tra le 12 e le 24, per quanto tempo all'incirca l'altezza dell'acqua è stata superiore a 3 metri?

c. Approssimativamente in quali orari della giornata l'altezza dell'acqua è risultata crescente? E in quali decrescente?

325 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione avente come dominio l'intervallo $[-6, 6]$, che abbia tutte le seguenti caratteristiche:

a. ha due zeri;

b. la sua immagine è l'intervallo $[-4, 4]$;

c. è strettamente decrescente in $[-6, 0]$ e strettamente crescente in $[0, 6]$.

326 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione avente come dominio l'intervallo $[-6, 6]$, che abbia tutte le seguenti caratteristiche:

a. non ha zeri;
b. la sua immagine è l'intervallo $[2, 5]$;
c. è crescente, ma non in senso stretto, nel dominio.

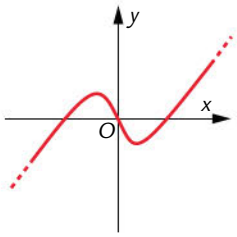
327 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione avente come dominio l'intervallo $[-6, 6]$, che abbia tutte le seguenti caratteristiche:

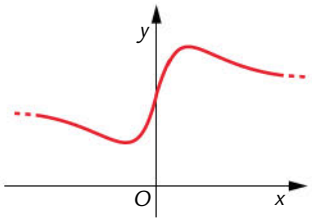
a. ha uno e un solo zero;
b. è limitata inferiormente ma non superiormente;
c. è decrescente, ma non in senso stretto, nel dominio.

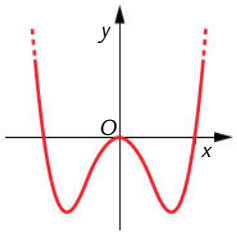
328 **Giustificare e argomentare** Spiega perché, se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni strettamente crescenti in un intervallo I, lo è anche la funzione somma $f(x) + g(x)$. Mostra infine, tramite un opportuno controesempio, che in generale **non** vale la stessa conclusione per la funzione prodotto $f(x) \cdot g(x)$.

Funzioni pari, dispari e periodiche

329 **Interpretazione di grafici** Per ciascuna delle funzioni di cui è rappresentato il grafico, stabilisci se è pari, dispari o né pari né dispari.







Stabilisci se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

330 $y = x^8 - x^5$ [Né pari né dispari]

331 $y = x^8 - x^6$

332 $y = x^3 - x^5$ [Dispari]

333 $y = x^3 - x^5 + 1$

334 $y = x^8 - x^6 + 1$ [Pari]

335 $y = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$

336 $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ [Dispari]

337 $y = \dfrac{x^2+1}{x^4}$

338 **Videolezione** $y = e^x + e^{-x}$ [Pari]

339 $y = e^{x^3}$

340 $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ [Né pari né dispari]

341 $y = \dfrac{x|x|}{x^2+1}$

342 $y = \dfrac{x^2|x|}{2+|x|}$ [Pari]

343 $y = \sin|x| + \tan^2 x + 2$

344 **Videolezione** $y = \dfrac{\cos x}{x}$ [Dispari]

345 $y = x \sin x + \cos x$

346 $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ [Dispari]

347 $y = x \arctan x + \cos x$

348 $y = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-|x|}\right) + \cos x$

349 $y = |\sin x| + |\cos x|$ [Pari]

350 $y = \ln \tan x$

351 $y = \cos x \tan x$ [Dispari]

352 $y = \dfrac{\sin^2 x}{x^2+1}$

353 $y = x\left(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1}\right)$ [Dispari]

354 $y = x^2\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)$

355 $y = x^7 + \arctan x + 1$ [Né pari né dispari]

356 $y = \dfrac{\sin x + \arctan x}{x^4}$

357 $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x + 1}$ [Né pari né dispari]

358 ESERCIZIO SVOLTO

Stabiliamo se le seguenti funzioni sono periodiche e, in caso affermativo, determiniamone il periodo:

a. $y = \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ **b.** $y = \sin 2x + \cos 4x$ **c.** $y = \sin x + 4x$

a. Il periodo della funzione data è $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi$.

b. La funzione assegnata è la somma di due funzioni:

$y = \sin 2x$, periodica di periodo $\frac{2\pi}{2} = \pi$;

$y = \cos 4x$, periodica di periodo $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Il periodo della funzione data è il più piccolo fra i multipli comuni a π e $\frac{\pi}{2}$, cioè π.

c. A causa della presenza nell'equazione che definisce la funzione del termine algebrico $4x$ la funzione **non** è periodica.

Stabilisci se le seguenti funzioni sono periodiche e in caso affermativo determina il periodo.

359 $y = 5\sin\frac{x}{2}$ [Periodo $= 4\pi$]

360 $y = \cos 3x$

361 $y = \tan 3x$ [Periodo $= \frac{\pi}{3}$]

362 $y = 3\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

363 $y = \sin x + \cos 2x$ [Periodo $= 2\pi$]

364 $y = \sin 3x + \cos 6x$

365 $y = \tan x + \cos\frac{x}{2}$ [Periodo $= 4\pi$]

366 $y = \sin\frac{2}{3}x + \cos 2x$

367 $y = 1 + \tan 2x$ [Periodo $= \frac{\pi}{2}$]

368 $y = \tan 3x + \tan x$

369 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\tan x$ [Periodo $= \pi$]

370 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan x$

371 $y = 5\sin^2 x$ [Periodo $= \pi$]

372 $y = \sin^2(4x)$

373 $y = \sin 2x \cos 2x$ [Periodo $= \frac{\pi}{2}$]

374 $y = x^3 + \cos x$

375 $y = \frac{\cos x \sin x}{1 + \sin^2 x}$ [Periodo $= \pi$]

376 $y = |\cos x| - 2$

377 $y = -2\cos|x| + |\cos x|$ [Periodo $= 2\pi$]

378 $y = -2\sin|x| + |\sin x|$

379 $y = \frac{\sin x - \tan x}{x}$ [Non periodica]

380 $y = \sin x - \sin^2 x$

381 $y = |\sin x| + \cos^2 x$ [Periodo $= \pi$]

382 $y = 4\sin|x| + 1$

383 $y = \sin x + \cos(\pi x)$ [Non periodica]

384 $y = \sin 2x + \sin(x\sqrt{2})$

Matematica ed elettronica **Determina il periodo e la frequenza dei seguenti segnali, se sono periodici (la variabile t rappresenta il tempo, misurato in secondi).**

385 $x(t) = \cos(8\pi t)$ [$T = 0{,}25$ s, $f = 4$ Hz]

386 $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$ [$T = 3$ s, $f = \frac{1}{3}$ Hz]

387 $x(t) = \sin(4\pi t) + \cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ [$T = 0{,}5$ s, $f = 2$ Hz]

388 $x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{7}t - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ [$T = 42$ s, $f = \frac{1}{42}$ Hz]

389 $x(t) = \sin(4t) + \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ [Segnale non periodico]

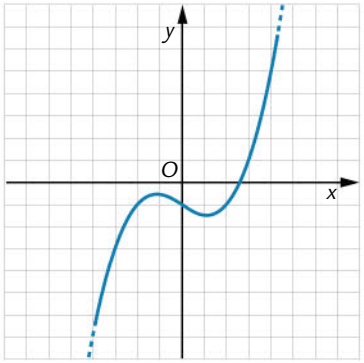
390 $x(t) = \sin^2(2\pi f_0 t + \phi)$ [$T = \frac{1}{f_0}, f = f_0$]

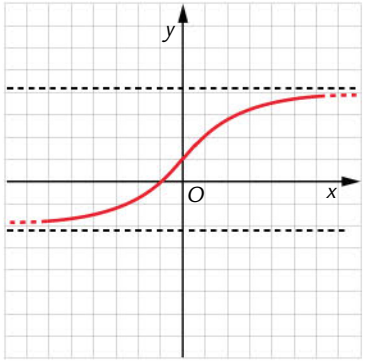
391 **Inventa tu.** Fornisci esempi di funzioni periodiche f e g, aventi lo stesso periodo, tali che $f+g$ abbia lo stesso periodo di f e di g, e l'esempio di due funzioni periodiche f e g, aventi lo stesso periodo, tali che $f+g$ abbia periodo inferiore a quello di f e di g. Fornisci poi esempi analoghi per il prodotto e per il quoziente di due funzioni periodiche.

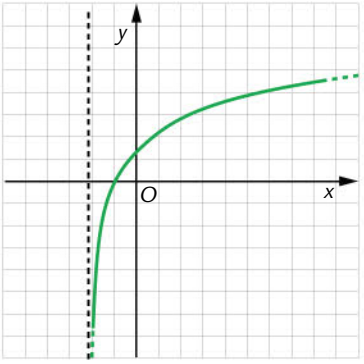
392 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio di una funzione periodica f tale che $|f|$ abbia lo stesso periodo di f, e l'esempio di una funzione periodica f tale che $|f|$ abbia periodo inferiore a quello di f.

Funzioni inverse

393 **Interpretazione di grafici** Per ciascuna delle funzioni di cui è tracciato il grafico, stabilisci se è *invertibile*.







394 **ESERCIZIO GUIDATO**

Giustifica perché la funzione $y=\frac{x+1}{x-2}$ è invertibile e determina l'equazione dell'inversa.

- La funzione è invertibile perché è .....
- Per determinare l'espressione analitica della funzione inversa, scambia anzitutto x con y nell'equazione della funzione, cioè in $y=\frac{x+1}{x-2}$; ottieni l'equazione:

  $x=\frac{y+1}{y-2}$

  Ora risolvi questa equazione rispetto a y:

  $x=\frac{y+1}{y-2} \Rightarrow (y-2)x=\ldots\ldots \Rightarrow y(x-\ldots\ldots)=\ldots\ldots \Rightarrow y=\ldots\ldots$

  Puoi concludere che l'equazione che definisce l'inversa è:

  $y=\frac{2x+\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Nei seguenti esercizi sono assegnate le equazioni di alcune funzioni. Verifica che sono invertibili e determina l'equazione dell'inversa.

395 $y=1-3x$ $\left[y=\frac{1-x}{3}\right]$

396 $y=\frac{1}{2}x+3$ $[y=2(x-3)]$

397 $y=\frac{2x-1}{x+1}$ $\left[y=\frac{x+1}{2-x}\right]$

398 **Videolezione** $y=\frac{x-1}{x+2}$ $\left[y=\frac{2x+1}{1-x}\right]$

399 $y=2-\frac{1}{x-1}$ $\left[y=\frac{x-3}{x-2}\right]$

400 $y=\sqrt[3]{2x+3}$ $\left[y=\frac{1}{2}(x^3-3)\right]$

401 $y=x^3+1$ $\left[y=\sqrt[3]{x-1}\right]$

402 $y=8-x^3$ $\left[y=\sqrt[3]{8-x}\right]$

403 $y=3-\sqrt[3]{x+2}$ $\left[y=(3-x)^3-2\right]$

404 $y=1+\sqrt[3]{x-1}$ $[y=(x-1)^3+1]$

405 $y=e^x-1$ $[y=\ln(x+1)]$

406 $y=2^{x-1}-1$ $[y=1+\log_2(x+1)]$

407 $y=e^{-2x}-1$ $\left[y=-\frac{1}{2}\ln(x+1)\right]$

408 $y=\ln(x+1)$ $[y=e^x-1]$

409 $y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ $\left[y = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\right]$

410 $y = 1 - \log_2 x^3$ $\left[y = 2^{\frac{1-x}{3}}\right]$

411 $y = \ln(x^3 - 1)$ $\left[y = \sqrt[3]{e^x+1}\right]$

412 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ $\left[y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}-1}\text{, con } x>0\right]$

413 $y = \sqrt[3]{x^2}+1$ con $x \geq 0$ $\left[y = \sqrt{(x-1)^3}\right]$

414 $y = \sqrt[3]{x^2}+1$ con $x < 0$ $\left[y = -\sqrt{(x-1)^3}\right]$

415 $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ con $-\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ $\left[y = \dfrac{1}{2}\arcsin 2x\right]$

416 $y = 2\tan\dfrac{x}{2}$ con $-\pi < x < \pi$ $\left[y = 2\arctan\dfrac{x}{2}\right]$

417 **Vero o falso?**

a. La funzione $\sin x$ è invertibile quando ristretta all'intervallo $[0, \pi]$ V F

b. Una funzione pari di dominio **R** non può essere invertibile in **R** V F

c. Una funzione strettamente crescente nell'intervallo I è certamente invertibile in I V F

d. L'inversa della funzione $y = x^3 + 4$ è la funzione $y = \sqrt[3]{x} - 4$ V F

e. La composta di due funzioni invertibili è a sua volta invertibile V F

f. La funzione potenza $y = x^n$ è invertibile in **R** se e solo se n è dispari V F

g. L'inversa della funzione $y = x^2 + 1$ è la funzione $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ V F

h. Qualunque siano i numeri reali b e c, la funzione $y = x^2 + bx + c$ non può essere invertibile in **R** V F

[5 affermazioni vere e 3 false]

Realtà e modelli

418 Andrea ha acquistato un'auto dal costo di 16 800 euro, tramite un finanziamento a tasso 0, che prevede il pagamento di rate mensili di 350 euro, per una durata di 4 anni. Indica con y l'importo complessivo che resta da pagare ad Andrea dopo avere pagato un numero di rate uguale a x.



a. Scrivi l'equazione della funzione che esprime y in funzione di x.

b. Esplicita x in funzione di y nell'equazione trovata al punto **a** e spiega il significato della nuova equazione ottenuta in relazione al problema. Utilizzando quest'ultima equazione, determina il numero di rate che Andrea ha già pagato, quando gli resta da saldare un importo di 8050 euro.

$\left[\text{a. } y = 16800 - 350x\text{; b. } x = 48 - \dfrac{y}{350}\text{, 25 rate}\right]$

419 Una palla, lanciata verticalmente verso l'alto da un'altezza di 1 m con una velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s, dopo t secondi dal lancio si trova a un'altezza h, in metri, espressa approssimativamente dalla funzione $h = 1 + 10t - 5t^2$ (trascurando l'attrito)?



a. La funzione h è invertibile? È invertibile nell'intervallo $0 \leq t \leq 1$? È invertibile per $t \geq 1$?

b. Trova l'equazione che esprime l'istante t in cui la palla si trova a una altezza h, durante il suo moto *in salita*.

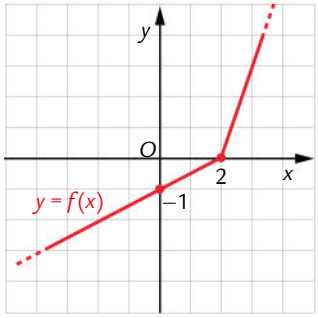
c. Trova l'equazione che esprime l'istante t in cui la palla si trova a una altezza h, durante il suo moto *in discesa*.

d. Utilizzando i risultati dei punti **b** e **c**, determina l'istante in cui la palla si trova a un'altezza di 2 m e sta salendo e l'istante in cui si trova a una altezza di 2 m e sta scendendo.

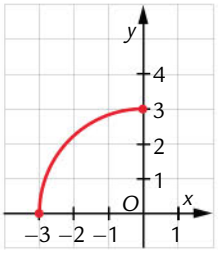
$\left[\text{b. } t = 1 - \dfrac{\sqrt{30-5h}}{5}\text{; c. } t = 1 + \dfrac{\sqrt{30-5h}}{5}\text{; d. circa 0,1 s e circa 1,9 s}\right]$

Interpretazione di grafici

420 In figura è tracciato il grafico della funzione f. Traccia il grafico della funzione f^{-1}, inversa di f, e determina l'espressione analitica di f e di f^{-1}.



421 In figura è tracciato il grafico della funzione f. Traccia il grafico della funzione f^{-1}, inversa di f, e determina l'espressione analitica di f e di f^{-1}.



Funzioni composte

Determina l'espressione analitica di $f \circ g$ e di $g \circ f$, specificando il dominio di ciascuna funzione composta (nelle risposte sono riportate solo le espressioni analitiche delle due funzioni).

422 $f(x) = 2x$ $\quad g(x) = \frac{1}{4}x - 1$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}x - 2; (g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x - 1\right]$

423 $f(x) = x - 1$ $\quad g(x) = x^2 + 4$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = x^2 + 3; (g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 5\right]$

424 $f(x) = x^2 - 1$ $\quad g(x) = x - 3$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = x^2 - 6x + 8; (g \circ f)(x) = x^2 - 4\right]$

425 $f(x) = x + 1$ $\quad g(x) = 2^x$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = 2^x + 1; (g \circ f)(x) = 2^{x+1}\right]$

426 $f(x) = 2^{x-1}$ $\quad g(x) = x + 1$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = 2^x; (g \circ f)(x) = 2^{x-1} + 1\right]$

427 $f(x) = \log_2 x$ $\quad g(x) = 2^{x+1}$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = x + 1; (g \circ f)(x) = 2x\right]$

428 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad g(x) = x^3 + 1$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^3+1}; (g \circ f)(x) = x + 1\right]$

429 $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x^2 + 1$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = x^4 + 2x^2 + 1; (g \circ f)(x) = x^4 + 1\right]$

430 $f(x) = x^3 + 1$ $\quad g(x) = x^3$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = x^9 + 1; (g \circ f)(x) = (x^3 + 1)^3\right]$

431 **Videolezione** $f(x) = x^2 + 1$ $\quad g(x) = \sin x$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = \sin^2 x + 1; (g \circ f)(x) = \sin(x^2 + 1)\right]$

432 $f(x) = x + 1$ $\quad g(x) = \cos^2 x$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = \cos^2 x + 1; (g \circ f)(x) = \cos^2(x + 1)\right]$

433 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad g(x) = e^{x-1}$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = \frac{1}{e^{2x-2}}; (g \circ f)(x) = e^{\frac{1}{x^2}-1}\right]$

434 **Videolezione** $f(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad g(x) = \log_2 x$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = \sqrt{\log_2 x - 1}; (g \circ f)(x) = \log_2 \sqrt{x-1}\right]$

435 $f(x) = 1 - \ln x$ $\quad g(x) = 1 + e^x$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = 1 - \ln(1 + e^x); (g \circ f)(x) = 1 + e^{1-\ln x}\right]$

436 Data la funzione $f(x) = \log_2 x$, determina l'espressione della funzione $(f \circ f)(x)$ e stabilisci per quali valori di x risulta $(f \circ f)(x) \geq 0$. $[x \geq 2]$

437 Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$ e $g(x) = 2^x$, determina il dominio della funzione $f \circ g$. $[x \geq 0]$

438 Date le due funzioni $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = 2 - 3x$, determina l'espressione analitica delle seguenti funzioni: $f^{-1}, g^{-1}, f^{-1} \circ g^{-1}, (f \circ g)^{-1}$. $\left[f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+1),\ g^{-1}(x) = \frac{1}{3}(2-x),\ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{6}(5-x),\ (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{6}(3-x)\right]$

439 Date le due funzioni $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ e $g(x) = -2x + 1$, determina l'espressione analitica delle seguenti funzioni: $f^{-1}, g^{-1}, g^{-1} \circ f^{-1}, (g \circ f)^{-1}$. $\left[f^{-1}(x) = 2(x-1),\ g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1-x),\ (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{2}(3-2x),\ (g \circ f)^{-1}(x) = -x - 1\right]$

440 **Videolezione** Date le funzioni $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ e $g(x) = \sin x$, determina l'espressione di $(f \circ g)(x)$ e stabilisci per quali valori di x risulta $(f \circ g)(x) \geq 0$. $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

441 Date le funzioni $f(x) = 2x$ e $g(x) = \cos x$, determina per quali valori di x risulta $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. $\left[x = \pm \arccos\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi\right]$

442 Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x+k}$ e $g(x) = \log_2(x+8) - 1$, determina k in modo che il grafico della funzione $g \circ f$ intersechi l'asse y nel punto di coordinate $(0, 3)$. $[k = 64]$

443 Date le funzioni $f(x) = \sqrt{2x^2 - k}$ e $g(x) = 2^x$, determina k in modo che il grafico della funzione $f \circ g$ abbia come dominio l'intervallo $[2, +\infty)$. $[k = 32]$

Realtà e modelli

444 Paola si reca in vacanza negli Stati Uniti e, nel giorno di arrivo in cui cambia la valuta, riceve (al netto di commissioni di cambio) un importo in dollari che risulta il 20% in più dell'importo in euro. Durante il soggiorno spende 500 dollari. Il giorno del ritorno cambia ciò che le rimane in dollari nuovamente in euro e (al netto di commissioni di cambio) riceve un importo in euro che risulta il 25% in meno dell'importo restante in dollari.



a. Scrivi l'espressione analitica della funzione f che esprime l'importo in dollari che resta a Paola da cambiare in euro prima del ritorno, se il giorno di arrivo aveva cambiato x euro.

b. Scrivi l'espressione analitica della funzione g che esprime l'importo in euro ricevuto da Paola il giorno del ritorno, in seguito al cambio di x dollari.

c. Scrivi l'espressione analitica della funzione $g \circ f$ e spiegane il significato in relazione al problema. Utilizzando l'espressione analitica di tale funzione, deduci l'importo in euro che riceve Paola il giorno del ritorno, dopo avere cambiato la rimanenza in dollari, se il giorno di arrivo aveva cambiato 800 euro.

$\left[\textbf{a. } f(x) = \frac{6}{5}x - 500;\ \textbf{b. } g(x) = \frac{3}{4}x;\ \textbf{c. } g(f(x)) = \frac{9}{10}x - 375,345 \text{ euro}\right]$

445 Un pallone sferico di raggio iniziale r_0 (in cm) viene gonfiato a partire dall'istante $t = 0$; mentre il pallone viene gonfiato il suo raggio cresce alla velocità di v cm/s. Sia f la funzione che esprime come varia il raggio (in cm) del pallone in funzione del tempo t (in s) e g la funzione che esprime come varia il volume (misurato in cm^3) del pallone in funzione del raggio r (in cm). Spiega che cosa rappresenta la funzione $g \circ f$ e determina la sua espressione analitica.



$\left[(g \circ f)(t) = \frac{4}{3}\pi(r_0 + vt)^3\right]$

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

446 **Vero o falso?**

a. l'insieme $X = (-5, 6] \cup \{10\}$ ha massimo ma non ha minimo V F

b. la funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-4}$ non è definita per alcun valore reale di x V F

c. il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-3x+5}{x-2}$ interseca l'asse x in due punti distinti V F

d. data la funzione $y = f(x)$, definita in $\mathbf{R}$, possiamo affermare con certezza che $y = f(|x|)$ è pari V F

e. se $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ e $g(x) = 1 - \ln x$, allora $f \circ g$ ha equazione $y = 1 - \ln(1 - \sqrt{x})$ V F

Test

447 Quale delle seguenti funzioni ha come dominio l'intervallo $[-2, 2]$?

A $y = \sqrt[3]{4-x^2}$ C $y = \sqrt{4-x^2}$

B $y = e^{4-x^2}$ D $y = \ln(4-x^2)$

448 Quale delle seguenti funzioni non è né pari né dispari?

A $y = \dfrac{x^5}{x^6+1}$ C $y = \dfrac{x^6}{x^5+1}$

B $y = \dfrac{x^6}{x^6-1}$ D $y = \dfrac{x^3}{x^6-1}$

449 Quale delle seguenti funzioni ha come dominio un insieme limitato?

A $y = \sqrt{x^2-7x}$ C $y = \ln(7x-x^2)$

B $y = \sqrt[3]{x^2-7x}$ D $y = e^{7x-x^2}$

450 Quale delle seguenti funzioni è definita in tutto $\mathbf{R}$?

A $y = \sqrt{e^x-1}$ C $y = \sqrt{e^{-x}-1}$

B $y = \ln(e^{-x}+1)$ D $y = \ln(e^{-x}-1)$

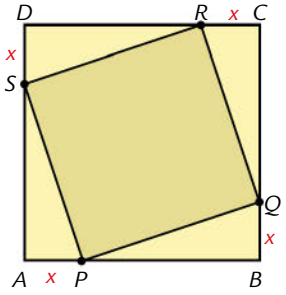
451 Facendo riferimento alla figura, dove si pone $\overline{AB} = 1$, la funzione che esprime l'area del quadrato $PQRS$:

A è pari

B è minima per $x = \dfrac{1}{2}$ e massima per $x = 0$ e $x = 1$

C è massima per $x = \dfrac{1}{2}$ e minima per $x = 0$ e $x = 1$

D è iniettiva



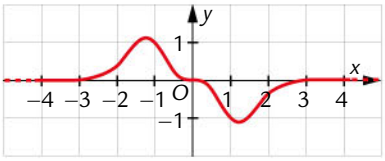
452 Il grafico in figura rappresenta una funzione:

A monotòna

B pari

C strettamente decrescente nell'intervallo $[0, 2]$

D dispari e limitata



453 Il dominio naturale della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x+5}}$ è l'insieme:

A $D = [-5, -1] \cup [1, +\infty)$

B $D = \mathbf{R} - \{-2, 3\}$

C $D = [-5, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, 3) \cup (3, +\infty)$

D $D = [-1, 1]$

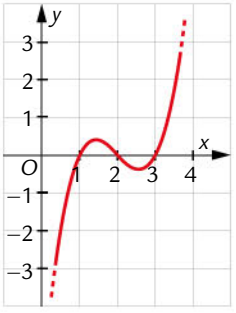
454 La funzione rappresentata in figura:

A è invertibile nell'intervallo $[1, 2]$

B è invertibile nell'intervallo $[2, 3]$

C è invertibile nell'intervallo $\left[3, \dfrac{7}{2}\right]$

D nessuna delle precedenti risposte è esatta



455 Data la funzione $y = f(x) = x^2 + 1$, per quanto riguarda la funzione $g = f \circ f$ possiamo dire che:

A $g(x) = x^2 + 2$

B $g(0) = 2$

C $g(x) = 2(x^2 + 1)$

D $g(1) = 6$

A mente **Determina il dominio delle seguenti funzioni.**

456 $y = x^3 - 3x + 1$

457 $y = x(e^{-2x} - e^{-x})$

458 $y = \sqrt{x^2 - 9}$

459 $y = \dfrac{x \ln x}{x - 1}$

460 $y = \ln(x^2 + 4x + 4)$

461 $y = (x - 1)e^{-x}$

462 $y = \ln \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 4)^2}$

463 $y = \ln(e^{-2x} + 1)$

464 $y = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$

465 $y = \ln x + \ln(x - 3)$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

466 $y = x^3 - \frac{1}{2}x + 1$ [R]

467 $y = \dfrac{2x - 1}{3x + 5}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}\right]$

468 $y = \dfrac{1}{2x - 1} + \dfrac{3}{x}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right]$

469 $y = \dfrac{1}{2x^2 - 10x}$ $[\mathbb{R} - \{0, 5\}]$

470 $y = \dfrac{1}{2 - 72x^2}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\pm\frac{1}{6}\right\}\right]$

471 $y = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 7x - 8}$ $[\mathbb{R} - \{-8, 1\}]$

472 $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{10 - x}}$ $[4 \le x < 10]$

473 $y = \ln(3x - x^2 + 4)$ $[-1 < x < 4]$

474 $y = \sqrt{\dfrac{x}{4x^2 - 1}}$ $\left[-\frac{1}{2} < x \le 0 \vee x > \frac{1}{2}\right]$

475 $y = \dfrac{1}{4^{2x-3} - 8}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\frac{9}{4}\right\}\right]$

476 $y = \dfrac{\sqrt{8x - x^2}}{x - 4}$ $[0 \le x < 4 \vee 4 < x \le 8]$

477 $y = \sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{25 - x^2}$ $[-5 \le x \le 0 \vee 4 \le x \le 5]$

478 $y = 3^{\frac{x}{2^x - 1}}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

479 $y = \ln(1 - \tan x)$ $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

480 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x + 2)}$ $[-2 < x \le -1]$

481 $y = \sqrt{\sin x - x}$ $[x \le 0]$

482 $y = \ln(2^{x+1} - 3^x)$ $\left[x < \dfrac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}\right]$

483 $y = \dfrac{1}{\sqrt{\log_2 \log_4 x}}$ $[x > 4]$

484 $y = \sqrt{1 - e^{x^2 + 4x - 5}}$ $[-5 \le x \le 1]$

485 $y = \dfrac{1}{\sqrt{(3x + 1)^2 - 4x^2}}$ $\left[x < -1 \vee x > -\frac{1}{5}\right]$

486 $y = \sqrt{-3x^2 - 2x + 5} + \sqrt{-x}$ $\left[-\frac{5}{3} \le x \le 0\right]$

487 $y = \sqrt{\dfrac{\ln x - 1}{3 - \ln x}}$ $[e \le x < e^3]$

488 $y = \ln\left(\dfrac{4^x - 5 \cdot 2^x + 4}{2^x - 8}\right)$ $[0 < x < 2 \vee x > 3]$

489 $y = \ln\left(\dfrac{2x^2 + 3x - 5}{9 - x^2}\right)$ $\left[-3 < x < -\frac{5}{2} \vee 1 < x < 3\right]$

490 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x}{|x| - 1}}$ $[x < -1 \vee 0 \le x < 1 \vee x \ge 3]$

491 $y = \sqrt{-\ln(x^2 - 5)} + \ln x$ $\left[\sqrt{5} < x \le \sqrt{6}\right]$

492 $y = \sqrt{\ln\left(\dfrac{2x + 3}{x - 2}\right)}$ $[x \le -5 \vee x > 2]$

493 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - |2x - 3|}}$ $[x < -3 \vee x > 1]$

494 $y = \sqrt{3 - \log_2 x} + \ln\left(16 - \dfrac{1}{2^x}\right)$ $[0 < x \le 8]$

495 $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\log_2 \dfrac{x - 1}{x + 2}}}$ $[x \le -5 \vee x > 1]$

496 $y = (1 + 2^{-x}) \log\left(\log_2^2 x + \log_2 \dfrac{1}{x} - 2\right)$

$\left[0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 4\right]$

497 $y = \ln(|x^2 - 2x - 3| - 3)$

$\left[x < 1 - \sqrt{7} \vee 0 < x < 2 \vee x > 1 + \sqrt{7}\right]$

498 $y = \ln(|x| - 1)\sqrt{9 - x^2}$ $[-3 \le x < -1 \vee 1 < x \le 3]$

499 $y = \dfrac{\sqrt{10 - x} + \sqrt{x + 3}}{\log_2(x - 2)}$ $[2 < x \le 10, \text{ con } x \ne 3]$

500 $y = \sqrt{e^{-x} - \ln x}$ $[0 < x \le \alpha, \text{ con } \alpha \in (1, 2)]$

501 $y = \dfrac{\cos x}{\sin x - x^2}$ $[\mathbf{R} - \{0, \alpha\}, \text{ con } \alpha \in (0, 1)]$

502 $y = \sqrt{1 - \ln\sqrt{x}}$ $[0 < x \le e^2]$

503 $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2 + 4x - 5}{\ln|x - 4|}}$ $[x < -5 \vee 1 < x < 3 \vee x > 5]$

504 $y = (x^2 - 3x - 4)^{\sqrt{25 - x^2}}$ $[-5 \le x < -1 \vee 4 < x \le 5]$

505 $y = (\sin x - \cos x)^{\sqrt{\tan^2 x - 3}}$ $\left[\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi, \text{ con } x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

Interpretazione di grafici

506 Una funzione polinomiale f ha il grafico riportato in figura. Dopo avere specificato il dominio di f, determina il dominio delle funzioni di equazioni:

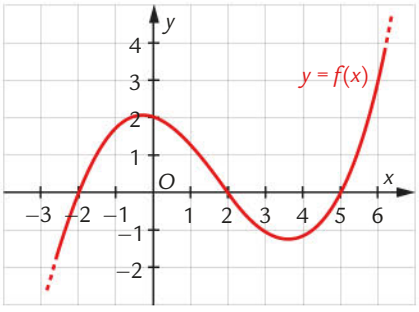
a. $y = \sqrt{f(x)}$

b. $y = e^{f(x)}$

c. $y = \ln f(x)$

d. $y = \ln|f(x)|$

e. $y = \sqrt{1 - e^{f(x)}}$



507 Una funzione razionale frazionaria f ha il grafico riportato in figura. Le rette di equazioni $x = \pm 2$ e $y = 1$ sono asintoti per la funzione. Dopo avere specificato il dominio di f, determina il dominio delle funzioni di equazioni:

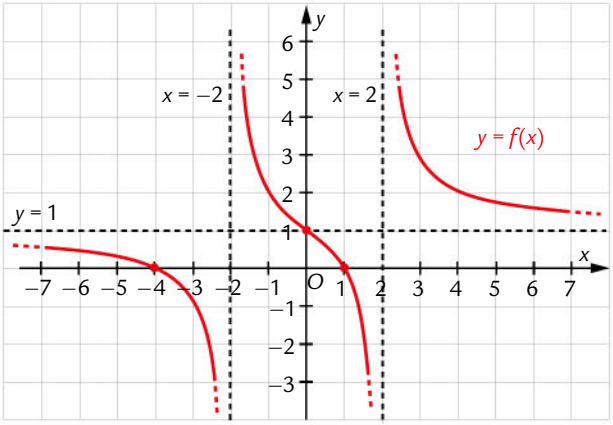
a. $y = \sqrt{f(x)}$

b. $y = e^{-f(x)}$

c. $y = \ln f(x)$

d. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)}}$

e. $y = \sqrt{\ln f(x)}$



Per ciascuna delle seguenti funzioni, determina il dominio, calcola le coordinate degli eventuali punti di intersezione con gli assi cartesiani e studia il segno; rappresenta quindi nel piano cartesiano le regioni cui appartiene il grafico della funzione. Se una funzione è periodica, determina il suo periodo e limita lo studio a un intervallo di ampiezza uguale al periodo.

508 $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ $[D = \mathbf{R};\ y > 0 \text{ per } -1 < x < 0 \vee x > 3;\ \text{intersezioni assi: } (-1, 0), (0, 0), (3, 0)]$

509 $y = \dfrac{x + 2}{25 - x^2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{\pm 5\};\ y > 0 \text{ per } x < -5 \vee -2 < x < 5;\ \text{intersezioni assi: } (-2, 0), \left(0, \dfrac{2}{25}\right)\right]$

510 $y = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$ $[D = (-\infty, -6] \cup [2, +\infty);\ y \ge 0 \text{ per ogni } x \in D;\ \text{intersezioni assi: } (-6, 0), (2, 0)]$

511 $y = \sqrt{x + 3} + \sqrt{4 - x}$ $\left[D = [-3, 4];\ y > 0 \text{ per ogni } x \in D;\ \text{intersezioni assi: } \left(0, 2 + \sqrt{3}\right)\right]$

512 $y = \sqrt[3]{x - x^3}$ $[D = \mathbf{R};\ y > 0 \text{ per } x < -1 \vee 0 < x < 1;\ \text{intersezioni assi: } (-1, 0), (0, 0), (1, 0)]$

513 $y = 2^{\frac{1}{x^2 - 4}}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{\pm 2\};\ y > 0 \text{ per ogni } x \in D;\ \text{intersezioni assi: } \left(0, 2^{-\frac{1}{4}}\right)\right]$

514 $y = 2\cos^2 x + \cos x$

$\left[D = \mathbf{R};\ \text{periodo} = 2\pi;\ \text{nell'intervallo } [0, 2\pi]: y > 0 \text{ per } 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \vee \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3} \vee \dfrac{3\pi}{2} < x \le 2\pi;\right.$

$\left.\text{intersezioni assi: } (0, 3); \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right), \left(\dfrac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\dfrac{4\pi}{3}, 0\right), \left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)\right]$

515 $y = \dfrac{x+3}{4-2^x}$ [$D = \mathbf{R} - \{2\}$; $y > 0$ per $-3 < x < 2$; intersezioni assi: $(-3, 0)$, $(0, 1)$]

516 $y = \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ [$D = (-4, 4)$; $y > 0$ per $0 < x < 4$; intersezioni assi: $(0, 0)$]

517 $y = e^{2x} - e^x$ [$D = \mathbf{R}$; $y > 0$ per $x > 0$; intersezioni assi: $(0, 0)$]

518 $y = 2^x + 3^{x^2}$ [$D = \mathbf{R}$; $y > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; intersezioni assi: $(0, 2)$]

519 $y = \dfrac{\ln x - 1}{3 - \ln x}$ [$D = (0, e^3) \cup (e^3, +\infty)$; $y > 0$ per $e < x < e^3$; intersezioni assi: $(e, 0)$]

520 $y = \ln|x^2 - 2x|$
[$D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$; $y > 0$ per ogni $x < 1 - \sqrt{2} \vee x > 1 + \sqrt{2}$; intersezioni assi: $\left(1 - \sqrt{2}, 0\right)$, $(1, 0)$, $\left(1 + \sqrt{2}, 0\right)$]

521 $y = (x^2 - 5x + 6)\ln x$ [$D = (0, +\infty)$; $y > 0$ per $1 < x < 2 \vee x > 3$; intersezioni assi: $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$]

522 $y = 2x - \sqrt{x^2 + x - 2}$ [$D = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$; $y > 0$ per $x \geq 1$; intersezioni assi: nessuna]

523 $y = \ln(\sin x + \cos x)$ [Funzione periodica di periodo 2π; nell'intervallo $[0, 2\pi]$: $D = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$; $y > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{2}$; intersezioni assi: $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(2\pi, 0)$]

524 $y = \dfrac{4 - |x|}{|x + 3|}$ [$D = \mathbf{R} - \{-3\}$; $y > 0$ per $-4 < x < 4$; intersezioni assi: $(\pm 4, 0)$, $\left(0, \frac{4}{3}\right)$]

525 $y = \sqrt{1 - 4\cos^2 x}$ [Funzione periodica di periodo π; nell'intervallo $[0, \pi]$: $D = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$; $y \geq 0$ per ogni $x \in D$; intersezioni con gli assi: $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$]

Per ciascuna delle seguenti funzioni di equazione $y = f(x)$, traccia il grafico nel suo dominio e determina immagine, estremo inferiore e superiore della funzione e, se esistono, massimo e minimo.

526 $y = |x^2 + 4x - 5|$

527 $y = 2|x - 1| - 3$

528 $y = |1 - \log_2 x|$

529 $y = -\sqrt{4x - x^2}$

530 $y = e^{-|x|}$

531 $y = 1 - \tan x$

532 $y = \left|\dfrac{2x + 2}{x + 3}\right|$

533 $y = -2\sin|x|$

534 $y = 2 - \sqrt{x + 3}$

535 $y = -2|\sin x|$

536 $y = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

537 $y = \begin{cases} 2\cos x & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$

538 $y = 2\sin x - 2\cos x$

539 $y = 4\cos^2 x$

540 $y = \dfrac{|e^x - 1|}{e^x - 1}$

541 $y = \dfrac{|x^2 - 3x|}{x^2 - 9}$

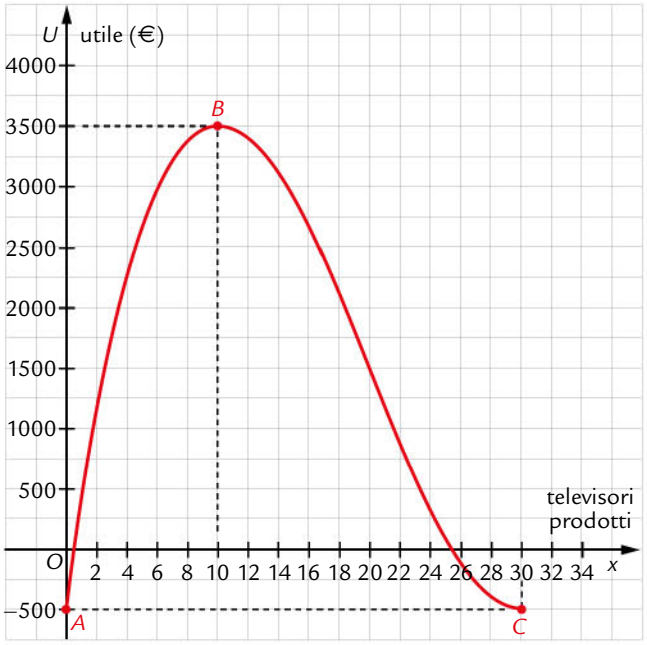
542 $y = \begin{cases} \sin x & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \tan x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2x - \pi} & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

543 $y = \dfrac{\ln^2 x^2}{|\ln x|}$

544 $y = \sqrt{x\,|x| + 2x}$

Realtà e modelli

545 **Vendita di televisori.** Una azienda produce e vende televisori OLED. L'utile derivante dalla produzione e vendita giornaliera di x televisori è ben modellizzato dalla funzione il cui grafico è quello in figura. Il limite di produzione giornaliero è di 30 televisori.



a. Individua il dominio e l'insieme immagine della funzione rappresentata. Quale produzione giornaliera garantisce l'utile massimo? E a quanto ammonta tale utile massimo?

b. Quanti televisori deve produrre e vendere l'azienda in un giorno per non essere in perdita? E per avere un utile giornaliero di almeno 2000 euro?

c. Sapendo che l'espressione analitica della funzione è $U(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, determina i valori di a, b, c, dalle informazioni leggibili sul grafico relative ai punti A, B, C. Sfruttando l'espressione analitica della funzione ottenuta, determina l'utile che corrisponde alla vendita giornaliera di 16 televisori.

[**c.** $a = -60, b = 900, c = -500$, utile = 2636 euro]

546 **Evoluzione di una epidemia.** Nella figura è rappresentato il grafico della funzione f che esprime il numero degli abitanti di una città che hanno contratto una certa malattia in funzione del tempo t (misurato in giorni) trascorso dall'inizio della diffusione di una epidemia (corrispondente a $t = 0$).

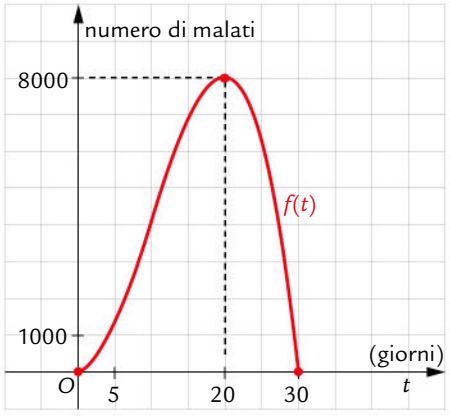
a. Deduci dal grafico:

- una stima del numero di abitanti malati dopo 15 giorni;
- una stima dell'intervallo di tempo entro cui il numero di malati è superiore a 4000.

Supponi ora di sapere che l'espressione analitica della funzione f è della forma $f(t) = at^3 + bt^2$.

b. Determina i valori di a e b, in base alle informazioni leggibili sul grafico.

c. Determina algebricamente l'intervallo di tempo entro cui il numero di malati è superiore a 4000, confrontandolo con la stima dedotta al punto **a**.



[**a.** Una stima plausibile del numero di ammalati dopo 15 giorni è per esempio 6750; il numero di ammalati appare superiore a 4000 all'incirca tra il decimo e il ventisettesimo giorno; **b.** $a = -2$ e $b = 60$; **c.** nell'intervallo di tempo compreso tra 10 giorni e 27 giorni, 7 ore e 41 minuti (approssimando per difetto il numero di minuti a un intero)]

547 Considera la funzione $f(x) = x - |x - 2|$.

a. Determina il suo dominio e tracciane il grafico.

b. Determina estremo inferiore ed estremo superiore della funzione e, se esistono, massimo e minimo. Si tratta di una funzione limitata?

c. Sfruttando il grafico tracciato, deduci il dominio della funzione $y = \sqrt{|x-2| - x}$.

[**a.** $D = \mathbb{R}$; **b.** $\inf f = -\infty$, $\max f = 2$; **c.** $x \leq 1$]

548 Considera la funzione $f(x) = |x^2 - 4| - 5$.

a. Determina il suo dominio e tracciane il grafico.

b. Determina estremo inferiore ed estremo superiore della funzione e, se esistono, massimo e minimo. Si tratta di una funzione limitata?

c. Sfruttando il grafico tracciato, deduci il dominio della funzione $y = \sqrt{f(x)}$.

[**a.** $D = \mathbb{R}$; **b.** $\min f = -5$, $\sup f = +\infty$; **c.** $x \leq -3 \vee x \geq 3$]

549 Considera la funzione $f(x) = 2^{-|x|} - 1$.

a. Determina il suo dominio e tracciane il grafico.

b. Determina estremo inferiore ed estremo superiore della funzione e, se esistono, massimo e minimo. Si tratta di una funzione limitata?

c. Sfruttando il grafico tracciato, deduci il dominio della funzione $y = \arcsin f(x)$. [**a.** $\mathbb{R}$; **b.** $\inf f = -1$, $\max f = 0$; **c.** $\mathbb{R}$]

550 Verifica che la funzione $y = 2^{-x^2}$, con $x \geq 0$, è invertibile e determina l'espressione analitica della funzione inversa.

$\left[y = \sqrt{-\log_2 x}\right]$

551 Traccia il grafico della funzione $y = \log_2 x^2$ e giustifica perché tale funzione non è invertibile. Verifica che la restrizione della funzione all'intervallo $(-\infty, 0)$ è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa. $\left[y = -2^{\frac{x}{2}}\right]$

552 Considera le due funzioni $f(x) = 2^{-x} - 1$ e $g(x) = \log_2 \frac{1}{x}$.

a. Determina il dominio di ciascuna e tracciane il grafico.

b. Stabilisci graficamente il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$.

c. Scrivi l'espressione analitica delle due funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

d. Traccia il grafico della funzione $f \circ g$.

$\left[\text{a. } D_f = \mathbb{R},\ D_g = (0, +\infty);\ \text{b. 1 soluzione;}\ \text{c. } (f \circ g)(x) = x - 1, \text{ con } x > 0 \text{ e } (g \circ f)(x) = \log_2 \frac{1}{2^{-x} - 1}\right]$

Esercizi con parametri

553 Determina per quali valori di k la funzione $y = \frac{1}{x^2 + 6x + k}$:

a. ha come dominio $\mathbb{R}$;

b. interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 2)$;

c. interseca la retta di equazione $y = 1$ in due punti distinti.

$\left[\text{a. } k > 9;\ \text{b. } k = \frac{1}{2};\ \text{c. } k < 10\right]$

554 Determina per quali valori di k la funzione $y = \sqrt{x^2 + kx + 2}$:

a. ha come dominio $\mathbb{R}$;

b. passa per il punto di coordinate $(1, 3)$;

c. interseca la retta di equazione $y = 1$ in due punti distinti.

[**a.** $-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$; **b.** $k = 6$; **c.** $k < -2 \vee k > 2$]

555 Determina per quali valori del parametro k il dominio delle seguenti funzioni è $\mathbb{R}$:

a. $y = \frac{1}{x^2 - 2kx + 5}$ **b.** $y = \frac{1}{k - 2 \sin x \cos x}$ **c.** $y = \frac{1}{e^x + \ln k}$

[**a.** $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$; **b.** $k < -1 \vee k > 1$; **c.** $k \geq 1$]

556 Determina a e b di modo che il dominio e l'immagine della funzione $f(x) = a \arcsin x + b$ siano uguali.

$\left[a = \pm\frac{2}{\pi} \text{ e } b = 0\right]$

557 Determina a e b per cui il dominio e l'immagine della funzione $f(x) = a \arccos x + b$ siano uguali.

$\left[a = \frac{2}{\pi} \text{ e } b = -1, \text{ oppure } a = -\frac{2}{\pi} \text{ e } b = 1\right]$

Esercizi *più*

558 Determina, in dipendenza del parametro $k \in \mathbf{R}$, il dominio delle seguenti funzioni:

a. $y = \ln(x^2 - k)$ **b.** $y = \sqrt{e^x - k + 1}$ **c.** $y = \sqrt{(k^2-4)x - k + 2}$

[**a.** Se $k > 0$, $D = (-\infty, -\sqrt{k}) \cup (\sqrt{k}, +\infty)$; se $k = 0$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$; se $k < 0$, $D = \mathbf{R}$; **b.** se $k \leq 1$, $D = \mathbf{R}$; se $k > 1$, $D = [\ln(k-1), +\infty)$; **c.** se $k < -2 \vee k > 2$, $D = \left[\frac{1}{k+2}, +\infty\right)$; se $k = \pm 2$, $D = \mathbf{R}$, se $-2 < k < 2$, $D = \left(-\infty, \frac{1}{k+2}\right]$]

559 Verifica che le due funzioni $f(x) = \log_{x+4}(5-x)$ e $g(x) = \frac{\ln(5-x)}{\ln(x+4)}$ hanno lo stesso dominio. Sono anche uguali? Più in generale, se $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi, le due funzioni $f(x) = \log_{P(x)} Q(x)$ e $g(x) = \frac{\ln Q(x)}{\ln P(x)}$ sono uguali?

560 Sia $k \in \mathbf{R}$. Considera la funzione $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ kx & -1 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$.

a. Per quali k la funzione $f(x)$ è invertibile?
b. Per quali k la funzione $f(x)$ è strettamente crescente?
c. Per quali k la funzione $f(x)$ è dispari? [**a.** $-1 \leq k < 0$ oppure $0 < k \leq 1$; **b.** $0 < k \leq 1$; **c.** per ogni $k \in \mathbf{R}$]

Dalle gare

561 Sia f una funzione tale che $f\left(\frac{x}{5}\right) = x^2 + x + 3$. Trova la somma dei valori di w per cui $f(5w) = 2013$.

(High school Math Contest 2013) $\left[-\frac{1}{25}\right]$

562 Traccia il grafico della funzione di equazione $y = e^{\ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)}$.

(Calculus competition 1997)

563 Sia g una funzione tale che $3g(x) + 2g(1-x) = 9 + 2x$ per ogni valore reale di x. Trova il valore di $g(2)$.

(High school Math Contest 2013) [5]

564 I grafici delle funzioni $y = -|x+8| + 6$, $y = 0$ e $y = x + k$, delimitano un trapezio appartenente al secondo quadrante, di area uguale a 20. Qual è il valore di k?

(High school Math Contest 2012) [$k = 10$]

565 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1}, & 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x+1}, & 4 < x < 10 \\ -x^3, & x < 0 \\ -1, & x \geq 10 \end{cases}$, calcola $f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f(0)$.

A -1 B 0 C 4 D 32 E Nessuna delle precedenti

(Fgcu competition 2016)

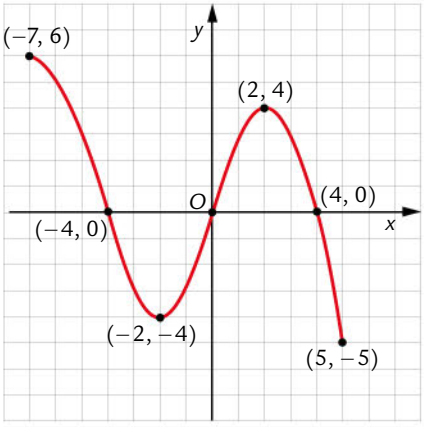
566 Se $f(1-x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2 - x}$, quanto vale $f\left(\frac{1}{x}\right)$?

A $\frac{2-x}{x^2-2x-4}$ B $\frac{1-5x^2}{1+x}$ C $\frac{1-5x^2}{x^3+2x}$ D $\frac{1}{1-x}$ E Nessuna delle precedenti

(Fgcu competition 2015)

Introduzione all'analisi e funzioni

1 In riferimento al grafico della funzione f qui proposto, rispondi alle seguenti domande.



a. Quanto vale $f(-2)$? E $f(4)$?

b. Qual è il dominio della funzione f?

c. Qual è l'insieme immagine della funzione f?

d. Quali sono gli zeri della funzione f?

e. Qual è il più ampio intervallo in cui la funzione f è crescente in senso stretto?

f. La funzione f è pari? È dispari?

g. La funzione f è invertibile?

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

2 $y = -x^3 + x$

3 $y = \dfrac{1}{3x^2 - 2x - 1}$

4 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x - 6}} + \sqrt[3]{x - 2}$

5 $y = \dfrac{2^x}{2^{x+1} - 8^{3x}} + \dfrac{1}{2^x}$

6 $y = \ln(4 - x^2)$

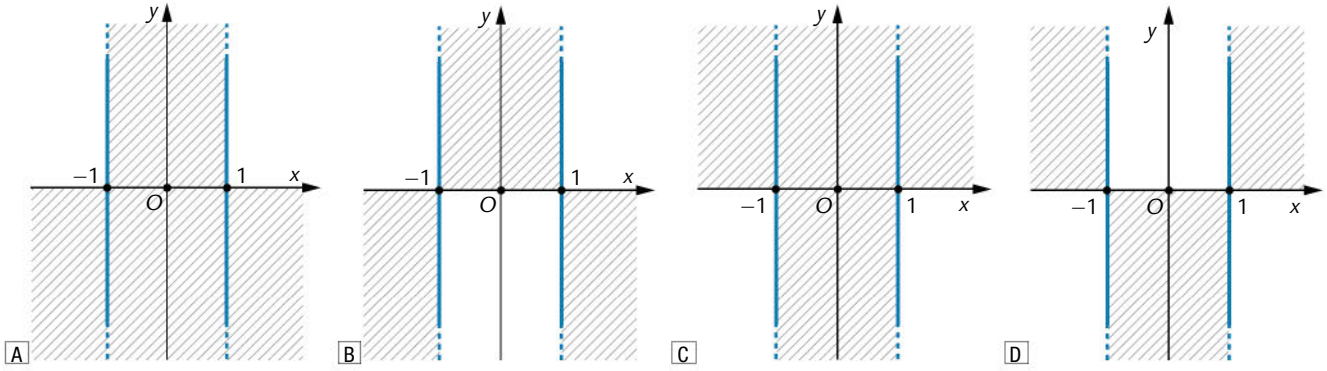
7 $y = \dfrac{1}{\log_2 x - 3}$

---

8 Stabilisci se le funzioni seguenti sono pari o dispari (o né pari né dispari):

a. $f(x) = -x^3 + \sin x$ **b.** $y = 2^x + x$ **c.** $y = x^4 - x^2$

9 Il grafico della funzione $y = x^4 - x^2$ appartiene alla parte di piano **non** indicata con il tratteggio di una sola delle seguenti figure; quale? Rispondi dopo aver studiato il segno della funzione data.



10 Date le funzioni $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = x^2 + 3x - 1$, determina l'espressione analitica della funzione composta $g \circ f$.

11 Considera le due funzioni $f(x) = 2^x + 1$ e $g(x) = \dfrac{4^x - 1}{2^x - 1}$.

a. Spiega perché non sono uguali e tracciane il grafico.

b. Scrivi l'espressione analitica dell'inversa della funzione f.

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Totale
Punteggio massimo	0,25 · 7 = 1,75	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,25 · 3 = 0,75	1	0,75	0,75 · 2 = 1,5	10
Punteggio ottenuto												

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 572

Unità 2

Tema G

Limiti di funzioni reali di variabile reale

- Approfondimenti
- Matematica nella storia
- Con GeoGebra
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

1. Introduzione intuitiva al concetto di limite

Esempi introduttivi al concetto di limite

In questo paragrafo vogliamo introdurre la prima fondamentale operazione del calcolo infinitesimale, quella di *limite*. Per avvicinarci a questo concetto, analizziamo insieme alcuni esempi, in cui cominciamo a familiarizzare con la nozione di limite a livello intuitivo.

ESEMPIO Limite finito quando x tende a un valore finito

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

e studiamo il suo comportamento quando x assume valori sempre più prossimi a 3.

- **Analisi numerica**

Osserviamo che la funzione non è definita per $x = 3$, tuttavia possiamo calcolarne le immagini per valori di x «vicini» a 3. Attribuendo per esempio a x i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori approssimati di y riportati.

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
y	5,9	5,99	5,999	Non definita	6,001	6,01	6,1

$\rightarrow 6 \leftarrow$

Vediamo che quando la variabile x assume valori sempre più prossimi a 3 i corrispondenti valori di y si avvicinano sempre più a 6. Per esprimere questo comportamento della funzione in prossimità del valore $x = 3$ scriviamo:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

che si legge: «il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a 3 è 6».

- **Interpretazione grafica**

Si può avere conferma di questo comportamento della funzione anche tracciando il suo grafico; poiché

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \quad \text{per } x \neq 3$$

il grafico della funzione è una retta, privata del suo punto di ascissa 3 (**Fig. 1**).

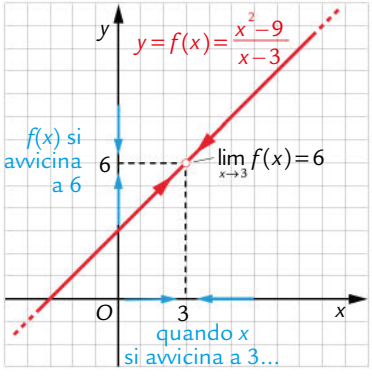


Figura 1

ESEMPIO Limite finito quando x tende a infinito

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

e studiamo il suo comportamento quando x assume valori positivi via via sempre più grandi.

- **Analisi numerica**

Attribuendo per esempio a x i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori approssimati di y riportati.

x	100	200	300	400	500	1000	10000
y	0,9802	0,9900	0,9934	0,9950	0,9960	0,9980	0,9998

→ 1

Vediamo così che quando la variabile x assume valori positivi sempre più grandi (si dice «tendenti a $+\infty$») i corrispondenti valori di y si avvicinano sempre più a 1. Per esprimere questo comportamento della funzione scriviamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

che si legge: «il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a più infinito è 1».

- **Interpretazione grafica**

Il grafico della funzione $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ presenta la retta di equazione $y = 1$ come asintoto orizzontale (**Fig. 2**).

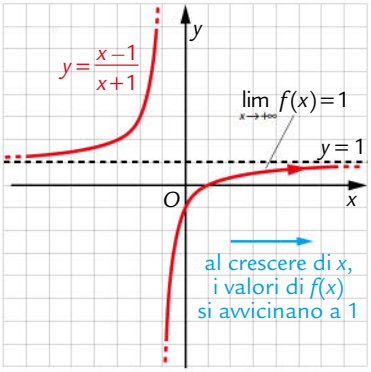


Figura 2

ESEMPIO Limite infinito quando x tende a un valore finito

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{1}{|x|}$$

e studiamo il suo comportamento quando la variabile x assume valori sempre più prossimi a 0.

- **Analisi numerica**

La funzione non è definita per $x = 0$, tuttavia possiamo calcolarne le immagini per valori di x «vicini» a 0. Attribuendo per esempio a x i valori indicati in tabella otteniamo i valori di y riportati.

x	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001	0	0,0001	0,001	0,01	0,1
y	10	100	1000	10000	Non definita	10000	1000	100	10

→ i valori di y ← diventano sempre più grandi

Vediamo così che quando x assume valori sempre più vicini a 0 i corrispondenti valori di y diventano sempre maggiori, ovvero «tendono a $+\infty$». Scriveremo:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

che si legge: « il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a 0 è più infinito».

- **Interpretazione grafica**

Il grafico della funzione $y = f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ presenta l'asse y come asintoto verticale (**Fig. 3**).

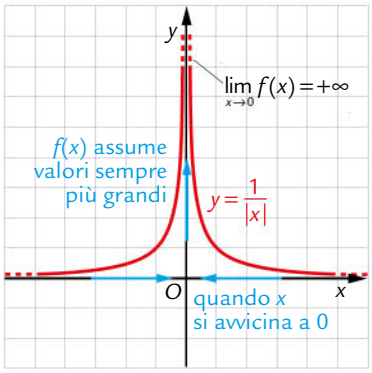


Figura 3

ESEMPIO Limite infinito quando x tende a infinito

Consideriamo la funzione:

$y = f(x) = 2^x$

e studiamo il suo comportamento quando x assume valori positivi via via sempre più grandi.

- **Analisi numerica**

Attribuendo per esempio a x i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori di y riportati.

x	10	15	20	25
y	1024	32 768	1 048 576	33 554 432

i valori di y diventano (rapidamente) sempre più grandi

Vediamo così che quando la variabile x assume valori positivi via via più grandi (tendenti a $+\infty$) anche i corrispondenti valori di y diventano sempre maggiori (ovvero tendono anch'essi a $+\infty$). Scriveremo allora:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

che si legge: «il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a più infinito è più infinito».

- **Interpretazione grafica**

La funzione esaminata (**Fig. 4**) è una funzione esponenziale che, come è noto, al crescere di x assume valori che tendono «rapidamente» a $+\infty$.

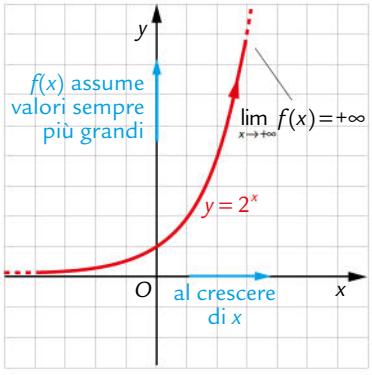


Figura 4

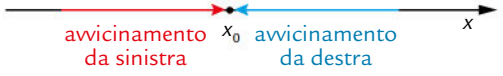
Gli esempi esaminati sono esemplificazioni di ciascuno dei seguenti comportamenti che può avere una funzione quando $x \to x_0$ oppure quando $x \to \pm\infty$.

Descrizione del comportamento della funzione a parole	In simboli
Al tendere di x a x_0, con $x_0 \in \mathbf{R}$, la funzione tende a un valore finito l.	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$
Al tendere di x a x_0, con $x_0 \in \mathbf{R}$, la funzione tende ad assumere valori positivi (negativi) via via più grandi in valore assoluto, ossia la funzione tende a $+\infty$ ($-\infty$).	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ oppure $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$
Al tendere di x a $+\infty$ ($-\infty$) ossia via via che x assume valori positivi (negativi) sempre più grandi in valore assoluto, $f(x)$ tende a un valore finito l.	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$
Al tendere di x a $+\infty$ ($-\infty$) ossia via via che x assume valori positivi (negativi) sempre più grandi in valore assoluto, $f(x)$ tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$.	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ oppure $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ oppure $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Quando i due limiti di una funzione $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ sono entrambi uguali a l, compendieremo le due scritture $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ dicendo che f ammette come limite l per $x \to \infty$ (senza precisare il segno dell'infinito) e scriveremo: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$.

Esempi introduttivi al concetto di limite destro e limite sinistro

Per poter dire che il limite di una funzione per $x \to x_0$, con $x_0 \in \mathbf{R}$, è l, è necessario controllare che $f(x)$ tenda a l sia quando x si avvicina a x_0 per valori *minori* di x_0 (ossia «da sinistra» rispetto a x_0) sia quando x si avvicina a x_0 per valori *maggiori* di x_0 (ossia «da destra» rispetto a x_0):



Può accadere che il comportamento della funzione «a destra» e «a sinistra» di x_0 sia diverso, oppure che una funzione sia definita solo per valori maggiori o minori di x_0 e che quindi abbia senso cercare il limite solo «da destra» o «da sinistra».
Per indagare queste situazioni si parla di **limite destro** e di **limite sinistro** e si scrive:

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ per indicare il limite sinistro

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ per indicare il limite destro

ESEMPIO Limite destro e limite sinistro

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ e studiamo il suo comportamento quando x assume valori vicini a 0.

La funzione **non** è definita per $x = 0$. Il grafico della funzione mostra chiaramente il suo comportamento.
Per $x > 0$ (**Fig. 5**) abbiamo:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

quindi $f(x) \to 1$ per $x \to 0^+$.
Invece per $x < 0$ abbiamo:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

quindi $f(x) \to -1$ per $x \to 0^-$.

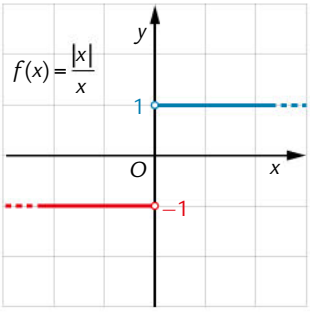


Figura 5

OSSERVA

Come puoi intuire dall'esempio qui a fianco, il limite di una funzione per $x \to x_0$ esiste se e solo se i due limiti, destro e sinistro, esistono e sono uguali.

Esistono perciò i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Non esiste invece il limite della funzione per $x \to 0$, poiché i due limiti destro e sinistro sono diversi tra loro.

Quando i limiti di una funzione per $x \to x_0^-$ e per $x \to x_0^+$ sono entrambi infiniti, ma di segno *opposto*, cioè quando si verifica che:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \text{ oppure } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

si dice impropriamente (vedi la nota qui a fianco) che la funzione f ammette come limite ∞ per $x \to x_0$ (senza specificare il segno dell'infinito) e si scrive:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

PER LA PRECISIONE

La scrittura a fianco è in realtà un abuso: infatti se i due limiti per $x \to x_0^-$ e per $x \to x_0^+$ sono infiniti di segno opposto, i due limiti per $x \to x_0^-$ e per $x \to x_0^+$ risultano diversi tra loro e quindi il limite per $x \to x_0$ in realtà non esiste.

Per esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ (**Fig. 6**) ed esaminiamo il comportamento nell'intorno dell'origine:

- se facciamo tendere x a 0 per valori positivi (ossia «da destra») vediamo che $f(x) \to +\infty$;
- se facciamo tendere x a 0 per valori negativi (ossia «da sinistra») vediamo che $f(x) \to -\infty$.

Esistono dunque i limiti destro e sinistro, infiniti e di segno opposto tra loro:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

È dunque questo un caso in cui si scrive:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

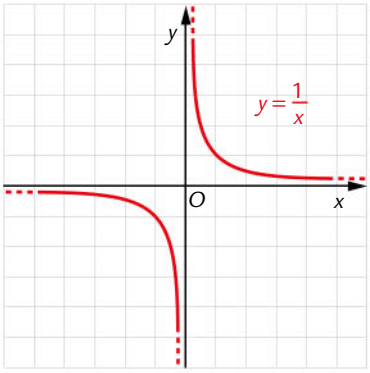


Figura 6

Limiti e asintoti

Il concetto di limite ci permette di precisare i concetti di asintoto verticale e asintoto orizzontale.

DEFINIZIONE | Asintoto verticale

Si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale** (**bilatero**) per la funzione $y = f(x)$ se, al tendere di x a x_0, con $x_0 \in \mathbf{R}$, la funzione tende a $-\infty$ o a $+\infty$ o a ∞ (**Figg. 7, 8, 9**).

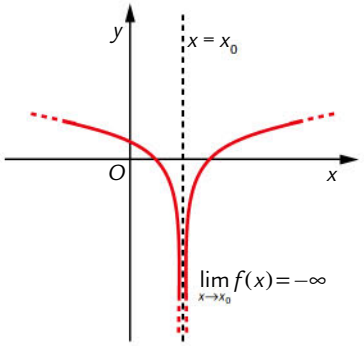


Figura 7

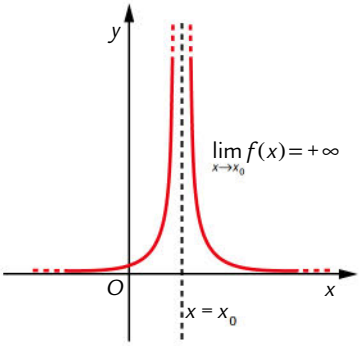


Figura 8

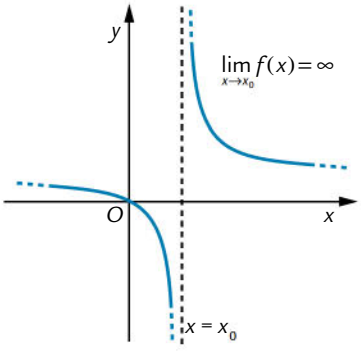


Figura 9

Se il limite è infinito solo per $x \to x_0^-$ si parla più propriamente di **asintoto verticale sinistro** (**Fig. 10**); se il limite è infinito solo per $x \to x_0^+$ si parla più propriamente di **asintoto verticale destro** (**Fig. 11**).

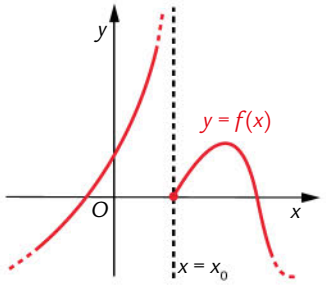


Figura 10

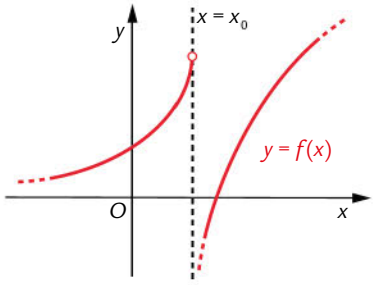


Figura 11

DEFINIZIONE | Asintoto orizzontale

Si dice che la retta di equazione $y = l$ è un **asintoto orizzontale** per la funzione $y = f(x)$ quando il limite della funzione per x che tende a $-\infty$ o a $+\infty$ o a ∞ è uguale a l (**Figg. 12, 13, 14**).

Se il limite è $l \in \mathbf{R}$ solo per $x \to -\infty$ (**Fig. 12**) si parla più propriamente di **asintoto orizzontale sinistro**; se il limite è l solo per $x \to +\infty$ (**Fig. 13**) si parla più propriamente di **asintoto orizzontale destro**. Se infine il limite è l sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$ si parla di **asintoto orizzontale bilatero** (**Fig. 14**).

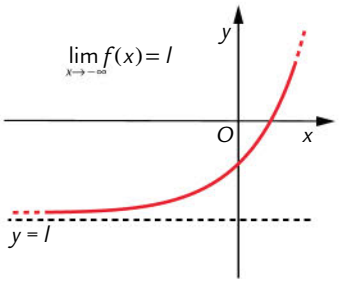


Figura 12

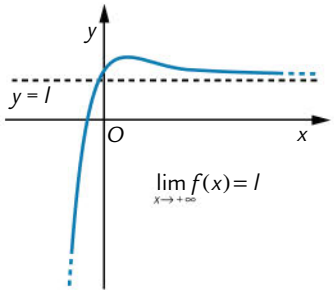


Figura 13

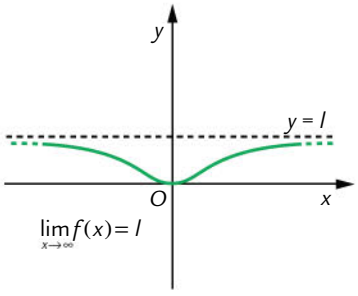
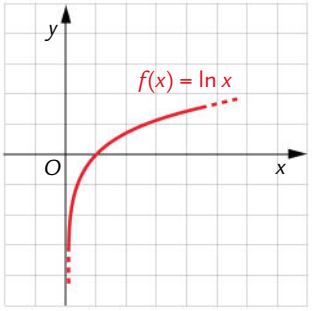
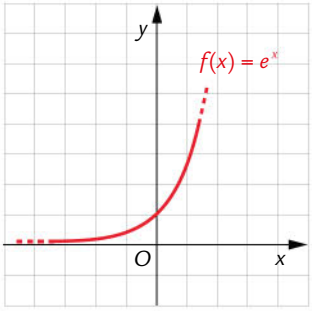
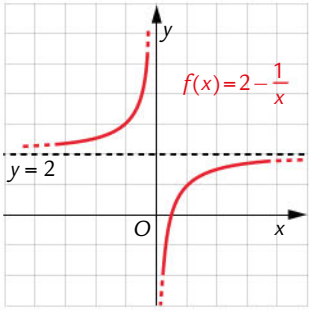


Figura 14

ESEMPIO Asintoti e limiti

Funzione	$f(x) = \ln x$	$f(x) = e^x$	$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$
Grafico			
Asintoti	La retta $x = 0$ (asse y) è un asintoto verticale destro.	La retta $y = 0$ (asse x) è un asintoto orizzontale sinistro.	La retta $x = 0$ (asse y) è asintoto verticale bilatero. La retta $y = 2$ è asintoto orizzontale bilatero.
Scrittura con la notazione di limite	$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Esercizi p. 98

2. Dagli intorni alla definizione generale di limite

Matematica nella storia
Nascita e sviluppo del concetto di limite

Dalla discussione degli esempi esaminati nel paragrafo precedente è emerso in modo sufficientemente chiaro il concetto di limite, tuttavia abbiamo spesso fatto riferimento a un linguaggio *fortemente impreciso*, che non può essere accettato dal punto di vista matematico; frasi come «assume valori vicini a…», «assume valori via via più grandi…» risultano infatti troppo ambigue: di quanto vicini? Di quanto grandi?
Per superare questi problemi e giungere a una definizione formale di limite, dobbiamo introdurre il concetto di *intorno* e quello di *punto di accumulazione*.

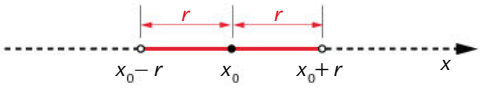
Intorni

ATTENZIONE!
In alcuni testi un intorno di x_0 viene definito, più in generale, come qualsiasi intervallo aperto che contiene x_0. Scegliamo di limitarci agli intorni circolari perché essi possono essere identificati con il rispettivo raggio: ciò torna particolarmente utile nello studio dei limiti che stiamo affrontando.

DEFINIZIONE | Intorno di un punto

Si chiama **intorno** (o più precisamente intorno **circolare**) di un numero reale x_0, di raggio r, con $r > 0$, l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Graficamente, un intorno di x_0 è rappresentato sulla retta reale da un segmento, privato degli estremi, il cui punto medio è x_0 e la cui lunghezza è $2r$:



È chiaro che un intorno di x_0 non è altro che l'insieme dei numeri reali x la cui *distanza* da x_0 è minore di r, ossia l'insieme delle soluzioni della disequazione $|x - x_0| < r$.
Il concetto di intorno permette quindi di individuare i numeri «vicini» a x_0; poiché «l'avvicinamento» può avvenire sia per difetto sia per eccesso un intorno circolare di x_0 è detto intorno **completo** del punto x_0. Parleremo invece di **intorno destro** del punto x_0 (**Fig. 15**) per riferirci a un intervallo del tipo $(x_0, x_0 + r)$ e di **intorno sinistro** del punto x_0 (**Fig. 16**) per riferirci a un intervallo del tipo $(x_0 - r, x_0)$.

ATTENZIONE!
Talvolta anche gli intervalli del tipo $[x_0, x_0 + r)$ e $(x_0 - r, x_0]$ vengono detti, rispettivamente, intorno destro e sinistro di x_0.



Figura 15

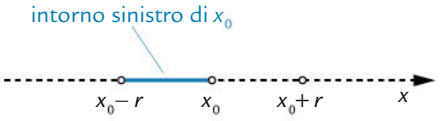


Figura 16

È utile infine estendere la nozione di intorno di un punto anche al caso in cui il punto sia $+\infty$ o $-\infty$.

DEFINIZIONE | Intorno di meno infinito e di più infinito

Chiamiamo **intorno di meno infinito** ogni intervallo del tipo $(-\infty, -M)$ e **intorno di più infinito** ogni intervallo del tipo $(M, +\infty)$, con $M > 0$.

Per esempio, sono intorni di $+\infty$ gli intervalli $(6, +\infty)$ e $(100, +\infty)$; sono intorni di $-\infty$ gli intervalli $(-\infty, -3)$ e $(-\infty, -15)$.

Dato un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbf{R}$ e un punto $x_0 \in A$, si dice che x_0 è un punto **interno** ad A se esiste un intorno di x_0 contenuto in A. Per esempio, dato l'intervallo $[a, b]$, tutti i suoi punti sono interni *eccetto* il punto a e il punto b.

Punto di accumulazione

DEFINIZIONE | Punto di accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$; si dice che $x_0 \in \mathbf{R}$ è un **punto di accumulazione** per A se in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di A.

È importante fare alcune osservazioni.

- La definizione suggerisce che un punto di accumulazione di un insieme è un punto in prossimità del quale si trovano (o meglio si «accumulano») *infiniti* elementi dell'insieme stesso.
- Se l'insieme A è superiormente (inferiormente) illimitato, si conviene che $+\infty$ ($-\infty$) sia un suo punto di accumulazione. Converremo quindi di ricercare i punti di accumulazione di un insieme in $\mathbf{R}^*$.
- Un punto che appartiene ad A e **non** è di accumulazione per A si dice **punto isolato**.

RICORDA
$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$

ESEMPI Ricerca dei punti di accumulazione di un insieme

Determiniamo gli eventuali punti di accumulazione dei seguenti insiemi:

a. $A = \{-2, -1, 3\}$

b. $A = (0, 1)$

c. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : x = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbf{N} \text{ e } n \geq 1\right\}$

d. $A = \mathbf{Q}$

a. Osserviamo che l'insieme A è finito. Ogni insieme finito $A \subset \mathbf{R}$ è privo di punti di accumulazione; infatti, se esistesse $x_0 \in \mathbf{R}$ di accumulazione per A, in ogni intorno di x_0 dovrebbero cadere *infiniti* elementi di A, il che è impossibile (proprio perché A è *finito*). Pertanto un insieme finito è costituito soltanto da punti isolati.

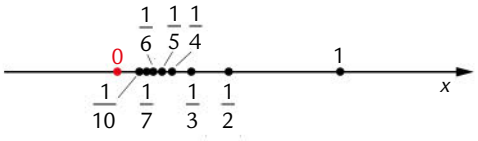
b. Ogni elemento di A è un punto di accumulazione per A, perché chiaramente ogni suo intorno contiene infiniti elementi di A; per esempio $x_0 = \frac{1}{3}$ è un punto di accumulazione di A poiché in ogni intorno di $\frac{1}{3}$, come l'intervallo $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$, cadono infiniti elementi di A. Esistono però anche due elementi **non** appartenenti ad A che tuttavia sono di accumulazione per A: 0 e 1 (perché?). Pertanto ogni punto dell'intervallo $[0, 1]$ è di accumulazione per A.

RIFLETTI
L'esempio **b** mostra che un punto di accumulazione di un insieme può appartenere o non appartenere all'insieme stesso.

c. Determiniamo esplicitamente alcuni elementi di A:

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{10}, \ldots\right\}$$

e rappresentiamoli sulla retta reale:



Vediamo così che, al crescere di n, gli elementi dell'insieme tendono ad «accumularsi» intorno allo 0, avvicinandosi sempre più a esso per eccesso: si intuisce perciò che lo zero è un *punto di accumulazione*. In effetti è chiaro che in ogni intorno di 0 è possibile trovare infiniti elementi di A (per quanto piccolo sia il raggio r dell'intorno, pur di scegliere $n > \frac{1}{r}$, i corrispondenti elementi dell'insieme cadono nell'intorno). Ogni elemento di $\mathbf{R}$ diverso da 0 (in particolare ogni elemento di A) non è invece di accumulazione per A: infatti, pur di scegliere il raggio dell'intorno sufficientemente piccolo, troveremo nell'intorno al più un elemento di A. In definitiva, l'unico punto di accumulazione dell'insieme è 0.

d. L'insieme $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ ha infiniti punti di accumulazione; più precisamente, tutti i punti di **R** sono di accumulazione per **Q**: infatti, comunque scelto $x_0 \in \mathbf{R}$, in ogni intorno di x_0 cadono infiniti numeri razionali. Inoltre **Q** non è né inferiormente né superiormente limitato, quindi anche $\pm\infty$ sono suoi punti di accumulazione.

Gli esempi precedenti documentano come un insieme possa essere *privo* di punti di accumulazione, averne un numero *finito* o possedere *infiniti* punti di accumulazione.

Definizione generale di limite

Intuitivamente, la frase «la funzione $f(x)$ tende a l quando x tende a x_0» significa che «i valori di $f(x)$ sono vicini quanto si vuole a l, pur di scegliere x sufficientemente vicino a x_0».
Abbiamo ora tutti gli strumenti per tradurre questa definizione intuitiva in una definizione formale:

1. il concetto di *intorno* consente di esprimere con precisione il concetto di «vicinanza»;
2. il concetto di *punto di accumulazione* descrive quali caratteristiche deve avere un punto x_0 affinché *abbia senso* il calcolo del limite di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0$. Precisamente, traduce la richiesta che la variabile x possa avvicinarsi *quanto si vuole* al valore x_0.

RICORDA
$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$

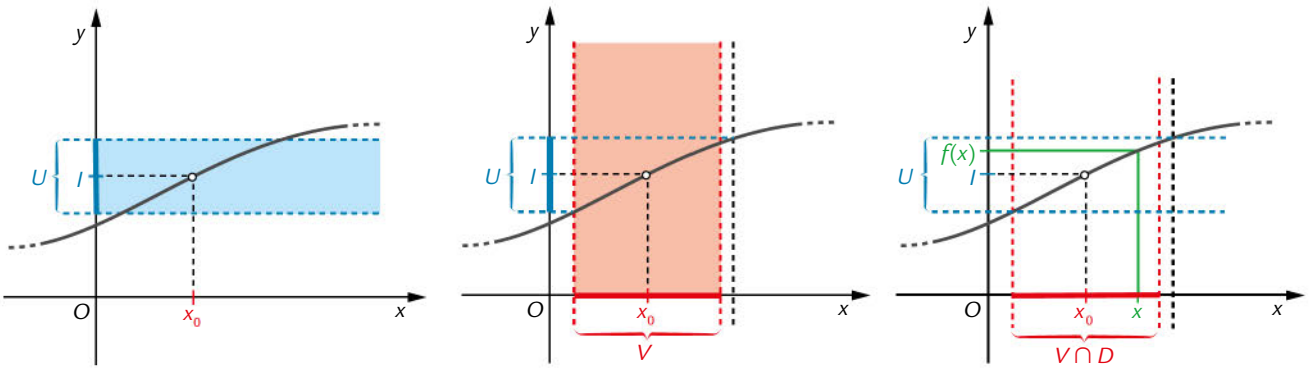
DEFINIZIONE | Definizione generale di limite

Siano x_0, $l \in \mathbf{R}^*$ e sia $f(x)$ una funzione di dominio D, tale che x_0 sia un punto di accumulazione per D. Diremo che la funzione $f(x)$ tende a l quando x tende a x_0 e scriveremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se è verificata la seguente condizione:

a. per ogni intorno U di l (**Fig. 17a**)
b. esiste un intorno V di x_0 (**Fig. 17b**)
c. tale che per ogni $x \in V \cap D$, con $x \neq x_0$, risulta $f(x) \in U$ (**Fig. 17c**)



a. Per ogni intorno U di l sull'asse y...
b. esiste un intorno V di x_0 sull'asse x...
c. tale che per ogni $x \in V \cap D$ con $x \neq x_0$ risulta: $f(x) \in U$.

Figura 17

In simboli:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \underbrace{\forall U}_{\text{intorno di } l} \; \underbrace{\exists V}_{\text{intorno di } x_0} : x \in (V \cap D) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

È importante fare alcune osservazioni.

a. La **Fig. 17** visualizza la definizione nel caso in cui x_0 ed l siano *finiti*, ma la definizione che abbiamo dato è «generale», nel senso che va bene anche nel caso in cui x_0 o l siano infiniti; per questo motivo nella definizione abbiamo precisato che x_0 ed l non sono elementi di $\mathbf{R}$ ma di $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

b. L'intorno V di x_0 *dipende* dall'intorno U di l che è stato scelto sull'asse y.

c. Quando calcoliamo il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ andiamo ad analizzare il comportamento della funzione *in prossimità* di x_0, non *in* x_0. Non ci interessa perciò che cosa accade nel punto $x = x_0$ dove la funzione, come abbiamo già detto, potrebbe anche non essere definita. Nella definizione di limite è quindi essenziale la precisazione «con $x \neq x_0$»

Nel seguito supporremo per semplicità che la funzione $f(x)$ *sia definita in un intorno di* x_0, *eccetto al più in* x_0: ciò è sufficiente (anche se non necessario) per garantire che x_0 sia un *punto di accumulazione* per il dominio della funzione. In queste ipotesi, al punto **c** della definizione, è sufficiente richiedere che la condizione indicata valga per ogni $x \in V$ con $x \neq x_0$ (anziché per ogni $x \in V \cap D$, con $x \neq x_0$); la definizione generale diventa la seguente e nel seguito faremo riferimento a essa:

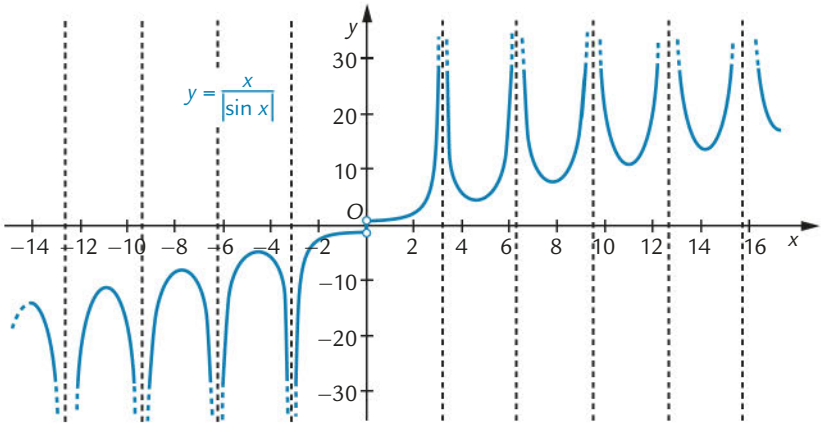
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \underbrace{\forall U}_{\text{intorno di } l} \quad \underbrace{\exists V}_{\text{intorno di } x_0} : x \in V - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

ATTENZIONE!

La struttura della definizione di limite prevede di scegliere *prima* un intorno di l sull'asse y e *poi* di determinare in corrispondenza un intorno di x_0 sull'asse x tale che... Viene quindi «ribaltato» l'ordine con cui solitamente siamo abituati a ragionare quando lavoriamo con le funzioni; in genere infatti siamo abituati a partire dai valori di x e calcolare i corrispondenti valori di y.

PER SAPERNE DI PIÙ **Perché è necessario il concetto di punto di accumulazione?**

Sebbene, come abbiamo appena detto, nel seguito ci occuperemo solo di funzioni definite in un intorno di x_0, eccetto al più x_0, ci sono casi che **non** rientrano in questa ipotesi, per cui è necessario rifarsi alla definizione più generale data all'inizio. Per esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{x}{|\sin x|}$ e supponiamo di volere dare un senso al problema del calcolo del limite della funzione per $x \to +\infty$; in questo caso non esiste alcun intorno di $+\infty$ in cui la funzione è definita (perché il denominatore si annulla in corrispondenza degli infiniti punti $x = k\pi$) quindi è necessario fare riferimento alla definizione iniziale (che è applicabile perché $+\infty$ risulta un punto di accumulazione del dominio).



Il calcolo del limite per $x \to +\infty$ della funzione $y = \dfrac{x}{|\sin x|}$ ha senso e dal grafico si intuisce che la funzione tende a $+\infty$ quando $x \to +\infty$ (pur avendo infiniti asintoti verticali).

Esercizi p. 102

3. Dalla definizione generale alle definizioni particolari

La definizione «generale» di limite data nel paragrafo precedente, come abbiamo già detto, si adatta sia al caso in cui x_0 ed l sono *finiti* sia al caso in cui sono *infiniti*. L'analisi dei quattro casi che si possono presentare (x_0 ed l finiti; x_0 finito ed l infinito; x_0 infinito ed l finito; x_0 ed l infiniti) è tuttavia utile perché porta a definizioni più «operative» e a visualizzazioni più immediate del comportamento della funzione.

Prima definizione particolare: x_0 ed l sono finiti

Con GeoGebra
Definizione di limite finito di una funzione $f(x)$ per x che tende a un valore finito

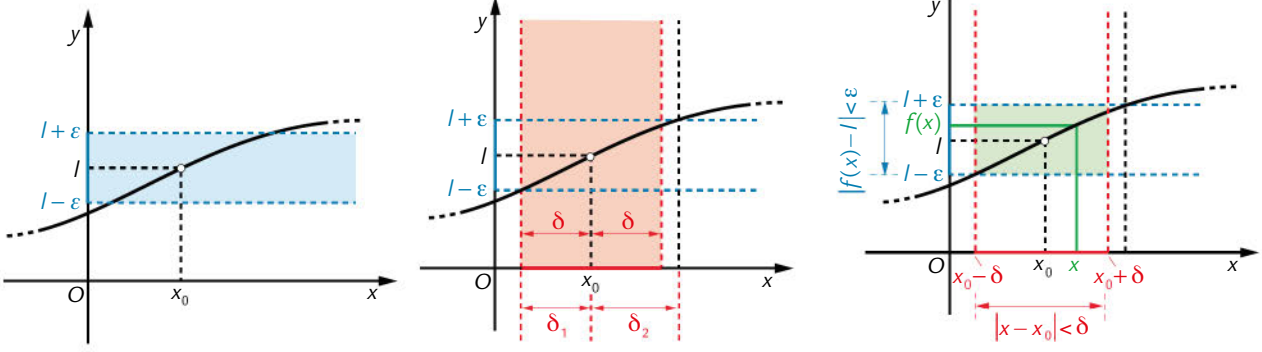
Se $x_0 \in \mathbf{R}$ ed $l \in \mathbf{R}$, allora un intorno U di l è del tipo $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, e un intorno V di x_0 è del tipo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, con $\delta > 0$.
La definizione generale di limite si può tradurre perciò nella seguente forma *particolare*.

$$\underbrace{\forall U}_{\forall \varepsilon > 0} \quad \underbrace{\exists V}_{\exists \delta > 0} \quad : \quad \underbrace{x \in V - \{x_0\}}_{x \in (x_0-\delta,\, x_0+\delta) - \{x_0\}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x) \in U}_{f(x) \in (l-\varepsilon,\, l+\varepsilon)}$$

Osservando che la condizione $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$ equivale a $\underbrace{0 < |x - x_0| < \delta}_{\text{Significa } x \neq x_0}$ mentre la condizione $f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ equivale a $|f(x) - l| < \varepsilon$, siamo condotti alla seguente definizione.

DEFINIZIONE | Prima definizione particolare: x_0 e l sono finiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{Fig. 18a}} \quad \underbrace{\exists \delta > 0}_{\text{Fig. 18b}} \quad : \quad \underbrace{0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon}_{\text{Fig. 18c}} \qquad [1]$$



a. Per ogni $\varepsilon > 0$ (con la scelta di ε scegliamo un arbitrario intorno di l sull'asse y)...

b. ... esiste $\delta > 0$ (basta scegliere δ uguale al minimo tra δ_1 e δ_2)...

c. ... tale che per ogni x per cui $0 < |x - x_0| < \delta$ (cioè per ogni $x \neq x_0$ appartenente all'intorno individuato sull'asse x) risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$ (cioè $f(x)$ appartiene all'intorno scelto sull'asse y).

Figura 18

Seconda definizione particolare: x_0 è finito ed l è infinito

Con GeoGebra
Definizione di limite infinito di una funzione $f(x)$ per x che tende a un valore finito

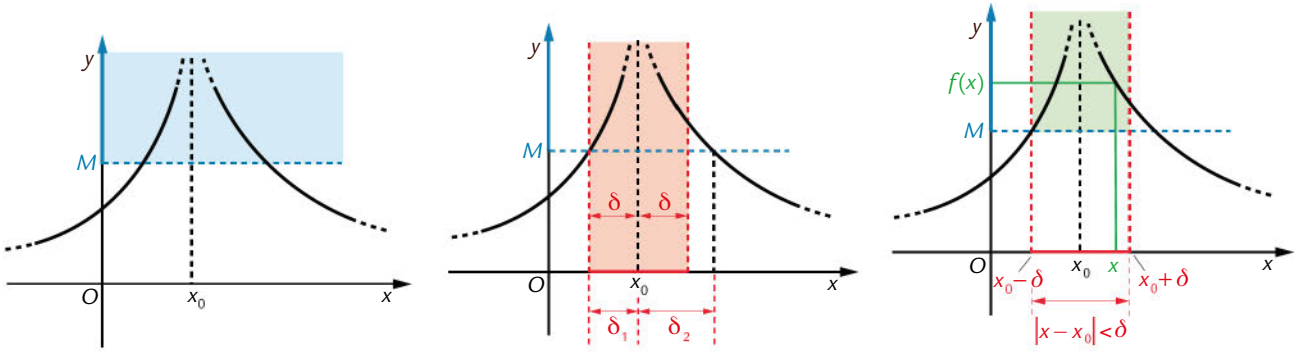
Se $x_0 \in \mathbf{R}$ ed $l = +\infty$, allora un intorno U di l è del tipo $(M, +\infty)$, con $M > 0$, e un intorno V di x_0 è del tipo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, con $\delta > 0$.
La definizione generale di limite si può tradurre perciò nella seguente forma particolare.

$$\underbrace{\forall U}_{\forall M > 0} \quad \underbrace{\exists V}_{\exists \delta > 0} \quad : \quad \underbrace{x \in V - \{x_0\}}_{x \in (x_0-\delta,\, x_0+\delta) - \{x_0\}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x) \in U}_{f(x) \in (M, +\infty)}$$

Questa definizione si può riscrivere simbolicamente in termini di disequazioni come segue.

DEFINIZIONE | Seconda definizione particolare: x_0 è finito e l è infinito

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \underbrace{\forall M > 0}_{\text{Fig. 19a}}\ \underbrace{\exists \delta > 0}_{\text{Fig. 19b}} :\ \underbrace{0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M}_{\text{Fig. 19c}} \qquad [2]$$



a. Per ogni $M > 0$ (con la scelta di M scegliamo un arbitrario intorno di $+\infty$ sull'asse y)...

b. ... esiste $\delta > 0$ (basta scegliere δ uguale al minimo tra δ_1 e δ_2)...

c. ... tale che per ogni x per cui $0 < |x - x_0| < \delta$ (cioè per ogni $x \neq x_0$ appartenente all'intorno individuato sull'asse x) risulta $f(x) > M$ (cioè $f(x)$ appartiene all'intorno scelto sull'asse y).

Figura 19

La definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ è analoga alla precedente, ma la disequazione $f(x) > M$ va sostituita con $f(x) < -M$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0\ \exists\, \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M \qquad [3]$$

Terza definizione particolare: x_0 è infinito ed l è finito

Se $x_0 = +\infty$ ed $l \in \mathbb{R}$, allora un intorno U di l è del tipo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, e un intorno V di x_0 è del tipo $(N, +\infty)$, con $N > 0$.
La definizione generale di limite si può tradurre perciò nella seguente forma particolare.

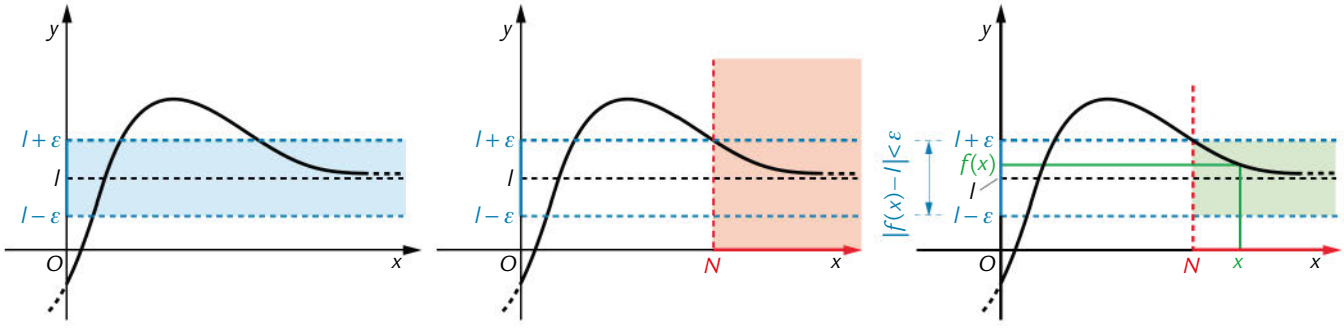
$$\underbrace{\forall U}_{\forall \varepsilon > 0}\quad \underbrace{\exists V}_{\exists N > 0}\ :\ \underbrace{x \in V - \{x_0\}}_{x \in (N, +\infty)} \Rightarrow \underbrace{f(x) \in U}_{f(x) \in (l-\varepsilon,\, l+\varepsilon)}$$

Con GeoGebra
Definizione di limite finito di una funzione $f(x)$ per x che tende a infinito

Questa definizione si può riscrivere simbolicamente in termini di disequazioni come segue.

DEFINIZIONE | Terza definizione particolare: x_0 è infinito e l è finito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \iff \underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{Fig. 20a}}\ \underbrace{\exists N > 0}_{\text{Fig. 20b}}\ :\ \underbrace{x > N \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon}_{\text{Fig. 20c}} \qquad [4]$$



a. Per ogni $\varepsilon > 0$ (con la scelta di ε scegliamo un arbitrario intorno di l sull'asse y)...

b. ... esiste $N > 0$ (il quale individua un opportuno intorno di $+\infty$ sull'asse x)...

c. ... tale che per ogni x per cui $x > N$ (cioè per ogni x appartenente all'intorno individuato sull'asse x) risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$ (cioè $f(x)$ appartiene all'intorno scelto sull'asse y).

Figura 20

La definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ è analoga alla precedente, ma la disequazione $x>N$ va sostituita con $x<-N$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ N>0 : x<-N \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon \qquad [5]$$

Quarta definizione particolare: x_0 ed l sono infiniti

Con GeoGebra
Definizione di limite infinito di una funzione $f(x)$ per x che tende a infinito

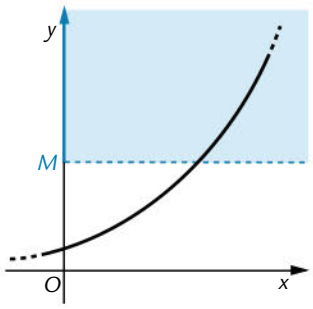
Se $x_0=+\infty$ ed $l=+\infty$, allora un intorno U di l sarà del tipo $(M,+\infty)$, con $M>0$, e un intorno V di x_0 sarà del tipo $(N,+\infty)$, con $N>0$. La definizione generale di limite si può tradurre perciò nella seguente forma particolare.

$$\underbrace{\forall U}_{\forall M>0}\quad \underbrace{\exists V}_{\exists N>0}\ :\ \underbrace{x\in V-\{x_0\}}_{x\in(N,+\infty)}\ \Rightarrow\ \underbrace{f(x)\in U}_{f(x)\in(M,+\infty)}$$

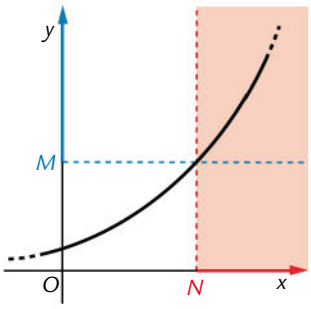
Questa definizione si può riscrivere simbolicamente in termini di disequazioni come segue.

DEFINIZIONE | Quarta definizione particolare: x_0 e l sono infiniti

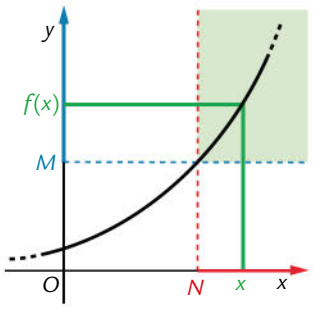
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ \Leftrightarrow\ \underbrace{\forall M>0}_{\text{Fig. 21a}}\ \underbrace{\exists N>0}_{\text{Fig. 21b}}\ :\ \underbrace{x>N\ \Rightarrow\ f(x)>M}_{\text{Fig. 21c}} \qquad [6]$$



a. Per ogni $M>0$ (con la scelta di M scegliamo un arbitrario intorno di $+\infty$ sull'asse y)...



b. ... esiste $N>0$ (il quale individua un opportuno intorno di $+\infty$ sull'asse x)...



c. ... tale che per ogni x per cui $x>N$ (cioè per ogni x appartenente all'intorno individuato sull'asse x) risulta $f(x)>M$ (cioè $f(x)$ appartiene all'intorno scelto sull'asse y).

Figura 21

La definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ è analoga alla precedente, ma la disequazione $f(x)>M$ va sostituita con $f(x)<-M$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N>0 : x>N \Rightarrow f(x)<-M \qquad [7]$$

Limite destro e limite sinistro, limite per difetto e limite per eccesso

La definizione generale di limite può essere particolarizzata anche ai casi di limite **destro** e **sinistro** che abbiamo introdotto intuitivamente nel **Paragrafo 1**. Le definizioni sono analoghe a quelle che abbiamo presentato in questo paragrafo, si tratta solo di sostituire l'intorno *completo* di x_0 con un intorno *sinistro*, oppure *destro* di x_0. Per esempio, nel caso in cui $x_0\in\mathbf{R}$ ed $l\in\mathbf{R}$, otterremo le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE | Limite destro

Diciamo che una funzione $f(x)$ ammette **limite destro** $l\in\mathbf{R}$ al tendere di x a $x_0\in\mathbf{R}$ *da destra*, e scriviamo:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$$

quando si verifica che: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0 : x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

ATTENZIONE!
Come al solito supponiamo implicitamente che la funzione f sia definita in un intorno destro (o sinistro) di x_0 eccetto al più x_0.

DEFINIZIONE | Limite sinistro

Diciamo che una funzione $f(x)$ ammette **limite sinistro** $l \in \mathbf{R}$ al tendere di x a $x_0 \in \mathbf{R}$ *da sinistra*, e scriviamo:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

quando si verifica che: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Lasciamo a te formulare le analoghe definizioni nel caso in cui l sia infinito.
Similmente possiamo parlare di limite **per eccesso** e limite **per difetto**. Per esempio, osservando il grafico della funzione f indicata in **Fig. 22**, vediamo che:

- per $x \to -\infty$ la funzione f ha asintoto orizzontale $y = 2$; poiché il grafico della funzione sta *al di sopra* della retta $y = 2$ per $x < -1$, diremo che il limite 2 è un limite *per eccesso* e scriveremo:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2^+$$
- per $x \to +\infty$ la funzione f ha asintoto orizzontale $y = 2$; poiché il grafico della funzione sta *al di sotto* della retta $y = 2$ per $x > -1$, diremo che il limite 2 è un limite *per difetto* e scriveremo:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2^-$$

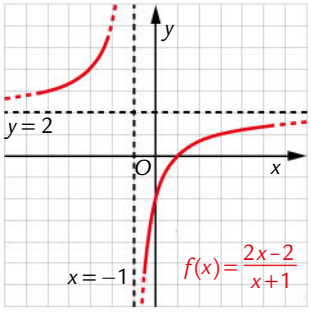


Figura 22

Le definizioni di questi casi particolari si ottengono dalle definizioni che abbiamo presentato nei sottoparagrafi precedenti sostituendo l'intorno *completo* di l (anziché di x_0 come per i limiti da destra e da sinistra!) con un intorno *sinistro* oppure *destro* di l. A titolo di esempio, riportiamo le definizioni di limite «per difetto» e «per eccesso» per $x \to +\infty$.

DEFINIZIONE | Limite per eccesso e limite per difetto

Diciamo che una funzione $f(x)$ ammette **limite** $l \in \mathbf{R}$ **per eccesso** (oppure **per difetto**) per $x \to +\infty$, e scriviamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l^+ \quad (\text{oppure } \lim_{x \to +\infty} f(x) = l^-)$$

quando: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N > 0 : x > N \Rightarrow l \le f(x) < l + \varepsilon \quad (\text{oppure } l - \varepsilon < f(x) \le l)$

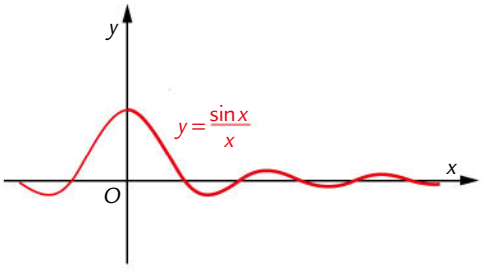


Figura 23

ATTENZIONE!
Ci sono funzioni che ammettono limite, senza che questo sia *per eccesso o per difetto*. Per esempio si può dimostrare che per $x \to +\infty$ la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tende a 0, tuttavia questo limite non è né per eccesso né per difetto, perché il grafico della funzione oscilla indefinitamente al di sopra e al di sotto dell'asse x per $x \to +\infty$ (Fig. 23).

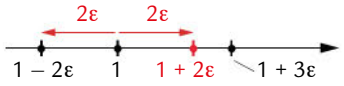
La verifica di un limite

Le varie definizioni di limite che abbiamo introdotto **non** ci permettono di calcolare un limite, ma ci consentono di *verificare* se un certo valore l è effettivamente il limite di una funzione per $x \to x_0$. La procedura di verifica, nei vari casi, è quella riassunta nella seguente tabella.

Per verificare che...	Occorre risolvere la disequazione...	... e verificare che l'insieme delle soluzioni contiene...
1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, con $x_0 \in \mathbf{R}^*$ ed $l \in \mathbf{R}$	$\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$	... un intorno di x_0, per ogni ε
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, con $x_0 \in \mathbf{R}^*$	$f(x) > M$, con $M > 0$	... un intorno di x_0, per ogni M
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, con $x_0 \in \mathbf{R}^*$	$f(x) < -M$, con $M > 0$	... un intorno di x_0, per ogni M

È importante fare alcune osservazioni.

a. L'insieme delle soluzioni delle disequazioni $|f(x)-l|<\varepsilon$, $f(x)>M$ e $f(x)<-M$ è raramente un *intorno* di x_0; tuttavia, come evidenziato in tabella, per verificare che sia soddisfatta la definizione di limite, è sufficiente mostrare che *contiene* un intorno di x_0. Per esempio, supponiamo di verificare che $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=10$ e di trovare come insieme delle soluzioni della disequazione $|f(x)-10|<\varepsilon$ l'intervallo $1-2\varepsilon<x<1+3\varepsilon$. Questo intervallo **non** è un intorno (circolare) di 1, ma certamente contiene l'intervallo $1-2\varepsilon<x<1+2\varepsilon$ che invece è un intorno di 1, di raggio uguale al minimo tra 2ε e 3ε, cioè 2ε. Dunque la definizione di limite è soddisfatta.



b. Nella verifica di un limite del tipo **1**, se risultasse comodo, potremmo supporre che ε sia minore di un numero positivo fissato «piccolo a piacere»: ciò non è restrittivo, perché implica comunque che la corrispondente disequazione sia soddisfatta per ogni $\varepsilon>0$ (prova a dimostrarlo per esercizio). Per ragioni analoghe, nella verifica dei limiti del tipo **2** o **3**, è possibile supporre che M sia maggiore di un numero scelto «grande a piacere».

ESEMPIO Verifica di limiti

Limite da verificare	Disequazione da risolvere	Calcoli	Conclusione
$\lim\limits_{x\to 4}(2x+3)=11$ (Caso **1** con x_0 finito)	$\underbrace{\underbrace{\lvert 2x+3-11\rvert}_{\lvert f(x)-l\rvert}<\varepsilon}$ con $\varepsilon>0$	$\lvert 2x-8\rvert<\varepsilon$ $-\varepsilon<2x-8<\varepsilon$ $8-\varepsilon<2x<8+\varepsilon$ $4-\frac{\varepsilon}{2}<x<4+\frac{\varepsilon}{2}$	L'insieme delle soluzioni è un intorno di 4 per ogni $\varepsilon>0$, perciò il limite è verificato. La definizione [1] è soddisfatta scegliendo $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ (Caso **1** con x_0 infinito)	$\underbrace{\underbrace{\lvert e^x-0\rvert}_{\lvert f(x)-l\rvert}<\varepsilon}$ con $\varepsilon>0$	$\lvert e^x\rvert<\varepsilon$ $e^x<\varepsilon$ $x<\ln\varepsilon$	L'insieme delle soluzioni è l'intervallo $(-\infty,\ln\varepsilon)$ che è, per ogni $\varepsilon>0$, un intorno di meno infinito, quindi il limite è verificato. La definizione [5] è soddisfatta pur di scegliere $N=-\ln\varepsilon$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ (Caso **2**)	$\underbrace{\underbrace{x^2>M}_{f(x)>M}}$ con $M>0$	$x^2>M$ $x^2-M>0$ $x<-\sqrt{M}\ \vee\ x>\sqrt{M}$	L'insieme delle soluzioni contiene l'intervallo $(\sqrt{M},+\infty)$ che è, per ogni $M>0$, un intorno di più infinito, quindi il limite è verificato. La definizione [6] è soddisfatta pur di scegliere $N=\sqrt{M}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^3)=-\infty$ (Caso **3**)	$\underbrace{\underbrace{1-x^3<-M}_{f(x)<-M}}$ con $M>0$	$1-x^3<-M$ $x^3>1+M$ $x>\sqrt[3]{1+M}$	L'insieme delle soluzioni è l'intervallo $(\sqrt[3]{1+M},+\infty)$ che è, per ogni $M>0$, un intorno di più infinito, quindi il limite è verificato. La definizione [7] è soddisfatta pur di scegliere $N=\sqrt[3]{1+M}$.

Esercizi p. 105

Per verificare un limite nel caso in cui $x\to x_0^+$ oppure $x\to x_0^-$, il procedimento è del tutto analogo, ma occorrerà verificare che l'insieme delle soluzioni dell'opportuna disequazione contenga rispettivamente un intorno *destro* o *sinistro* di x_0.

4. Teoremi di esistenza e unicità sui limiti

Nel **Paragrafo 1**, analizzando il comportamento della funzione $f(x)=\frac{|x|}{x}$ nell'intorno dell'origine, abbiamo osservato che il limite di una funzione per $x\to x_0$ *non esiste* se i due limiti destro e sinistro sono *diversi* fra loro. Un altro semplice caso di non esistenza del limite proviene dalla funzione $f(x)=\sin x$; non esiste, per esempio, il limite di f per $x\to+\infty$ (**Fig. 24**): quando x diventa indefinitamente grande il grafico della funzione seno continua infatti a oscillare assumendo valori compresi tra -1 e 1 senza convergere a una posizione «limite».

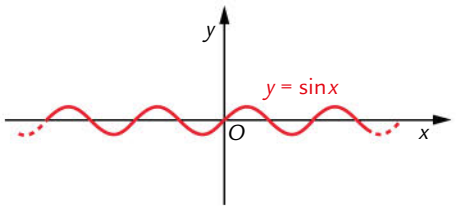


Figura 24

È opportuno quindi porsi il problema dell'*esistenza* di un limite e, se questo esiste, della sua *unicità*, prima di porsi il problema del suo *calcolo*.
I teoremi che presentiamo in questo paragrafo forniscono alcune risposte ai problemi di esistenza e unicità.

Teoremi del confronto

Presentiamo anzitutto alcuni teoremi che, oltre a garantire l'**esistenza** del limite (sotto opportune ipotesi), permettono anche di **calcolarlo**.
L'idea alla base del primo teorema che esponiamo è illustrata in **Fig. 25**: se il grafico di una funzione $f(x)$ è compreso tra quello di due funzioni $g(x)$ e $h(x)$ in un intorno di x_0 e le due funzioni $g(x)$ e $h(x)$ hanno lo stesso limite per $x \to x_0$, allora anche la funzione $f(x)$ ammette lo stesso limite per $x \to x_0$.

Con GeoGebra
Teoremi del confronto

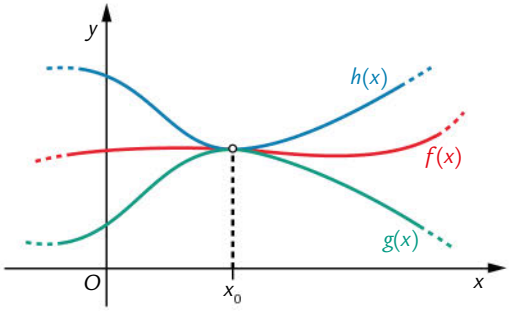


Figura 25

Formalmente, l'enunciato del teorema è il seguente.

TEOREMA 1 | Teorema del confronto 1

Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni tali che esiste un intorno V di $x_0 \in \mathbf{R}^*$ per ogni x del quale (eccetto al più x_0) tutte e tre le funzioni sono definite e risulta:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, con $l \in \mathbf{R}$, allora anche $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

DIMOSTRAZIONE

a. Dall'ipotesi relativa al limite della funzione g segue che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno I_1 di x_0 tale che:

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in I_1 \text{ con } x \neq x_0$$

b. Dall'ipotesi relativa al limite della funzione h segue che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste anche un intorno I_2 di x_0 tale che:

$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in I_2 \text{ con } x \neq x_0$$

c. Nell'intorno di x_0 dato da $I_1 \cap I_2 \cap V$, tenendo conto delle disuguaglianze $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ (vere per ipotesi in V), risulta allora (con $x \neq x_0$):

$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

ossia: $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

d. Abbiamo quindi trovato un intorno di x_0, $I_1 \cap I_2 \cap V$, per ogni x del quale, escluso al più x_0, $f(x)$ si discosta da l meno di ε. Ciò equivale a dire che per $x \to x_0$ la funzione f ammette come limite l.

MODI DI DIRE

In alcuni testi in lingua italiana il teorema del confronto è chiamato «teorema dei due carabinieri (o dei due gendarmi)», in forza della seguente interpretazione: se due «carabinieri» $g(x)$ e $h(x)$ che stanno scortando il «malvivente» $f(x)$ si dirigono entrambi in caserma, anche il malvivente è inevitabilmente destinato alla caserma. Nei manuali anglosassoni si parla invece spesso di «teorema del sandwich».

ESEMPIO Calcolo di un limite tramite il teorema del confronto 1

Verifichiamo che $\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

La funzione seno assume valori compresi tra -1 e 1; ne segue che $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ per ogni $x\neq 0$. Moltiplicando i due membri di questa disuguaglianza per $|x|$ otteniamo:

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

quindi (*vedi* la **Fig. 26**):

$$-|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le|x|$$

Poiché (come puoi intuire dai grafici e verificare in base alle definizioni):

$$\lim_{x\to 0}|x|=0 \text{ e } \lim_{x\to 0}(-|x|)=0$$

dal **Teorema 1** segue che:

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

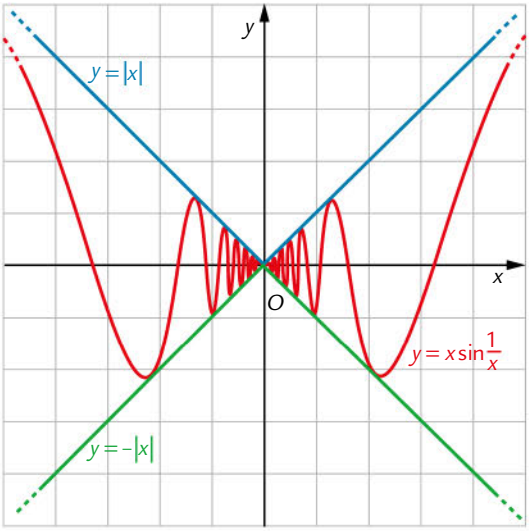


Figura 26 «Zoom» sul grafico della funzione $y=x\sin\frac{1}{x}$ nell'intorno dell'origine.

In modo analogo si potrebbero dimostrare i seguenti teoremi che, similmente al **Teorema 1**, permettono di dedurre l'esistenza e il valore del limite di una funzione f tramite un confronto tra funzioni.

Essi esprimono le seguenti idee intuitive:

- se il grafico di f sta «al di sopra» di quello g e g tende a $+\infty$, allora anche f tende a $+\infty$;
- se il grafico di f sta «al di sotto» di quello g e g tende a $-\infty$, allora anche f tende a $-\infty$.

TEOREMA 2 | Teorema del confronto 2

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di $x_0\in\mathbf{R}^*$ tali che, per ogni x di questo intorno (eccetto al più x_0), risulta $f(x)\ge g(x)$.

Se $\lim_{x\to x_0}g(x)=+\infty$, allora anche $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$.

TEOREMA 3 | Teorema del confronto 3

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di $x_0\in\mathbf{R}^*$ tali che, per ogni x di questo intorno (eccetto al più x_0), risulta $f(x)\le g(x)$.

Se $\lim_{x\to x_0}g(x)=-\infty$, allora anche $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

ESEMPIO Calcolo di un limite tramite il teorema del confronto 2

Verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)=+\infty$.

Per ogni $x\in\mathbf{R}$ è $\sin x\ge -1$, quindi: $x+\sin x\ge x-1$

Poiché (come puoi verificare in base alla definizione o intuire dal grafico, facilmente realizzabile):

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$$

dal **Teorema 2** segue che $\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)=+\infty$.

Teorema di esistenza del limite per le funzioni monotòne

Un altro teorema di **esistenza** per i limiti riguarda le funzioni *monotòne* (crescenti o decrescenti).

TEOREMA 4 | Teorema di esistenza del limite per le funzioni monotòne

Sia $f(x)$ una funzione monotòna (in senso stretto o lato) in un intervallo (a, b); allora esistono sempre, finiti o infiniti, i limiti di $f(x)$ per $x \to a^+$ e per $x \to b^-$. Precisamente:

a. se $f(x)$ è crescente (**Fig. 27**):

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$

b. se $f(x)$ è decrescente (**Fig. 28**):

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$$

ATTENZIONE!
La scrittura $\inf_{x\in(a,b)} f(x)$ indica l'estremo inferiore dell'insieme dei valori assunti da $f(x)$ quando $x \in (a, b)$. Analogamente va interpretata la scrittura $\sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

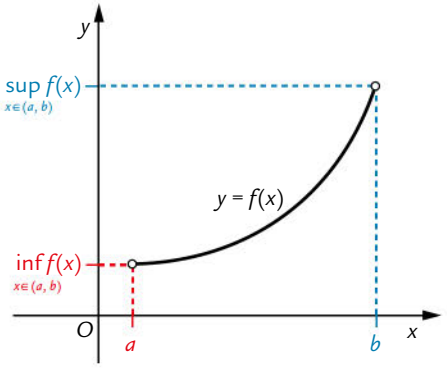


Figura 27 Funzione (strettamente) crescente in (a, b).

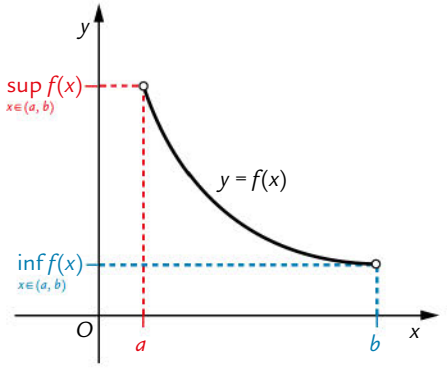


Figura 28 Funzione (strettamente) decrescente in (a, b).

È importante fare alcune osservazioni.

a. Si può dimostrare che il teorema vale anche per intervalli illimitati a destra o a sinistra, ovvero quando $a = -\infty$ o $b = +\infty$.

b. Se $x_0 \in (a, b)$, applicando il teorema ai due intervalli (a, x_0) e (x_0, b) possiamo dedurre l'esistenza dei due limiti:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

quindi possiamo dire che se f è monotòna in (a, b), per ogni $x_0 \in (a, b)$ esistono i limiti di f per $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$.

Non è detto invece che esista il limite per $x \to x_0$ (*vedi* per esempio la funzione che ha il grafico di **Fig. 29**).

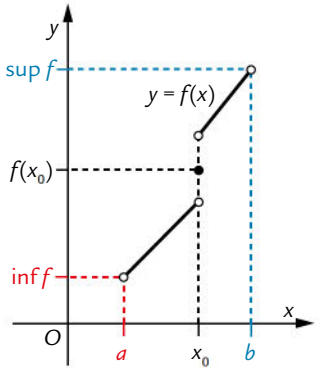


Figura 29 La funzione f è definita in (a, b) e strettamente crescente ma non esiste il limite della funzione per $x \to x_0$.

Teorema di unicità del limite e teorema di permanenza del segno

Una volta accertato che il limite esiste, la sua **unicità** è garantita dal seguente teorema.

TEOREMA 5 | Teorema di unicità del limite

Se una funzione $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0$ con $x \in \mathbf{R}^*$, questo limite è unico.

DIMOSTRAZIONE

a. Ragioniamo *per assurdo*.
Supponiamo che sia:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

con l_1 ed l_2 finiti e $l_1 \neq l_2$ (il caso in cui almeno uno dei due limiti è infinito è analogo).

b. Poiché stiamo supponendo $l_1 \neq l_2$, possiamo scegliere un intorno U_1 di l_1 e un intorno U_2 di l_2 fra loro *disgiunti*: ciò è possibile scegliendo i raggi r_1 e r_2 dei due intorni sufficientemente piccoli, per esempio

$$r_1 = r_2 = \frac{|l_1 - l_2|}{2}.$$

c. Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, in base alla definizione di limite dovrebbe esistere un intorno V_1 di x_0 tale che:

$$f(x) \in U_1 \quad \text{per ogni } x \in V_1, \text{ con } x \neq x_0$$

d. Analogamente, poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$, dovrebbe esistere un intorno V_2 di x_0 tale che:

$$f(x) \in U_2 \quad \text{per ogni } x \in V_2, \text{ con } x \neq x_0$$

e. Poiché V_1 e V_2 sono entrambi intorni di x_0, anche la loro intersezione lo è; prendendo $x \in V_1 \cap V_2$ (con $x \neq x_0$) dovrebbe essere contemporaneamente: $f(x) \in U_1$ e $f(x) \in U_2$, il che è assurdo, perché abbiamo scelto U_1 e U_2 disgiunti.

OSSERVA

Due intorni dello stesso punto, di raggi r_1 e r_2, hanno come intersezione l'intorno avente raggio uguale al minimo tra r_1 e r_2.

Per le funzioni che ammettono limite per $x \to x_0$ sussiste poi il seguente teorema, che permette di stabilire il **segno** della funzione in un intorno di x_0.

TEOREMA 6 | Teorema della permanenza del segno

Se per $x \to x_0$, con $x_0 \in \mathbf{R}^*$, la funzione $f(x)$ ammette limite finito l, positivo (negativo), allora esiste un intorno di x_0 per ogni x del quale, eccetto al più x_0, f è positiva (negativa).

Il **Teorema 6** si può estendere in modo naturale anche nel caso in cui il limite sia $+\infty$ o $-\infty$.

Il teorema **non** è invece invertibile, se non modificando leggermente l'enunciato; infatti, se una funzione è positiva in un intorno di x_0 (con $x \neq x_0$) ed esiste il limite per $x \to x_0$, non è detto che il suo limite sia positivo. Basta pensare alla funzione $f(x) = x^2$: risulta $f(x) > 0$ in ogni intorno dello 0 (con $x \neq 0$), ma il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ **non** è positivo, bensì nullo.

Si comprende allora come si debba modificare l'enunciato del teorema inverso per renderlo valido: se una funzione è positiva (negativa) in un intorno di x_0 (con $x \neq x_0$) ed esiste il limite per $x \to x_0$, allora esso è *positivo (negativo) o nullo*.

Esercizi p. 110

5. Le funzioni continue e l'algebra dei limiti

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto e definito l'operazione di limite e abbiamo presentato alcuni teoremi di esistenza e unicità. Il problema che ci poniamo adesso è invece quello del **calcolo** dei limiti.

L'obiettivo del calcolo di un limite verrà raggiunto attraverso quattro momenti:

1. la definizione di continuità;
2. la determinazione dei limiti delle funzioni elementari agli «estremi» del loro insieme di definizione;
3. la ricerca di teoremi che esprimono come si comporta il limite rispetto alle operazioni tra funzioni;
4. la risoluzione di quelle che, come vedremo, vengono chiamate *forme di indecisione*.

In questo paragrafo ci dedichiamo ai primi tre punti di questo «programma», mentre i prossimi paragrafi dell'Unità saranno dedicati all'ultimo punto, cioè alla risoluzione delle forme di indecisione.

La continuità

Osserva le seguenti figure, che illustrano alcuni possibili comportamenti di una funzione $f(x)$ per cui $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ nell'intorno di un punto x_0.

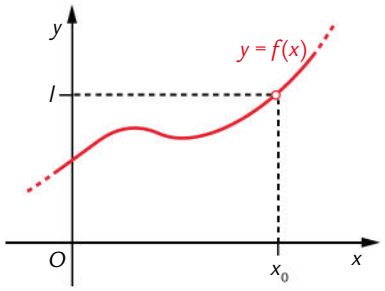


Figura 30 La funzione f non è definita in x_0 ma esiste il suo limite per $x \to x_0$ ed è uguale a l.

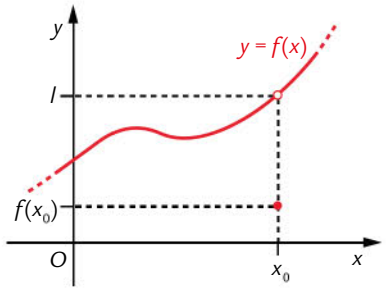


Figura 31 La funzione f è definita in x_0, ma il suo limite l per $x \to x_0$ è diverso da $f(x_0)$.

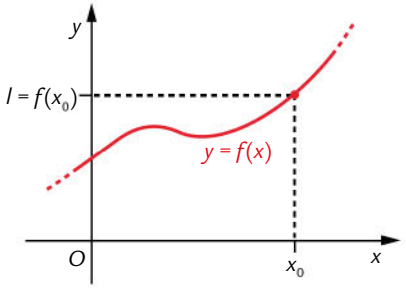


Figura 32 La funzione f è definita in x_0 e il suo limite l per $x \to x_0$ è uguale a $f(x_0)$.

La circostanza rappresentata in **Fig. 32**, cioè il caso in cui $f(x_0) = l$, è particolarmente importante; si riserva perciò a essa una particolare definizione.

DEFINIZIONE | Continuità in un punto

Una funzione f, definita in un intorno (completo) di x_0, si dice **continua** nel punto x_0 quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si può dimostrare che tutte le funzioni elementari (cioè le funzioni potenza, la funzione valore assoluto, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni goniometriche e le loro inverse) sono continue nei punti dove sono definite.

Con GeoGebra
Continuità in un punto

ATTENZIONE!
Se la funzione fosse definita soltanto in un intorno destro (sinistro) di x_0, la condizione $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ andrebbe modificata considerando il limite per $x \to x_0^+$ ($x \to x_0^-$).

Infatti, in base alle definizioni di limite, è possibile verificare che valgono i limiti riassunti nella seguente **Tab. 1**.

Tabella 1

Continuità delle funzioni elementari	
$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\},\ \forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\},\ \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$
$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\forall a > 0,\ \forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \lvert x\rvert = \lvert x_0\rvert$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$	$\forall x_0 > 0,\ \forall a > 0,\ \text{con } a \neq 1$
$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$	$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\lim_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$	$\forall x_0 \in [-1, 1]$
$\lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0$	$\forall x_0 \in [-1, 1]$
$\lim_{x\to x_0} \arctan x = \arctan x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$

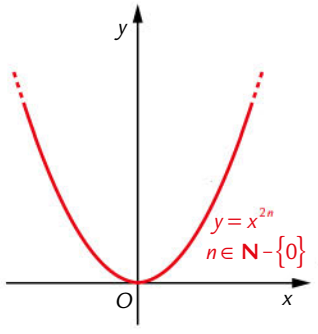
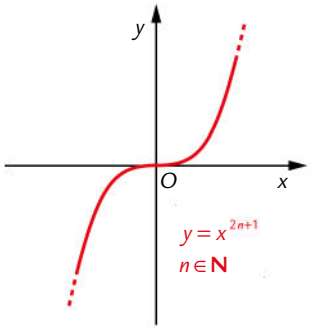
Nel caso di funzioni continue il calcolo del limite per $x \to x_0$, con x_0 appartenente al dominio della funzione, si riduce quindi semplicemente a sostituire x_0 al posto di x nell'espressione analitica della funzione.
Per esempio:

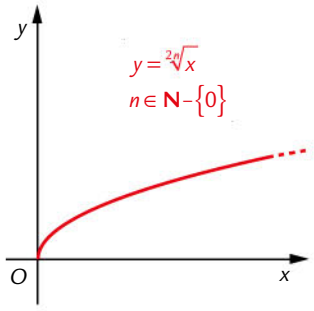
$$\lim_{x\to 3} 2^x = 2^3 = 8; \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1; \qquad \lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0$$

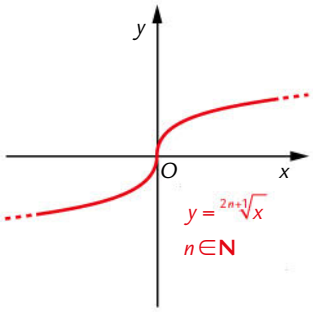
I limiti delle funzioni elementari

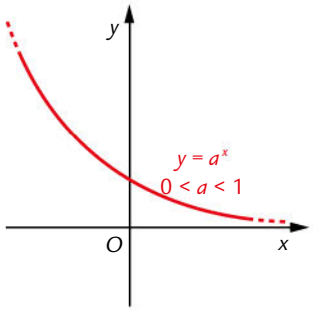
Continuiamo il nostro «programma», mettendo in evidenza in **Tab. 2** alcuni limiti importanti delle funzioni elementari **agli estremi del loro insieme di definizione**.
Tali limiti, intuitivamente evidenti dall'analisi dei grafici, potrebbero essere dimostrati in base alla definizione o dedotti dall'applicazione del **Teorema 4** sulle funzioni monotòne.

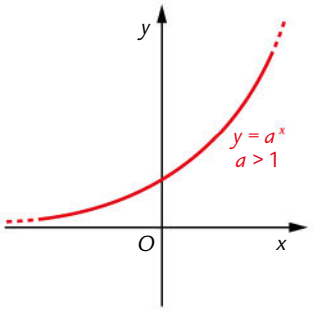
Tabella 2 Limiti di alcune funzioni elementari agli estremi dell'insieme di definizione.

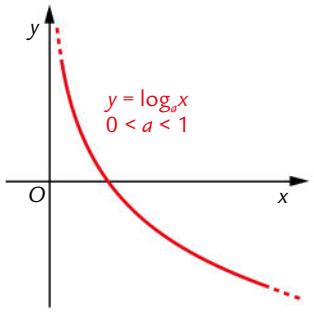
Categoria	Grafici e limiti	
Funzioni potenza	 $\lim_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x^{2n} = +\infty$	 $\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x^{2n+1} = +\infty$

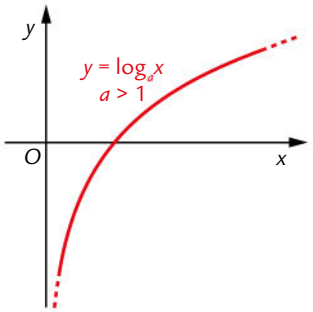
<table>
<tr><th>Categoria</th><th colspan="2">Grafici e limiti</th></tr>
<tr><td>Funzioni radice</td><td> 

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[2n]{x} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[2n]{x} = +\infty$</td><td> 

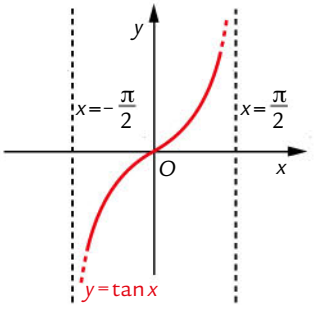
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[2n+1]{x} = +\infty$</td></tr>
<tr><td>Funzioni esponenziali</td><td> 

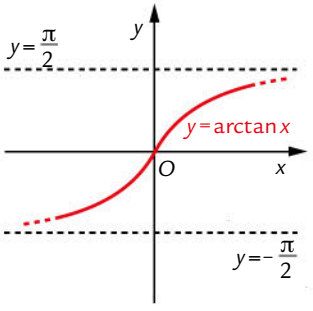
$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$
$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ se $0 < a < 1$</td><td> 

$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ se $a > 1$
$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$</td></tr>
<tr><td>Funzioni logaritmiche</td><td> 

$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ se $0 < a < 1$
$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ se $0 < a < 1$</td><td> 

$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ se $a > 1$
$\lim_{x\to+\infty} \log_a = +\infty$ se $a > 1$</td></tr>
<tr><td>Funzioni goniometriche

ATTENZIONE!
Non esistono i seguenti limiti:
$\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$
e $\lim_{x\to\pm\infty} \tan x$.</td><td> 

$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$
$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$
(Ci siamo limitati a considerare la funzione tangente in un intervallo di ampiezza uguale al suo periodo.)</td><td> 

$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$</td></tr>
</table>

ESEMPI Limiti di funzioni elementari agli estremi dell'insieme di definizione

a. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

b. $\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

c. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

d. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

e. $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

f. $\lim_{x\to-\infty} 3^x = 0$

L'algebra dei limiti

Ci chiediamo ora: è possibile, a partire dai limiti elencati nelle **Tabb. 1** e **2**, determinare i limiti di funzioni più complicate, costruite a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione? Per esempio: sappiamo, in base alla continuità delle funzioni potenza, che $\lim_{x\to2} x^3 = 8$ e che $\lim_{x\to2} x^2 = 4$; possiamo dire che $\lim_{x\to2}(x^3 + x^2)$ è la loro somma?
In altre parole, vogliamo studiare il comportamento dell'operazione di limite rispetto alle operazioni tra funzioni.

1. Regole di calcolo nel caso in cui i due limiti siano finiti

Se due funzioni f e g hanno limiti *finiti* per $x \to x_0$, l'operazione di limite si comporta «bene» rispetto alle ordinarie operazioni, come espresso dal seguente teorema.

Approfondimento
Dimostrazione del teorema sull'algebra dei limiti nel caso di limiti finiti

TEOREMA 7 | Algebra dei limiti, nel caso di limiti finiti

Supponiamo che le due funzioni f e g siano entrambe definite in un intorno di x_0, eccetto al più x_0, e che sia:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$$

dove $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}^*$. Allora risulta:

a. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$

b. $\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = l_1 - l_2$

c. $\lim_{x\to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot l_1$ per ogni $k \in \mathbf{R}$

d. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$

e. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ se $l_2 \neq 0$

COROLLARIO 1 | Conseguenze del Teorema 7

Nelle ipotesi del teorema precedente, risulta:

a. $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = l_1^n$ per ogni $n \in \mathbf{N} - \{0\}$

b. $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_1}$ se $l_1 \neq 0$

ESEMPI Limiti di somme, prodotti e quozienti, nel caso di limiti finiti

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to2} (x^3 + x^2)$ b. $\lim_{x\to0} (\sin x \cos x)$ c. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \tan^2 x$ d. $\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x^2}$

a. $\lim_{x\to2} (x^3 + x^2) =$ — Limite da calcolare

$= \lim_{x\to2} x^3 + \lim_{x\to2} x^2 =$ — Poiché i due limiti di x^3 e di x^2 per $x \to 2$ sono finiti, possiamo utilizzare il Teorema 7 (punto **a**)

$= 8 + 4 = 12$ — Per la continuità delle funzioni potenza

Ragionando similmente possiamo calcolare gli altri limiti.

b. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=0\cdot 1=0$

c. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan^2 x=(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x)^2=(\sqrt{3})^2=3$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\ln x}{\lim\limits_{x\to 1}x^2}=\dfrac{\ln 1}{1^2}=\dfrac{0}{1}=0$

Come conseguenza del **Teorema 7** si ha anche che:

Se f e g sono due funzioni **continue** in x_0, anche $f+g$, $f\cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ sono continue in x_0, supponendo per il quoziente che $g(x_0)\neq 0$.

2. Regole di calcolo nel caso in cui uno dei due limiti sia infinito

Vediamo ora che cosa accade nei casi esclusi dal **Teorema 7**, ossia quando almeno uno dei due limiti l_1 o l_2 è *infinito* oppure in un quoziente il denominatore tende a 0. A proposito di questi casi, si potrebbero dimostrare i risultati riassunti nelle seguenti tre tabelle, che ci limitiamo a enunciare.

Tabella 3 Regole per la somma.

Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ è:	e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ è:	allora $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ è:
$l\in\mathbf{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$l\in\mathbf{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Tabella 4 Regole per il prodotto.

Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ è:	e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ è:	allora $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ è:
$l\in\mathbf{R}$ con $l\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ secondo la regola dei segni
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ secondo la regola dei segni

Tabella 5 Regole per il quoziente.

Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ è:	e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ è:	allora $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è:
$l\in\mathbf{R}$	$\pm\infty$	0
$l\in\mathbf{R}$ con $l\neq 0$	0	$\pm\infty$ secondo la regola dei segni
$\pm\infty$	$l\in\mathbf{R}$	$\pm\infty$ secondo la regola dei segni

È importante fare alcune osservazioni.

a. Riguardando attentamente le tabelle, ti accorgerai che esse non danno informazioni nel caso in cui il limite si presenti in una delle seguenti forme, dette **forme di indecisione** (o **forme indeterminate**):

$$+\infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0}$$

Ciò **non** significa che in questi casi il limite sia indeterminato o non si possa calcolare, ma solo che il risultato del limite può essere qualsiasi e non esiste nessun teorema che permetta di stabilirlo a priori: occorre analizzare la situazione caso per caso. Come abbiamo già anticipato, vedremo le più comuni tecniche per risolvere le forme di indecisione nei prossimi paragrafi dell'Unità.

ATTENZIONE!

Il simbolo $0\cdot\infty$ è un modo abbreviato per indicare le forme indeterminate del tipo $0\cdot+\infty$, $0\cdot-\infty$, $+\infty\cdot 0$, $-\infty\cdot 0$.

Analogamente, il simbolo $\frac{\infty}{\infty}$ è un modo abbreviato per indicare le forme indeterminate del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$.

b. I risultati espressi nelle **Tabb. 3-4-5** si possono riassumere nelle scritture della **Tab. 6**. Esse possono interpretarsi come regole di calcolo algebrico per svolgere operazioni che coinvolgono i simboli di $\pm\infty$ e prendono pertanto il nome di **aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito** («parziale» perché le regole di calcolo così definite soddisfano solo *parzialmente* le ordinarie proprietà delle operazioni aritmetiche).

In tutte le scritture della **Tab. 6** il segno dell'infinito va determinato in base all'ordinaria regola dei segni, tenendo conto che in questo contesto si attribuisce un «segno» anche a 0: lo 0 viene considerato «positivo», e indicato con 0^+, se una funzione tende a 0 *per eccesso*, mentre viene considerato «negativo», e indicato con 0^-, se una funzione tende a 0 *per difetto*; avremo, per esempio:

$$\frac{2}{0^+} \to +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} \to -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} \to +\infty$$

Tabella 6

Aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito	
$+\infty + \infty \to +\infty$	$-\infty - \infty \to -\infty$
$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) \to \pm\infty$	
$l \pm\infty \to \pm\infty$	$\forall l \in \mathbf{R}$
$l\cdot(\pm\infty) \to \pm\infty$	$\forall l \in \mathbf{R}$, con $l \neq 0$
$\frac{l}{0} \to \pm\infty$	$\forall l \in \mathbf{R}$, con $l \neq 0$
$\frac{l}{\pm\infty} \to 0$	$\forall l \in \mathbf{R}$
$\frac{\pm\infty}{l} \to \pm\infty$	$\forall l \in \mathbf{R}$

ATTENZIONE!
Il simbolo → ha il significato di «tende a».

ESEMPI Limiti di somme, prodotti e quozienti nel caso in cui qualcuno dei limiti sia infinito e non si presentino forme di indecisione

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5}$ **b.** $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x+\frac{1}{x-1}\right)$ **c.** $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-1)\ln x$ **e.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x$ **f.** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cos x}{x}$ **g.** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\ln x}$

Utilizzeremo dapprima la continuità delle funzioni elementari e i limiti agli estremi del loro insieme di definizione per calcolare i limiti delle funzioni la cui somma (o prodotto o quoziente) definisce la funzione data, quindi concluderemo grazie alle regole di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito spiegate poc'anzi.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x^5}}_{\to+\infty} = 0^+$

Ricorda che $\frac{l}{\pm\infty} \to 0^{\pm}$ secondo la regola dei segni, quindi $\frac{1}{+\infty} \to 0^+$

b. $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\underbrace{x}_{\to 1 \text{ per continuità}} + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to 0^+}\right) = +\infty$

Ricorda che $\frac{l}{0^{\pm}} \to \pm\infty$, con $l \neq 0$, quindi $\frac{1}{0^+} \to +\infty$ e $1 + \infty \to +\infty$

c. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\underbrace{\ln x}_{\to -\infty \text{ Tab. 2}} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0^+}\right) = -\infty$

Ricorda che $\frac{1}{0^+} \to +\infty$ e $-\infty - \infty \to -\infty$

d. $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\underbrace{(x^2-1)}_{\to -1 \text{ per continuità}} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty \text{ Tab. 2}}\right] = +\infty$

Ricorda che $l\cdot(\pm\infty) \to \pm\infty$, con $l \neq 0$, secondo la regola dei segni, quindi $(-1)\cdot(-\infty) \to +\infty$

e. $\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty \text{ Tab. 2}} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to+\infty \text{ Tab. 2}} = +\infty$ Ricorda che $(+\infty)\cdot(+\infty) \to +\infty$

f. $\lim_{x\to0^-} \frac{\overbrace{\cos x}^{\to 1 \text{ per continuità}}}{\underbrace{x}_{\to 0^- \text{ per continuità}}} = -\infty$ Ricorda che $\frac{1}{0^-} \to -\infty$

g. $\lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{x}^{\to 0^+ \text{ per continuità}}}{\underbrace{\ln x}_{\to -\infty \text{ Tab. 2}}} = 0^-$ Ricorda che $\frac{0^+}{-\infty} \to 0^-$

3. Cambiamento di variabile nei limiti

Per il calcolo di alcuni limiti si rivela utile eseguire dei *cambi di variabile*. Ciò significa che per calcolare $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ potremo porre:

$$t = g(x)$$

e, ammesso che $t = g(x) \to l$ per $x \to x_0$, ricondurci al calcolo del seguente limite:

$$\lim_{t\to l} f(t)$$

Il procedimento apparirà più chiaro con gli esempi che seguono.

PER LA PRECISIONE

Il procedimento del cambio di variabile è lecito purché esista un intorno di x_0 per ogni x del quale (escluso al più x_0) risulta $g(x) \neq l$. Questa ipotesi sarà sempre soddisfatta nei casi che prenderemo in considerazione.

ESEMPI Calcolo di limiti mediante cambi di variabile

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}$ **b.** $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}$ **c.** $\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}$

a. Poniamo $t = -x^2$ e osserviamo che, quando $x \to +\infty$, allora $t \to -\infty$ (poiché $\lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$. Dunque:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

b. Poniamo $t = \frac{1}{x}$ e osserviamo che, quando $x \to 0^+$, allora $t \to +\infty$ (poiché $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$). Dunque:

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$$

c. Poniamo $t = \frac{1}{x}$ e osserviamo che, quando $x \to 0^-$, allora $t \to -\infty$ (poiché $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$). Dunque:

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

Si potrebbe inoltre dimostrare che, se f è una funzione continua, allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) \quad [8]$$

In pratica possiamo dire, in linguaggio un po' impreciso ma efficace, che il simbolo di limite si può «portare dentro» al simbolo f di una funzione continua. Per esempio:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}} = e^0 = 1$$

Esercizi p. 111

6. Forme di indecisione di funzioni algebriche

Presentiamo ora le più comuni tecniche per risolvere le forme di indecisione che si presentano quando si lavora con funzioni *algebriche*.

Limiti di funzioni polinomiali

Le funzioni *polinomiali* sono definite e continue in **R**, quindi si può incorrere in forme di indecisione solo nel calcolo di limiti per $x \to \pm\infty$. In questi casi, ci si può imbattere in una forma di indecisione del tipo $+\infty - \infty$. Per esempio, ciò accade se si vuole calcolare:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x^3 - x^2 + x + 1)$$

La risoluzione di queste forme di indecisione si basa sul seguente ragionamento. Raccogliendo x^3 si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right]$$

Tutti i termini dopo 1 dentro le parentesi tonde tendono a 0 per $x \to \pm\infty$, quindi il fattore tra parentesi tende a 1; in base ai teoremi sul limite del prodotto di due funzioni ne segue che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

Questo ragionamento potrebbe ripetersi similmente per qualsiasi polinomio; possiamo quindi concludere che: **per calcolare il limite di un polinomio per $x \to \pm\infty$ basta calcolare il limite del suo termine di grado massimo.**

ESEMPI Calcolo di limiti per $x \to \pm\infty$ di funzioni polinomiali

a. $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 4x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

b. $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 2x^3 + x + 1) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^3) = -\infty$

c. $\lim_{x\to-\infty} (x^4 - 2x^2 + x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

Limiti di funzioni razionali fratte

Consideriamo ora una funzione *razionale* fratta, cioè una funzione del tipo:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

essendo $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ polinomi di grado rispettivamente n ed m.
Le funzioni razionali fratte hanno come dominio l'insieme **R** *privato* degli eventuali valori di x che annullano il denominatore e sono continue nel loro dominio.
Nel calcolo dei limiti di queste funzioni si può incorrere in due tipi di forme di indecisione: $\frac{\infty}{\infty}$ nel calcolo di limiti per $x \to \pm\infty$ oppure $\frac{0}{0}$ nel calcolo di limiti per $x \to x_0$, essendo x_0 un punto dove la funzione non è definita. Analizziamo separatamente i due casi.

1. Forme di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Per esempio, consideriamo il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x - 1}{x^2 + 7x + 1}$$

Sia il numeratore sia il denominatore tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$, quindi il limite si presenta nella forma di indecisione $\frac{+\infty}{+\infty}$. La risoluzione della forma di indecisione si basa sul seguente ragionamento. Raccogliamo anzitutto al numeratore e al denominatore i termini di grado massimo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x^2+6x-1}{x^2+7x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

Tutti gli addendi dopo 1, sia all'interno delle parentesi al numeratore sia all'interno delle parentesi al denominatore, tendono a 0 per $x \to +\infty$, quindi i due fattori tra parentesi tonde tendono entrambi a 1; ne segue che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x^2+6x-1}{x^2+7x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Un ragionamento simile può ripetersi nel caso di tutti i limiti di funzioni razionali fratte che si presentano nella forma $\frac{\infty}{\infty}$; possiamo quindi concludere che: **per calcolare il limite del rapporto di due polinomi per $x \to \pm\infty$ basta calcolare il limite del rapporto dei loro termini di grado massimo**.

ESEMPI Calcolo di limiti per $x \to \pm\infty$ del rapporto di due polinomi

Calcoliamo i seguenti limiti:

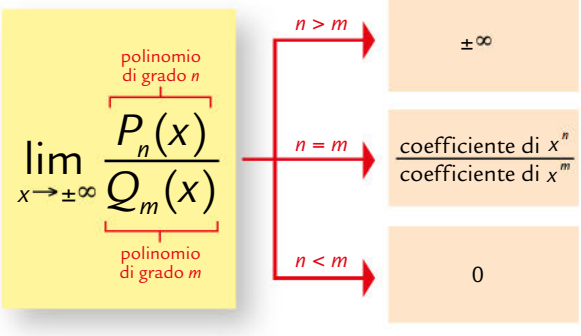
a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{x^2+1}$ **b.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{1-2x^4}$ **c.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{x^8+1}$

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{1-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{-2x^4} = -\frac{1}{2}$

c. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{x^8+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

I tre esempi mostrano i tre diversi casi che possono presentarsi nel calcolo del limite $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, essendo $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ polinomi di grado rispettivamente n ed m:



2. Forme di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$

Se il limite del rapporto di due polinomi $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, deve essere $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, quindi i due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ devono essere divisibili per $(x - x_0)$. L'indeterminazione si rimuove scomponendo $P(x)$ e $Q(x)$ in fattori e semplificando la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Il limite della funzione ottenuta dopo la semplificazione del fattore $(x - x_0)$ coincide con quello della funzione originaria: infatti le due funzioni sono uguali per $x \neq x_0$ e, ai fini del calcolo del limite, è ininfluente il valore della funzione in x_0.

ESEMPIO Calcolo del limite del rapporto di due polinomi che si presenta nella forma $\frac{0}{0}$

Calcoliamo $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$.

Osserviamo che:

$\lim_{x\to 1}(x^2+3x-4)=0$ e $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$

quindi il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Per risolvere la forma di indecisione procediamo come segue.

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} =$ — Limite da calcolare

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} =$ — Scomponendo numeratore e denominatore e semplificando il fattore in comune

$= \lim_{x\to 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$ — La funzione ottenuta dopo la semplificazione è continua in $x = 1$

Limiti di funzioni algebriche irrazionali

Nel calcolo dei limiti di funzioni algebriche irrazionali ci si può imbattere in forme di indecisione del tipo: $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Le tecniche più comuni per rimuovere le forme di indecisione consistono nell'effettuare opportuni raccoglimenti o moltiplicare numeratore e denominatore per il fattore razionalizzante.

ESEMPI Calcolo di limiti di funzioni irrazionali

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$ **b.** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}$

a. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} =$ — Limite da calcolare

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} =$ — Raccogliendo x^2 nel radicando

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$ — Il termine x che è stato portato fuori dalla radice dovrebbe essere posto in valore assoluto, ma poiché stiamo calcolando il limite per $x \to +\infty$ possiamo supporre $x > 0$, quindi $|x| = x$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{\to 1}\right) = 1$ — Ricorda che $\frac{1}{+\infty} \to 0$

b. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}=$$ Limite da calcolare

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)=$$ Moltiplicando e dividendo per il fattore che razionalizza il numeratore

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-3x+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=$$ Nel primo fattore si presenta ancora la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ma ora sappiamo risolverla perché riguarda una funzione razionale

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x-2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right]=$$ Scomponendo e semplificando

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-2)(\sqrt{x}+1)}=-\frac{1}{2}$$ La funzione a cui ci siamo ricondotti è continua in $x=1$

Esercizi p. 117

7. Forme di indecisione di funzioni trascendenti

In questo paragrafo presentiamo le più comuni tecniche per risolvere le forme di indecisione che si presentano quando si lavora con funzioni *trascendenti*.

Limiti di funzioni goniometriche

Per risolvere le forme di indecisione delle funzioni goniometriche si cerca solitamente di ricondursi ai *limiti notevoli* del prossimo teorema.

TEOREMA 8 | Limiti notevoli di funzioni goniometriche

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ [9]

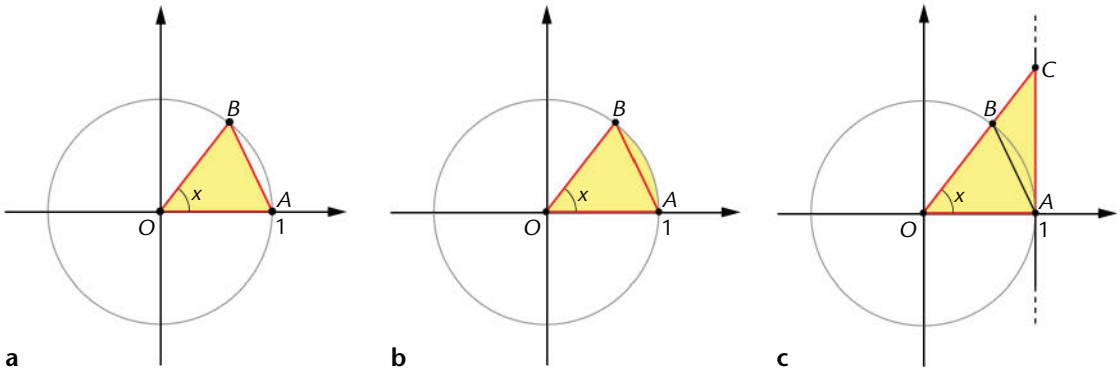
b. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ [10]

DIMOSTRAZIONE

a. Osserviamo anzitutto che la funzione $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ è *pari*, infatti:

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)$$

Per dimostrare che il limite della funzione per $x\to 0$ è 1, è allora sufficiente mostrare che è 1 il limite per $x\to 0^+$; pertanto possiamo supporre $0<x<\frac{\pi}{2}$. Consideriamo ora la **Fig. 33**.



a **b** **c**

Figura 33

Il triangolo OAB (**Fig. 33a**) è contenuto nel settore circolare OAB (**Fig. 33b**), il quale a sua volta è contenuto nel triangolo OAC (**Fig. 33c**); pertanto:

area triangolo OAB < area settore OAB < area triangolo OAC

RICORDA

1. Se due lati di un triangolo misurano a e b e l'angolo fra essi compreso ha ampiezza γ, l'area del triangolo è data da $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

2. L'area di un settore circolare di raggio r e ampiezza α (in radianti) è data da $\frac{1}{2}r^2\alpha$.

In formule:

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\sin x<\frac{1}{2}\overline{OA}^2\cdot x<\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{AC}$$

da cui (tenendo conto che $\overline{OA}=\overline{OB}=1$):

$$\sin x<x<\tan x$$

Dividendo per $\sin x$ (che è positivo perché stiamo supponendo $0<x<\frac{\pi}{2}$) otteniamo:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

e passando ai reciproci (sempre tenendo conto che tutti i termini della disuguaglianza, nelle nostre ipotesi, sono positivi), abbiamo:

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

Poiché:

$$\lim_{x\to0^+}\cos x=1 \text{ e } \lim_{x\to0^+}1=1$$

dal teorema del confronto segue che:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

b. Il limite di $\frac{1-\cos x}{x^2}$ per $x\to0$ si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$; l'indeterminazione può risolversi grazie al limite notevole [9], come ora mostriamo.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$$ Limite da calcolare

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=$$ Moltiplicando numeratore e denominatore per $1+\cos x$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)=$$ Ricorda che $1-\cos^2x=\sin^2x$

$$=\lim_{x\to0}\left[\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to1^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}$$ Ricorda il limite notevole [9] e utilizza la continuità di $\frac{1}{1+\cos x}$ in $x=0$

Dal **Teorema 8**, con un cambio di variabile, si deduce immediatamente il seguente corollario.

COROLLARIO 2 |

Se $f(x)\to0$ per $x\to x_0$, allora:

a. $\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ **b.** $\lim_{x\to x_0}\frac{1-\cos f(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{2}$

ESEMPI Calcolo di limiti mediante sostituzione implicita

a. $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}=1$ Corollario 2 (punto **a**) con $f(x)=3x$

b. $\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=1$ Corollario 2 (punto **a**) con $f(x)=x-1$

c. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\frac{1}{2}$ Corollario 2 (punto **b**) con $f(x)=x^2$

Vediamo ora come i limiti notevoli che abbiamo introdotto possano essere utilizzati per il calcolo di molti altri limiti.

ESEMPI Calcolo di limiti di funzioni goniometriche mediante i limiti notevoli

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

Osserva che tutti i limiti si presentano nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{\dfrac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}\cdot 3\right)=3$ Moltiplicando e dividendo per 3 ci siamo ricondotti a un limite della forma indicata nel punto a del corollario 2

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{\dfrac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}\cdot\dfrac{4x}{\underbrace{\sin 4x}_{\to 1}}\cdot\dfrac{3x}{4x}\right)=\dfrac{3}{4}$ Moltiplicando e dividendo per $3x$ e per $4x$ ci siamo ricondotti a limiti della forma indicata nel punto a del corollario 2

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{\cos x}}_{\to 1}\right)=1$ Ricordando il limite notevole [9] e utilizzando la continuità di $\dfrac{1}{\cos x}$ per $x=0$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{x}_{\to 0}\right)=0$ Ricordando il limite notevole [10] e utilizzando la continuità di x per $x=0$

Limiti di funzioni della forma $[f(x)]^{g(x)}$ e di funzioni esponenziali e logaritmiche

Al fine di scoprire altri limiti notevoli fondamentali per risolvere forme di indecisione che si presentano lavorando con funzioni trascendenti, dobbiamo soffermarci sulle funzioni di tipo potenza aventi *sia base sia esponente variabili*, cioè sulle funzioni del tipo:

$$[f(x)]^{g(x)} \qquad \text{con } f(x)>0$$

I limiti relativi a questo tipo di funzioni si trattano di solito osservando che:

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln[f(x)]} \qquad [11]$$

e riconducendosi quindi al calcolo del limite della funzione $g(x)\ln f(x)$.
L'aver posto la funzione $[f(x)]^{g(x)}$ nella forma [11] permette di riconoscere che le espressioni del tipo:

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

sono forme di indecisione, dette **forme di indecisione di tipo esponenziale**: infatti a ciascuna di esse corrisponde per la funzione $g(x)\ln f(x)$ una forma di indecisione del tipo $0\cdot\infty$.
Una funzione avente base ed esponente variabili, il cui limite, per $x\to\pm\infty$, presenta la forma di indecisione 1^∞, è $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. Si potrebbe dimostrare in proposito il seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

TEOREMA 9 | Il numero e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad [12]$$

RICORDA
Il numero e di Nepero è irrazionale e risulta $e=2{,}7182\ldots$

A partire da questo limite notevole, si possono dedurre i limiti notevoli elencati nel prossimo teorema.

TEOREMA 10 | Limiti notevoli di tipo esponenziale e logaritmico

a. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$ $\quad \forall k \in \mathbf{R}$ [13]

b. $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$ $\quad \forall k \in \mathbf{R}$ [14]

c. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $\quad \forall a > 0, a \neq 1$ [15]

d. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $\quad \forall a > 0, a \neq 1$ [16]

e. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k$ $\quad \forall k \in \mathbf{R}$ [17]

DIMOSTRAZIONE

a. Possiamo supporre $k \neq 0$ (il caso $k = 0$ è immediato). Poniamo $\frac{k}{x} = \frac{1}{t}$, da cui $x = kt$, e osserviamo che quando $x \to \pm\infty$, allora anche $t \to \pm\infty$. Pertanto:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt} =$$

Per la sostituzione fatta

$$= \lim_{t\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^k = e^k$$

Proprietà delle potenze e limite notevole [12]

b. Il limite si dimostra immediatamente ponendo $\frac{1}{x} = t$ e ricordando il limite notevole [13]. Lasciamo a te il compito di svolgere i calcoli per esercizio.

c. Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

Proprietà dei logaritmi

$$= \log_a \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

Per la continuità della funzione logaritmo, il simbolo di limite può essere portato dentro all'argomento del logaritmo

$$= \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

In base al limite notevole [14] e alle proprietà dei logaritmi

d. Poniamo $a^x - 1 = t$, da cui $x = \log_a(t+1)$. Poiché quando $x \to 0$ anche t tende a 0, abbiamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} =$$

Per la sostituzione fatta

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(t+1)}{t}} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a$$

In base al limite notevole [15]

e. Osserviamo che $(1+x)^k = e^{\ln(1+x)^k} = e^{k\ln(1+x)}$; si ha allora:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{k\ln(1+x)}-1}{x} =$$

Per l'osservazione fatta

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{k\ln(1+x)}-1}{k\ln(1+x)}\cdot\frac{k\ln(1+x)}{x}\right) =$$

Moltiplicando e dividendo per $k\ln(1+x)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{e^{k\ln(1+x)}-1}{k\ln(1+x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 1}\cdot k\right) = k$$

Il primo fattore tende a 1 in base al limite [16] (effettuando la sostituzione implicita $k\ln(1+x) = t$); il secondo fattore tende a 1 per il limite [15]

È importante fare alcune osservazioni.

- Dai limiti [15] e [16] segue in particolare che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

La particolare semplicità dei limiti ottenuti prendendo $a=e$ spiega perché e sia la base «privilegiata» per esponenziali e logaritmi.

- Similmente a quanto osservato per i limiti notevoli relativi alle funzioni goniometriche, anche dai limiti notevoli poc'anzi ricavati si possono dedurre dei limiti notevoli «generalizzati», con un semplice cambio di variabile. Per esempio, se $f(x)\to 0$ per $x\to x_0$ allora:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$$

e similmente per gli altri limiti notevoli.

ESEMPI

a. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}=1$ — Osserva che $f(x)=\sin x\to 0$ per $x\to\pi$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=1$ — Osserva che $f(x)=2x\to 0$ per $x\to 0$

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x^2-1}-1}{x^2-1}=\ln 2$ — Osserva che $f(x)=x^2-1\to 0$ per $x\to 1$

Vediamo ora, tramite alcuni esempi, come i nuovi limiti notevoli che abbiamo scoperto possono essere d'aiuto per risolvere alcune forme di indecisione.

ESEMPI Calcolo di limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche mediante i limiti notevoli

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+x)}{2x}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}5\cdot\underbrace{\dfrac{e^{5x}-1}{5x}}_{\to 1}=5$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\underbrace{\dfrac{\log_2(1+x)}{x}}_{\to\frac{1}{\ln 2}\text{ per il limite [15]}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\ln 2}=\dfrac{1}{2\ln 2}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^3=\left[\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}}_{\to e^{-1}\text{ per il limite [13] con }k=-1}\right]^3=(e^{-1})^3=e^{-3}$

Esercizi p. 129

8. Infinitesimi e infiniti

Infinitesimi, infiniti e loro ordine

Abbiamo visto che, nel calcolo di limiti del rapporto di due funzioni, le forme di indecisione si originano quando entrambe le funzioni tendono a zero o entrambe le funzioni tendono a infinito. Si comprende allora che, per acquisire ulteriori strumenti utili alla risoluzione delle forme di indecisione, è bene approfondire lo studio delle funzioni il cui limite è *zero* o *infinito*.

DEFINIZIONE | Funzione infinitesima

Una funzione si dice un **infinitesimo** per $x \to x_0$ quando il suo limite per $x \to x_0$ è zero.

DEFINIZIONE | Funzione infinita

Una funzione si dice un **infinito** per $x \to x_0$ quando il suo limite per $x \to x_0$ è più infinito o meno infinito o infinito (senza segno).

ESEMPI

a. $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \sqrt{x}$ sono *infinitesimi*, rispettivamente per $x \to 0$ e per $x \to 0^+$, poiché risulta:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

b. $f(x) = e^{-x}$ è un *infinitesimo* per $x \to +\infty$ poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

c. $f(x) = \ln x$ è un *infinito* per $x \to 0^+$ poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Al fine del calcolo di alcuni limiti, come vedremo più avanti, è utile stabilire dei criteri per capire, date due funzioni infinitesime o infinite, quale tende a zero o all'infinito «più rapidamente». Si introducono a tale scopo le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE | Ordine di infinitesimo e di infinito

Siano f e g due infinitesimi (o due infiniti) per $x \to x_0$, con $x_0 \in \mathbf{R}^*$.
Diciamo che f è un infinitesimo (un infinito) di **ordine** α, con $\alpha > 0$, rispetto a g assunta come infinitesimo (infinito) **campione**, se:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha}$$

esiste finito e diverso da zero.

La funzione g, assunta come infinitesimo o infinito campione, si può intuitivamente assimilare a una sorta di «unità di misura» rispetto alla quale valutiamo la «velocità» con cui le varie funzioni tendono a zero o all'infinito. La scelta di g non è obbligata, ma per ragioni di semplicità si conviene di assumere:

- come infinitesimo *campione*:
  - $g(x) = x$ per $x \to 0$
  - $g(x) = \frac{1}{x}$ per $x \to \pm\infty$ (o per $x \to \infty$)
  - $g(x) = x - x_0$ per $x \to x_0$, con $x_0 \in \mathbf{R} - \{0\}$
- come infinito *campione*:
  - $g(x) = x$ per $x \to \pm\infty$ (o per $x \to \infty$)
  - $g(x) = \frac{1}{x}$ per $x \to 0$
  - $g(x) = \frac{1}{x - x_0}$ per $x \to x_0$, con $x_0 \in \mathbf{R} - \{0\}$

ESEMPI Calcolo dell'ordine di infinitesimo

Calcoliamo l'ordine di infinitesimo di:

a. $f(x) = \sin x$, per $x \to 0$ b. $f(x) = 1 - \cos x$, per $x \to 0$

Come convenuto, scegliamo come infinitesimo campione $g(x) = x$.

a. Dobbiamo determinare $\alpha > 0$ in modo che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^\alpha} \qquad [18]$$

sia *finito e diverso da zero*. In base a ciò che abbiamo visto sui limiti notevoli, possiamo affermare che il limite [18] esiste finito e diverso da zero (uguale a 1) se e solo se $\alpha = 1$. Dunque $\sin x$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to 0$.

b. Dobbiamo determinare $\alpha > 0$ in modo che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^\alpha} \qquad [19]$$

sia *finito* e *diverso da zero*. Rifacendoci ai limiti notevoli, possiamo dire che il limite [19] esiste finito e diverso da zero $\left(\text{uguale a } \frac{1}{2}\right)$ se e solo se $\alpha = 2$. Dunque $1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \to 0$.

ESEMPIO Calcolo dell'ordine di infinito

Calcoliamo l'ordine di infinito di $f(x) = x^3 + 1$, per $x \to +\infty$.

Come convenuto, scegliamo come infinito campione $g(x) = x$.

Dobbiamo calcolare $\alpha > 0$ in modo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^\alpha}$ sia *finito* e *diverso da zero*.

Sappiamo, in base alla teoria dei limiti del rapporto di due polinomi, che ciò accade se e solo se il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore, cioè se e solo se $\alpha = 3$. Pertanto $f(x) = x^3 + 1$ è un infinito di ordine 3 per $x \to +\infty$.

RIFLETTI

Come puoi intuire dall'esempio qui a fianco, per funzioni di tipo *polinomiale* l'ordine di infinito per $x \to \pm\infty$ si può ottenere facilmente: è infatti uguale al *grado* del polinomio.

Confronto tra infinitesimi e infiniti

Similmente agli esempi precedenti, a molte funzioni è spesso possibile associare un numero che ne esprime l'ordine di infinito (o di infinitesimo) per misurare, per così dire, la «velocità» con cui tende all'infinito (o a zero). Tuttavia, ciò **non** è sempre possibile per tutte le funzioni, e i controesempi si trovano già nell'ambito delle funzioni elementari. Per esempio, sia per la funzione *esponenziale*, sia per la funzione *logaritmo* si potrebbe dimostrare che è impossibile trovare un numero reale che ne esprima l'ordine di infinito rispetto all'infinito campione $g(x) = x$. Per poter confrontare due infinitesimi o due infiniti, anche quando non sia possibile associare a essi un ordine di infinitesimo o di infinito, si introducono le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE | **Confronto tra infinitesimi**

Date due funzioni f e g, entrambe infinitesime per $x \to x_0$ (con $x_0 \in \mathbf{R}^*$), per confrontarle consideriamo il limite del loro rapporto.
Si possono presentare quattro casi:

- se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, diciamo che f è un infinitesimo di **ordine superiore** a g;
- se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, diciamo che f e g sono infinitesimi dello **stesso ordine**;
- se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, diciamo che f è un infinitesimo di **ordine inferiore** a g;
- se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, diciamo che f e g **non sono confrontabili**.

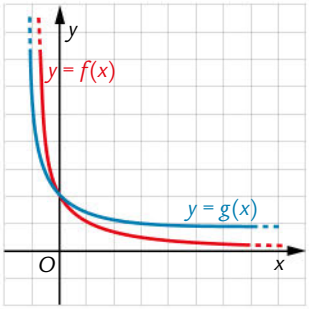


Figura 34 La funzione f è un infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to +\infty$. A livello grafico si vede chiaramente che f tende a 0 «più velocemente» della funzione g.

ESEMPIO Confronto tra infinitesimi

Confrontiamo tra loro i seguenti infinitesimi:

a. $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ per $x \to 0$

b. $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$ per $x \to 0$

c. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ per $x \to +\infty$

a. Poiché $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, f è un infinitesimo dello *stesso* ordine di g.

b. Poiché $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to \infty} = \infty$ possiamo dire che f è un infinitesimo di ordine *inferiore* a g.

c. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$$

concludiamo che f è un infinitesimo di ordine *superiore* a g (**Fig. 34**).

DEFINIZIONE | Confronto tra infiniti

Date due funzioni f e g, entrambe infinite per $x \to x_0$ (con $x_0 \in \mathbf{R}^*$), per confrontarle consideriamo il limite del loro rapporto. Si possono presentare quattro casi:

- Se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, diciamo che f è un infinito di **ordine inferiore** a g;
- Se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, diciamo che f e g sono infiniti dello **stesso ordine**;
- Se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, diciamo che f è un infinito di **ordine superiore** a g;
- Se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, diciamo che f e g **non sono confrontabili**.

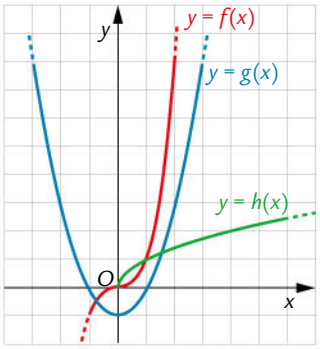


Figura 35 La funzione f è un infinito di ordine superiore a g, mentre la funzione h è un infinito di ordine inferiore per $x \to +\infty$. Di conseguenza, come puoi vedere dalla figura, il grafico di f per x «sufficientemente grande», deve trovarsi «molto al di sopra» di quello di g, mentre quello di h deve trovarsi «molto al di sotto».

ESEMPI Confronto tra infiniti

Confrontiamo tra loro i seguenti infiniti:

a. $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 - 1$ per $x \to +\infty$

b. $z(x) = 2x^3 + 1$ e $g(x) = 4x^3 + x^2$ per $x \to +\infty$

c. $h(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$ per $x \to +\infty$

a. Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty$, possiamo dire che f è un infinito di ordine *superiore* a g (**Fig. 35**).,

b. Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+1}{4x^3+x^2} = \dfrac{1}{2}$, possiamo concludere che z e g sono infiniti dello stesso ordine.

c. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{x\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}_{\to+\infty}} = 0$$

possiamo dire che h è un infinito di ordine *inferiore* a g (**Fig. 35**).

Per confrontare tra loro infiniti di *potenze*, *esponenziali* e *logaritmi*, vale il seguente teorema, illustrato nella successiva **Fig. 36**, che per ora ci limitiamo a enunciare; vedremo la dimostrazione più avanti, quando avremo in mano strumenti che ci consentiranno di ottenerla più facilmente.

TEOREMA 11 | Gerarchie degli infiniti

a. La funzione **esponenziale** di base maggiore di 1 è un infinito di ordine **superiore** rispetto a qualsiasi funzione **potenza** con esponente positivo; vale a dire:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^b}=+\infty \qquad \forall a>1,\ b>0$$

b. Qualsiasi potenza con esponente positivo della funzione **logaritmica** di base maggiore di 1 è un infinito di ordine **inferiore** rispetto a qualsiasi funzione **potenza** con esponente positivo; vale a dire:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)^b}{x^c}=0 \qquad \forall a>1,\ b>0,\ c>0$$

Con GeoGebra
Gerarchie degli infiniti

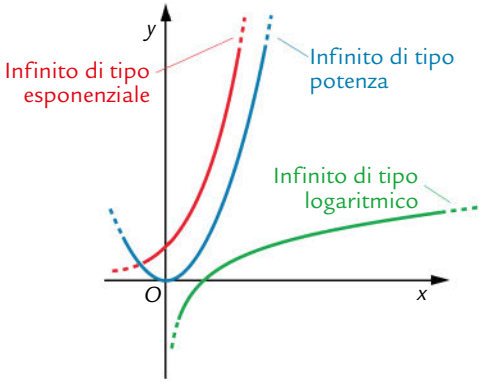


Figura 36 **Le gerarchie sugli infiniti si possono interpretare graficamente come segue: per *x* «sufficientemente grande» il grafico di una funzione esponenziale è «molto al di sopra» di quello di qualunque funzione potenza, il quale a sua volta è «molto al di sopra» di quello di qualunque funzione logaritmica.**

ATTENZIONE!
In figura e nei prossimi esempi scriveremo per brevità «funzione potenza» intendendo sempre «funzione potenza con esponente positivo».

Le «gerarchie» sugli infiniti stabilite da quest'ultimo teorema ci consentono di ampliare la gamma delle forme di indecisione relative a funzioni esponenziali e/o logaritmiche che siamo in grado di risolvere.

ESEMPI Calcolo di limiti applicando le gerarchie sugli infiniti

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{3^x}$ **b.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$ **c.** $\lim_{x\to0^+} x\ln x$ **d.** $\lim_{x\to0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

a. Poiché l'esponenziale è un infinito di ordine *superiore* a qualsiasi funzione potenza, possiamo concludere immediatamente che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{3^x}=0$.

b. Osservando che $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ e ricordando che qualsiasi potenza di un logaritmo è un infinito di ordine *inferiore* rispetto a ogni potenza, abbiamo che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}=0$.

c. Eseguendo la sostituzione $\frac{1}{x}=t$, quindi $x=\frac{1}{t}$, e osservando che se $x\to0^+$ allora $t\to+\infty$, abbiamo che:

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$$

$\ln\frac{1}{t}=\ln t^{-1}=-\ln t$ — $\ln t$ è un infinito di ordine inferiore a t

d. Eseguendo la sostituzione $\frac{1}{x}=t$, quindi $x=\frac{1}{t}$, e osservando che se $x\to0^+$ allora $t\to+\infty$, abbiamo che:

$$\lim_{x\to0^+} x e^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$$

e^t è un infinito di ordine superiore a t

Con GeoGebra
Equivalenza asintotica

IN UN ALTRO MODO **Il calcolo dei limiti con il metodo dell'equivalenza asintotica**

Giunti al termine del nostro percorso alla scoperta dei limiti, vogliamo presentare un metodo che permette di *semplificare* il calcolo di molti limiti. Il punto chiave è introdurre la seguente definizione: due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^*$ (eccetto al più in x_0), si dicono **asintotiche** per $x \to x_0$, e si scrive $f(x) \sim g(x)$, se risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

RIFLETTI

Per esempio è $\sin x \sim x$ poiché:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ESEMPI

a. Dai limiti notevoli seguono le seguenti relazioni asintotiche per $x \to 0$:

$$\sin x \sim x$$
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$
$$e^x - 1 \sim x$$
$$\ln(1+x) \sim x$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

Più in generale, con un cambio di variabile, possiamo affermare che se $\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to x_0$, allora per $x \to x_0$ valgono le relazioni:

$$\sin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$
$$1 - \cos \varepsilon(x) \sim \frac{1}{2}\varepsilon^2(x)$$
$$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)$$
$$\ln(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$
$$(1 + \varepsilon(x))^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \varepsilon(x)$$

Per esempio:

- per $x \to 0$, sarà $\sin(2x) \sim 2(x)$, $1 - \cos x^2 \sim \frac{1}{2}x^4$, $e^{4x} - 1 \sim 4x$
- per $x \to 3$, sarà $\sin(x-3) \sim (x-3)$, $e^{(x-3)^2} - 1 \sim (x-3)^2$

b. Una somma di infiniti di ordini differenti per $x \to x_0$ è asintotica all'infinito di ordine superiore. Per esempio, $x + x^3 \sim x^3$ per $x \to +\infty$.

c. Una somma di infinitesimi di ordini differenti per $x \to x_0$ è asintotica all'infinitesimo di ordine inferiore. Per esempio, $x + x^3 \sim x$ per $x \to 0$.

Le relazioni asintotiche risultano particolarmente utili, ai fini del calcolo dei limiti, per le seguenti **proprietà**, che potrebbero essere facilmente dimostrate in base alla definizione.

1. Due funzioni asintotiche per $x \to x_0$ hanno lo stesso limite (finito o infinito) per $x \to x_0$ oppure entrambe non hanno limite.
2. Se per $x \to x_0$ risulta $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$, allora è anche:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x) \quad \text{e} \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \quad \text{per } x \to x_0 \qquad [20]$$

In altre parole: è possibile determinare la stima asintotica di un prodotto o di un quoziente operando termine a termine.

In base alla proprietà 1, ai fini del calcolo del limite di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0$, possiamo sostituire la funzione $f(x)$ con una funzione *a essa asintotica* per $x \to x_0$; per determinare una funzione asintotica a $f(x)$ ci si avvale delle equivalenze asintotiche notevoli espresse negli esempi precedenti e delle proprietà [20].

ESEMPI Limiti con il metodo delle stime asintotiche

Calcoliamo, con il metodo delle stime asintotiche, i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 3x)\ln(1+2x)}{1-\cos 4x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)^2}{e^{x-2}-1}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x+\ln x}{\sqrt{x}+x^5}$ **d.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x)^5-1}{x^2+x^3}$

a. Per $x \to 0$, risulta:

$$\frac{(\sin 3x)\ln(1+2x)}{1-\cos 4x} \sim \frac{3x\cdot 2x}{\frac{1}{2}(4x)^2} \sim \frac{3}{4}$$

pertanto il limite dato è uguale a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.

b. Per $x \to 2$, risulta:

$$\frac{\sin(x-2)^2}{e^{x-2}-1} \sim \frac{(x-2)^2}{x-2} \sim x-2$$

dunque il limite dato è uguale a $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$.

c. Per $x \to +\infty$, risulta:

$$\frac{\overbrace{x^3}^{\text{ordine } 3} + \overbrace{x}^{\text{ordine } 1} + \overbrace{\ln x}^{\text{ordine inferiore a } x \text{ e a } x^3}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{ordine } \frac{1}{2}} + \underbrace{x^5}_{\text{ordine } 5}} \sim \frac{x^3}{x^5} \sim \frac{1}{x^2}$$

Una somma di infiniti di ordini diversi è asintotica all'infinito di ordine *superiore*

dunque il limite dato è uguale a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

d. Per $x \to 0^+$, risulta:

$$\frac{(1+x)^5-1}{\underbrace{x^2}_{\text{ordine } 2} + \underbrace{x^3}_{\text{ordine } 3}} \sim \frac{5x}{x^2} \sim \frac{5}{x}$$

Al denominatore la somma dei due infinitesimi di ordini diversi è asintotica all'infinitesimo di ordine *inferiore*

dunque il limite dato è uguale a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{5}{x} = +\infty$.

Presta attenzione a non eseguire passaggi riguardanti il simbolo di asintotico al di fuori delle proprietà enunciate; in particolare il simbolo di asintotico **non** si comporta bene rispetto alla somma, all'esponenziale o al logaritmo.
Per esempio, per $x \to 0$ si ha $\sin x \sim x$ e $x \sim x$ ma **non** è vero che $\sin x - x \sim 0$ per $x \to 0$; oppure: si ha $x^2 + 2x \sim x^2$ per $x \to +\infty$ ma **non** è vero che $e^{x^2+2x} \sim e^{x^2}$ per $x \to +\infty$.

Esercizi p. 139

Limiti di funzioni reali di variabile reale

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

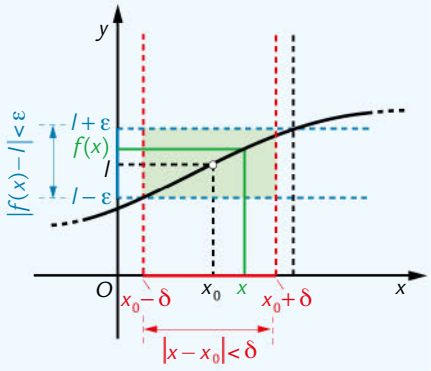
Si legge: «il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 è l».
Intuitivamente significa che i valori di $f(x)$ sono vicini quanto si vuole a l pur di prendere valori di x sufficientemente vicini a x_0.

Definizione di limite se x_0 e l sono finiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$



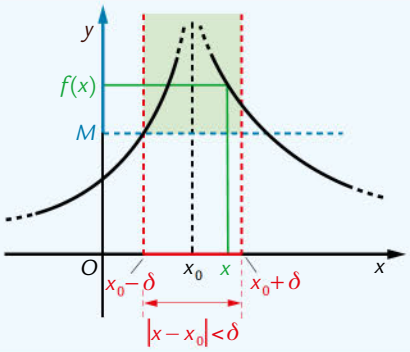
Definizione di limite se x_0 è finito e l è infinito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Nel caso del $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, la definizione è analoga, sostituendo $f(x) > M$ con $f(x) < -M$.



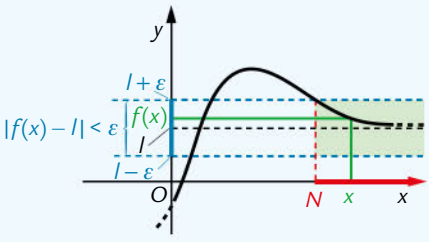
Definizione di limite se x_0 è infinito e l è finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 : \; x > N \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Nel caso del $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, la definizione è analoga, sostituendo $x > N$ con $x < -N$.



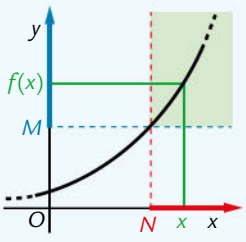
Definizione di limite se x_0 e l sono infiniti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall M > 0 \; \exists N > 0 : \; x > N \Rightarrow f(x) > M$$

Le definizioni che corrispondono a limiti in cui sono presenti infiniti con altri segni sono analoghe.



Regole di calcolo

Continuità

Se f è continua (tutte le funzioni elementari sono continue), risulta:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

ESEMPIO

$$\lim_{x\to 3}(x^2+2x)=3^2+2\cdot 3=15$$

Algebra dei limiti

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno limiti finiti l_1, l_2 per $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0}[(f(x)+g(x)] = l_1+l_2$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\,g(x)] = l_1 l_2$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad l_2\neq 0$$

Aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito

$+\infty + \infty \to +\infty$
$-\infty - \infty \to -\infty$
$l \pm \infty \to \pm\infty$

$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) \to \pm\infty$
$l \neq 0$; $(\pm\infty) \to \pm\infty$

$\frac{l \neq 0}{0} \to \pm\infty$

$\frac{l}{\pm\infty} \to 0$

Forme di indecisione

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad +\infty - \infty \quad 0\cdot\infty \quad 0^0 \quad (+\infty)^0 \quad 1^\infty$$

Limiti di funzioni algebriche razionali

Il limite per $x \to \pm\infty$ di un rapporto di polinomi è uguale al limite del rapporto dei termini di grado massimo.
In particolare il limite per $x \to \pm\infty$ di un polinomio è uguale al limite del termine di grado massimo.

ESEMPI

a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$

b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x}=-\infty$

c. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=0$

d. $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3+2x^2+1)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^3)=+\infty$

Limiti notevoli di funzioni trascendenti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$$

1. Introduzione intuitiva al concetto di limite

Teoria p. 56

Approccio numerico al concetto di limite

Completa le seguenti tabelle, con l'aiuto di una calcolatrice, e formula una congettura sul valore del limite indicato.

1 $\lim_{x\to 2} f(x)$, dove $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

x	$f(x)$
1,9	
1,99	
1,999	
1,9999	

x	$f(x)$
2,1	
2,01	
2,001	
2,0001	

2 $\lim_{x\to 0} f(x)$, dove $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$

x	$f(x)$
−0,1	
−0,01	
−0,001	
−0,0001	

x	$f(x)$
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	

3 $\lim_{x\to 0} f(x)$, dove $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$

x	$f(x)$
−0,1	
−0,01	
−0,001	
−0,0001	

x	$f(x)$
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, dove $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2-1}$

x	$f(x)$
−10	
-10^2	
-10^3	
-10^4	

x	$f(x)$
10	
10^2	
10^3	
10^4	

5 $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, dove $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

x	$f(x)$
−0,5	
−0,4	
−0,3	
−0,2	
−0,1	
−0,01	

x	$f(x)$
0,5	
0,4	
0,3	
0,2	
0,1	
0,01	

6 Considera la funzione $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$. Calcola i valori assunti da f in corrispondenza di opportuni valori di x, che ti permettano di formulare una congettura sul valore dei seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

7 Considera la funzione $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Calcola i valori assunti da f in corrispondenza di opportuni valori di x, che ti permettano di formulare una congettura sul valore dei seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

8 Considera la funzione $f(x)=2^{\frac{1}{2-x}}$. Calcola i valori assunti da f in corrispondenza di opportuni valori di x, che ti permettano di formulare una congettura sul valore dei seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

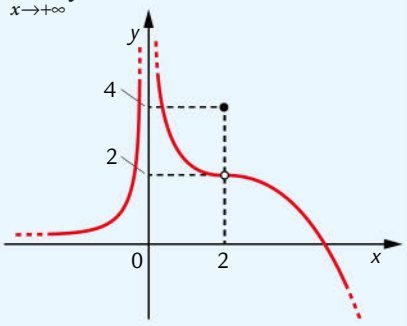
9 Considera la funzione $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Calcola i valori assunti da f in corrispondenza di opportuni valori di x, che ti permettano di formulare una congettura sul valore dei seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Approccio grafico al concetto di limite

10 ESERCIZIO GUIDATO

In riferimento alla figura qui a fianco, deduci i limiti indicati:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **d.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **e.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



a. Quando $x\to-\infty$, il grafico della funzione si avvicina all'asse x (che ha equazione $y=0$), quindi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ .....

b. Quando $x\to 0^-$, il grafico della funzione tende ad assumere valori positivi via via sempre più grandi, quindi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$ .....

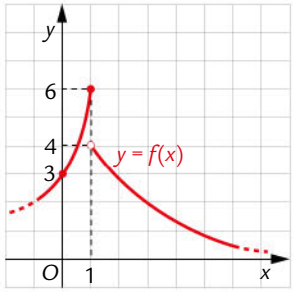
c. Analogamente al caso precedente si deduce che $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$ .....

d. Osserva che risulta $f(2)=4$ ma il limite della funzione per $x\to 2$ non è il valore della funzione in $x=2$ ma il valore cui si *avvicina* la funzione quando x si *avvicina* a 2, quindi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$ .....

e. Quando $x\to+\infty$, la funzione assume valori negativi via via sempre minori, quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ .....

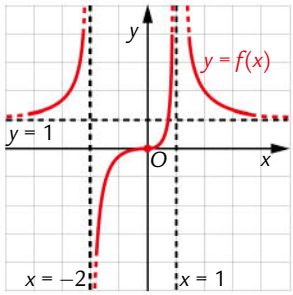
11 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ .....
b. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$ .....
c. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$ .....
d. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ .....
e. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ .....



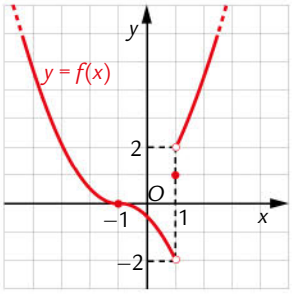
12 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$.....
b. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=$.....
c. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=$.....
d. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$.....
e. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$.....
f. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$.....
g. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$.....



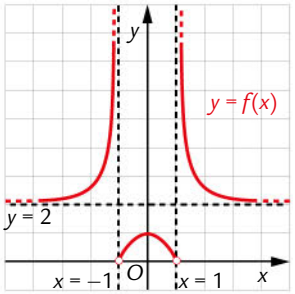
13 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ .....
b. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=$ .....
c. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$ .....
d. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$ .....
e. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ .....
f. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ .....



14 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=$ .....
b. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=$ .....
c. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=$ .....
d. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=$ .....
e. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$ .....
f. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$ .....
g. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ .....



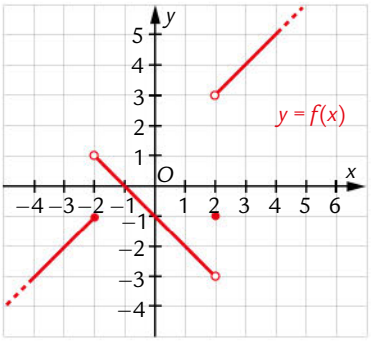
15 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim_{x\to -2^-} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to -2^+} f(x) =$ .....

b. $\lim_{x\to -2^+} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to 2} f(x) =$ .....

c. $\lim_{x\to -2} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to 0} f(x) =$ .....

d. $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$ .....



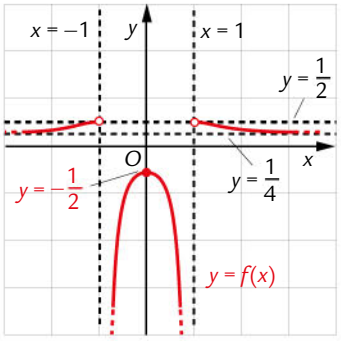
16 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$ .....

b. $\lim_{x\to -1^-} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to -1^+} f(x) =$ .....

c. $\lim_{x\to 0} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to 1} f(x) =$

d. $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$



17 **Vero o falso?** Facendo riferimento al grafico, deduci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. $\lim_{x\to \infty} f(x) = 1$ V F

b. $\lim_{x\to 1} f(x) = -2^+$ V F

c. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ V F

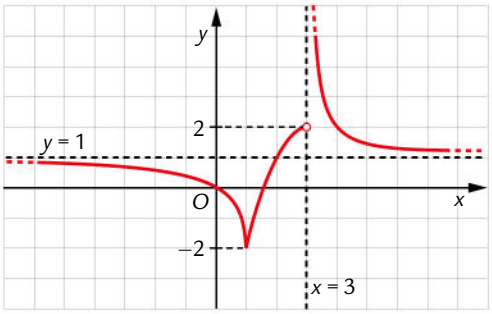
d. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^-$ V F

e. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$ V F

f. $\lim_{x\to 3} f(x)$ non esiste V F

g. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ V F

h. $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$ V F



[4 affermazioni vere e 4 false]

18 **Vero o falso?** Facendo riferimento al grafico, deduci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty$ V F

b. $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$ V F

c. $\lim_{x\to 1} f(x)$ non esiste V F

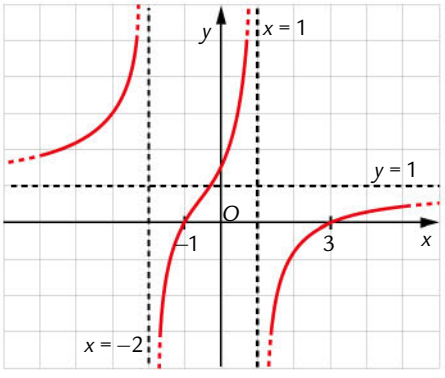
d. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ V F

e. $\lim_{x\to \infty} f(x) = 1$ V F

f. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1^+$ V F

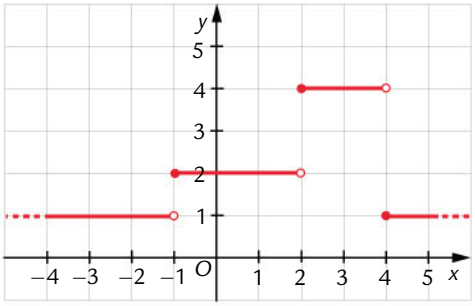
g. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1^-$ V F

h. $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste V F



[5 affermazioni vere e 3 false]

19 **Vero o falso?** Facendo riferimento al grafico, deduci se le seguenti affermazioni sono vere o false.



a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ V F

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ V F

c. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = 1$ V F

d. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 2$ V F

e. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$ V F

f. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 2$ V F

g. $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2$ V F

h. $\lim\limits_{x\to4} f(x)$ non esiste V F

i. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ esiste V F

[6 affermazioni vere e 3 false]

20 **ESERCIZIO SVOLTO**

Tracciamo il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$ e deduciamo da esso i valori dei seguenti limiti:

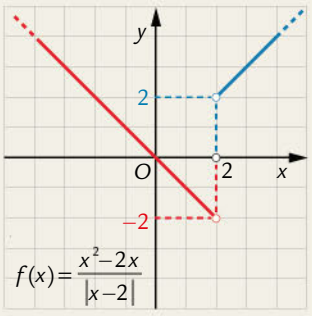
$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

- Osserviamo anzitutto che la funzione data è definita per $x \neq 2$, quindi il suo dominio è $\mathbf{R} - \{2\}$.
- In base alla definizione di valore assoluto:

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} = \dfrac{x(x-2)}{x-2} = x & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x^2-2x}{-(x-2)} = \dfrac{x(x-2)}{-(x-2)} = -x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

In definitiva dobbiamo tracciare il grafico della funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 2 \\ -x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$



- Dal grafico in figura si deduce che il $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ non esiste, mentre:

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -2$ e $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2$

21 **Videolezione** Traccia il grafico della funzione $f(x) = 2\dfrac{|x|}{x}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

22 Traccia il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-3}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

23 Traccia il grafico della funzione $f(x) = \ln(x+1)$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

24 Traccia il grafico della funzione $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

25 Traccia il grafico della funzione $f(x) = e^x - 1$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

26 Traccia il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

27 Traccia il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{|x-3|}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

28 Traccia il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{2x-2}{|x^2-1|}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

29 Traccia il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x^2-2x|}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Giustificare e argomentare

30 Sia $f(x)$ una funzione dispari tale che $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-4$. Puoi determinare il $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$?

31 Sia $f(x)$ una funzione pari tale che $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Puoi determinare il $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$?

32 Angelo afferma che, se $f(x)$ è una funzione da **R** in **R** strettamente crescente, allora necessariamente $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$. Ha ragione? Se sì, giustifica la tua risposta; se no, fornisci un controesempio.

33 Veronica sostiene che, se $f(x)$ è una funzione da **R** in **R** periodica, allora non può esistere il $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Ha ragione? Se sì, giustifica la tua risposta; se no, fornisci un controesempio.

Inventa tu.

34 Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-2$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

35 Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

36 Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3$

2. Dagli intorni alla definizione generale di limite

Teoria p. 62

Intorni

37 Determina l'intorno di $x_0=2$, avente raggio $\dfrac{1}{2}$.

38 Determina l'intorno di $x_0=3$, avente raggio δ.

39 Determina centro e raggio degli intorni rappresentati dai seguenti intervalli:

a. $(2, 4)$ **b.** $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ **c.** $(-1, 2)$

40 **Vero o falso?**

Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + 3x - 4 < 0$. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a. l'insieme S è un intorno destro di -4 V F

b. l'insieme S è un intorno completo di 1 V F

c. l'insieme S contiene un intorno completo di 0 V F

d. l'insieme S è un intorno destro di 1 V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

41 Stabilisci se l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x+5}{2-x} > 0$ contiene un intorno di 3.

42 Stabilisci se l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x+4}{4-x} > 0$ contiene un intorno di 0.

43 L'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x^2+1}{x^2-4} > 0$ è un intorno di $+\infty$? Contiene un intorno di $+\infty$?

44 L'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ 10 - 2x < 0 \end{cases}$ è un intorno di $+\infty$? Contiene un intorno di $+\infty$?

45 L'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ 5x - x^2 < 0 \end{cases}$ è un intorno di $-\infty$? Contiene un intorno di $-\infty$?

Punti di accumulazione

46 **Vero o falso?**

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

a. x_0 non deve appartenere ad A V F

b. A deve essere infinito V F

c. l'intervallo $\left(x_0 - \frac{1}{100},\ x_0 + \frac{1}{100}\right)$ deve contenere infiniti punti di A V F

d. l'intervallo $\left(x_0 - \frac{1}{99},\ x_0 + \frac{1}{99}\right)$ può contenere un solo punto di A V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

Dato l'insieme A, determina l'insieme A' formato dai punti di accumulazione di A in $\mathbf{R}^*$.

47 $A = \mathbf{N}$ $[A' = \{+\infty\}]$

48 $A = \{-1, 2, 3, 7\}$

49 $A = \mathbf{Q} - \{0, 1\}$ $[A' = \mathbf{R}^*]$

50 $A = \mathbf{R} - \{0\}$

51 $A = [0, 2] \cup [4, 5]$ $[A' = A]$

52 $A = (0, 2] \cup [4, +\infty)$

53 $A = [0, 1) \cup \{5\}$ $[A' = [0, 1]]$

54 $A = [0, 3] \cup \{5, 6\}$

55 $A = (-1, 1) \cup (3, +\infty)$ $[A' = [-1, 1] \cup [3, +\infty) \cup \{+\infty\}]$

56 $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ $[A' = \{-\infty\} \cup (-\infty, 1] \cup [4, +\infty) \cup \{+\infty\}]$

57 $A = (-\infty, -2] \cup (-1, 1] \cup (3, +\infty)$

58 **E se?** Determina l'insieme A' dei punti di accumulazione dell'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x < 0\}$.

▸ Cambierebbe la risposta considerando l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x \leq 0\}$? $[A' = [-1, 0]$; no$]$

59 ESERCIZIO SVOLTO

Dato l'insieme A, determiniamo l'insieme A' formato dai punti di accumulazione di A.

$$A = \left\{x \in \mathbf{R}: x = (-1)^n\left(1+\frac{2}{n}\right), \text{ con } n \in \mathbf{N} - \{0\}\right\}$$

Distinguiamo due casi, a seconda che n sia pari o dispari, poiché $(-1)^n = 1$ se n è pari, mentre $(-1)^n = -1$ se n è dispari.
Per n pari si ottengono gli elementi dell'insieme del tipo:

$$\underbrace{1+1}_{n=2}, \quad \underbrace{1+\frac{1}{2}}_{n=4}, \quad \underbrace{1+\frac{1}{3}}_{n=6}, \quad \underbrace{1+\frac{1}{4}}_{n=8}, \quad \ldots\ldots$$

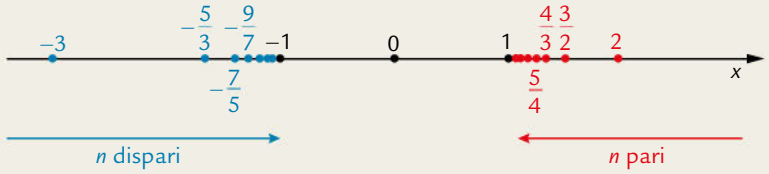
Al crescere di n pari si ottengono valori sempre più prossimi a 1

Per n dispari si ottengono gli elementi dell'insieme del tipo:

$$\underbrace{-1-2}_{n=1}, \quad \underbrace{-1-\frac{2}{3}}_{n=3}, \quad \underbrace{-1-\frac{2}{5}}_{n=5}, \quad \underbrace{-1-\frac{2}{7}}_{n=7}, \quad \ldots\ldots$$

Al crescere di n dispari si ottengono valori sempre più prossimi a –1

Rappresentiamo la situazione sulla retta reale:



Osserviamo che tutti gli elementi dell'insieme sono *punti isolati*; ci sono però due punti (non appartenenti all'insieme) attorno ai quali si «accumulano» gli elementi dell'insieme: –1 e 1. Come si intuisce dalla figura, in ogni intorno di –1 e 1 cadono *infiniti* elementi dell'insieme A. Quindi: $A' = \{-1, 1\}$.

Dato l'insieme A, determina l'insieme A', formato dai punti di accumulazione di A.

60 $A = \left\{x \in \mathbf{R} : x = 2 + \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbf{N} - \{0\}\right\}$ $[A' = \{2\}]$

61 $A = \left\{x \in \mathbf{R} : x = \frac{3n+1}{n}, \text{ con } n \in \mathbf{N} - \{0\}\right\}$

62 $A = \left\{x \in \mathbf{R} : x = (-1)^n \frac{n+1}{n+2}, \text{con } n \in \mathbf{N}\right\}$ $[A' = \{\pm 1\}]$

63 $A = \left\{x \in \mathbf{R} : x = (-1)^n \frac{2n}{n+2}, \text{ con } n \in \mathbf{N}\right\}$

64 $A = \{x \in \mathbf{R} : x = \cos n\pi, \text{ con } n \in \mathbf{N}\}$ $[A' = \varnothing]$

65 $A = \left\{x \in \mathbf{R} : x = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \text{ con } n \in \mathbf{N}\right\}$

66 Sia S l'insieme delle soluzioni dell'equazione $e^x \sin x = 1$.

a. Determina estremo inferiore ed estremo superiore ed eventuale massimo o minimo.

b. Si tratta di un insieme limitato? Esistono punti di accumulazione per S?

Definizione generale di limite

67 **Caccia all'errore.** Veronica afferma che $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ se, comunque scelto un intorno V di 3, è possibile determinare un intorno U di 2 tale che, per ogni $x \in U$, risulta $f(x) \in V$. Quale errore ha commesso Veronica? Come va corretta l'affermazione?

68 **Caccia all'errore.** Marco afferma che $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ se, comunque scelto un intorno U di 2, è possibile determinare un intorno V di 3 tale che, per ogni $x \in U$, con $x \neq 2$, risulta $f(x) \in V$. Quale errore ha commesso Marco? Come va corretta l'affermazione?

69 Determina il dominio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$, scrivilo come unione di intervalli e individua l'insieme dei suoi punti di accumulazione. Per quali valori di $x_0 \in \mathbf{R}^*$ ha senso calcolare il limite della funzione $f(x)$ per $x \to x_0$?

70 Determina il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, scrivilo come unione di intervalli e individua l'insieme dei suoi punti di accumulazione. Per quali valori di $x_0 \in \mathbf{R}^*$ ha senso calcolare il limite della funzione $f(x)$ per $x \to x_0$?

71 Determina il dominio della funzione $f(x)=\ln(9-x^2)$, scrivilo come intervallo e individua l'insieme formato dai suoi punti di accumulazione. Per quali valori di $x_0 \in \mathbf{R}^*$ ha senso calcolare il limite della funzione $f(x)$ per $x \to x_0$?

72 Spiega perché *non* ha senso calcolare il $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-x^2}$.

73 Spiega perché *non* ha senso calcolare il $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{-x^2}$.

74 **E se?** Stabilisci se ha senso calcolare il $\lim\limits_{x\to0^-} \ln x$.

▸ Cambierebbe la risposta, considerando il $\lim\limits_{x\to0^-} |\ln x|$? E il $\lim\limits_{x\to0^-} \ln|x|$?

3. Dalla definizione generale alle definizioni particolari

Teoria p. 66

Esercizi introduttivi

Test

75 Quale delle seguenti scritture equivale a $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$?

A $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0: 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

B $\forall\,\varepsilon>0, \forall\,\delta>0: 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

C $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0: 0<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

D $\forall\,\varepsilon>0, \forall\,\delta>0: 0<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

76 Quale delle seguenti scritture equivale a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$?

A $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N>0: x>N \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$

B $\forall\,N>0, \exists\,\delta>0: 0<|x-2|<\delta \Rightarrow f(x)<-N$

C $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N>0: x<-N \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$

D $\forall\,N>0, \exists\,\delta>0: 0<|x-2|<\delta \Rightarrow f(x)>N$

77 Quale delle seguenti scritture equivale a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$?

A $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N>0: x>N \Rightarrow |f(x)+2|<\varepsilon$

B $\forall\,N>0, \exists\,\delta>0: 0<|x-2|<\delta \Rightarrow f(x)>N$

C $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N>0: x>N \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$

D $\forall\,N>0, \exists\,\delta>0: 0<|x+2|<\delta \Rightarrow f(x)>N$

78 Quale delle seguenti scritture equivale a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$?

A $\forall\,M>0, \exists\,N>0: x<-M \Rightarrow f(x)>N$

B $\forall\,M>0, \exists\,N>0: x<-N \Rightarrow f(x)>M$

C $\forall\,M>0, \exists\,N>0: x>M \Rightarrow f(x)<-N$

D $\forall\,M>0, \exists\,N>0: x>N \Rightarrow f(x)<-M$

---

79 La scrittura «$\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N>0: x<-N \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$» significa:

A $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ B $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ C $\lim\limits_{x\to-N} f(x)=0$ D $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-N$

80 La scrittura «$\forall\,M>0, \exists\,\delta>0: 3<x<3+\delta \Rightarrow f(x)>M$» significa:

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ B $\lim\limits_{x\to M} f(x)=3$ C $\lim\limits_{x\to3} f(x)=M$ D $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=+\infty$

81 La scrittura «$\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0: 0<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)+1|<\varepsilon$» significa:

A $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$ B $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$ C $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-1$ D $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$

82 La scrittura «$\forall\,M>0, \exists\,N>0: x>N \Rightarrow f(x)<-M$» significa:

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ B $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ C $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ D $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

83 **Associazione.** Associa a ogni limite la sua definizione formale.

a. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ **A.** $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N>0: x>N \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ **B.** $\forall\,M>0, \exists\,\delta>0: 0<x<\delta \Rightarrow f(x)>M$

c. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ **C.** $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N>0: x<-N \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ **D.** $\forall\,M>0, \exists\,\delta>0: 0<|x|<\delta \Rightarrow f(x)<-M$

84 **Associazione.** Associa a ogni limite la sua definizione formale.

a. $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$ **A.** $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x+1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

b. $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$ **B.** $\forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

c. $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ **C.** $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) + 1| < \varepsilon$

d. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$ **D.** $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N > 0 : x > N \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

Verifica di limiti: caso di limite finito per x che tende a un valore finito

85 **ESERCIZIO GUIDATO**

Verifica che $\lim_{x\to 2} (2x - 1) = 3$.

Devi risolvere la disequazione $|(2x-1) - 3| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, e verificare che le soluzioni contengono un intorno di 2.

Se svolgi i calcoli correttamente troverai che la disequazione è soddisfatta nell'intervallo $2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$, che è un intorno di 2 di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$.

86 **ESERCIZIO GUIDATO**

Verifica che $\lim_{x\to 3} (2x^2 - 1) = 17$.

- Devi inizialmente risolvere la disequazione $|(2x^2 - 1) - 17| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, cioè il sistema $\begin{cases} 2x^2 - 18 < \varepsilon \\ 2x^2 - 18 > -\varepsilon \end{cases}$, e verificare che le soluzioni contengono un intorno di 3.
- Se svolgi correttamente i calcoli, troverai che l'insieme delle soluzioni contiene l'intervallo aperto $\sqrt{9 - \frac{\varepsilon}{2}} < x < \sqrt{9 + \frac{\varepsilon}{2}}$ che **non** è un intorno (circolare) di 3, ma contiene il numero 3 (perché?) e dunque contiene certamente anche un intorno di 3.

Verifica i seguenti limiti per x che tende a x_0 finito. Nelle soluzioni è riportato un intervallo aperto contenente x_0 che soddisfa la definizione.

87 $\lim_{x\to 0} (2x - 1) = -1$ $\left[-\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2}\right]$

88 **Videolezione** $\lim_{x\to -1} (3x + 1) = -2$ $\left[-1 - \frac{\varepsilon}{3} < x < -1 + \frac{\varepsilon}{3}\right]$

89 $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$ $[4 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon < x < 4 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon]$

90 $\lim_{x\to 1} x^3 = 1$ $\left[\sqrt[3]{1-\varepsilon} < x < \sqrt[3]{1+\varepsilon}\right]$

91 $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ $\left[\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}\right]$

92 $\lim_{x\to 2} (x^2 - 1) = 3$ $\left[\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}\right]$

93 $\lim_{x\to -1} \sqrt{x+5} = 2$ $[-1 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon < x < -1 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon]$

94 **ESERCIZIO SVOLTO**

Verifichiamo che $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-1} = 2$.

- Dobbiamo risolvere la disequazione $\left|\frac{x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, e verificare che le soluzioni contengono un intorno di 2. La disequazione equivale al sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{x-1} - 2 > -\varepsilon \\ \frac{x}{x-1} - 2 < \varepsilon \end{cases}$$

Poiché l'obiettivo non è scrivere tutte le soluzioni del sistema, ma solo quelle «vicine» a 2 possiamo supporre che sia $x - 1 > 0$, cioè $x > 1$; questa ipotesi ci consente di moltiplicare i due membri delle disequazioni per $x - 1$ e ricondurci al seguente sistema non frazionario, che risolviamo:

$$\begin{cases} x - 2(x-1) > -\varepsilon(x-1) \\ x - 2(x-1) < \varepsilon(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\varepsilon)x < 2 - \varepsilon \\ (1+\varepsilon)x > 2 + \varepsilon \end{cases}$$

Ai fini della verifica del limite non è limitativo supporre ε arbitrariamente piccolo; possiamo quindi supporre $\varepsilon < 1$, cosicché $1 - \varepsilon > 0$. Ciò ci consente di concludere la risoluzione del sistema, dividendo i due membri della prima disequazione per $1 - \varepsilon$ senza dover cambiare il verso della disequazione, grazie all'ipotesi $1 - \varepsilon > 0$. Si trova così che il sistema è soddisfatto per:

$$\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

- Osserviamo infine che:

$$\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{2(1+\varepsilon)-\varepsilon}{1+\varepsilon} = 2 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad \text{e} \quad \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{2(1-\varepsilon)+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

quindi l'intervallo delle soluzioni si può scrivere nella forma equivalente:

$$2 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

da cui appare chiaramente che contiene un intorno di 2 (precisamente l'intorno che ha centro in 2 e raggio uguale al minimo tra $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ e $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$). Quindi il limite è verificato.

Nota Rifletti sulle ipotesi che abbiamo potuto introdurre per *semplificare* i calcoli nella verifica del limite. In generale, per verificare che la funzione $f(x)$ ha un certo limite $l \in \mathbf{R}$ per $x \to x_0$, è lecito:
a. restringere il dominio della funzione a un insieme conveniente (nell'esempio precedente $x > 1$), con la sola accortezza che tale insieme deve contenere un intorno di x_0;
b. supporre ε arbitrariamente piccolo (nell'esempio precedente $\varepsilon < 1$).

Verifica i seguenti limiti. Nelle soluzioni è riportato un intervallo aperto contenente x_0 che soddisfa la definizione.

95 $\lim_{x\to 2} \frac{6}{x} = 3$ $\left[\frac{6}{3+\varepsilon} < x < \frac{6}{3-\varepsilon}\right]$

96 $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ $\left[\frac{3}{1+3\varepsilon} < x < \frac{3}{1-3\varepsilon}\right]$

97 $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = 2$ $\left[\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}\right]$

98 $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$ $\left[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]$

Verifica di limiti: caso di limite infinito per x che tende a un valore finito

99 ESERCIZIO GUIDATO

Verifica che $\lim_{x\to 1^-} \ln(1-x^2) = -\infty$.

- Devi risolvere la disequazione $\ln(1-x^2) < -M$, con $M > 0$, e verificare che è soddisfatta in un intorno sinistro di 1.
- La disequazione equivale al sistema $\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ 1-x^2 < e^{-M} \end{cases}$; risolvendolo, troverai che esso è soddisfatto per:

$$-1 < x < -\sqrt{1-e^{-M}} \vee \sqrt{1-e^{-M}} < x < 1$$

- Osserva ora che $\sqrt{1-e^{-M}} < x < 1$ è un ....., quindi il limite è verificato.

Verifica i seguenti limiti per x che tende a x_0 finito. Nelle soluzioni è riportato un intervallo aperto che soddisfa la definizione.

100 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\left[-\sqrt{\frac{1}{M}} < x < \sqrt{\frac{1}{M}}\right]$

101 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ $\left[0 < x < \frac{1}{M^2}\right]$

102 $\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$ $\left[-1 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < -1 + \frac{1}{\sqrt{M}}\right]$

103 Videolezione $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ $[0 < x < e^{-M}]$

104 $\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$ $[-1 < x < -1 + e^{-M}]$

105 $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ $\left[1 < x < 1 + \frac{1}{M^2}\right]$

106 $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$ $\left[0 < x < \frac{1}{2^M}\right]$

107 $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ $\left[2 < x < \frac{1}{M} + 2\right]$

108 $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty$ $\left[\sqrt{4 - e^{-M}} < x < 2\right]$

109 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ $\left[\arctan M < x < \frac{\pi}{2}\right]$

(*Suggerimento*: puoi supporre $0 < x < \pi$.)

Verifica di limiti: caso di limite finito per *x* che tende a un valore infinito

110 ESERCIZIO SVOLTO

Verifichiamo che $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x} = 1$.

- Dobbiamo verificare che l'insieme delle soluzioni della disequazione $\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, contiene un intorno di $-\infty$.
- Svolgendo i calcoli si trova che la disequazione equivale alla seguente, che risolviamo:

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \underset{x\neq 0}{\Rightarrow} 1 < \varepsilon|x| \Rightarrow \varepsilon|x| > 1 \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}$$

- La disequazione è soddisfatta in particolare per $x < -\frac{1}{\varepsilon}$, che è un intorno di $-\infty$, quindi il limite è verificato.

Verifica i seguenti limiti per *x* che tende a $\pm\infty$. Nelle soluzioni è riportato l'intorno di $\pm\infty$ che soddisfa la definizione.

111 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\left[x > \frac{1}{\varepsilon}\right]$

112 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ $\left[x > \frac{1}{\varepsilon}\right]$

113 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ $\left[x > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right]$

114 **Videolezione** $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ $[x < \ln \varepsilon]$

115 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$ $\left[x > \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}}\right]$

116 $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ $[x > -\ln \varepsilon]$

117 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$ $\left[x > \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}\right]$

118 $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1$ $\left[x < \ln \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right]$

119 $\lim\limits_{x\to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ $\left[x > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right]$

120 $\lim\limits_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ $\left[x < \tan\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

Verifica di limiti: caso di limite infinito per *x* che tende a infinito

121 ESERCIZIO SVOLTO

Verifichiamo che $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$.

- Dobbiamo verificare che l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + 1 > M$, con $M > 0$, contiene un intorno di $+\infty$.
- La disequazione equivale a $x^2 > M - 1$. Ai fini della verifica del limite non è limitativo supporre M arbitrariamente grande; possiamo quindi supporre $M > 1$, cosicché $M - 1 > 0$ e la disequazione è soddisfatta per:

$$x < -\sqrt{M-1} \vee x > \sqrt{M-1}$$

- L'insieme delle soluzioni contiene l'intervallo $x > \sqrt{M-1}$, che è un intorno di $+\infty$, quindi il limite è verificato.

Verifica i seguenti limiti per *x* che tende a $\pm\infty$. Nelle soluzioni è riportato l'intorno di $\pm\infty$ che soddisfa la definizione.

122 $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x - 1) = -\infty$ $\left[x < \frac{1-M}{2}\right]$

123 $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ $[x > \sqrt{1+M}]$

124 $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$ $[x < -\sqrt[3]{M}]$

125 $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - x^2) = -\infty$ $[x > \sqrt{1+M}]$

126 $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x} = +\infty$ $[x < -\ln M]$

127 $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ $[x > M^2 - 1]$

128 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $[x > \ln M]$

129 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $[x > e^M]$

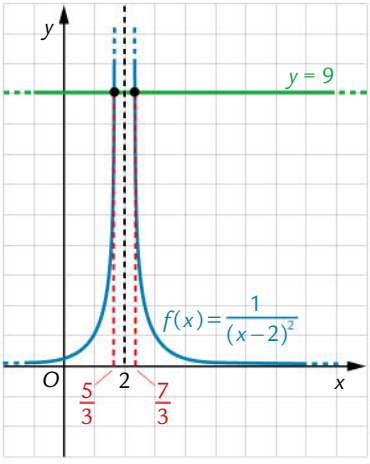
130 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$ $\left[x > \dfrac{1}{2}(M + \sqrt{M^2+4M})\right]$

131 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(2 + x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ $\left[x > \dfrac{e^M - 2 + \sqrt{e^{2M} - 4e^M}}{2}\right]$

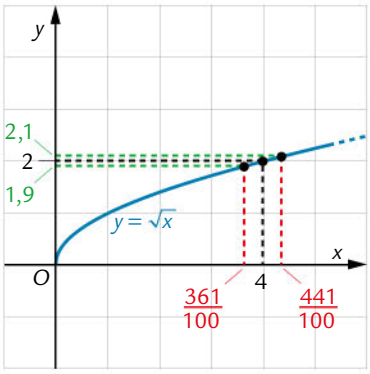
Esercizi riassuntivi: la definizione di limite

Interpretazione di grafici

132 Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, risulta $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$. Ciò significa, in base alla definizione, che $\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.
Fissato $M = 9$, deduci dal grafico il massimo valore di δ che soddisfa la definizione di limite.



133 Data la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, risulta $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 2$. Ciò significa, in base alla definizione, che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$. In figura è rappresentata l'interpretazione geometrica di tale definizione, in corrispondenza di un particolare valore di ε. Deduci dal grafico qual è il valore di ε che è stato fissato e qual è il corrispondente massimo valore di δ che soddisfa la definizione di limite.



Verifica, in base alla definizione, i seguenti limiti.

134 $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x+4) = -\infty$ $\left[x < -\dfrac{4}{3} - \dfrac{M}{3}\right]$

135 $\lim\limits_{x\to 1} \ln(2-x) = 0$ $[2 - e^{\varepsilon} < x < 2 - e^{-\varepsilon}]$

136 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3+2} = 0$ $\left[x > \sqrt[3]{-2 + \dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$

137 $\lim\limits_{x\to 0^+} (3 + \ln x) = -\infty$ $[0 < x < e^{-3-M}]$

138 $\lim\limits_{x\to-1} (x^3+1) = 0$ $[\sqrt[3]{-1-\varepsilon} < x < \sqrt[3]{-1+\varepsilon}]$

139 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x+1} = 3$ $\left[x > -1 + \dfrac{4}{\varepsilon}\right]$

140 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$ $[2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon]$

141 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x} = +\infty$ $\left[x > \dfrac{M + \sqrt{M^2+4}}{2}\right]$

142 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+3} = +\infty$ $\left[x > \dfrac{1}{2}(\ln M - 3)\right]$

143 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1+2x} = 0$ $\left[x < \dfrac{1}{2}(\ln \varepsilon - 1)\right]$

144 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ $\left[x > e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]$

145 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-1}{x} = 3$ $\left[x < -\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$

146 $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 + \dfrac{3}{x}\right) = 2$ $\left[x < -\dfrac{3}{\varepsilon}\right]$

147 $\lim\limits_{x\to 3} (x^2-4) = 5$ $[\sqrt{9-\varepsilon} < x < \sqrt{9+\varepsilon}]$

148 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2) = +\infty$ $[x > -2 + e^M]$

149 $\lim\limits_{x\to+\infty} (10 - x^2) = -\infty$ $[x > \sqrt{M+10}]$

150 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2}$ $\left[x > \sqrt{\dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}}\right]$

151 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$ $\left[x < \dfrac{-M - \sqrt{M^2-4M}}{2}\right]$

152 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$ $\left[x > \sqrt{\ln \dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$

153 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$ $[1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon]$

4. Teoremi di esistenza e unicità sui limiti

Teoria p. 70

Teorema di unicità, permanenza del segno e del confronto

154 **Vero o falso?**

a. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste per ogni valore di x_0 appartenente al dominio della funzione f V F

b. se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste, certamente è unico V F

c. siano f e g due funzioni definite in $\mathbf{R}$ tali che $0 \le f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; se $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, allora esiste anche $\lim_{x\to 0} f(x)$ ed è uguale a 0 V F

d. siano f e g due funzioni definite in $\mathbf{R}$ tali che $0 \le f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; se $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, allora esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$ ed è uguale a 1 V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

155 **Vero o falso?**

Sia f una funzione definita in $\mathbf{R}$.

a. se $\lim_{x\to 0} f(x) = 10$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (-\delta, \delta)$, con $x \neq 0$, risulta $f(x) > 0$ V F

b. se $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$, allora tale limite è maggiore di zero V F

c. se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -10$, esiste $M > 0$ tale che per ogni $x > M$, risulta $f(x) < 0$ V F

d. se $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed esiste $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, allora tale limite è minore di zero V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

Giustificare e argomentare

156 Sapendo che f è una funzione definita in $(-1, 1)$ e che $0 \le f(x) \le |\sin x|$ per ogni $x \in (-1, 1)$, abbiamo informazioni sufficienti per calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$?

(*Suggerimento*: ricorda che $\sin x \to 0$ per $x \to 0$.)

157 Sapendo che f è una funzione definita in $(-1, 1)$ e che $\sin x \le f(x) \le 1$ per ogni $x \in (-1, 1)$, abbiamo informazioni sufficienti per calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$?

158 Sapendo che f è una funzione definita in $(-1, 1)$ e che $0 \le f(x) \le |\cos x|$ per ogni $x \in (-1, 1)$, abbiamo informazioni sufficienti per calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$?

(*Suggerimento*: ricorda che $\cos x \to 1$ per $x \to 0$.)

159 Sapendo che f è una funzione definita in $(-1, 1)$ e che $\cos x \le f(x) \le 1$ per ogni $x \in (-1, 1)$, abbiamo informazioni sufficienti per calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$?

160 Sapendo che f è una funzione definita in $\mathbf{R}$, che $f(x) \ge g(x)$ per ogni $x \ge 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, abbiamo informazioni sufficienti per calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

161 Sapendo che f è una funzione definita in $\mathbf{R}$, che $f(x) \ge g(x)$ per ogni $x \ge 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, abbiamo informazioni sufficienti per calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

162 Utilizzando il teorema del confronto, dimostra che se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

163 **Caccia all'errore.** Siano f e g due funzioni tali che $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Sapendo che $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, Pietro deduce che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; sapendo che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, Mirko afferma che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Chi dei due applica erroneamente il teorema del confronto? Giustifica la risposta.

Teorema di esistenza del limite per le funzioni monotone

164 **Test.** Sia f una funzione definita in $\mathbf{R}$, strettamente crescente. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ B $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ C Esiste il $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ D Esiste il $\lim\limits_{x\to10} f(x)$

Giustificare e argomentare

165 Sia f una funzione definita in $\mathbf{R}$, strettamente decrescente per $x \le 0$.

a. Il limite della funzione per $x \to 0^-$ esiste certamente o può non esistere?
b. Il limite della funzione per $x \to -1$ esiste certamente o può non esistere?
c. Il limite della funzione per $x \to -100^+$ esiste certamente o può non esistere?

Giustifica le risposte in caso affermativo oppure traccia il grafico di una funzione che costituisca un controesempio.

166 Sia f una funzione definita in $\mathbf{R}$, strettamente crescente per $x \ge 0$.

a. Il limite della funzione per $x \to 0^-$ esiste certamente o può non esistere?
b. Il limite della funzione per $x \to 50$ esiste certamente o può non esistere?
c. Il limite della funzione per $x \to 60^+$ esiste certamente o può non esistere?
d. Il limite della funzione per $x \to +\infty$ esiste certamente o può non esistere?

Giustifica le risposte in caso affermativo, oppure traccia il grafico di una funzione che costituisca un controesempio.

167 Tenendo presente il grafico della funzione $f(x) = a^x$, con $a > 1$, e il fatto che è strettamente crescente in $\mathbf{R}$, deduci in base al teorema sull'esistenza del limite per le funzioni monotòne i limiti della funzione per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

168 Tenendo presente il grafico della funzione $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$, e il fatto che è strettamente decrescente in $\mathbf{R}$, deduci in base al teorema sull'esistenza del limite per le funzioni monotòne i limiti della funzione per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

169 Tenendo presente il grafico della funzione $f(x) = \log_a x$, con $a > 1$, e il fatto che è strettamente crescente in $\mathbf{R}$, deduci in base al teorema sull'esistenza del limite per le funzioni monotòne i limiti della funzione per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

170 Tenendo presente il grafico della funzione $f(x) = \log_a x$, con $0 < a < 1$, e il fatto che è strettamente decrescente in $\mathbf{R}$, deduci in base al teorema sull'esistenza del limite per le funzioni monotòne i limiti della funzione $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

171 Tenendo presente il grafico della funzione $f(x) = \tan x$ e il fatto che è strettamente crescente in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deduci in base al teorema sull'esistenza del limite per le funzioni monotòne i limiti della funzione per $x \to -\frac{\pi}{2}^+$ e per $x \to \frac{\pi}{2}^-$.

172 Tenendo presente il grafico della funzione $f(x) = \arctan x$ e il fatto che è strettamente crescente in $\mathbf{R}$, deduci in base al teorema sull'esistenza del limite per le funzioni monotòne i limiti della funzione per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

5. Le funzioni continue e l'algebra dei limiti

Teoria p. 75

Esercizi introduttivi

Test

173 Quanto vale $\lim\limits_{x\to2} x^3$?

A 2 B 4 C 6 D 8

174 Quanto vale $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

175 Quanto vale $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

176 Quanto vale $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

177 Quanto vale $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

178 Quanto vale $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin 3x$?

A 1 B 0 C -1 D $+\infty$

179 Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} 10^x$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

180 Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} 10^{-x}$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

181 Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

182 Quanto vale $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

183 Quanto vale $\lim_{x\to0^+} \log_5 x$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

184 Quanto vale $\lim_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{5}} x$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

185 Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} \arctan x$?

A $\frac{\pi}{2}$ B $-\frac{\pi}{2}$ C $-\infty$ D $+\infty$

186 Quale delle seguenti **non** è una forma indeterminata?

A $\frac{0}{0}$ B $\frac{0}{\infty}$ C $\frac{\infty}{\infty}$ D $0\cdot\infty$

187 Il limite per $x\to0^+$ di quale delle seguenti funzioni **non** si presenta sotto forma indeterminata?

A $f(x)=x\ln x$

B $f(x)=\tan x\cdot\ln x$

C $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

D $f(x)=\frac{x}{\tan x}$

188 **Vero o falso?**

a. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x=0$ V F

b. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x=-\infty$ V F

c. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ V F

d. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x}$ non ha senso V F

e. $\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}}x=+\infty$ V F

f. $\lim_{x\to0^-}x^{10}=0^-$ V F

g. $\lim_{x\to0^+}x^{-10}=+\infty$ V F

h. $\lim_{x\to-\infty}x^{10}=+\infty$ V F

i. $\lim_{x\to+\infty}x^{10}=+\infty$ V F

[6 affermazioni vere e 3 false]

189 **Associazione.** Associa a ciascun limite scritto nella prima colonna il suo risultato, scelto fra uno di quelli scritti nella seconda colonna.

a. $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}$

b. $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\log_2 x}$

c. $\lim_{x\to0^+}\log_2 x$

d. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$

e. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$

f. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$

A. 0

B. $+\infty$

C. 1

D. $-\infty$

190 Sapendo che $\lim_{x\to1} f(x)=2$, $\lim_{x\to1} g(x)=4$, calcola, se possibile, i valori dei seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to1}[2f(x)-g(x)]$

b. $\lim_{x\to1} f(x)g(x)$

c. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{[g(x)-4]^2}$

d. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{g(x)-4}$

Continuità e algebra dei limiti

191 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to0}\frac{1+\cos^2 x}{\log_2(x+8)}$ b. $\lim_{x\to3}\frac{x-5}{x^2-6x+9}$ c. $\lim_{x\to-\infty}(2^x+2^{-x})$

a. La funzione data è continua in $x=0$, in quanto rapporto di funzioni *continue*; ne segue che:

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\cos^2 x}{\log_2(x+8)}=\frac{1+\cos^2 0}{\log_2(0+8)}=\frac{1+1^2}{3}=\frac{2}{3}$$

continuità; $\cos 0 = 1$; $\log_2 8=\log_2 2^3=3$

b. Le due funzioni al numeratore e al denominatore sono *continue* in $x = 3$; pertanto:

$\lim_{x\to 3}(x-5) = 3-5 = -2$

$\lim_{x\to 3}(x^2-6x+9) = 3^2-6\cdot 3+9 = 0^+$ Per stabilire se il risultato è 0^+ o 0^- basta osservare che $x^2-6x+9=(x-3)^2$ è sempre non negativo

In base a quanto visto sulla parziale aritmetizzazione del simbolo di infinito:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-5}{x^2-6x+9} \qquad \begin{matrix}\to -2\\ \to 0^+\end{matrix}$$

Ricorda che $\frac{-2}{0^+}\to -\infty$

c. La funzione è la somma di due funzioni elementari di cui sappiamo calcolare il limite:

$\lim_{x\to-\infty}2^x = 0$ e $\lim_{x\to-\infty}2^{-x} = +\infty$

In base a quanto visto sulla parziale aritmetizzazione del simbolo di infinito:

$$\lim_{x\to-\infty}(2^x+2^{-x}) \qquad \begin{matrix}\to 0 & \to +\infty\end{matrix}$$

Ricorda che $0+(+\infty)\to+\infty$

Nota Rifletti sugli esempi proposti: le proprietà che ci hanno consentito il calcolo del limite sono state la continuità di alcune funzioni in gioco, i limiti di alcune funzioni elementari, i teoremi sull'algebra dei limiti e sulla parziale aritmetizzazione del simbolo di infinito. Utilizzando questi strumenti è possibile calcolare la maggior parte dei limiti che non si presentano sotto forme indeterminate.

192 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti limiti.

a. $\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{(x-3)^2} = \ldots\ldots$ ($x+1\to 4$, $(x-3)^2\to 0^+$) Ricorda che $\frac{4}{0^+}\to\ldots\ldots$

b. $\lim_{x\to 0^+}(x+\ln x) = \ldots\ldots$ ($x\to 0$, $\ln x\to-\infty$) Ricorda che $0+(-\infty)\to\ldots\ldots$

c. $\lim_{x\to+\infty}(1-x)\,e^x = \ldots\ldots$ ($1-x\to-\infty$, $e^x\to+\infty$) Ricorda che $(-\infty)(+\infty)\to\ldots\ldots$

d. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos 2x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\pi} = \ldots\ldots$

Calcola i seguenti limiti.

193 $\lim_{x\to 0}\frac{5}{x^2}$ [$+\infty$]

194 $\lim_{x\to -2}(x^4-x^3)$ [24]

195 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+3}$ [0]

196 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-1}$ [-1]

197 $\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1}$ [$+\infty$]

198 $\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{x-2}$ [$-\infty$]

199 $\lim_{x\to 3^+}\frac{x}{x-3}$ [$+\infty$]

200 $\lim_{x\to 3^-}\frac{x}{x-3}$ [$-\infty$]

201 $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}$ [$+\infty$]

202 $\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}$ [$-\infty$]

203 $\lim_{x\to -5^+}\frac{x}{x+5}$ [$-\infty$]

204 $\lim_{x\to -5^-}\frac{x}{x+5}$ [$+\infty$]

205 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ [1]

206 $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-2)^2}$ [$+\infty$]

207 $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

208 $\lim_{x\to 3}\frac{1-4x}{(x-3)^2}$ [$-\infty$]

209 $\lim_{x\to 4^+}\frac{2+x}{4-x}$ [$-\infty$]

210 $\lim_{x\to 5^-}\frac{x}{5-x}$ [$+\infty$]

211 $\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{9-x^2}$ [$-\infty$]

212 $\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{9-x^2}$ [$+\infty$]

213 $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x^2-1}$ [$-\infty$]

214 $\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x^2-1}$ [$+\infty$]

215 $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{xe^x}$ [0]

216 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+\cos^2 x}{\log_3(x+27)}$ [1]

217 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{x^2}{\tan x - 1}$ [∞]

218 $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+x^3)$ [$+\infty$]

219 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ [1]

220 $\lim\limits_{x\to +\infty} [x^3(1-2^x)]$ [$-\infty$]

221 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x^3-8}}{e^{x^4-16}}$ [1]

222 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+1}{(x-2)^3}$ [$-\infty$]

223 $\lim\limits_{x\to -\infty} (e^x+2x)$ [$-\infty$]

224 **Videolezione** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x - \cos x}{\tan x + \cos 2x}$ [1]

225 $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x}\ \ln x^2)$ [$+\infty$]

226 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2-4x+4}$ [$-\infty$]

227 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{\tan x}$ [0]

228 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\ln x}$ [0]

229 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x-2|}{x^2-2x}$ [$-\infty$]

230 $\lim\limits_{x\to 2} \{4x^2[\sin(x-2)+3\cos(x^2-4)]\}$ [48]

231 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\arctan x + \pi}$ [$+\infty$]

232 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+e^{-x}}{x^2+1}$ [0]

233 $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ [$-\infty$]

234 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + 2x}{x+\cos x}$ [0]

235 $\lim\limits_{x\to -\infty} (3^x+3^{-x}+1)$ [$+\infty$]

236 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x)}{\log_2(x+3)}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

237 $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x \ln x)$ [$-\infty$]

238 $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(x+2)+\ln x}{\ln x}$ [$-\infty$]

239 $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x + 2\ln(ex)}{\ln(e^2 x)}$ $\left[\dfrac{5}{3}\right]$

Calcolo di limiti mediante cambi di variabile

240 **ESERCIZIO SVOLTO**

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(4-x^2)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 4^+} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4-x}}$ **c.** $\lim\limits_{x\to 4^-} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4-x}}$

a. Poniamo $4-x^2=t$ e osserviamo che quando $x\to 2^-$ allora $t\to 0^+$ (infatti $\lim\limits_{x\to 2^-}(4-x^2)=0^+$). Pertanto:

$$\lim_{x\to 2^-} \ln(4-x^2) = \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$$

b. Poniamo $\dfrac{1}{4-x}=t$ e osserviamo che quando $x\to 4^+$ allora $t\to -\infty$ (infatti $\lim\limits_{x\to 4^+} \underbrace{\dfrac{1}{4-x}}_{\to \frac{1}{0^-}} = -\infty$). Pertanto:

$$\lim_{x\to 4^+} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4-x}} = \lim_{t\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^t = +\infty$$

c. Poniamo $\dfrac{1}{4-x}=t$ e osserviamo che quando $x\to 4^-$ allora $t\to +\infty$ (infatti $\lim\limits_{x\to 4^-} \underbrace{\dfrac{1}{4-x}}_{\to \frac{1}{0^+}} = +\infty$). Pertanto:

$$\lim_{x\to 4^-} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4-x}} = \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^t = 0$$

Nota Rifletti sugli ultimi due esempi. Poiché la funzione esponenziale $\left(\dfrac{1}{3}\right)^t$ ha comportamenti diversi a seconda che $t\to -\infty$ o $t\to +\infty$, per calcolare correttamente i limiti è stato *essenziale* stabilire il *segno* dell'infinito cui tende la variabile t. Una situazione analoga si ritrova ogni qualvolta si incontrano limiti di tipo esponenziale, in cui un esponente tende all'infinito: per calcolarli correttamente devi ricordare di prestare attenzione al *segno* dell'infinito.

Calcola i seguenti limiti.

241 $\lim_{x\to -2^+} \ln(x+2)$ $[-\infty]$

242 $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ $[+\infty]$

243 $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ $[0]$

244 $\lim_{x\to -3^+} \ln(9-x^2)$ $[-\infty]$

245 $\lim_{x\to -3^-} [x\ln(x^2-9)]$ $[+\infty]$

246 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan^2 x$ $[+\infty]$

247 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(2+e^{-x})}{x^2}$ $[0]$

248 $\lim_{x\to 3^-} [\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)]$ $[+\infty]$

249 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} [(1-x)\tan x]$ $[-\infty]$

250 $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}-x}$ $[0]$

251 $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}-1}$ $\left[\frac{2}{5}\right]$

252 $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}-x^2}$ $[0]$

253 $\lim_{x\to 2^+} 3^{\frac{1}{2-x}}$ $[0]$

254 $\lim_{x\to 2^-} 3^{\frac{1}{2-x}}$ $[+\infty]$

255 $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}}$ $[+\infty]$

256 $\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}}$ $[0]$

257 $\lim_{x\to 5^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-5}}$ $[0]$

258 $\lim_{x\to 5^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-5}}$ $[+\infty]$

259 $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

260 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin x \cdot \log \tan x$ $[+\infty]$

261 $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(\cos x)}{\sin(\sin x)}$ $[+\infty]$

262 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\arctan x}{x^2+2}$ $[0]$

263 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ $[0]$

264 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} e^{\tan x}$ $[0]$

265 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} e^{\tan x}$ $[+\infty]$

266 $\lim_{x\to +\infty} \arctan \ln x$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

267 $\lim_{x\to 0^+} \arctan \frac{1}{x}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Esercizi riassuntivi: calcolo di limiti che non presentano forme di indecisione

Calcola i seguenti limiti.

268 $\lim_{x\to -\infty} \left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ $[+\infty]$

269 $\lim_{x\to -\infty} \left(3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ $[3]$

270 $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{x}{x-5}$ $[-\infty]$

271 $\lim_{x\to 0^+} \left[\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)(e^x-2)\right]$ $[-\infty]$

272 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x+1}{\cos x}$ $[1]$

273 $\lim_{x\to +\infty} [x^2(1-e^x)]$ $[-\infty]$

274 $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\sin x-1}$ $[+\infty]$

275 $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$ $[-\infty]$

276 $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2-1}{x^3+1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

277 $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+2}\right)$ $[0]$

278 $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{\log_2 x}{2-\log_2 x}$ $[-\infty]$

279 $\lim_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}}+e^x\right)$ $[+\infty]$

280 $\lim_{x\to 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}}+e^x\right)$ $[1]$

281 $\lim_{x\to 4} \dfrac{\log_2 x-\log_4 x}{\log_x 16}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

282 $\lim_{x\to +\infty} e^{-\sqrt{x}}$ $[0]$

283 $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\tan x}{2x+\pi}$ $[-\infty]$

284 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{\dfrac{1}{x}+1}$ [$+\infty$]

285 $\lim\limits_{x\to0}2^{2x^2-1}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

286 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{x}$ [0]

287 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}$ [∞]

288 $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\cos x+3\cos 2x}{\sin x}$ [$-\infty$]

289 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x+\cos 2x}{\sin x+3\sin 2x}$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{12}\right]$

290 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\cos x-\cos 2x}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$ [6]

291 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin(e^x)$ [0]

292 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(e^{-x})$ [1]

293 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x-1}{\arctan x+1}$ $\left[\dfrac{\pi-2}{\pi+2}\right]$

294 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}$ [0]

295 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3^x}{x^2-6x+9}$ [$+\infty$]

296 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{\ln x}$ [0]

297 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{1-e^{-x}}$ [0]

Realtà e modelli

298 **Code al casello autostradale.** Una corsia Telepass di un casello autostradale può smaltire in media 6 veicoli al minuto. Supponi che arrivino alla corsia in media x veicoli al minuto, con $0\le x\le 6$. Sotto opportune ipotesi, si può verificare che il numero medio di veicoli in attesa è descritto dalla funzione:

$$T=\frac{x^2}{6(6-x)} \qquad [*]$$

Stabilisci il valore a cui tende il numero di veicoli in attesa quando $x\to0^+$ e quando $x\to6^-$ e interpreta il risultato in relazione alla situazione descritta. Traccia approssimativamente un grafico della funzione [*] nell'intervallo $0\le x\le 6$, tenendo conto dei limiti appena calcolati.



299 **Evoluzione di una popolazione di pesci.** Si prevede che la popolazione di una certa specie di pesci presente in un lago evolverà secondo il modello descritto dalla funzione $f(t)=\dfrac{0{,}5t+8}{t^2+2}$ dove $f(t)$ esprime il numero di unità, in migliaia, al tempo t (misurato in anni). Stabilisci il numero di individui della popolazione nell'istante iniziale di osservazione (corrispondente a $t=0$) e quale sarà l'evoluzione della popolazione dopo molti anni.

300 Per quali valori di k risulta $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{k^2+1}\right)^x=0$? [$k<-1\vee k>1$]

301 Per quali valori di k risulta $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)^{k^2+2k-3}=0$? [$-3<k<1$]

302 Per quali valori di k risulta $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{k^2+3}{2k^2+1}\right)^x=+\infty$? [$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$]

303 Per quali valori di k risulta $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{2k^2+4k}=0$? [$k<-2\vee k>0$]

304 Quale valore deve avere a affinché il risultato di $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2ax+a+1}{x^2-1}$ sia un numero reale? In corrispondenza di tale valore di a, qual è il valore del limite? $\left[a=-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right]$

305 Quale valore deve avere a affinché il risultato di $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2+3ax+4a-1}{x^2-1}$ sia un numero reale? In corrispondenza di tale valore di a, qual è il valore del limite? $\left[a=\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right]$

6. Forme di indecisione di funzioni algebriche

Teoria p. 82

Esercizi introduttivi

306 Vero o falso?

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}=2$ V F

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^3+1}=+\infty$ V F

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x^3}{x^5+1}=0$ V F

d. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ e la forma di indecisione si può risolvere scomponendo numeratore e denominatore e semplificando il fattore $(x-1)$ V F

e. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ e per risolvere la forma di indecisione è utile moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{x}-1$ V F

f. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ e per risolvere la forma di indecisione è utile moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{x}+2$ V F

g. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$ si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$ V F

[4 affermazioni vere e 3 false]

Test

307 A che cosa è uguale $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-4x^2-10x+1)$?

A $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$ B $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^2$ C $\lim\limits_{x\to+\infty}-10x$ D Nessuno dei precedenti

308 A che cosa è uguale $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-4x^4+10x^2+1)$?

A $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$ B $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^4$ C $\lim\limits_{x\to+\infty}10x^2$ D Nessuno dei precedenti

309 A che cosa è uguale $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-10x^2+1}{4x^2+1}$?

A $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10x^2}{4x^2}$ B $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4}{4x^2}$ C $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4x^2}$ D Nessuno dei precedenti

310 Se $P(x)$ è un polinomio di grado 4 e $Q(x)$ è un polinomio di grado 5, quanto vale $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$?

A 0 C $-\infty$

B $+\infty$ D È finito, ma le informazioni non sono sufficienti per stabilirne il valore.

311 Se $P(x)$ è un polinomio di grado 5 e $Q(x)$ è un polinomio di grado 4, quanto vale $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$?

A 0 C 1

B $+\infty$ o $-\infty$ D È finito, ma le informazioni non sono sufficienti per stabilirne il valore.

312 Se $P(x)$ è un polinomio di grado 4 e $Q(x)$ è un polinomio tale che $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=+\infty$ allora il grado di $Q(x)$ è:

A minore di 4 C maggiore di 4

B uguale a 4 D Le informazioni non sono sufficienti a dire qualcosa sul grado di $P(x)$

Forme indeterminate di funzioni razionali

313 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3+2x^2+1)$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1}{8x^2-1}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3+1}{8x^2-1}$ d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1}{8x^3-1}$

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3+2x^2+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}4x^3=$ .....

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1}{8x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{8x^2}=$ .....

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3+1}{8x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{8x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=$ .....

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1}{8x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{8x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=$ .....

Calcola i limiti delle seguenti funzioni polinomiali.

314 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-48x-100)$ [$+\infty$]

315 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5x-1)$ [$-\infty$]

316 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-5x^2-1)$ [$+\infty$]

317 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-5x^3-1)$ [$-\infty$]

318 $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3+5x^4-2x-1)$ [$+\infty$]

319 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3+5x^2-1\right)$ [$+\infty$]

320 $\lim\limits_{x\to-\infty}[(1-\sqrt{2})x^3-5x^2-1]$ [$+\infty$]

321 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(-\sqrt{3}+2)x^3-6x^2-2]$ [$+\infty$]

322 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)^2$ [$+\infty$]

323 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)^2$ [$+\infty$]

324 $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x^2)^2$ [$+\infty$]

325 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^3$ [$+\infty$]

326 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^3$ [$-\infty$]

327 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)^3$ [$-\infty$]

Calcola i seguenti limiti, che si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

328 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+1}$ [$+\infty$]

329 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+x}$ [2]

330 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{2x+1}$ [$+\infty$]

331 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^3}{2x^4+1}$ [0]

332 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{x}$ [$-\infty$]

333 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-3x+2}$ [1]

334 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+6x+5}{x+4}$ [$-\infty$]

335 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10x^4-x^3+1}{5x^4-x-1}$ [2]

336 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+6x+5}{x^2+4}$ [$+\infty$]

337 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^2-x+1}{4x^2-x-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

338 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-16}{5x^3+1}$ [0]

339 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+6x+5}{x+4}$ [$+\infty$]

340 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+6x+5}{x^5+4}$ [0]

341 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-10x^2}{4x^2-1}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

342 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{x+3}-\frac{x}{x+1}\right)$ [2]

343 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{8x-1}{2x+3}-\frac{x}{x^2+1}\right)$ [4]

344 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x}{x+1}\right)$ [$+\infty$]

345 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+4}-\frac{x^2}{x+1}\right)$ [$-\infty$]

346 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+4}-\frac{x^2}{x+1}\right)$ [-3]

347 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{4x^2}{2x+1}\right)$ [$-\infty$]

348 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x^2}{x-2}\right)$ [-5]

349 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x+4}$ [$+\infty$]

350 Videolezione $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^2}{(4x-1)^2}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

351 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-x^3)^2}{(x^2+1)^3}$ [1]

352 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-4x^3)^2}{(2x^2+1)^3}$ [2]

353 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio di due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ tali che $\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=1$ e $\lim_{x\to+\infty}[P(x)-Q(x)]=+\infty$.

354 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio di due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ tali che $\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to+\infty}[P(x)-Q(x)]=+\infty$.

Calcola i seguenti limiti, che si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

355 $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}$ [2]

356 $\lim_{x\to2}\frac{4x-x^3}{x-2}$ [−8]

357 $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+4x}{x^2+4x+4}$ [∞]

358 $\lim_{x\to-3}\frac{9-x^2}{x^2+3x}$ [−2]

359 $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2-8x+16}$ [∞]

360 $\lim_{x\to9}\frac{x^2-81}{x-9}$ [18]

361 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ [4]

362 $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

363 $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

364 $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-1}{x}$ [−2]

365 $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

366 $\lim_{x\to5}\frac{x^3-25x}{x-5}$ [50]

367 **Videolezione** $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{(x-2)^3}$ [+∞]

368 $\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^2-4}{x^2+2x}$ [2]

369 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+4x-12}$ [0]

370 $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ [3]

371 $\lim_{x\to1}\frac{x^7-x^6}{x^5-x^4}$ [1]

372 $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x^2-2x}$ [16]

373 $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{27x^3-1}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

374 $\lim_{x\to0}\frac{3x^2+2x^3+x^4}{4x^2-x^4-x^6}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

375 $\lim_{x\to0}\frac{x^3+10x^5}{4x+x^2+5x^3}$ [0]

376 $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

377 $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{2x^2+3x+1}$ [2]

378 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

379 $\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{2x^2+x-1}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

380 $\lim_{x\to1}\frac{x^5-1}{x-1}$ [5]

381 $\lim_{x\to1}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2+2x-3}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

382 $\lim_{x\to1}\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-2x+1}$ [∞]

383 $\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2+3x-10}$ $\left[\frac{6}{7}\right]$

384 $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{x^4+x^2-2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

Giustificare e argomentare

385 Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi *completi* e dello *stesso grado*. È corretto affermare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ esiste finito e diverso da zero? Puoi dire altrettanto per $\lim_{x\to0}\frac{P(x)}{Q(x)}$?

Forme indeterminate di funzioni irrazionali

386 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

a. Il limite si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$. Per «rimuovere» l'indeterminazione razionalizziamo il numeratore.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=$ — Limite da calcolare

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}=$ — Moltiplicando per il fattore razionalizzante

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+9)-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=$ — Osserva che $(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)=(\sqrt{x+9})^2-3^2$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+9}+3)}=$ — Semplificando il fattore x (ciò è lecito perché nel calcolo di un limite per $x\to 0$ si può supporre $x\neq 0$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\dfrac{1}{6}$

b. Si può procedere in due modi.

1° modo

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Per «rimuovere» l'indeterminazione poniamo anzitutto $\sqrt[3]{x}=t$, da cui segue che $x=t^3$. Quando $x\to 8$, allora $t\to 2$, quindi siamo ricondotti al seguente limite, che calcoliamo:

$\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t-2}{t^3-8}=$ — Limite cui ci siamo ricondotti con la sostituzione

$=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t-2}{(t-2)(t^2+2t+4)}=$ — Scomponendo il denominatore come differenza di cubi, ricordando l'identità $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{1}{t^2+2t+4}=\dfrac{1}{12}$

2° modo

L'esercizio può essere risolto anche senza operare la sostituzione, procedendo come segue:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=$$

formula di scomposizione della differenza di due cubi

$$=\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

Calcola i seguenti limiti, che si presentano sotto la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.

387 $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ $\left[\dfrac{1}{10}\right]$

388 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ [6]

389 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x-5}-2}{x-9}$ $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

390 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-8x+16}$ [∞]

391 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ [-1]

392 $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}$ [2]

393 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ [1]

394 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{6-x}}$ [$\sqrt{3}$]

395 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ $\left[\dfrac{1}{32}\right]$

396 $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-9}$ [$+\infty$]

397 $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{8-x}-2}{2x-8}$ $\left[-\dfrac{1}{8}\right]$

398 $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{3x}}{\sqrt{x-3}}$ [0]

399 $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}}$ $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$

400 $\lim_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ [12]

401 $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{1-\sqrt[3]{x}}$ [−6]

402 $\lim_{x\to -27} \dfrac{x+27}{3+\sqrt[3]{x}}$ [27]

403 $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{2-\sqrt[3]{4x}}$ [−15]

404 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$ **b.** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

a. Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Per rimuovere l'indeterminazione procediamo come segue, operando opportuni raccoglimenti.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)=$ — Limite da calcolare

$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-2x\right)=$ — Raccogliendo x^2 nel radicando

$=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-2x\right)=$ — Trasportando fuori dal segno di radice occorre ricordare di porre il valore assoluto

$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-2\right)=$ — Osservando che $|x|=x$ per $x\geq 0$, quindi $|x|=x$ per $x\to+\infty$, e raccogliendo x

$=-\infty$ — Il limite si presenta ora nella forma $+\infty\cdot(-1)$

b. Il limite si presenta anche in questo caso nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Se procedessimo come nell'esempio precedente operando soltanto dei raccoglimenti (prova a farlo per esercizio) non riusciremmo però a rimuovere l'indeterminazione, ma soltanto a trasformarla nella forma $0\cdot\infty$. In questo caso occorre operare una razionalizzazione.

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=$ — Limite da calcolare

$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right]=$ — Moltiplicando per il fattore razionalizzante

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$ — Osserva che $\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-x^2$

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}-x}=$ — Eseguendo opportuni raccoglimenti

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-x}=$ — Trasportando fuori dal segno di radice occorre ricordare di porre il valore assoluto

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=$ — Osservando che $|x|=-x$ per $x<0$, e quindi $|x|=-x$ per $x\to-\infty$, e raccogliendo $-x$

$=\lim_{x\to-\infty}-\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=-\dfrac{1}{2}$ — Semplificando e osservando che $\dfrac{1}{x}\to 0$ per $x\to-\infty$

Nota Rifletti in questi esercizi sull'utilizzo del valore assoluto quando si effettua un trasporto fuori dal segno di radice nel calcolo dei limiti: $|x|=x$ per $x\to+\infty$ e $|x|=-x$ per $x\to-\infty$.

Calcola i seguenti limiti, che si presentano sotto la forma indeterminata $+\infty - \infty$.

405 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+3}\right)$ [0]

406 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2-\sqrt{4x^2-3x-1}\right)$ $[-\infty]$

407 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

408 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+2}\right)$ $[-1]$

409 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)$ [3]

410 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{2x^2-x-1}\right)$ $[-\infty]$

411 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

412 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)$ $[-2]$

413 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+2}-\sqrt{4x^2+1}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

414 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{1+x}\right)$
(*Suggerimento*: ricorda l'identità $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.) [0]

415 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right)$
(*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente.) $\left[\frac{2}{3}\right]$

---

416 **Caccia all'errore.** Valerio afferma che il limite $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$ è una forma indeterminata e lo risolve così:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0$$

Quale errore ha commesso Valerio?

Calcola i seguenti limiti, che si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

417 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2-1}$ [0]

418 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{9x}-1}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

419 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x+2}$ [0]

420 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x}+1}{1-\sqrt{x}}$ $[-2]$

421 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$ $[+\infty]$

422 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}+1}$ [1]

423 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ $[+\infty]$

424 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

425 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{1-x}$ $[-1]$

426 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$ $[+\infty]$

427 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x+1}$ [2]

428 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

429 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x+1}$ $[-2]$

430 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$ [1]

431 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^4-1}-\sqrt{x^4-1}}{x^2}$ $[\sqrt{2}-1]$

432 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$ $[-1]$

433 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}$ [0]

434 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2-1}-2x}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

435 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2-1}-2x}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$ $[-\infty]$

436 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+\sqrt[5]{1+x^5}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+4x^2}}$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$

437 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+\sqrt[4]{1+x^4}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+4x^2}}$ [0]

Esercizi riassuntivi: calcolo dei limiti di funzioni algebriche

Calcola i seguenti limiti.

438 $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x}$ $[-\infty]$

439 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ $[0]$

440 $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)^2}{x^2+1}$ $[4]$

441 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ $[-2]$

442 $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{2x^2-6x}$ $[0]$

443 $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{4x^2+x}}{x-1}$ $[2]$

444 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

445 $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}-\sqrt{x^2+9}\right)$ $[-\infty]$

446 $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{4x^2-1}{x^2+1}}$ $[2]$

447 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5-3}{x^2+x+1}$ $[+\infty]$

448 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x+1}}$ $[0]$

449 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x+1}$ $[1]$

450 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+4}-2}$ $[\sqrt{2}]$

451 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1}-\frac{x^2+2}{x+2}\right)$ $[1]$

452 $\lim_{x\to-\infty} (2x-\sqrt{x^2+1})$ $[-\infty]$

453 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{4x+1}}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

454 $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+5}$ $[0]$

455 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$ $[0]$

456 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^3+1}{x^2-1}\right)$ $[-1]$

457 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x+1}}$ $[0]$

458 $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

459 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-4x}$ $\left[-\frac{1}{8}\right]$

460 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x}{2x-1}\right)$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

461 $\lim_{x\to-10} \frac{x^3+1000}{x^2-100}$ $[-15]$

462 $\lim_{x\to 100} \frac{\sqrt{x}-10}{x-100}$ $\left[\frac{1}{20}\right]$

463 $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2-x^2}{(x-1)^2+x^2}$ $[0]$

464 $\lim_{y\to 3} \frac{y^2-y-6}{y^2+y-12}$ $\left[\frac{5}{7}\right]$

465 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}$ $[-\sqrt{3}]$

466 $\lim_{x\to 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$ $[108]$

467 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{9x^2-1}{x^2+1}-\frac{1}{x}}$ $[3]$

468 $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{x^2+x-2}{x^2-x}\right)$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

469 $\lim_{t\to-1} \frac{2t^2+2t}{2t^2+3t+1}$ $[2]$

470 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x-2}+\frac{x+2x^3}{4x^3+x+1}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

471 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{9x^2+1}}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

472 $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{9x^2+1}}$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$

473 $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+2h}-1}{h}$ $[1]$

474 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)$ $[-4]$

475 $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+1}-2x-1)$ $[-1]$

476 $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{2x-x^2}$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

477 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-x}$ $[-1]$

478 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x+\sqrt{x^2+1}}$ $[-\infty]$

ESERCIZI

479 $\lim_{t\to 2}\frac{2t^2-8}{(2t-3)^2-1}$ [2]

480 $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+4}-2x)$ [$-\infty$]

481 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5}}{x+3}$ [-2]

482 $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2-16})$ [0]

483 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(2x-1)^2-(x+2)^2}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

484 $\lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-3}-\frac{6}{x-9}\right)$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

E se?

485 $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x|x|+x+1}{x^2-1}$

▸ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x\to-\infty$? [2; sì: 4]

486 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+|x^2-4|}{2x^2-|x^2-4|}$

▸ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x\to-\infty$? [3; no]

487 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x}+\sqrt{4x}}{2+\sqrt{9x}}$ [1]

488 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^3-x-6}$ $\left[\frac{2}{11}\right]$

489 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

490 $\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^4-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

491 $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+2x+2}{x^2-1}$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

492 $\lim_{x\to a}\frac{(x+2a)^2-9x^2}{x^2-a^2}$, con $a\neq 0$ [-6]

493 $\lim_{x\to a}\frac{x^2+2ax-3a^2}{x^2-3ax+2a^2}$, con $a\neq 0$ [-4]

494 $\lim_{x\to k}\frac{(x+k)^3-k^3}{x}$ [$7k^2$]

495 $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x)$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

496 Determina, al variare di $n\in\mathbb{N}$, $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^n}{x^2+3x-10}$. [Se $n=0$, il limite vale ∞, se $n=1$, vale $\frac{1}{7}$, se $n>1$, vale 0]

497 Determina, al variare di $n\in\mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^n}{x^2+3x-10}$. [Se $n<2$, il limite vale 0, se $n=2$, vale 1, se $n>2$, vale $+\infty$]

498 Determina k in modo che $\lim_{x\to k}\frac{x^2-4x-5}{x-k}$ esista finito. In corrispondenza di questi valori di k, calcola il limite. [$k=-1\vee k=5$; per $k=-1$ il limite vale -6, per $k=5$ il limite vale 6]

499 Determina k in modo che $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+k}{x^2-4}$ esista finito. In corrispondenza di questo valore di k, calcola il limite. $\left[k=6;\ \text{il limite vale } -\frac{1}{4}\right]$

500 Determina a e b in modo che $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{2x-1}-ax-b\right)=-1$. $\left[a=\frac{1}{2},\ b=\frac{7}{4}\right]$

501 Determina a e b in modo che il $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x+1}-ax-b\right)=-10$ [$a=1,\ b=6$]

502 Determina $a>0$ in modo che $\lim_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}=2$. $\left[a=\frac{1}{4}\right]$

503 Determina k in modo che $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+k}-x\right)=3$. [$k=6$]

504 Determina k in modo che $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+k}+x\right)=4$. [$k=8$]

Problemi che conducono al calcolo del limite di una funzione algebrica

Problemi dalla realtà

505 ESERCIZIO SVOLTO

Si prevede che la popolazione di una città evolverà secondo il modello descritto dalla funzione:

$$f(t)=\frac{10t^2+30}{t^2+2}$$

dove $f(t)$ esprime il numero di abitanti della città, in migliaia, al tempo t (misurato in anni).
Stabilisci il numero di individui della popolazione nell'istante iniziale di osservazione (corrispondente a $t=0$) e quale sarà l'evoluzione della popolazione dopo molti anni.



- Per determinare il numero di abitanti della città nell'istante iniziale di osservazione occorre calcolare il valore della funzione f in $t=0$. Poiché $f(0)=\frac{30}{2}=15$ e questo numero rappresenta le *migliaia* di abitanti, concludiamo che nell'istante iniziale gli abitanti della città erano 15 000.
- Per stabilire l'evoluzione della popolazione dopo molti anni, occorre calcolare il limite della funzione f quando $t\to+\infty$. Poiché:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{10t^2+30}{t^2+2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{10t^2}{t^2}=10$$

concludiamo che, a lungo andare, la popolazione della città tende a stabilizzarsi avvicinandosi al valore limite di 10 000 abitanti.

506 **Batteri.** Il numero di unità da cui è composta una popolazione di batteri dopo un tempo t dall'istante iniziale di osservazione è descritto dalla funzione:

$$N(t)=400\left(2+\frac{3t}{40+t^2}+\frac{t+2}{t+1}\right)$$



Quanti batteri erano presenti nella colonia all'inizio dell'osservazione ($t=0$)? Qual è l'evoluzione della popolazione di batteri nel lungo periodo?
[1600; la popolazione tende a una soglia limite di 1200 unità]

507 **Pezzi difettosi.** La frazione di pezzi difettosi prodotti da un nuovo operaio dopo un tempo t dall'assunzione è ben modellizzata dalla funzione $f(t)=\frac{2t+60}{80(t+1)}$, dove t è misurato in giorni. A lungo andare, a quale soglia si avvicina la percentuale di pezzi difettosi prodotti dall'operaio secondo questo modello? [2,5%]

508 **Evoluzione di una popolazione/1.** L'evoluzione della popolazione di una certa specie è espressa da una funzione della forma:

$$P(t)=\frac{ht^2+5t+k}{40+t^2}$$

dove t è il tempo (misurato in anni) e $P(t)$ rappresenta il numero di unità della popolazione, mentre h e k sono due costanti. Sapendo che nell'istante iniziale ($t=0$) la popolazione era composta da 50 unità e che, a lungo andare, la popolazione tende a estinguersi, determina i valori di h e k. [$h=0$, $k=2000$]

509 **Evoluzione di una popolazione/2.** L'evoluzione della popolazione di una certa specie è espressa da una funzione della forma:

$$P(t)=k\left(\frac{t}{50+t^2}+\frac{ht+100}{2t+10}\right)$$

dove t è il tempo (misurato in anni) e $P(t)$ rappresenta il numero di elementi della popolazione, mentre h e k sono due costanti. Sapendo che nell'istante iniziale ($t=0$) la popolazione era composta da 3500 unità e che, a lungo andare, la popolazione tende a una soglia limite di 7000 unità, determina i valori di h e k. [$k=350$, $h=40$]

510 **Un investimento.** Paolo investe alla fine di ogni anno, per 8 anni, 2000 euro al tasso annuo composto uguale a i. Il montante generato dal capitale complessivamente investito all'atto dell'ultimo versamento effettuato è dato dalla formula $M = 2000\dfrac{(1+i)^8-1}{i}$. Calcola il limite cui tende M quando il tasso i tende a zero e interpreta il risultato in relazione al problema. [16 000 euro]

511 **Velocità media.** Laura si reca con la propria auto a un outlet che dista 30 km dalla sua abitazione. Durante il viaggio di andata, la velocità media dell'auto di Laura è stata di 60 km/h. Durante il viaggio di ritorno, la velocità media è stata di x km/h. Sia $v(x)$ la funzione che esprime la velocità media dell'auto di Laura nell'intero tragitto di andata e di ritorno.

a. Determina l'espressione analitica della funzione $v(x)$.

b. Calcola i limiti di $v(x)$ quando $x \to 0^+$ e quando $x \to +\infty$, interpretando i risultati ottenuti.

[**a.** $v(x) = \dfrac{120x}{x+60}$; **b.** 0, 120]

Matematica e chimica

512 Secondo l'equazione di Michaelis-Menten, quando un enzima si combina con un substrato, la velocità iniziale V_0 di reazione (in μM/min) è espressa in funzione della concentrazione S del substrato (μM) dalla funzione:

$$V_0 = \frac{V_m S}{K+S} \qquad [*]$$

dove V_m e K sono costanti.

a. A quale velocità limite si avvicina la velocità di reazione quando $S \to +\infty$? Traccia un grafico della funzione [*], tenendo conto del limite appena calcolato.

b. In corrispondenza di quale concentrazione la velocità di reazione risulta il 30% della velocità limite? In corrispondenza di quale concentrazione risulta il 50%? E il 90%?

[**a.** V_m; **b.** $S = \dfrac{3K}{7}$, $S = K$, $S = 9K$]

513 Una cisterna contiene 800 litri di una miscela di acqua e sale, in cui la concentrazione del sale è di 0,1 kg/L. Si inizia a fare fluire nella cisterna, alla velocità di 30 L/min, una seconda miscela sempre di acqua e sale, ma in cui la concentrazione del sale è di 0,2 kg/L. La miscela immessa si mescola istantaneamente a quella già presente e la miscela così ottenuta esce da uno scarico alla velocità di 15 L/min. In queste ipotesi, si può dimostrare che la quantità $q(t)$ di sale (in kilogrammi) contenuta nella miscela presente nella cisterna al tempo t (in minuti) è espressa dalla funzione $q(t) = 3t + 160 - \dfrac{12800}{3t+160}$.



Determina l'espressione analitica della funzione $C(t)$ che esprime la concentrazione (in kg/l) del sale contenuto nella miscela presente nella cisterna all'istante t e calcola il limite di $C(t)$ quanto t tende a infinito. Interpreta il risultato trovato in relazione al problema.

$\left[C(t) = \dfrac{q(t)}{15t+800};\ 0{,}2 \text{ kg/L}\right]$

Matematica e fisica

514 Due punti materiali si muovono su una retta secondo le leggi orarie $x_1(t) = \sqrt{4t^2+5t+1}$ e $x_2(t) = 2t + k$ (dove x è espressa in metri). Sapendo che i due punti si trovano nella stessa posizione quando $t = 0$, determina la costante k e stabilisci quale sarà la distanza tra i due punti dopo un tempo infinito. [$k = 1$; 0,25 m]

515 Due punti materiali si muovono su una retta secondo le leggi orarie $x_1(t) = \sqrt{9t^2+21t+4}$ e $x_2(t) = 3t + k$ (dove x è espressa in metri). Sapendo che i due punti si trovano nella stessa posizione quando $t = 0$, determina la costante k e stabilisci quale sarà la distanza tra i due punti dopo un tempo infinito. [$k = 2$; 1,5 m]

Problemi di geometria

516 Sia ABC un triangolo rettangolo, di ipotenusa BC, in cui $A\hat{C}B = 60°$ e $\overline{AB} = \sqrt{3}$. Sulla semiretta di origine A, contenente B, considera un punto P e indica con x la sua distanza da A. Calcola il limite cui tende la differenza $\overline{PC} - \overline{PA}$ quando $x \to +\infty$. [Si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; 0]

517 Un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, ha i lati obliqui che misurano $2a$ e l'angolo al vertice di ampiezza 120°. Considera un punto P sul lato BC e indica con x la sua distanza da B. Calcola il limite cui tende il rapporto $\dfrac{\overline{AB}-\overline{AP}}{\overline{BP}}$ quando il punto P tende a B.

$\left[\text{Si giunge a dover calcolare } \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2a-\sqrt{x^2-2a\sqrt{3}x+4a^2}}{x};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

518 Le misure dei cateti di un triangolo rettangolo sono x e 2. Determina il limite cui tende il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo, quando $x \to +\infty$.

$\left[\text{Si giunge a dover calcolare } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x+2-\sqrt{x^2+4}\right);\ 1\right]$

519 Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB, in cui $A\hat{C}B = 135°$ e i lati obliqui misurano a. Considera un punto P sul lato BC e indica con x la sua distanza da C. Calcola il limite del rapporto $\frac{\overline{AP}-\overline{AC}}{\overline{PC}}$ quando il punto P tende a C.

$\left[\text{Si giunge a dover calcolare } \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+a\sqrt{2}x+a^2}-a}{x};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

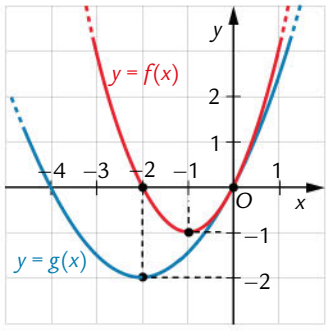
520 Dato un quadrato $ABCD$, di lato a, sia P un punto sul prolungamento di AB dalla parte di B. Indica con x la distanza di P da B e calcola il limite cui tende la differenza $\overline{PD}-\overline{PC}$ quando $x \to +\infty$.

$\left[\text{Si giunge a dover calcolare } \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2ax+2a^2}-\sqrt{x^2+a^2}\right);\ a\right]$

Problemi di geometria analitica

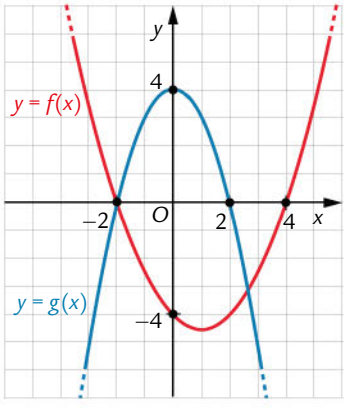
Interpretazione dei grafici

521 In figura sono rappresentate due parabole con asse verticale. Dopo avere individuato le equazioni delle due parabole, calcola $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.



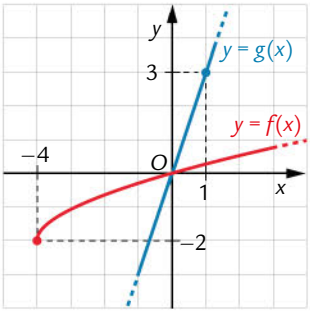
[1,2]

522 In figura sono rappresentate due parabole con asse verticale. Dopo avere individuato le equazioni delle due parabole, calcola $\lim_{x\to-2} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.



$\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$

523 In figura sono rappresentati il grafico di una funzione f di equazione del tipo $y = \sqrt{x+a}+b$ e quello di una retta g di equazione della forma $y = kx$. Dopo avere individuato i valori dei parametri a, b, k, calcola il $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.



$\left[\frac{1}{12}, 0\right]$

524 Considera la parabola di equazione $y = x^2 - 2x$.

a. Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola nel suo punto P di ascissa 4.

b. Considera sulla parabola un punto Q di ascissa positiva ed esprimi in funzione di x il coefficiente angolare m_{PQ} della retta PQ.

c. Calcola $\lim\limits_{x\to 4} m_{PQ}$. Come si può interpretare il risultato ottenuto in relazione a quanto ricavato al punto **a**?

[**a.** $y = 6x - 16$; **b.** $m_{PQ} = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$; **c.** 6]

525 Scrivi l'equazione della parabola γ, con asse parallelo all'asse y, passante per i punti $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ e $B(5, 5)$. Sia r la retta OB e s la retta parallela all'asse x passante per B. Sull'arco $\overset{\frown}{OB}$ della parabola γ, considera un punto P di ascissa x e indica con H la sua proiezione sulla retta r e con K la sua proiezione sulla retta s. Calcola il limite del rapporto $\dfrac{PH\sqrt{2}}{PK}$ al tendere di P a B.

[**a.** $y = x^2 - 4x$; **b.** $r: y = x$, $s: y = 5$, si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5x - x^2}{5 - x^2 + 4x}$, che è uguale a $\dfrac{5}{6}$]

526 Data la parabola di equazione $y = x^2$, considera su di essa un punto P, di ascissa a, con $a > 0$.

a. Scrivi l'equazione della retta t, tangente alla parabola in P, e della retta n, normale alla parabola in P.

b. Indica con A il punto in cui la tangente interseca l'asse x e con B il punto in cui la normale interseca l'asse y. Detta O l'origine degli assi, calcola il limite del rapporto tra l'area del triangolo PAB e l'area del triangolo AOB, quando $a \to +\infty$.

[**a.** $t: y = 2ax - a^2$, $n: y = -\dfrac{1}{2a}x + a^2 + \dfrac{1}{2}$; **b.** $A\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(0, a^2 + \dfrac{1}{2}\right)$; si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{4a^2 + 1}{2a^2 + 1}$, uguale a 2]

527 Considera l'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Sia r l'asintoto dell'iperbole che giace nel primo e nel terzo quadrante. Indica con P un punto dell'iperbole di ascissa x appartenente al primo quadrante e con Q il punto dell'asintoto r avente la stessa ascissa di P. Calcola il limite della lunghezza del segmento PQ quando $x \to +\infty$.

[Si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)$, che è uguale a 0]

528 Considera la circonferenza γ, avente centro nell'origine e passante per il punto $P(4, 3)$.

a. Scrivi l'equazione di γ.

b. Scrivi l'equazione della retta r, tangente alla circonferenza in P.

c. Considera un punto Q sulla circonferenza γ, appartenente al primo quadrante, di ascissa x ed esprimi in funzione di x il coefficiente angolare m_{PQ} della retta PQ.

d. Calcola $\lim\limits_{x\to 4} m_{PQ}$. Come si può interpretare il risultato ottenuto in relazione a quanto ricavato al punto **b**?

[**a.** $x^2 + y^2 = 25$; **b.** $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{25}{3}$; **c.** $m_{PQ} = \dfrac{\sqrt{25 - x^2} - 3}{x - 4}$; **d.** $-\dfrac{4}{3}$]

529 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$, tangente in B alla retta di equazione $y = -4(x - 2)$. Sia V il vertice della parabola e P un punto di ordinata t appartenente all'asse della parabola. Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\overline{PB} - \overline{PV}\right)$

b. $\lim\limits_{t\to-\infty} \left(\overline{PB} - \overline{PV}\right)$

[$y = 4 - x^2$; **a.** si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\sqrt{t^2 + 4} - t + 4\right)$, che è uguale a 4; **b.** si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{t\to-\infty} \left(\sqrt{t^2 + 4} + t - 4\right)$, che è uguale a -4]

7. Forme di indecisione di funzioni trascendenti

Teoria p. 85

Esercizi introduttivi

Test

530 Quanto vale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$?

A 0 B -1 C 1 D $+\infty$

531 Quanto vale $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$?

A 0 B $-\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{2}$ D $+\infty$

532 Quanto vale $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$?

A 0 B 1 C $\ln 3$ D $\frac{1}{\ln 3}$

533 Quanto vale $\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(x+1)}{x}$?

A 0 B 1 C $\ln 3$ D $\frac{1}{\ln 3}$

534 Quanto vale $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$?

A e B e^2 C e^{-2} D $\frac{2}{e}$

535 Quanto vale $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$?

A e B $-e$ C 0 D $+\infty$

536 **Associazione.** Associa a ogni limite nella prima riga il suo risultato, scelto tra quelli della seconda.

a. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$ b. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(x+1)}{x}$ c. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{2x}$ d. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ e. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$

A. $\ln 2$ B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{\ln 2}$ E. e^2

Forme indeterminate di funzioni goniometriche

537 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ b. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ c. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin 2x}{x}$ d. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{3x^2}$

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=$ .....

b. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=$ .....

c. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$ .....

d. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$ .....

Calcola i seguenti limiti, ricordando i limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

538 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ [0]

539 $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}$ [1]

540 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ [1]

541 **Videolezione** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ [0]

542 $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{3x-\sin x}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

543 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos x}{x^2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

544 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$ [7]

545 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ [0]

546 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin 5x}{\sin x^2}$ [10]

547 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 3x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

548 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x\,(1-\cos x)}{x^3}$ [2]

549 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^3}$ [∞]

550 $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+3\cos x)\sin x}{x}$ [4]

551 $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-4\cos x)\sin x}{3x}$ $\left[-\frac{4}{3}\right]$

552 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x}{x}$ [3]

553 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos x}$ [18]

554 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 x}$ [8]

555 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos^2 x}$ [0]

556 $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{4x^3}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

557 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-2\cos x+\cos^2 x}{x^4}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

558 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\cos 2x-\cos x}$ [∞]

559 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^4\sin x}{1-2\cos x+\cos^2 x}$ [0]

560 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x(1-\sin x)$ **b.** $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\cos x+\cos 2x}{(\pi-x)^2}$

a. Si ottiene la forma indeterminata $0\cdot\infty$. Riportiamo anzitutto il limite nella forma $\frac{0}{0}$.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x(1-\sin x)=$ **Limite da calcolare**

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x(1-\sin x)}{\cos x}=$ **Riscrivendo la tangente come rapporto tra seno e coseno**

Per eliminare l'indeterminazione, cerchiamo di eseguire delle «manipolazioni» che ci consentano di mettere in evidenza il termine «cos x» anche al numeratore in modo da poterlo semplificare con il denominatore. A tale scopo moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(1+\sin x)$.

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=$ **Moltiplicando numeratore e denominatore per $(1+\sin x)$**

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cdot\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=$ **Ricorda che $1-\sin^2 x=\cos^2 x$**

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin x}=$ **Semplificando $\cos x$**

$=\dfrac{1\cdot 0}{1+1}=0$

b. Per il calcolo del limite dato conviene operare la sostituzione $\pi-x=t$, da cui $x=\pi-t$.
Quando $x\to\pi$, allora $t\to 0$, quindi siamo ricondotti al seguente limite, che calcoliamo.

$\lim_{t\to 0}\dfrac{\cos(\pi-t)+\cos(2\pi-2t)}{t^2}=$ **Limite cui siamo ricondotti con la sostituzione**

$=\lim_{t\to 0}\dfrac{-\cos t+\cos 2t}{t^2}=$ **Ricordando le relazioni tra il coseno di angoli opposti e supplementari**

Si può procedere ora in due modi diversi.

1° modo

$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t+\cos 2t-1}{t^2} =$ Aggiungendo e sottraendo 1 al numeratore

$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1-\cos t}{t^2} - \frac{1-\cos 2t}{t^2}\right) =$ Riscrivendo in modo da ricondursi al limite di $\frac{1-\cos x}{x^2}$

$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1-\cos t}{t^2} - \frac{1-\cos 2t}{4t^2}\cdot 4\right) =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 4 = -\frac{3}{2}$ Osservando che $\frac{1-\cos 2t}{4t^2} = \frac{1-\cos 2t}{(2t)^2} \to \frac{1}{2}$ per $t \to 0$

2° modo

$\lim_{t\to 0} \frac{-\cos t+\cos 2t}{t^2} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{-\cos t+(2\cos^2 t-1)}{t^2} =$ Formula di duplicazione del coseno

$= \lim_{t\to 0} \frac{(2\cos t+1)(\cos t-1)}{t^2} =$ Scomponendo il numeratore $2\cos^2 t - \cos t - 1$

$= \lim_{t\to 0} -\underbrace{\frac{1-\cos t}{t^2}}_{\text{limite notevole}} \cdot \lim_{t\to 0}(2\cos t+1) = -\frac{1}{2}\cdot 3 = -\frac{3}{2}$

Calcola i seguenti limiti.

561 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ [1]

562 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{(2x-\pi)^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

563 $\lim_{x\to 1} \frac{\sin 10\pi x}{\sin 5\pi x}$ [−2]

564 $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sin(x-4)}$ [8]

565 $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \frac{1+\sin x}{\cos x}$ [0]

566 $\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin x}$ [0]

567 $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 2x}{\cos x+1}$ [∞]

568 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2\cos x-\sqrt{2}}$ $\left[\sqrt{2}\right]$

569 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$ [0]

570 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\sin 3x}{(2x-\pi)^2}$ [1]

571 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\cos x}$ [0]

572 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}$ $\left[-\sqrt{3}\right]$

573 $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\tan x-\sin x}$ [2]

---

574 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x-\cos 4x}{x^2}$

(*Suggerimento*: somma e sottrai 1 al numeratore e cerca di ricondurti al limite $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.) $\left[\frac{7}{2}\right]$

575 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{1-\cos^3 x}$

(*Suggerimento*: ricorda la formula di scomposizione della differenza di due cubi.) $\left[\frac{1}{6}\right]$

576 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} (1+\tan x)\tan 2x$ (*Suggerimento*: ricorda la formula di duplicazione della tangente.) [−1]

577 $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$

(*Suggerimento*: dopo aver operato la sostituzione $x-\alpha=t$, applica la formula di addizione del seno e cerca di ricondurti ai limiti notevoli.) [$\cos\alpha$]

578 $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin^2 x-\sin^2\alpha}$, con $\alpha\neq 0$ $\left[\dfrac{1}{\sin 2\alpha}\right]$

Forme indeterminate di funzioni esponenziali e logaritmiche

579 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 \dfrac{4x-1}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln x-1}$

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 \dfrac{4x-1}{x} = \log_2\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-1}{x}\right) = \log_2(\ldots..) = \ldots..$

b. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; ponendo $e^x=t$, sei ricondotto al calcolo del limite di una funzione razionale fratta: $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2+1}{t+1}$.

c. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; ponendo $\ln x=t$ e osservando che se $x\to 0^+$ allora $t\to-\infty$, sei ricondotto al calcolo del limite di una funzione razionale fratta: $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t}{t-1}$. [**a.** 2; **b.** $+\infty$; **c.** 1]

Calcola i seguenti limiti.

580 $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_3 \dfrac{18x^2+1}{2x^2+1}$ [2]

581 $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 \dfrac{(x^2+1)^2}{4x^4-1}$ [−2]

582 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \dfrac{ex-1}{e^2x+3}$ [−1]

583 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \dfrac{e^3x^2+1}{e^5x^2+3}$ [−2]

584 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+6}{e^x-2}$ [−3]

585 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{e^{2x}-2}$ [0]

586 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^{-x}+1}{6e^{-x}-5}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

587 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{3x}+e^{2x}+1}{3e^{2x}+2}$ [$+\infty$]

588 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{-x}+10}{6e^{-x}-5}$ [−2]

589 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{e^{-x}+2}$ [$-\infty$]

590 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x-1}{\ln x+2}$ [$+\infty$]

591 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x-\ln x}{\ln x+1}$ [$+\infty$]

592 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x+2\ln x}$ [0]

593 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)$ [0]

594 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6\ln x-1}{2\ln x+1}$ [3]

595 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 4x}{\ln 2x}$ [1]

596 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^2-5}{\ln x^3+6}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

597 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\sqrt{x}-5}{\ln x^2+6}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

598 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln^2 x^3-1}{6\ln^2 x+1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

599 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x^2}{1+\ln x}$ [2]

600 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 3x}{\ln 6x^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

601 $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(e^{2x}+1)-2x]$

(*Suggerimento*: osserva che $2x=\ln e^{2x}$ e ricorda le proprietà dei logaritmi.) [0]

602 $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(e^{x+2}+1)-x]$

(*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente.) [2]

603 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{3x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(x+1)}{5x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{4x}-1}$

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}\cdot 4\cdot\dfrac{e^{4x}-1}{4x}=\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{4x}=$ .....

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(x+1)}{5x}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(x+1)}{x}=$ .....

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{4x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\dfrac{4x}{e^{4x}-1}\cdot\dfrac{1}{2}\right]=$ .....

Calcola i seguenti limiti, ricordando i limiti notevoli:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^k-1}{x}$

604 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ [2]

605 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$ [3]

606 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^4)}{x}$ [0]

607 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{2x}-1}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

608 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^5-1}{x}$ [15]

609 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{\sqrt{3}}-1}{x}$ $\left[2\sqrt{3}\right]$

610 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^2}{x}$ [2]

611 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$ (*Suggerimento*: poni $x-2=t$.) [1]

612 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{2x}}{\ln(1+3x)}$

(*Suggerimento*: raccogli e^x al numeratore.) $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

613 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{x}$

(*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente.) [2]

614 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-2^x}{2^x-1}$

(*Suggerimento*: scomponi il numeratore.) [2]

615 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{e^{3x}-1}$ $\left[\dfrac{2}{9}\right]$

616 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x-1}-2}{x^2+4x-12}$

(*Suggerimento*: scomponi il denominatore.) $\left[\dfrac{\ln 2}{4}\right]$

617 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e^2)-2}{x}$

(*Suggerimento*: raccogli e^2 nell'argomento del logaritmo.) $[e^{-2}]$

618 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

(*Suggerimento*: somma e sottrai 1 al numeratore e riconduciti a un limite notevole.) $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

619 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x-1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\left[\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}\right]^{3}}_{\to e^{-2}}\cdot\underbrace{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-1}}_{\to 1}=$ .....

Risolvi le seguenti forme indeterminate, del tipo 0^0, $(+\infty)^0$, 1^∞. Ricorda il limite notevole $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ e quelli a esso collegati.

620 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ $[e^2]$

621 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$ $[e^6]$

622 $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^{3x}$ $[e^{-3\pi}]$

623 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-2x}$ $[e^{-6}]$

624 $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2x-1}$ $[e^{-4}]$

625 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x-1}$ $[e\sqrt{e}]$

626 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $[e]$

627 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$

(*Suggerimento*: $\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$.) $[e^{-4}]$

628 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+1}$ $[e^{-2}]$

629 $\lim_{x\to3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$ (*Suggerimento*: poni $\frac{1}{x-3}=t$.) $\left[e^{\frac{1}{3}}\right]$

630 $\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{1+3\ln x}}$ $\left[e^{\frac{1}{3}}\right]$

631 $\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{\ln^3 x}}$ $[1]$

Esercizi riassuntivi: calcolo di limiti di funzioni trascendenti

Calcola i seguenti limiti.

632 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{4x}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

633 $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{3x}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

634 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

635 $\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{x^2}$ $[1]$

636 $\lim_{t\to0}\frac{(\sin t)\sqrt{t^2+4}}{3t}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

637 $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}+e^x}{\ln x}$ $[0]$

638 $\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{3x}+e)$ $[1]$

639 $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}$ $[-\infty]$

640 $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$ $[e^{-2}]$

641 $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ $[0]$

642 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ $[+\infty]$

643 $\lim_{x\to0^+}e^{1-\ln x}$ $[+\infty]$

644 $\lim_{x\to0^+}e^{1+\ln x}$ $[0]$

645 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$ $[\sqrt{e}]$

646 $\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{x^2+x}$ $[5]$

647 $\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{3x^2}$ $[-\infty]$

648 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$ $[2]$

649 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{e^x-1}$ $[3]$

650 $\lim_{x\to0}\frac{x+\sin 3x}{3x-\sin 2x}$ $[4]$

651 $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln^2 x}$ $[0]$

652 $\lim_{x\to1^+}2^{\frac{x}{x-1}}$ $[+\infty]$

653 $\lim_{x\to1^-}2^{\frac{x}{x-1}}$ $[0]$

654 $\lim_{x\to+\infty}[\log_2(1+x)-\log_2(1+2x)]$ $[-1]$

655 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2\sin x)}{x}$ $[2]$

656 $\lim_{x\to2}\frac{1-\cos(x-2)}{x^2-4x+4}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

657 $\lim_{x\to2}[\log_2(4x+8)-\log_2 x]$ $[3]$

658 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(3x+2\pi)}{3x-\pi}$ $[-1]$

659 $\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x-2\cos^2 x}{x^2}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

660 $\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$ $[1]$

661 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{x^2+2x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

662 $\lim_{x\to0}\frac{2\cos^2 x+\cos x-3}{\sin^2 x}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

663 $\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-2\cdot3^x+1}{27^x-1}$ $[0]$

664 $\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{|x|}$ $[-1]$

665 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan 2x}{4|x|-x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

666 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-3\ln^2 x}{1+2\ln^2 x}$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

667 $\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+2x+x^2)}{4x}$ $\left[\frac{1}{2\ln 2}\right]$

668 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x^7-\ln x^3}{1+\ln x^2+\ln x^3}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$

669 $\lim_{t\to 0} \frac{4^t+2^t-2}{4^t-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

670 $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(3\theta)(1-\cos\theta)}{\theta^3}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

671 $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\arctan\frac{1}{x}}{\sin 2x}$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

672 $\lim_{x\to 0^-} \frac{x\arctan\frac{1}{x}}{e^{3x}-1}$ $\left[-\frac{\pi}{6}\right]$

673 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$ [1]

674 $\lim_{x\to 0^+} [\log_2(4x)-\log_2(\sin x)]$ [2]

675 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin 2x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

676 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(4x^2+1)}{x\sin 2x}$ [2]

677 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{x+2}$ [$+\infty$]

678 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\tan^2 x}{2x+\tan x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

679 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\tan x}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

680 Videolezione $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{x+2}$ [9]

681 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$ [1]

682 $\lim_{x\to 0} \frac{x(\sin 3x+\sin 2x)}{1-\cos 4x}$ $\left[\frac{5}{8}\right]$

683 $\lim_{x\to 0^+} [\ln(\sin 3x)-\ln x]$ [$\ln 3$]

684 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [\tan x(1+\cos 2x)]$ [0]

685 E se? $\lim_{x\to 2^-} x^{\frac{1}{x^2-4}}$

▶ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x \to 2^+$?

[0; sì: $+\infty$]

686 $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{4^x-5^x}$ $\left[\frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{5}{4}}\right]$

687 $\lim_{x\to 0} \frac{4x+\sin^2 x}{e^{2x}-1}$ [2]

688 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ [∞]

689 $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ [2]

690 $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sin x}-1}{x}$ [$\ln 2$]

691 $\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{e^{x-1}-1}$ [0]

692 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+\sin^2 x)}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

693 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo i seguenti limiti, utilizzando il teorema del confronto.

a. $\lim_{x\to+\infty} (e^x+\cos x)$ **b.** $\lim_{x\to-\infty} (e^x\cdot\sin^2 x)$

a. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta:

$e^x+\cos x \geq e^x-1$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} (e^x-1)=+\infty$, dal teorema del confronto segue che $\lim_{x\to+\infty} (e^x+\cos x)=+\infty$.

b. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta:

$0 \leq e^x\cdot\sin^2 x \leq e^x$

Poiché $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$, dal teorema del confronto segue che $\lim_{x\to-\infty} (e^x\cdot\sin^2 x)=0$.

Calcola i seguenti limiti, utilizzando il teorema del confronto.

694 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+\sin x)$ [$+\infty$]

695 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3+\sin x}}{x^2+1}$ [0]

696 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x^3}$ [0]

697 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(5-\cos x)}$ [0]

698 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+5\sin x)$ [$+\infty$]

699 $\lim\limits_{x\to-\infty}8^{x^2+\cos^3 x}$ [$+\infty$]

700 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin e^x}{x}$ [0]

701 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$ [1]

702 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x}\sin\ln x$ [0]

703 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\left(3+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ [$+\infty$]

704 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3+\cos(x^4-x)}{x^3}$ [$+\infty$]

705 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3\sin x}{5x}$ $\left[\dfrac{1}{5}\right]$

706 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x\ln x}$ [0]

---

707 Determina k in modo che $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx+x}{\sin kx+2x}=2$. [$k=-3$]

708 Determina $a>0$ in modo che $\lim\limits_{x\to-\infty}a^{x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)}=2$ $\left[a=\dfrac{1}{4}\right]$

709 Determina per quali valori di k risulta: $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{k^2-k}{x^2-1}}=+\infty$ [$0<k<1$]

710 Determina per quali valori di α il $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\alpha}{x+1}\right)^x$ è un numero maggiore di $\sqrt{e}$. $\left[\alpha>\dfrac{3}{2}\right]$

711 Calcola, al variare di $\alpha\in\mathbf{R}_0^+$, il valore del seguente limite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^{3+x}+1)-\alpha x$.

[Se $0\le\alpha<1$, il limite è $+\infty$; se $\alpha=1$, il limite è 3; se $\alpha>1$, il limite è $-\infty$]

Problemi che conducono al calcolo del limite di una funzione trascendente

Problemi dalla realtà

712 ESERCIZIO SVOLTO

Un alimento viene posto in un congelatore, la cui temperatura è costante, all'istante $t=0$. La temperatura T dell'alimento (in gradi Celsius) è espressa in funzione del tempo t (in ore) trascorso da quando è stato posto nel congelatore dalla funzione:

$$T(t)=35\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^t-20$$

Determina la temperatura che aveva l'alimento quando è stato posto nel congelatore e la temperatura costante del congelatore.



- Poiché $T(0)=35\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0-20=35\cdot1-20=15$, l'alimento era alla temperatura di 15 °C quando è stato posto nel congelatore.
- L'alimento tende, a lungo andare, a raggiungere la temperatura del congelatore; dunque la temperatura del congelatore è data dal limite della funzione $T(t)$ quando $t\to+\infty$. Poiché:

$$\lim_{t\to+\infty}T(t)=\lim_{t\to+\infty}\left[35\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^t-20\right]=-20$$

poiché $\frac{2}{5}<1$ questo termine $\to0$ quando $t\to+\infty$

concludiamo che la temperatura costante del congelatore è di −20 °C.

713 **Un farmaco nel sangue.** La quantità (in milligrammi) di un farmaco nel sangue, t ore dopo una somministrazione per via endovenosa, è espressa dalla funzione

$$C(t) = 50(e^{-0,2t} - e^{-0,4t})$$

Qual è il limite di $C(t)$ al tendere di t all'infinito? Interpreta il significato di questo limite in relazione al problema.

714 **Legge di raffreddamento di Newton.** Un corpo di temperatura iniziale T_0 viene posto in un ambiente di temperatura $T_A > T_0$. In base alla legge di raffreddamento di Newton, la temperatura T del corpo al tempo t (essendo $t = 0$ l'istante in cui il corpo viene posto nell'ambiente) è espressa dalla funzione:

$$T(t) = (T_0 - T_A)e^{-kt} + T_A$$

essendo k una costante positiva, dipendente dal materiale da cui è costituito il corpo. Calcola il limite di $T(t)$ al tendere di t all'infinito e interpreta il risultato trovato in relazione al problema.

Matematica e telecomunicazioni

715 **Formula di Shannon.** La capacità di un canale soggetto a rumore esprime la massima velocità di trasmissione (in bit/s) teoricamente raggiungibile nel canale. Essa è espressa dalla formula di Shannon:

$$C = B\log_2\left(1 + \frac{P}{NB}\right)$$

dove C è la capacità del canale, B è la banda, P è la potenza media all'uscita del canale e N è una costante che dipende dal rumore presente nel canale. Aumentando indefinitamente la banda, è possibile aumentare indefinitamente anche la capacità del canale (supponendo P ed N costanti)?

716 **Modello di von Bertalanffy.** La lunghezza di un pesce, secondo il modello dovuto a Ludwig von Bertalanffy, è espressa da una funzione della forma:

$$l(t) = a(1 - be^{-0,25t})$$

dove a, b sono costanti reali positive dipendenti dalla specie, t è il tempo (misurato in anni), $l(t)$ è la lunghezza del pesce (in centimetri). Per una certa specie la lunghezza nell'istante iniziale di osservazione ($t = 0$) è 5 cm e la lunghezza limite cui ogni individuo della specie tende con il raggiungimento della massima età possibile è 20 cm. Determina le costanti a e b. [$a = 20$, $b = 0,75$]

717 **Crescita di una pianta.** L'altezza di una pianta di una data specie è ben modellizzata da una funzione del tipo:

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,03t}}$$

dove a e b sono due costanti reali positive, t è il tempo (misurato in anni) e $h(t)$ è l'altezza della pianta (in metri). Sapendo che nell'istante iniziale dell'osservazione ($t = 0$) la pianta misura 40 cm e che la sua altezza, a lungo andare, tende verso una soglia limite di 4 m, determina le costanti a e b. [$a = 4$, $b = 9$]



718 **Modello SIS.** Uno dei più semplici modelli (il cosiddetto modello SIS) per descrivere la propagazione di una malattia né mortale né immunizzante (tipo il raffreddore) in una popolazione di N individui è costituito dalla funzione:

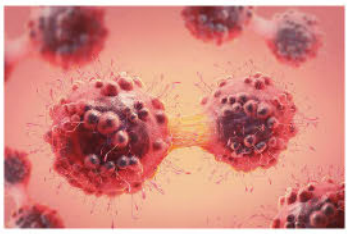
$$I(t) = \frac{(rN - \gamma)I_0}{rI_0 + [(rN - \gamma) - rI_0]e^{(\gamma - rN)t}}$$

dove $I(t)$ rappresenta il numero di individui infetti al tempo t, I_0 è il numero di individui infetti nell'istante iniziale di osservazione $t = 0$, r è una costante che rappresenta il tasso di infezione (dipendente dal meccanismo di contagio e dal modo in cui gli individui sono a contatto) e γ è una costante che esprime il tasso di guarigione (dipendente dall'evoluzione della malattia in un individuo).
Discuti, al variare dei parametri, l'evoluzione nel lungo periodo di una malattia secondo questo modello.
[La malattia tende a estinguersi o a diventare endemica, a seconda che ...]

719 **Modello di Gompertz.** La funzione di Gompertz, definita da:

$f(t) = ae^{(ke^{-bt})}$, con $a > 0$, $b \neq 0$ e $k \neq 0$ [*]

è utilizzata come modello per descrivere l'evoluzione di certe popolazioni: per esempio ha trovato applicazione nei modelli di crescita di alcune popolazioni di cellule tumorali. Descrivi, al variare dei parametri a, b e k, l'evoluzione di una popolazione la cui numerosità è descritta dalla funzione [*] quando il tempo t tende a infinito.



[Se $b > 0$ la popolazione tende a decrescere avvicinandosi al valore limite a; se $b < 0$ ci sono due possibilità: se $k < 0$ la popolazione tende a estinguersi, mentre se $k > 0$ tende a crescere indefinitamente]

720 **Matematica e fisica** **Attrito.** Se un oggetto di massa m in caduta libera è sottoposto a una forza di attrito proporzionale secondo la costante k alla velocità di caduta, la velocità dell'oggetto è descritta dalla funzione:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

a. Qual è la velocità limite cui tende l'oggetto, a lungo andare?

b. Ritrova la velocità di caduta nel vuoto, calcolando il limite di $v(t)$ quando k tende a zero.

[a. $\frac{mg}{k}$; b. gt]

Matematica ed elettronica

721 Consideriamo il circuito seguente: un condensatore di capacità C (inizialmente scarico), collegato in serie a una resistenza R; i due elementi sono collegati a una batteria che eroga una differenza di potenziale costante V_0. Sia $t = 0$ l'istante di chiusura del circuito; al tempo t dopo la chiusura, la corrente che circola nel circuito è data dalla funzione $i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$, mentre la tensione ai capi del condensatore è espressa dalla funzione $V_C(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$. Determina i limiti di $i(t)$ e di $V_C(t)$ per $t \to +\infty$ e interpreta i risultati trovati in relazione al problema.

722 Consideriamo un circuito costituito da una resistenza R, un'induttanza L e un condensatore di capacità C. Nell'istante $t = 0$ in cui il circuito viene chiuso la carica sulle armature del condensatore è q_0. A seconda che risulti:

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

si dimostra che la funzione che esprime l'intensità di corrente è:

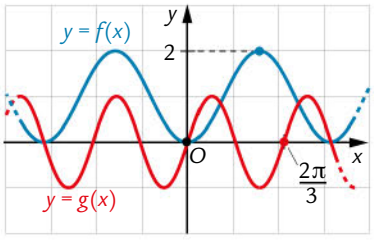
$$i(t) = \frac{\alpha\beta q_0}{\alpha - \beta}(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}) \qquad i(t) = \frac{q_0 R^2}{4L^2}te^{-\frac{R}{2L}t} \qquad i(t) = \frac{q_0}{LC\omega}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t$$

dove α, β, ω sono opportune costanti positive. In ciascuno dei tre casi, calcola il limite di $i(t)$ per $t \to +\infty$.

Problemi sulle funzioni goniometriche e sulla trigonometria

Interpretazione di grafici

723 In figura è rappresentato in colore blu il grafico di una funzione f di equazione del tipo $y = a + b\cos x$ e in colore rosso il grafico della funzione g di equazione del tipo $y = \sin kx$. Dopo avere individuato i valori dei parametri a, b, k, calcola il $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g^2(x)}$.



$\left[\frac{1}{18}\right]$

724 Sia ABC un triangolo in cui $B\hat{A}C = x$, $A\hat{B}C = 2x$ e $\overline{AB} = a$. Calcola il limite dell'espressione $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ quando x tende a zero.

$\left[\frac{7}{2}\right]$

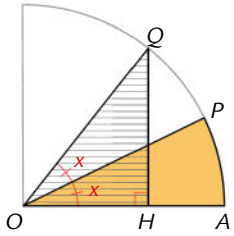
725 In un trapezio rettangolo $ABCD$, la diagonale AC, di misura a, è perpendicolare al lato obliquo CD. Indica con x la misura dell'angolo $A\hat{C}B$ e calcola il limite cui tende il rapporto $\frac{\overline{AD}-\overline{BC}}{\overline{CD}}$ quando x tende a zero. [0]

726 **Videolezione** Data una semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio r, sia t la semiretta tangente alla semicirconferenza in A, che giace, rispetto alla retta AB, dalla stessa parte della semicirconferenza. Considera un punto C sulla semiretta t e poni $A\hat{C}O = x$. Indica con D il punto d'intersezione del segmento OC con la semicirconferenza e con E la proiezione di D su AB. Calcola il limite cui tende il rapporto $\frac{CD}{DE}$ quando il punto C tende ad A.

[Si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\sin x \cos x}$; 0]

727 Data una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, considera su di essa un punto C tale che $A\hat{B}C = x$ e traccia la tangente t alla semicirconferenza in C. Siano D ed E, rispettivamente, le proiezioni di A e B sulla retta t. Calcola il limite cui tende il rapporto tra le aree dei quadrilateri $OBEC$ e $OCDA$ quando C tende a B. $\left[\frac{1}{3}\right]$

728 In riferimento alla figura, in cui $A\hat{O}P = P\hat{O}Q = x$ e $\overline{OA} = r$, determina il limite del rapporto tra l'area del triangolo OHQ e l'area del settore circolare $O\hat{A}P$ (colorato in arancione), al tendere di P ad A.



[2]

729 Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC, in cui $A\hat{B}C = x$. Sia V_1 il volume del cono che si ottiene nella rotazione completa del triangolo ABC intorno al cateto AC e V_2 il volume del cono che si ottiene nella rotazione completa del triangolo ABC intorno al cateto AB. Calcola il limite del rapporto $\frac{V_1}{V_2}$, al tendere di x a 0^+. $[+\infty]$

730 Data una semicirconferenza di diametro AB e centro O e raggio 1, sia C un punto della semicirconferenza tale che $C\hat{A}B = x$. Indica con D il punto di intersezione della retta OC con la retta tangente alla semicirconferenza in B. Calcola:

a. il limite del rapporto $\frac{AC}{BD}$ al tendere di C a B;

b. il limite del rapporto $\frac{BC}{BD}$ al tendere di C a B. [**a.** $+\infty$; **b.** 1]

731 Data una semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio r, sia P un suo punto e t la tangente alla semicirconferenza in P. Siano inoltre H la proiezione di P su AB e K il punto d'intersezione della retta t con la retta AB. Indica con x la misura di $P\hat{A}B$ e calcola il limite cui tende il rapporto $\frac{BK}{HK}$ quando P tende a B.

[Si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{(\sin 2x)^2}$; $\frac{1}{2}$]

8. Infinitesimi e infiniti

Teoria p. 90

Esercizi introduttivi

732 **Vero o falso?**

a. $f(x) = e^{-x}$ è un infinito per $x \to +\infty$ V F

b. $f(x) = x^{-2}$ è un infinito per $x \to -\infty$ V F

c. $f(x) = \ln x$ è un infinito per $x \to +\infty$ V F

d. $f(x) = e^{-x}$ è un infinito per $x \to -\infty$ V F

e. $f(x) = x^5$ è un infinito per $x \to +\infty$ V F

f. $f(x) = \arctan x$ è un infinito per $x \to -\infty$ V F

[3 affermazioni vere e 3 false]

733 **Vero o falso?**

a. $f(x) = e^{-x}$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$ V F

b. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ è un infinitesimo per $x \to 0^+$ V F

c. $f(x) = \ln x$ è un infinitesimo per $x \to 0^+$ V F

d. $f(x) = e^{-x}$ è un infinitesimo per $x \to -\infty$ V F

e. $f(x) = x^6$ è un infinitesimo per $x \to 0$ V F

f. $f(x) = \arctan x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ V F

[3 affermazioni vere e 3 false]

734 **Vero o falso?**

a. $f(x) = x^3$ è un infinito di ordine superiore a $g(x) = \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$ V F

b. $f(x) = x^{100}$ è un infinito di ordine superiore a $g(x) = e^x$ per $x \to +\infty$ V F

c. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è un infinito di ordine inferiore a $g(x) = \ln x$ per $x \to +\infty$ V F

d. $f(x) = \sqrt{x}$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x) = \sin x$ per $x \to 0$ V F

e. $f(x) = \sin x$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $g(x) = e^x - 1$ per $x \to 0$ V F

f. $f(x) = 1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x) = \sin x$ per $x \to 0$ V F

[4 affermazioni vere e 2 false]

Test

735 Qual è l'ordine di infinitesimo di $f(x) = \sin x$ per $x \to 0$?

A 0 B 1
C 2 D Non è un infinitesimo.

736 Qual è l'ordine di infinitesimo di $f(x) = \cos x$ per $x \to 0$?

A 0 B 1
C 2 D Non è un infinitesimo.

737 Qual è l'ordine di infinitesimo di $f(x) = 1 - \cos x$ per $x \to 0$?

A 0 B 1
C 2 D Non è un infinitesimo.

738 Qual è l'ordine di infinito di $f(x) = x^2 - 1$ per $x \to +\infty$?

A 0 B 1
C 2 D Non è un infinito.

739 Qual è l'ordine di infinito di $f(x) = (x^2 - 1)^2$ per $x \to +\infty$?

A 1 B 2
C 4 D Non è un infinito.

740 Qual è l'ordine di infinito di $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ per $x \to +\infty$?

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$
C $\frac{1}{6}$ D Non è un infinito.

741 Quale dei seguenti è l'infinito di ordine superiore per $x \to +\infty$?

A $\sqrt{x}$ B x^2 C $\ln x$ D e^x

742 Quale dei seguenti è l'infinito di ordine inferiore per $x \to +\infty$?

A $\sqrt{x}$ B x^2 C $\ln x$ D e^x

743 Quale dei seguenti è l'infinitesimo di ordine superiore per $x \to 0$?

A $\sin \sqrt{x}$ B $1 - \cos x$
C $e^x - 1$ D $\ln (x^3 + 1)$

744 Quale dei seguenti è l'infinitesimo di ordine inferiore per $x \to 0$?

A $\sin \sqrt{x}$ B $1 - \cos x$
C $e^x - 1$ D $\ln (x^3 + 1)$

Calcolo dell'ordine di infinitesimo o infinito

Determina, se possibile, l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni.

745 $f(x) = \sin x^3$ per $x \to 0$ [3]

746 $f(x) = e^{2x} - 1$ per $x \to 0$ [1]

747 $f(x) = 1 - \cos x$ per $x \to 0$ [2]

748 $f(x) = (\sin x^3)^2$ per $x \to 0$ [6]

749 $f(x) = x^2 \sin x$ per $x \to 0$ [3]

750 $f(x) = (1 - \cos x)^3$ per $x \to 0$ [6]

751 $f(x) = x(e^x - 1)$ per $x \to 0$ [2]

752 $f(x) = \sqrt{x} \sin x$ per $x \to 0$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

753 $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^2}$ per $x \to 0$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

754 $f(x) = x^2\sqrt{e^x - 1}$ per $x \to 0$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

755 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0^-$ [Non determinabile]

Determina, se possibile, l'ordine di infinito delle seguenti funzioni.

756 $f(x) = x^3 + x + 1$ per $x \to +\infty$ [3]

757 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + x^2$ per $x \to +\infty$ [2]

758 $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x}$ per $x \to +\infty$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

759 $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ per $x \to +\infty$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

760 $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ per $x \to +\infty$ [1]

761 $f(x) = \dfrac{x^5 + 1}{x^2 + x + 1}$ per $x \to +\infty$ [3]

762 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^3}$ per $x\to+\infty$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

763 $f(x)=\dfrac{x^5+x}{\sqrt{x+1}}$ per $x\to+\infty$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

764 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ per $x\to+\infty$ [1]

765 $f(x)=x\ln x$ per $x\to+\infty$ [Non determinabile]

Giustificare e argomentare

766 Siano $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ tre infiniti rispettivamente d'ordine 3, 3 e 2 per $x\to+\infty$. Stabilisci se è possibile individuare l'ordine d'infinito di ciascuna delle funzioni seguenti, motivando la risposta. In caso affermativo, specifica l'ordine di infinito.

a. $f(x)g(x)$ **b.** $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ **c.** $f(x)+h(x)$ **d.** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **e.** $f(x)+g(x)$

Stabilisci se la funzione f è un infinito di ordine inferiore, uguale o superiore alla funzione g.

767 $f(x)=(x+1)^3$ $g(x)=x^3+1$ per $x\to+\infty$ [Uguale]

768 $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ $g(x)=\sqrt{x}+1$ per $x\to+\infty$ [Inferiore]

769 $f(x)=\sqrt{x+1}$ $g(x)=\ln x$ per $x\to+\infty$ [Superiore]

770 $f(x)=(x^2-1)^3$ $g(x)=x^4-1$ per $x\to+\infty$ [Superiore]

771 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $g(x)=\dfrac{1}{x^4+x^2}$ per $x\to0$ [Uguale]

772 $f(x)=x^2$ $g(x)=e^{-x}$ per $x\to-\infty$ [Inferiore]

Stabilisci se la funzione f è un infinitesimo di ordine inferiore, uguale o superiore alla funzione g.

773 $f(x)=\sin x$ $g(x)=x^3$ per $x\to0$ [Inferiore]

774 $f(x)=x^3-1$ $g(x)=x^2-1$ per $x\to1$ [Uguale]

775 $f(x)=1-\cos x$ $g(x)=e^x-1$ per $x\to0$ [Superiore]

776 $f(x)=e^{-x}$ $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ per $x\to+\infty$ [Superiore]

777 $f(x)=\sqrt{x-1}$ $g(x)=\ln x$ per $x\to1$ [Inferiore]

778 $f(x)=\sqrt{x}-1$ $g(x)=x\sqrt{x}-x$ per $x\to1$ [Uguale]

779 Mediante reciproco confronto fra di essi, disponi in ordine di infinito crescente:

x^2, $\sqrt{x^3}$, x, $\sqrt[3]{x^2}$, e^x, $x\ln x$, $\ln x$, xe^x per $x\to+\infty$

780 Mediante reciproco confronto fra di essi, disponi in ordine di infinitesimo crescente:

x, $\sqrt{x}$, x^4, $\sin x$, $1-\cos x$, $(e^x-1)^3$, $(\sin x^2)^4$ per $x\to0$

781 Determina per quale valore del parametro $k\in\mathbf{R}$ la funzione $f(x)=(\sin x)^2\,(1-\cos x)^k$ è infinitesima di ordine 8 per $x\to0$. [$k=3$]

782 Determina per quale valore del parametro $k\in\mathbf{R}$ la funzione $f(x)=(\sin x^3)^2\,(e^x-1)^k$ è infinitesima di ordine 10 per $x\to0$. [$k=4$]

783 Determina per quale valore del parametro $k\in\mathbf{R}$ la funzione $f(x)=x^5(e^{x^2}-1)^k$ ha lo stesso ordine di infinitesimo della funzione $g(x)=(\sin x)^3\,(1-\cos x^3)$ per $x\to0$. [$k=2$]

784 Determina per quale valore del parametro $k\in\mathbf{R}$ la funzione $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^k}{(x^3+1)^4}$ è infinito di ordine 4 per $x\to+\infty$. [$k=8$]

785 Determina per quale valore del parametro $k\in\mathbf{R}$ la funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^k-1}}{(x^5+1)^2}$ è infinito di ordine 2 per $x\to+\infty$. [$k=24$]

786 Determina per quale valore del parametro $k\in\mathbf{R}$ la funzione $f(x)=\dfrac{x^k\sqrt[3]{x}}{(x^3+1)^3}$ è infinito di ordine 3 per $x\to+\infty$. $\left[k=\frac{35}{3}\right]$

Matematica e informatica

787 Si chiama complessità computazionale di un algoritmo la funzione $F(n)$ che esprime il numero di operazioni che l'algoritmo deve eseguire, in funzione della dimensione n dei dati di ingresso; la funzione $F(n)$ tende a $+\infty$ quando $n \to +\infty$; tra due o più algoritmi, risulta più efficiente quello la cui complessità computazionale ha ordine di infinito inferiore. Supponiamo di avere stabilito che la complessità computazionale di cinque algoritmi A, B, C, D, E sia espressa rispettivamente dalle funzioni: n^2, $n \ln n$, $n \ln^2 n$, $n^2 \ln n$, $n^2\sqrt{n}$. Disponi gli algoritmi in ordine di efficienza crescente, per valori molto grandi di n.

788 Supponiamo di avere stabilito che la complessità computazionale di cinque algoritmi A, B, C, D, E è espressa rispettivamente dalle funzioni: $n\sqrt{n}$, $n\ln\sqrt{n}$, $\sqrt{n}\ln^2 n$, $n\sqrt{n}\ln n$, $n^2\sqrt{n}$.
Disponi gli algoritmi in ordine di efficienza crescente, nell'ipotesi che n assuma valori molto grandi.

Applicazioni al calcolo dei limiti

Calcola i seguenti limiti, ricordando le «gerarchie» sugli infiniti e i limiti notevoli a essi collegati.

789 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^7}$ [$+\infty$]

790 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ [0]

791 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7^x}{x}$ [$+\infty$]

792 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+5}{\ln x}$ [$+\infty$]

793 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{e^x+1}$ [0]

794 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+2e^x}$ [0]

795 $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{-2x}$ [0]

796 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$ [0]

797 $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$ [0]

798 $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x)$ (*Suggerimento*: raccogli x.) [$+\infty$]

799 $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - \ln x)$ [$+\infty$]

800 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - \sqrt{x})$ [$-\infty$]

801 $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x$ [0]

802 $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x} + x^3)$ [$+\infty$]

803 $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$ [$+\infty$]

804 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{x^3\ln x}{e^x}\right)$ [0]

805 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{e^x}{x\ln^2 x}\right)$ $\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

Calcola i seguenti limiti, utilizzando il metodo delle stime asintotiche.

806 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + x^2}{x + e^x}$ [0]

807 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x} + x^2}{1+\sqrt[3]{x}}$ [$+\infty$]

808 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\sin 3x}{\ln(1+2x^2)}$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

809 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(e^{3x^3}-1)\sin x}{1-\cos(4x^2)}$ $\left[\dfrac{3}{8}\right]$

810 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \ln x}{x + e^x}$ [0]

811 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^{10} + x}$ [0]

812 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x + \ln x}{e^x + x^2 + 1}$ [2]

813 $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin x + \sqrt{x}}{1-\cos x}$ [$+\infty$]

814 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 x + (1-\cos x)^2}{x^2 + x^5}$ [1]

815 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1 + x^2}{(\sin x)^2 + x^3}$ [∞]

816 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x^3 + x^2}{\sin x + \sqrt{x}}$ [0]

817 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x + \sqrt{x}}{x^2 + 2\sqrt{x}}$ [0]

818 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x + 2x^2}{4x^2 + \sqrt{x} + 1}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

819 $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{e^{(x-2)^2} - 1}{(x-2)^4}$ [$+\infty$]

820 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 \sin\dfrac{1}{x^2}\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

Esercizi di riepilogo

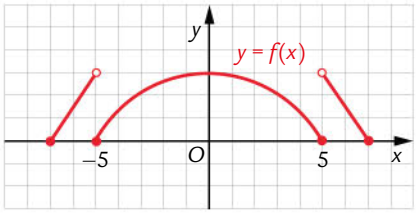
Esercizi interattivi

Test

821 Per la funzione rappresentata graficamente in figura possiamo dire che:

A $\lim_{x\to 5} f(x) = 3$ C $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$

B $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ D $\lim_{x\to 5} f(x)$ non esiste



822 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x+3}{x^2-2x+1}$ è uguale a:

A 1 B 3 C $+\infty$ D $-\infty$

823 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+3}{x^2-2x+1}$ è uguale a:

A 1 B 3 C $+\infty$ D $-\infty$

824 $\lim_{x\to+\infty} \left(-3x^3+5x^2-1\right)$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

825 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x+6}$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

826 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+6}{x^2+1}$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

827 $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2+x-30}$ è uguale a:

A 1 B 10 C $\frac{10}{11}$ D $\frac{11}{10}$

828 $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

829 $\lim_{x\to-\infty} 6^x$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

830 $\lim_{x\to 0} 6^x$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

831 $\lim_{x\to+\infty} 6^x$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

832 $\lim_{x\to 5^+} \ln(x-5)$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

833 $\lim_{x\to+\infty} e^{2-\sqrt{x^2+1}}$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

834 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{x}$ è uguale a:

A 1 B 7 C $+\infty$ D $-\infty$

835 $\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-5}{\ln(x-2)}$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D $-\infty$

836 $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{4}{x}\right)^x$ è uguale a:

A e^4 B e^{-4} C $+\infty$ D $-\infty$

837 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{5x}$ è uguale a:

A 5 B 0 C $\frac{1}{5}$ D $-\infty$

838 $\lim_{x\to+\infty} [\log_{\frac{1}{2}}(4x^3-x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x^3-2)]$:

A non esiste C è uguale a -2

B è uguale a 2 D è uguale a 0

839 Se è verificata la condizione

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0: x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

si ha che:

A $\lim_{x\to l} f(x) = \infty$

B il grafico della funzione presenta un asintoto verticale di equazione $x = l$

C $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$

D la funzione non è definita per $x = l$

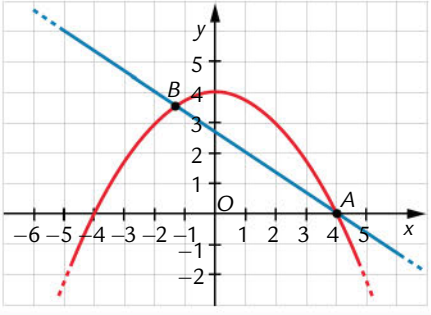
840 Il grafico mostrato in figura rappresenta la funzione $y = 4 - \frac{1}{4}x^2$. Immaginando che il punto A sia fisso e il punto B sia mobile sul grafico, a che cosa tende il coefficiente angolare della retta AB quando $B \to A$?

A -2

B 2

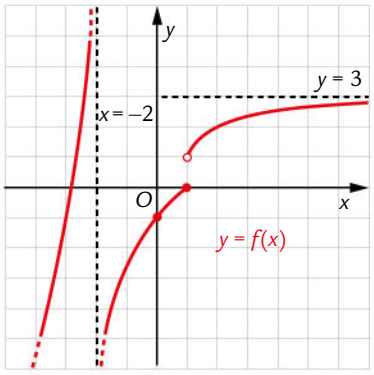
C -1

D Non è possibile calcolarlo perché si ottiene una forma indeterminata



Interpretazione di grafici

841 Deduci dal grafico i limiti seguenti, se esistono:



a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots$

b. $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \ldots\ldots$

c. $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \ldots\ldots$

d. $\lim_{x\to0} f(x) = \ldots\ldots$

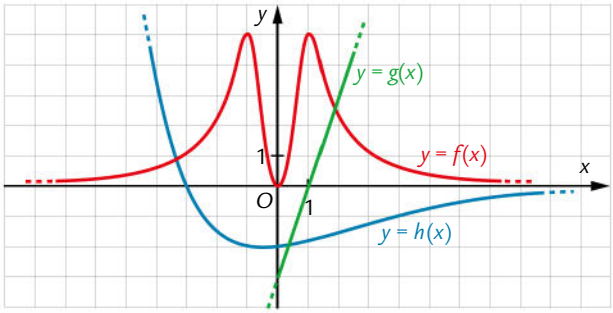
e. $\lim_{x\to1^-} f(x) = \ldots\ldots$

f. $\lim_{x\to2} f(x) = \ldots\ldots$

g. $\lim_{x\to1^+} f(x) = \ldots\ldots$

h. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$

842 Fai riferimento alla figura qui sotto.



A partire dalle informazioni che si possono «leggere» sulla figura, determina, se possibile, il valore dei seguenti limiti (alcuni limiti si presentano sotto forma indeterminata, quindi non è possibile calcolarli senza ulteriori informazioni).

a. $\lim_{x\to-\infty} (g(x)-h(x))$ $\quad \lim_{x\to-\infty} (h(x)+g(x))$ $\quad \lim_{x\to0} (g(x)+h(x))$ $\quad \lim_{x\to+\infty} (f(x)+g(x))$

b. $\lim_{x\to-\infty} g(x)\cdot h(x)$ $\quad \lim_{x\to0} g(x)\cdot h(x)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot h(x)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x)$

c. $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$ $\quad \lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad \lim_{x\to0} \frac{g(x)}{h(x)}$

d. $\lim_{x\to0} \frac{h(x)}{f(x)}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)}$

e. $\lim_{x\to-\infty} g(h(x))$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(h(x))$ $\quad \lim_{x\to0} g(f(x))$ $\quad \lim_{x\to+\infty} h(h(x))$

f. $\lim_{x\to+\infty} u(x)$, essendo $u(x)$ una funzione tale che $h(x) \le u(x) \le f(x)$ per ogni $x \ge 0$

g. $\lim_{x\to-\infty} v(x)$, essendo $v(x)$ una funzione tale che $v(x) \ge h(x)$ per ogni $x \le 0$

Giustificare e argomentare

843 Sapendo che $\lim_{x\to3} \frac{f(x)-5}{x-3}$ esiste ed è finito, è possibile stabilire quanto vale il $\lim_{x\to3} f(x)$? E il $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$? E il $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$?

844 Sapendo che $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x^2}$ esiste ed è finito, è possibile stabilire quanto vale il $\lim_{x\to0} f(x)$? E il $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$? E il $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x^3}$?

Calcola i seguenti limiti.

845 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x^2}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

846 $\lim_{x\to-\infty} (2-e^x)$ [2]

847 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x$ [0]

848 $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $[+\infty]$

849 $\lim_{x\to0} \frac{2^x+1}{2^{x-1}-1}$ $[-4]$

850 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln^2 x}$ [0]

851 $\lim_{x\to2} \frac{x^2-4x+4}{2x^2-4x}$ [0]

852 $\lim_{x\to+\infty} (x-x^3)$ $[-\infty]$

853 $\lim_{x\to0} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+3}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

854 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2+1}-\frac{x}{x+1}\right)$ [1]

855 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln x}$ $[+\infty]$

856 $\lim_{x\to0^+} (2+\log_2 x)$ $[-\infty]$

857 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2+6}$ [0]

858 $\lim_{x\to3} \frac{2x-6}{x^2+3x-18}$ $\left[\frac{2}{9}\right]$

859 $\lim_{x\to+\infty} 3^{x-x^2}$ [0]

860 $\lim_{x\to+\infty} (1-3\sqrt{x})$ $[-\infty]$

861 $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5+x^2}{x^3+1}$ $[+\infty]$

862 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$ [0]

863 $\lim_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x$ $[+\infty]$

864 $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2+3x-4}$ $\left[\frac{2}{5}\right]$

865 $\lim_{x\to+\infty} (2x^2-x-1)$ $[+\infty]$

866 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{x^2}{x+1}\right)$ [1]

867 $\lim_{x\to-\infty} xe^{-2x}$ $[-\infty]$

868 $\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x^2+x-12}$ $\left[\frac{6}{7}\right]$

869 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ $[+\infty]$

870 $\lim_{x\to4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ [4]

871 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}+e^x}$ [0]

872 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-x^2}{2x^2+x+1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

873 $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$ $[-4]$

874 $\lim_{x\to0} \frac{\sin 4x}{x}$ [4]

875 $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+2^x}{2^x-2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

876 $\lim_{x\to0} \frac{e^{3x}-1}{x}$ [3]

877 $\lim_{x\to0} \frac{e^x}{\ln x}$ [0]

878 $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+1}{x^3-1}$ $[-\infty]$

879 $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$ [0]

880 $\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

881 $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ $[e^3]$

882 $\lim_{x\to4^+} \sqrt{\frac{9x-36}{x}}$ [0]

883 $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x+6)}{e^x-1}$ $[+\infty]$

884 $\lim_{x\to0} \frac{\log_2(1+x)}{3x}$ $\left[\frac{1}{3\ln 2}\right]$

885 $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln^2 x}{x}$ $[+\infty]$

886 $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$

887 $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$ [1]

888 $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

889 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{x^2+1}}$ $[-1]$

890 $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{1-\cos^3 x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

891 $\lim_{x\to0} \frac{1+\sin x}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ [0]

892 $\lim_{x\to -4} \frac{x^2+5x+4}{x^2-8x+16}$ [0]

893 $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+e^x}$ [0]

894 $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)$ [$-\infty$]

895 $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^3+3x^2+3x+1}$ [$+\infty$]

896 $\lim_{x\to 3^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\sqrt{9-x^2}}$ [$-\infty$]

897 E se? $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+4x}{1-x}}$

▸ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x \to 1^-$?

[$+\infty$; sì: 0]

898 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+4}}{x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

899 $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-5}}{x+2}$ [-2]

900 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x+3x}{5x+\sin 4x}$ $\left[\frac{5}{9}\right]$

901 $\lim_{x\to -3} \frac{e^{2x+6}-1}{x+3}$ [2]

902 $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x-e^{\frac{1}{x}}}{e^x+2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

903 $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^4-x^2}{x^3+3x^2+3x+1}$ [$-\infty$]

904 $\lim_{x\to -1} \frac{1-\cos(x+1)}{x^2+2x+1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

905 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x-1}$ [-2]

906 $\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^{x^2}$ [0]

907 $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$ [e^6]

908 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x^3}$ [$+\infty$]

909 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\tan x}$ [0]

910 E se? $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{3|x|-x}$

▸ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x \to 0^-$?

$\left[\frac{1}{2}\right.$; sì: $\left.\frac{1}{4}\right]$

911 $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta-1}{\sin\theta^2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

912 $\lim_{t\to -2} \frac{8-2t^2}{2t^2+t-6}$ $\left[-\frac{8}{7}\right]$

913 $\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ [$-\infty$]

914 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

915 $\lim_{x\to +\infty} [\log_3(x^2-4)-\log_3(9x^2-1)]$ [-2]

916 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(3x^2+1)}{x^2}$ [3]

917 $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$ [-2]

918 $\lim_{x\to +\infty} e^{3x-x^2}$ [0]

919 $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{8x^2+1}{4x^2+x+1}}$ [$\sqrt{2}$]

920 $\lim_{x\to -\infty} (e^{2x}+e^x+1)$ [1]

921 $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}}$ [0]

922 E se? $\lim_{x\to 0^-} \frac{6}{3+e^{\frac{1}{x}}}$

▸ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x \to 0^+$?

[2; sì: 0]

923 $\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ [1]

924 $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ [e^{-1}]

925 $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\sin x}}$ [$+\infty$]

926 $\lim_{x\to -\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x+3}\right)$ [$-\infty$]

927 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-\cos x+1}{x}$ [1]

928 $\lim_{x\to \pi} \ln|\sin x|$ [$-\infty$]

929 $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3+4x^2-5x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

930 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x^2}{1+\ln x}$ [-2]

931 $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ [0]

932 $\lim_{x\to 0^+} \arctan \ln x$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

933 $\lim_{x\to -3}\left(\frac{\sin x}{x+3}\right)^2$ [$+\infty$]

934 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin x}{x}$ [4]

935 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

936 $\lim_{x\to 2^-}\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2)$ [$+\infty$]

937 $\lim_{x\to -1}\frac{2^{x+1}-1}{x^2+2x+1}$ [∞]

938 $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$ [0]

939 $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^x$ [0]

940 $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-1}{x-1}\right)^x$ [$+\infty$]

941 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}}{x\cos x}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

942 $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^3}{x^2+1}\right)$ [-1]

943 $\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-9}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

944 **E se?** **Videolezione** $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}-2e^x-1}{3+e^{2x+1}}$

▶ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x\to -\infty$?

$\left[\frac{1}{e};\ \text{sì: } -\frac{1}{3}\right]$

945 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{\sin x^2}$ [2]

946 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{2x-\pi}$ [0]

947 $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}}\frac{\sin x+1}{(2x-3\pi)^2}$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

948 $\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln^2(1+x)}{x^3}$ [2]

949 **E se?** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}e^{\frac{1}{\cos x}}$

▶ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x\to \frac{\pi}{2}^-$?

[0; sì: $+\infty$]

950 $\lim_{x\to \pi}\frac{(x-\pi)\sin x}{(1+\cos x)^2}$ [$-\infty$]

951 $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-1}}$ [$+\infty$]

952 $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{x^2-2}{x^2+4x+4}}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

953 $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{x^2-2}{2x^2+4x+4}}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

954 $\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln(x^2-9)}{x-3}$ [$-\infty$]

955 **E se?** $\lim_{x\to \pi^-}e^{\frac{1}{\sin x}}$

▶ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x\to \pi^+$?

[$+\infty$; sì: 0]

956 $\lim_{x\to +\infty}[\log_2(x^2+x+1)-\log_2(2x^2+1)]$ [-1]

957 $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{\sin x\ln^2 x}$ [0]

958 **E se?** $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2e^{\frac{1}{x}}}$

▶ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x\to 0^-$?

$\left[\frac{1}{2};\ \text{sì: } +\infty\right]$

959 $\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(e^{\frac{1}{x}}+2)-\frac{1}{x}\right]$ [0]

960 $\lim_{x\to 0^+}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$ [e^{-1}]

961 $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{\ln x^2}}$ $\left[e^{\frac{1}{2}}\right]$

962 $\lim_{x\to +\infty}x[\ln(x+4)-\ln x]$ [4]

963 **E se?** $\lim_{x\to 0^-}(5\cdot 3^x-3\cdot 5^x)^{\frac{1}{x}}$

▶ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x\to 0^+$?

[0; sì: $+\infty$]

964 $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin(4x)}{\sin x-\cos x}$ $\left[-2\sqrt{2}\right]$

965 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

966 $\lim_{x\to 0}(\sqrt[3]{1+x})^{\frac{1}{\sin x}}$ $\left[e^{\frac{1}{3}}\right]$

Esercizi con parametri

967 Data la funzione $f(x)=\dfrac{(a-3)x^2+8}{ax^2+b}$, determina a e b in modo che risulti $f(0)=4$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. $[a=-3,\ b=2]$

968 Data la funzione $f(x)=\dfrac{(a-2)x^2+1}{3x^2+b}$, determina a e b in modo che $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=4$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$. $[a=14,\ b=-12]$

969 Data la funzione $f(x)=\dfrac{(2a-3)x^2+(b-2)x+c}{x+3}$, determina a, b, c in modo che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ e $f(0)=3$.

$\left[a=\dfrac{3}{2},\ b=3,\ c=9\right]$

970 Data la funzione $f(x)=\dfrac{(k-2)x^2+3x+1}{kx^2+2}$, determina il valore del parametro reale k per cui sono soddisfatte le seguenti condizioni:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ **c.** $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=2$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ **d.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$

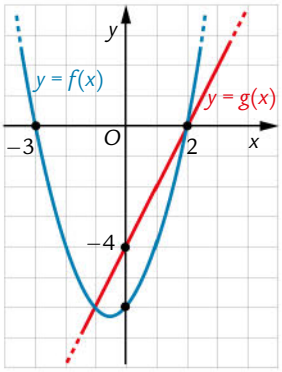
$\left[\text{a. } k=2;\ \text{b. } k=\dfrac{2}{3};\ \text{c. } k=-8;\ \text{d. } k=-2\right]$

971 Determina k in modo che risulti: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+kx}-1}{x}=2$ $[k=6]$

972 Determina k in modo che risulti: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{x^2+kx}=2$ $[k=3]$

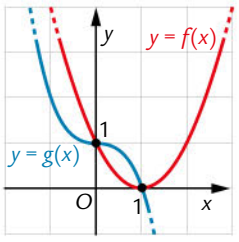
Interpretazione di grafici

973 In figura è rappresentato il grafico di una parabola con asse verticale, di equazione $y=f(x)$, e di una retta di equazione $y=g(x)$. Dopo avere individuato le equazioni delle due funzioni, calcola $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.



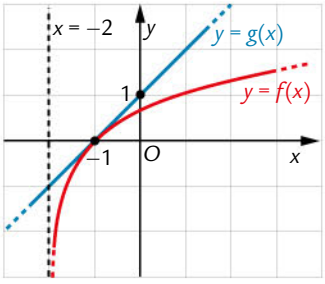
$\left[\dfrac{5}{2},\ +\infty\right]$

974 In figura è rappresentato in rosso il grafico di una parabola f, con asse verticale, tangente all'asse x e in blu il grafico di una funzione g di equazione del tipo $y=ax^3+b$. Dopo avere individuato le equazioni delle due funzioni, calcola $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.



$[0,0]$

975 In figura sono rappresentati in colore rosso il grafico di una funzione f di equazione del tipo $y=\ln(x+a)$ e in colore blu il grafico di una funzione lineare g. Dopo avere individuato le equazioni delle due funzioni f e g, calcola $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.



$[+\infty,\ 1]$

Problemi

976 Data la parabola di equazione $y=x^2-4$, siano A il suo punto di intersezione con l'asse y e B il suo punto d'intersezione con il semiasse delle ascisse positive. Detta t la retta tangente alla parabola nel suo punto B, considera un punto P sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ di parabola e indica con H la proiezione di P sulla retta t. Calcola il limite cui tende il rapporto $\dfrac{\overline{PB}^2}{\overline{PH}}$ quando P tende a B. $[17\sqrt{17}]$

977 Considera la funzione $f(x) = e^{ax+b}$.

a. Trova a e b in modo che il suo grafico passi per i punti $A\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$ e $B(1, 1)$.

In corrispondenza dei valori di a e b trovati, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

b. Traccia il grafico della funzione f.

c. Considera un punto P di ascissa x, appartenente al grafico di f, e indica con H la sua proiezione sulla retta $y = 1$ e con K la sua proiezione sulla retta $x = 1$. Calcola il limite del rapporto $\frac{PH}{PK}$ al tendere di P a B.

[**a.** $a = 2$, $b = -2$; **c.** si giunge a dover calcolare $\lim_{x\to 1}\left|\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}\right|$, il risultato è 2]

978 Considera la funzione $f(x) = \ln(ax+b)^2$, con $a > 0$ e $b > 0$.

a. Trova a e b in modo che il suo grafico ammetta come asintoto verticale la retta di equazione $x = -\frac{1}{2}$ e passi per l'origine O degli assi.

In corrispondenza dei valori di a e b trovati, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

b. Traccia il grafico della funzione f.

c. Considera sul grafico di f un punto P di ascissa x, con $x > 0$. Indica con H la sua proiezione sull'asse x e con K la sua proiezione sull'asse y. Calcola il limite del rapporto $\frac{PH}{PK}$ al tendere di P a O.

[**a.** $a = 2$, $b = 1$; **b.** osserva che $f(x) = 2\ln|2x+1|$; **c.** si giunge a dover calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(2x+1)}{x}$, il risultato è 4]

Esercizi *più*

Dalle gare

979 Calcola $\lim_{x\to 0}\frac{10x^2}{\sin^2(3x)}$

(Stanford Math Tournament 2009)

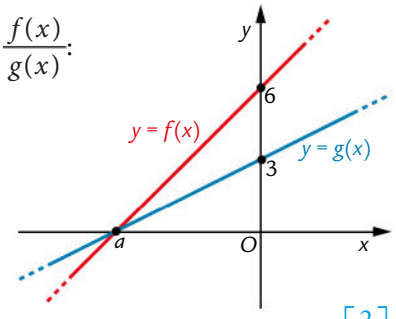
$\left[\frac{10}{9}\right]$

980 Quale dei seguenti è il risultato del limite $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$?

A e^3 B e^{-3} C 1 D $+\infty$ E Nessuno dei precedenti

(Gainesville College, mathematics tournament 2005)

981 Due funzioni lineari f e g hanno grafici del tipo in figura. Allora il limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$:



A è uguale a 2

B non esiste

C è uguale a $\sqrt{2}$

D è uguale a 3

E dipende da a

(Gainesville College, Mathematics Tournament 2009)

982 Calcola $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

(Harvard-MIT Math Tournament 2004)

$\left[\frac{2}{3}\right]$

983 Se $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+ax+1} = \frac{1}{9}$, qual è il valore di a?

A 2 B 4 C 8 D 16 E Nessuno dei precedenti

(Mathematics Tournament, university of North Georgia, 2013)

984 Qual è il valore del limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\ln\left(\sqrt{\tan^2 x+1}+\tan x\right)-\ln(\tan x)\right]$?

A 0 B $\ln 2$ C $\ln\frac{1}{2}$ D $+\infty$ E Nessuno dei precedenti

(Mathematics Tournament, university of North Georgia, 2012)

985 Determina a e b in modo che $\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2(2-x)}{x^2+ax+b} = 1$.

(Harvard-MIT Math Tournament 2008)

$[a = -2, b = 1]$

Prova di autoverifica

ESERCIZI

Limiti di funzioni reali di variabile reale

1 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots$

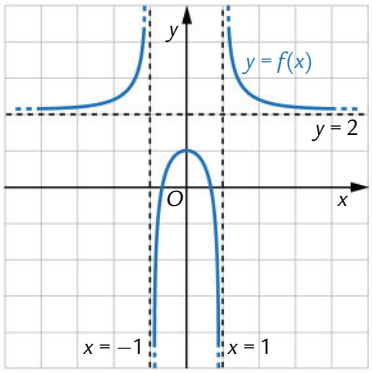
b. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \ldots\ldots$

c. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \ldots\ldots$

d. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \ldots\ldots$

e. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \ldots\ldots$

f. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \ldots\ldots$



2 Trova, fra le quattro funzioni proposte, quella il cui grafico è rappresentato nella figura del precedente esercizio, giustificando la risposta. In particolare, spiega come il calcolo dei limiti ti ha aiutato a individuarla.

A. $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^4-1}$

B. $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{1-x^4}$

C. $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$

D. $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{1-x^2}$

3 **Vero o falso?** Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi di grado 2 e 3, rispettivamente.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ V F

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{Q(x)}{P(x)}\right| = +\infty$ V F

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{Q(x)}{P(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ V F

d. senza ulteriori informazioni, non è possibile determinare il $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ V F

4 Calcola i seguenti limiti immediati (non si tratta di forme d'indecisione).

a. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{4+x}{\ln x}$ b. $\lim\limits_{x\to0} (3+e^x+e^{2x})$ c. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\cos 2x}{x}$ d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x}{x^2}$

5 Calcola i limiti delle seguenti funzioni razionale fratte.

a. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-2x}{x^2+x-6}$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2-x+1}{2x^2+x+1}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right)$

6 Calcola i limiti delle seguenti funzioni trascendenti, ricorrendo ai limiti notevoli studiati.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2x+1}$ b. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{e^{2x}-1}$

7 Per quale valore di a si ha che $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{(2x-1)^2}{ax^2+x+1} + \dfrac{x+a}{x^2+1}\right] = 6$?

8 Una goccia di pioggia assimilabile a una sfera di diametro d (in metri) molto piccolo cade con una velocità che è espressa con buona approssimazione dalla funzione $v(t) = \dfrac{gd^2}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{d^2}t}\right)$, dove g è l'accelerazione di gravità, c è una opportuna costante e si è assunto che $v = 0$ quando $t = 0$. Qual è la velocità limite della goccia di pioggia, cioè la sua velocità quando il tempo t cresce indefinitamente? Dopo quanto tempo dall'istante $t = 0$ la goccia raggiunge una velocità uguale al 90% della sua velocità limite?

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
Punteggio massimo	0,25 · 6 = 1,5	1	0,25 · 4 = 1	0,25 · 4 = 1	0,5 · 3 = 1,5	1 · 2 = 2	1	1	10
Punteggio ottenuto									

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 572

Successioni e principio di induzione

1. Introduzione alle successioni

Definizione di successione e di grafico di una successione

DEFINIZIONE | Successione

Una **successione** è una funzione che ha come dominio l'insieme **N** dei numeri naturali (eventualmente privato di alcuni suoi elementi).

I numeri reali corrispondenti degli elementi di **N** in una successione si dicono **termini** della successione e vengono indicati con i simboli:

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

essendo a_0 il corrispondente di $n = 0$, a_1 il corrispondente di $n = 1$, a_2 il corrispondente di $n = 2$ e così via. Il termine a_n è chiamato **termine generale** della successione. Una successione viene spesso assegnata dando la formula che esprime il termine generale a_n in funzione di n.

ESEMPI

a. Si può assegnare la successione dei quadrati dei numeri naturali tramite la formula $a_n = n^2$. I primi termini della successione sono:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, ...$$

b. Si può assegnare la successione dei numeri dispari tramite la formula $a_n = 2n + 1$. I primi termini della successione sono:

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, ...$$

Il **grafico** di una successione a_n è un insieme di **punti isolati**, di coordinate:

$$(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), ...$$

ESEMPIO Grafico di una successione

I punti che rappresentano i primi quattro termini della successione $a_n = \frac{1}{n}$, con $n \geq 1$, sono quelli mostrati in **Fig. 1**. Si tratta, come puoi vedere, di punti «isolati», che formano un insieme discreto; il grafico di $a_n = \frac{1}{n}$ è la restrizione del grafico dell'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$ all'insieme dei punti aventi ascissa *intera positiva* (**Fig. 2**).

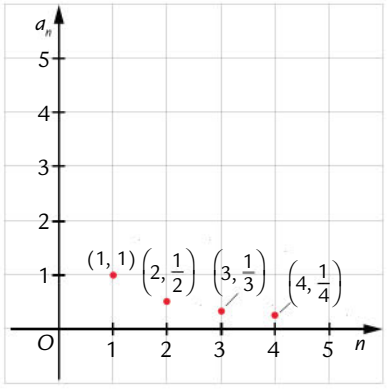


Figura 1

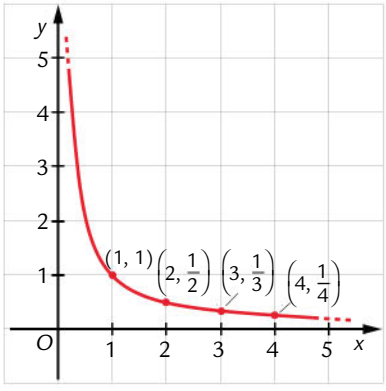


Figura 2

Con GeoGebra
Successioni

Approfondimenti

Con GeoGebra

Videolezioni

Esercizi interattivi

ATTENZIONE!

Salvo avviso contrario, conveniamo che il dominio di una data successione sia tutto **N**. Nel caso in cui il dominio sia per esempio soltanto $n \geq 1$, verrà specificato.

ATTENZIONE!

1. In alcuni testi vengono utilizzati due simboli diversi per indicare una successione e il suo termine generale; precisamente, per indicare la successione di termine generale a_n si utilizza il simbolo $\{a_n\}$.
2. Per brevità scriveremo spesso «successione a_n», intendendo «successione *avente come termine generale* a_n».

Una successione può essere assegnata in **forma ricorsiva**, cioè dando il primo termine (i primi termini) della successione e la legge che permette di determinare ciascun termine successivo in funzione del precedente (dei precedenti).

ESEMPIO Successione definita ricorsivamente

Determiniamo i primi cinque termini della successione definita ricorsivamente da:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3 - a_n \end{cases}, \text{ con } n \geq 1$$

Il primo termine è dato: $a_1 = 1$.

Dalla relazione ricorsiva (ponendo $n = 1$) otteniamo:

$$a_2 = 3 - a_1 = 3 - 1 = 2$$

Procediamo analogamente per gli altri termini:

$$a_3 = 3 - a_2 = 3 - 2 = 1 \qquad a_4 = 3 - a_3 = 3 - 1 = 2 \qquad \ldots$$

Ci rendiamo conto così che la successione assegnata ha una particolare caratteristica: ha termini di indice dispari uguali a 1 e termini di indice pari uguali a 2. Il termine generale della successione potrebbe dunque essere così espresso:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad a_n = \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2}$$

ESEMPIO Successione di Fibonacci

Determiniamo il decimo termine della successione definita ricorsivamente come segue:

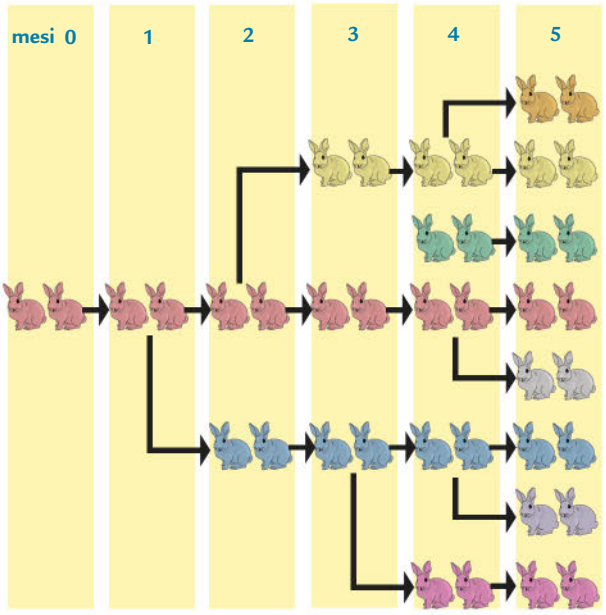
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Osserva che i primi *due* termini della successione sono dati esplicitamente, perché nella formula ricorsiva il termine generico a_{n+2} dipende dai *due* termini che lo precedono. La regola per generare i termini della successione è semplicissima: basta sommare due termini consecutivi per ottenere il successivo. Quindi i primi dieci termini sono: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. In conclusione, il termine richiesto è 55. Esprimere il termine generico a_n in funzione dell'indice n, in questo caso, non è semplice (*vedi* scheda di approfondimento).

Approfondimento
Relazioni ricorsive lineari

PER SAPERNE DI PIÙ **La successione di Fibonacci come modello di crescita**

La successione di Fibonacci trova applicazione in svariati contesti; il più noto è quello relativo alla crescita di una popolazione di conigli. Ogni coppia di conigli, se maturi, genera un'altra coppia di conigli, ma occorrono ai conigli due mesi di vita per raggiungere la piena capacità riproduttiva. Quindi, se al primo mese vi è una sola coppia di conigli appena nati, anche al secondo mese ve ne sarà una soltanto. Al terzo mese diverranno 2 (la coppia adulta ne ha generato un'altra), al quarto mese 3 (avendo la prima coppia generato un'altra coppia di conigli, mentre l'altra non è ancora matura), al quinto mese 5 (la prima e la seconda coppia generano un'altra coppia mentre la terza non è ancora adulta) e così via. Insomma, a conclusione dell'n-esimo mese il numero a_n delle coppie di conigli è dato dal numero a_{n-1} delle coppie del mese precedente più il numero a_{n-2} di coppie generate dai conigli maturi.



Alcune proprietà delle successioni

Le proprietà di *limitatezza* e *monotonia*, già definite per le funzioni, possono essere definite in modo del tutto analogo per le successioni.

DEFINIZIONE | Proprietà di limitatezza delle successioni

Una successione a_n si dice:

a. **limitata inferiormente** se esiste un numero reale m tale che $a_n \geq m$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui la successione è definita;

b. **limitata superiormente** se esiste un numero reale M tale che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui la successione è definita;

c. **limitata**, se lo è sia inferiormente sia superiormente, vale a dire se esistono due numeri reali m e M tali che $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui la successione è definita.

ESEMPI Successioni inferiormente o superiormente limitate

a. La successione $a_n = n + 3$ è limitata inferiormente ($a_n \geq 3$), ma non superiormente (**Fig. 3**).

b. La successione $a_n = 1 - n^2$ è limitata superiormente ($a_n \leq 1$), ma non inferiormente (**Fig. 4**).

c. La successione $a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ è limitata (**Fig. 5**).

d. La successione $a_n = (-2)^n = \begin{cases} -2^n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2^n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ non è limitata né inferiormente né superiormente (**Fig. 6**).

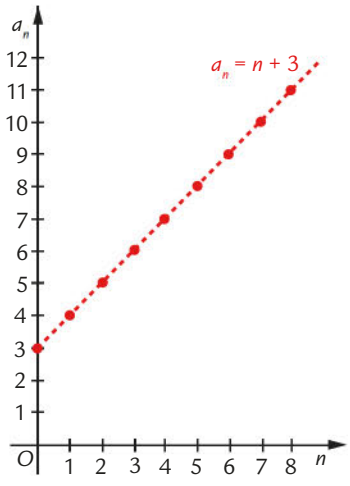


Figura 3

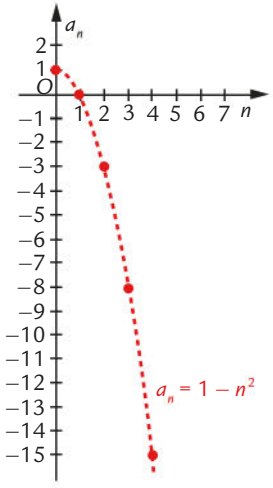


Figura 4

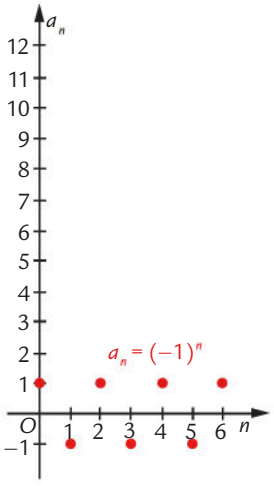


Figura 5

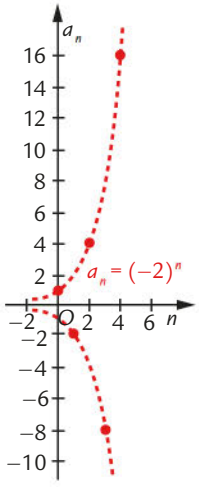


Figura 6

DEFINIZIONI | Monotonia delle successioni

Una successione a_n si dice:

a. **crescente** se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui la successione è definita;

b. **strettamente crescente** se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui la successione è definita;

c. **decrescente** se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui la successione è definita;

d. **strettamente decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui la successione è definita.

Una successione crescente o decrescente (strettamente crescente o decrescente) è detta **monotòna** (strettamente monotòna).

ESEMPI Successioni monotòne

a. La successione $a_n = n^2$ è strettamente crescente. Infatti, sappiamo che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente crescente nell'intervallo $[0, +\infty)$; in particolare, sarà: $f(n) < f(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, ossia $a_n < a_{n+1}$.

b. La successione $a_n = \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente. Infatti, sappiamo che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è strettamente decrescente nell'intervallo $(0, +\infty)$; in particolare, sarà: $f(n) > f(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, vale a dire $a_n > a_{n+1}$.

Esercizi p. 168

2. Progressioni aritmetiche e geometriche

Consideriamo il seguente problema.

◆ **PROBLEMA**

Il sig. Umberto ha due offerte di lavoro diverse:

1. la compagnia A offre una retribuzione di 15 000 euro per il primo anno e un aumento di 1000 euro all'anno per ciascuno dei 10 anni successivi;
2. la compagnia B offre una retribuzione di 12 000 euro per il primo anno e un aumento del 10% all'anno per ciascuno dei 10 anni successivi.



Quale delle due offerte è più conveniente, considerando un orizzonte temporale di 10 anni?

Iniziamo a soffermarci sulla fase di formalizzazione del problema (completeremo la risoluzione del problema a fine paragrafo). Siano a_1, ..., a_{n-1}, a_n le retribuzioni il primo anno, il secondo anno, il terzo anno, ecc.... presso la compagnia A e b_1, ..., b_{n-1}, b_n le retribuzioni il primo anno, il secondo anno, il terzo anno, ecc. presso la compagnia B. Osserviamo che le due successioni a_n e b_n hanno le seguenti caratteristiche:

$\underbrace{a_n - a_{n-1} = 1000}_{\text{l'aumento annuo è di 1000 euro}}$ $\qquad$ $\underbrace{b_n = 1{,}1\, b_{n-1}}_{\text{l'aumento annuo è del 10\%}}$, cioè $\frac{b_n}{b_{n-1}} = 1{,}1$

Nel primo caso si mantiene costante la *differenza* tra un termine e il precedente, mentre nel secondo il *quoziente*. Le successioni che presentano queste caratteristiche sono particolarmente importanti, perciò si è dato loro un nome specifico.

DEFINIZIONE | **Progressione aritmetica**

Una successione in cui la **differenza** tra un termine (a partire dal secondo) e il suo precedente si mantiene costante si dice **progressione aritmetica**.

La differenza costante fra un termine e il precedente si chiama **ragione** della progressione aritmetica e viene indicata generalmente con la lettera d.

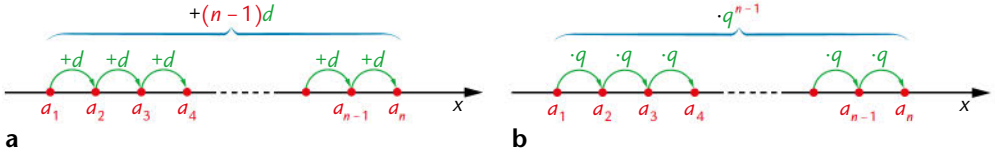
DEFINIZIONE | **Progressione geometrica**

Una successione in cui il **rapporto** tra un termine (a partire dal secondo) e il suo precedente si mantiene costante, diverso da zero, si dice **progressione geometrica**.

Il rapporto costante fra un termine e il precedente si chiama **ragione** della progressione geometrica e viene indicato generalmente con la lettera q.

Esempi	Controesempi
• $a_n = 2 + 3n$ è una progressione aritmetica. Infatti la differenza tra un termine e il suo precedente è costante: $a_n - a_{n-1} = \underbrace{(2 + 3n)}_{a_n} - \underbrace{[2 + 3(n-1)]}_{a_{n-1}} =$ $= 2 + 3n - 2 - 3n + 3 = 3$ La ragione della progressione è 3.	• $a_n = 2^n + 1$ **non** è una progressione aritmetica. Infatti i primi termini della successione sono: 2, 3, 5, 9, ... e si constata subito, per esempio, che: $3 - 2 = 1$ mentre $5 - 3 = 2$
• $a_n = 3^{n-1}$, con $n \geq 1$, è una progressione geometrica. Infatti il rapporto tra un termine e il precedente è costante: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3^{n-1}}{3^{n-2}} = 3$ La ragione della progressione è 3.	• $a_n = n^2 + 1$ **non** è una progressione geometrica. Infatti i primi termini della progressione sono: 1, 2, 5, 10, 17, ... e si constata subito, per esempio, che: $\frac{2}{1} = 2$ mentre $\frac{5}{2} = 2{,}5$

I termini di una progressione aritmetica (geometrica) si possono ottenere a partire dal primo per successive addizioni (moltiplicazioni) della ragione (*vedi* le **Figg. 7a** e **7b**).



a **b**

Figura 7

Sempre dall'osservazione delle figure, puoi intuire le formule riportate nei seguenti teoremi, che esprimono il termine generale di una progressione aritmetica o geometrica in funzione del primo termine e della ragione.

TEOREMA 1 | Termine generale di una progressione aritmetica

L'n-esimo termine di una progressione **aritmetica** il cui primo termine è a_1 e la cui ragione è d è dato dalla formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad [1]$$

TEOREMA 2 | Termine generale di una progressione geometrica

L'n-esimo termine di una progressione **geometrica** il cui primo termine è a_1 e la cui ragione è q è espresso dalla formula:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad [2]$$

ATTENZIONE!

Nei Teoremi 1 e 2 (e nei successivi 3 e 4) si suppone che il primo termine della successione sia a_1. Ricorda però che in generale una successione può essere definita in tutto N: in tal caso il primo termine risulterà a_0 e le formule [1] e [2] diventano: $a_n = a_0 + nd$ e $a_n = a_0 q^n$.

ESEMPI Calcolo di termini di progressioni aritmetiche e geometriche

Determiniamo:

a. il dodicesimo termine della progressione aritmetica il cui primo termine è $a_1 = 3$ e la cui ragione è $d = 2$;

b. l'ottavo termine della progressione geometrica il cui primo termine è $a_1 = 3$ e la cui ragione è $q = -2$.

a. Utilizzando la formula [1] otteniamo:

$$a_{12} = 3 + (12 - 1) \cdot 2 = 3 + 22 = 25$$

b. Utilizzando la formula [2] otteniamo:

$$a_8 = 3 \cdot (-2)^{8-1} = 3 \cdot (-2)^7 = -384$$

COLLEGHIAMO I CONCETTI **Progressioni e funzioni**

Una progressione *aritmetica* (*geometrica*) è una successione che corrisponde a una restrizione sul dominio dei numeri naturali di un'opportuna funzione *lineare* (*esponenziale*), avente come *coefficiente angolare* (*base dell'esponenziale*) la *ragione* della progressione. Nelle **Figg. 8** e **9** mettiamo in evidenza questi aspetti relativamente alle successioni $a_n = 3_n - 2$ (aritmetica) e $a_n = 2 \cdot 3^n$ (geometrica).

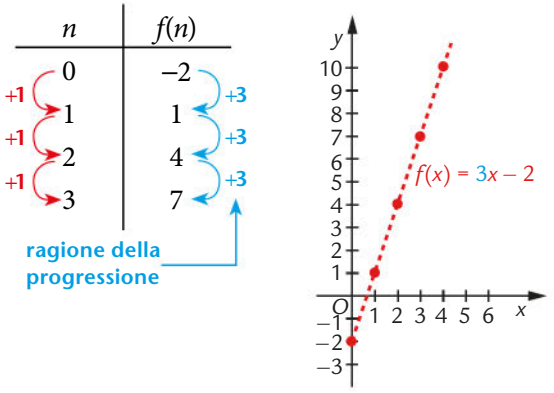


Figura 8 I punti che rappresentano una progressione aritmetica appartengono al grafico di una funzione lineare.

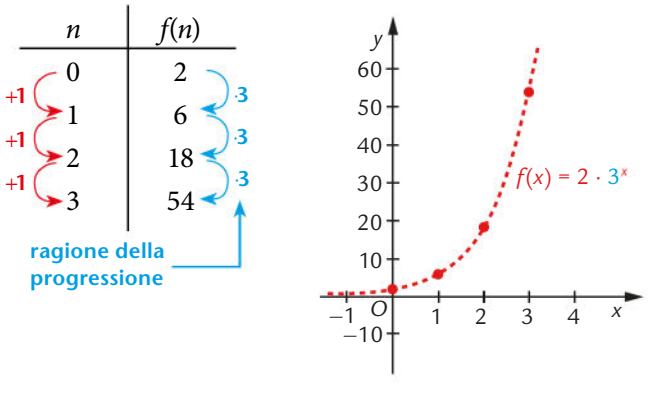
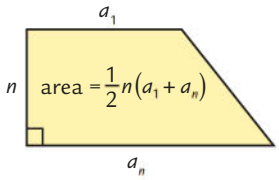


Figura 9 I punti che rappresentano una progressione geometrica appartengono al grafico di una funzione esponenziale.

La somma dei termini di una progressione aritmetica o geometrica

SUGGERIMENTO

Puoi ricordare facilmente la [3] per analogia con la formula dell'area di un trapezio di basi a_1 e a_n e altezza n:



TEOREMA 3 | Somma dei primi *n* termini di una progressione aritmetica

La somma S_n dei primi n termini di una progressione **aritmetica** è espressa dalla formula:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad [3]$$

dove a_1 è il primo termine e a_n è l'n-esimo termine della progressione.

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che, per come è definita una progressione aritmetica, i suoi termini si possono ricavare, alternativamente:

- a partire dal primo termine, a_1, aggiungendo successivamente la ragione d;
- a partire dall'n-esimo, a_n, sottraendo successivamente d.

Questa osservazione consente di riscrivere la somma S_n in due modi diversi.

$$\begin{cases} S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + a_n \\ S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + a_1 \end{cases}$$

Sommando queste due equazioni membro a membro otteniamo:

$$2S_n = \underline{(a_1 + a_n)} + \underline{(a_1 + a_n)} + \underline{(a_1 + a_n)} + \ldots + \underline{(a_1 + a_n)}$$

Al secondo membro di quest'ultima equazione ci sono n addendi uguali ad $a_1 + a_n$, quindi l'equazione equivale a:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \qquad \text{da cui:} \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

OSSERVA

Il caso $q = 1$, escluso dal teorema, è immediato. Infatti una progressione geometrica di ragione $q = 1$ è una successione costante, costituita da termini tutti uguali al primo. Pertanto: $S_n = n \cdot a_1$

TEOREMA 4 | Somma dei primi *n* termini di una progressione geometrica

La somma S_n dei primi n termini di una progressione **geometrica**, il cui primo termine è a_1 e la cui ragione è q, con $q \neq 1$, è espressa dalla formula:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad [4]$$

DIMOSTRAZIONE

I primi n termini di una progressione geometrica in cui il primo termine è a_1 e la ragione è q si possono esprimere nella forma:

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \ldots,\ a_1q^{n-2},\ a_1q^{n-1}$$

Pertanto la somma S_n dei termini della progressione e il prodotto qS_n della ragione della progressione per S_n valgono:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} \\ qS_n = \quad a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro dalla prima equazione la seconda, i termini sottolineati con lo stesso colore si elidono; perciò abbiamo:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

Poiché stiamo supponendo $q \neq 1$, possiamo dividere i due membri per $1-q$, ottenendo così la [4]:

$$S_n = a_1\frac{1-q_n}{1-q}$$

ESEMPIO Risoluzione del problema di inizio paragrafo

Siamo ora in grado di completare la risoluzione del problema iniziale, cioè stabilire quale delle due proposte risulta più conveniente per il sig. Umberto. Osserviamo che:

$$a_n = 15\,000 + 1000(n-1) \quad \text{e} \quad b_n = 12\,000(1{,}1)^{n-1}$$

a. La somma delle retribuzioni offerte dalla compagnia A nei primi dieci anni è data da:

$$a_1 + \ldots + a_{10} \underset{\text{Teorema 3}}{=} \frac{10(a_1+a_{10})}{2} \underset{a_{10} = 15000 + 9 \cdot 1000 = 24000}{=} \frac{10(15\,000+24\,000)}{2} = 195\,000 \text{ euro}$$

b. La somma delle retribuzioni offerte dalla compagnia B nei primi dieci anni è data da:

$$b_1 + \ldots + b_{10} \underset{\text{Teorema 4}}{=} 12\,000\,\frac{1-(1{,}1)^{10}}{1-1{,}1} \simeq 191\,249 \text{ euro}$$

Dunque al sig. Umberto conviene scegliere l'offerta della compagnia A.

ESEMPIO Somma di numeri naturali

Determiniamo la somma dei primi 100 numeri naturali (escluso lo zero).

I primi 100 numeri naturali, escludendo lo zero:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ 100$$

si possono pensare come i primi 100 termini di una progressione aritmetica il cui primo termine è $a_1 = 1$ e la cui ragione è $d = 1$. In base alla formula [3] abbiamo allora:

$$S_{100} = \frac{100}{2}(1+100) = 5050$$ Formula [3] con $n = 100$, $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$

Nei problemi in cui occorre calcolare la somma dei termini di una successione, si utilizza spesso il simbolo di sommatoria, che è definito come segue:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\text{si legge: «somma per } k \text{ che va da 1 a } n \text{ di } a_k\text{»}}$$

Con questa notazione il **Teorema 4** può per esempio essere espresso come segue:

$$\sum_{k=1}^{n} a_1q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

DALLA STORIA

Stando a quanto riportano alcune fonti, la richiesta di calcolare la somma dei numeri naturali compresi tra 1 a 100 (*vedi* esempio qui a fianco) fu posta al grande Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dal suo maestro di scuola elementare, all'età di 10 anni. Gauss fornì la risposta esatta in brevissimo tempo, evidentemente sfruttando la formula del Teorema 3.



Esercizi p. 171

3. Limiti di successioni

Le definizioni e i teoremi fondamentali

Essendo le successioni particolari *funzioni*, possiamo anche per esse definire l'operazione di limite. La situazione risulta semplificata rispetto al caso delle funzioni definite in **R**, poiché l'insieme **N** ammette *un solo punto di accumulazione*, $+\infty$. Di conseguenza, l'operazione di limite per una successione a_n può essere definita solo per $n \to +\infty$.

Possono presentarsi tre casi:

1. se il limite della successione è un numero reale l, diremo che la successione è **convergente** e scriveremo:
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$
2. se il limite della successione è $+\infty$ oppure $-\infty$, diremo che la successione è **divergente** e scriveremo:
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \text{ oppure } \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$
3. se il limite della successione non esiste, diremo che la successione è **irregolare** (o **indeterminata** od **oscillante**).

Studiare il **carattere** di una successione significa stabilire se essa è convergente, divergente o irregolare. Adattando la definizione generale di limite presentata nell'**Unità 2**, possiamo dare le seguenti definizioni.

Con GeoGebra
Successioni convergenti e divergenti

DEFINIZIONE | Limite di una successione convergente

Diciamo che la successione a_n **converge** al limite finito $l \in \mathbf{R}$ quando, in corrispondenza di ogni $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero $N > 0$ (dipendente da ε) tale che per ogni $n > N$ risulta:
$$|a_n - l| < \varepsilon$$

L'illustrazione geometrica della definizione di successione convergente è riportata in **Fig. 10**: per $n > N$ i punti appartenenti al grafico della successione (colorati in rosso) non «escono più» dalla striscia individuata dalle rette di equazioni $y = l - \varepsilon$ e $y = l + \varepsilon$.

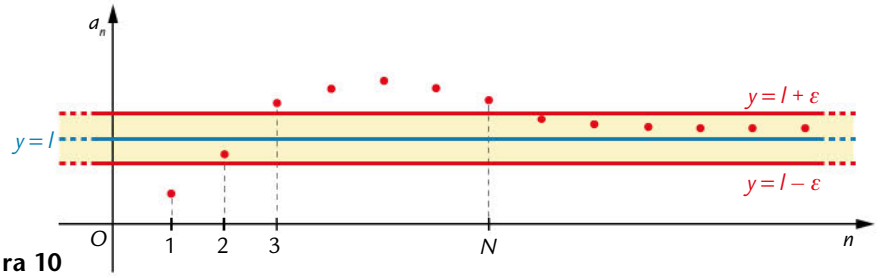


Figura 10

DEFINIZIONE | Limite di una successione divergente

Diciamo che la successione a_n **diverge** a $+\infty$ (oppure a $-\infty$) quando, in corrispondenza di ogni $M > 0$, è possibile determinare un numero $N > 0$ (dipendente da M) tale che, per ogni $n > N$, risulta:
$$a_n > M \quad \text{(oppure } a_n < -M\text{)}$$

Per i limiti di successioni sussistono teoremi analoghi a quelli già visti per i limiti di funzioni; ci limitiamo a enunciare qui di seguito i vari teoremi, «adattati» al caso delle successioni. Negli enunciati utilizzeremo la locuzione «definitivamente», che significa «*per n abbastanza grande*», ossia per n maggiore di un opportuno numero N. Per esempio, la successione definita da $a_n = 2n - 50$ è *definitivamente* positiva perché *per* $n > 25$ risulta $a_n > 0$.

TEOREMA 5 | Teorema del confronto per le successioni

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni per cui risulta definitivamente $a_n \le b_n \le c_n$.
Se a_n e c_n convergono a $l \in \mathbf{R}$, allora anche b_n converge a l.

TEOREMA 6 | Esistenza del limite per successioni monotone

a. Una successione crescente e superiormente limitata è convergente.
b. Una successione decrescente e inferiormente limitata è convergente.

RIFLETTI

Dal Teorema 6 segue che ogni successione monotòna e limitata è convergente.

L'ultimo teorema che enunciamo non è un «adattamento» di analoghi teoremi per le funzioni, ma un teorema nuovo che mette in relazione i limiti di *funzioni* e i limiti di *successioni*.

TEOREMA 7 | Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Sia x_0 un punto di accumulazione per il dominio D di una funzione f. Allora risulta:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \text{ con } l \in \mathbf{R}^*$$

se e solo se, per ogni successione a_n, a valori in $D - \{x_0\}$ e convergente a x_0, risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$$

È opportuno fare alcune osservazioni.

- Dal **Teorema 7** segue come corollario che se f è una funzione continua in $\mathbf{R}$ e a_n è una successione convergente, allora (*vedi* nota qui a fianco):

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)$$

- Il **Teorema 7** è utile per dimostrare rigorosamente la *non esistenza* del limite di una funzione. Precisamente, per mostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste, è sufficiente trovare due successioni a_n e b_n entrambe convergenti a x_0 e tali che le due successioni $f(a_n)$ e $f(b_n)$ abbiano limiti diversi per $n \to +\infty$.

RIFLETTI

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$ il limite cui converge la successione a_n; per la continuità della funzione f sarà $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e per il Teorema 7 $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$. Da quest'ultima uguaglianza, tenendo conto che $x_0 = \lim_{n\to+\infty} a_n$, segue $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)$.

ESEMPIO Dimostrazione della non esistenza di un limite

Dimostriamo che $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ non esiste.

Consideriamo le successioni $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ e $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Entrambe convergono a 0 per $n \to +\infty$; se prendiamo in considerazione la funzione $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin 2n\pi = 0 \text{ e } \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

Dunque avvicinandoci a 0 in due modi diversi, tramite le successioni a_n e b_n, le successioni dei corrispondenti valori assunti da $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f(a_n)$ e $f(b_n)$, hanno due comportamenti diversi (infatti $f(a_n) \to 0$ mentre $f(b_n) \to 1$): per il **Teorema 7**, possiamo concludere che il limite per $x \to 0$ della funzione f non esiste.

Il calcolo del limite di una successione

Tutte le regole valide per le funzioni, relative al calcolo dei limiti di somme, prodotti, quozienti ecc. **valgono anche per le successioni**. In particolare, dai limiti notevoli sulle funzioni si deducono (in forza del **Teorema 7**, prendendo $a_n = n$) i limiti notevoli per le successioni a pagina seguente.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^b} = +\infty$ per ogni $a > 1, b > 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a n}{n^b} = 0$ per ogni $a > 1, b > 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$ per ogni $k \in \mathbf{R}$

Presentiamo infine due limiti notevoli, non provenienti come i precedenti dalla «restrizione» a **N** dei limiti notevoli per le funzioni, che forniscono esempi di *infiniti* di ordine *superiore agli esponenziali*:

RICORDA
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ per ogni $a > 1$

$n!$ è un infinito di ordine superiore a qualsiasi esponenziale di base maggiore di 1

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

n^n è un infinito di ordine superiore a $n!$

ESEMPI Studio del carattere di una successione

Stabiliamo il carattere delle successioni così definite:

a. $a_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1}$ **b.** $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

c. $a_n = (-1)^n$ **d.** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

a. Con le ordinarie tecniche di calcolo dei limiti che si presentano sotto forma di rapporti di polinomi si vede che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n+1} = +\infty$$

La successione è quindi divergente.

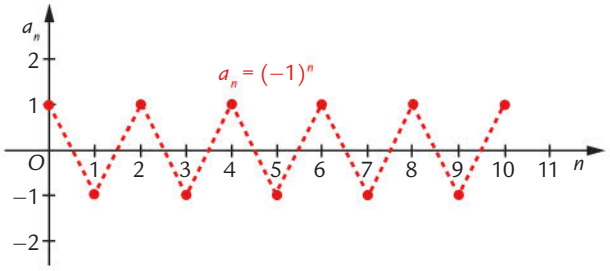
b. Calcoliamo il limite di a_n per $n \to +\infty$ con le tecniche di calcolo già viste per le funzioni.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)}_{\substack{\text{forma indeterminata} \\ +\infty\ -\infty}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0$$

Dunque la successione converge a 0.

c. Poiché $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ è dispari, è intuitivo che i valori della successione oscillano tra -1 e 1, dunque la successione è irregolare (*vedi* figura).

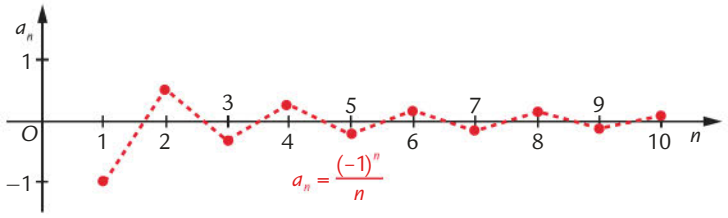


Più formalmente, si potrebbe dimostrare che se una successione tende a un limite l, finito o infinito, per $n \to +\infty$, allora anche ogni sua sottosuccessione (cioè ogni successione ottenuta da quella originaria togliendone alcuni elementi, senza modificare la posizione dei rimanenti) tende allo stesso limite l. In questo caso le due sottosuccessioni di a_n formate dai termini di indice pari e dai termini di indice dispari hanno limiti diversi per $n \to +\infty$ (la prima tende a 1 e la seconda a -1): ne segue che la successione a_n è irregolare.

d. Osserviamo preliminarmente che la successione $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ è il rapporto tra la successione $b_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$ che è *irregolare*, e la successione $c_n = n$, che è divergente. Gli ordinari teoremi sul limite di un rapporto **non** possono essere applicati, perché b_n è *irregolare*; perciò occorre seguire una via alternativa. Osserviamo che:

$$0 \le \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \text{ per ogni } n \ge 1$$

e che $\dfrac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, quindi per il teorema del confronto anche $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = |a_n| \to 0$ per $n \to +\infty$. D'altra parte, dalla definizione di limite di una successione convergente segue subito che $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$, dunque anche la successione originaria converge a 0 (*vedi* figura).



Ragionando in modo simile all'esempio **d** si potrebbe dimostrare, più in generale, che se una successione è il prodotto di una successione convergente a 0 e di una successione limitata, allora la successione data converge a 0.

TEOREMA 8 | Prodotto tra una successione infinitesima e una limitata

Siano a_n e b_n due successioni tali che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $|b_n| < M$ per un certo M e per tutti gli $n \in \mathbf{N}$. Allora risulta: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Esercizi p. 179

4. Principio di induzione

In questo paragrafo introduciamo una nuova tecnica di dimostrazione, il cosiddetto **principio di induzione**, e ne presentiamo alcune applicazioni.

Che cos'è il principio di induzione?

Il principio di induzione è un *tipo di ragionamento* utilizzato per *dimostrare* che una proprietà vale per ogni numero naturale n; esso è fondato sui seguenti passi:

1. si considera una proposizione, diciamo $P(n)$, dipendente da $n \in \mathbf{N}$, che si vuole dimostrare essere vera per ogni $n \in \mathbf{N}$;
2. si dimostra che la proposizione $P(n)$ è vera per $n = 0$;
3. si dimostra che, comunque fissato k, con $k \ge 0$, se è vera la proposizione $P(k)$, ottenuta per $n = k$, allora è vera anche la proposizione successiva $P(k + 1)$, ottenuta per $n = k + 1$.

A questo punto siamo nella seguente situazione: dal passo 2 sappiamo che $P(0)$ è vera; dal passo 3 applicato con $k = 0$ possiamo dedurre che anche $P(1)$ è vera; possiamo poi applicare ancora la 3 con $k = 1$ e dedurre, a partire dalla verità di $P(1)$, che anche la proposizione $P(2)$ è vera; poi da $P(2)$, applicando sempre la 3, deduciamo che anche $P(3)$ è vera, *e così via*; deduciamo in questo modo che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbf{N}$. Il principio di induzione rende rigoroso questo «e così via».
Questo ragionamento può partire, invece che da $n = 0$, da un opportuno $n = n_0 \in \mathbf{N}$, perciò il principio di induzione può essere enunciato in forma *più generale* come segue.

PER COMPRENDERE MEGLIO

Il «meccanismo» alla base del principio di induzione si può assimilare al cosiddetto «effetto domino». Immagina di disporre le tessere del domino in posizione verticale, in ordine e affiancate. Supponi:
a. di abbattere la prima tessera (con un colpo di dita, per esempio);
b. che le tessere siano così ravvicinate che la caduta di una qualsiasi di esse provoca la caduta della successiva.
Inevitabilmente verranno abbattute tutte le tessere, nessuna esclusa!



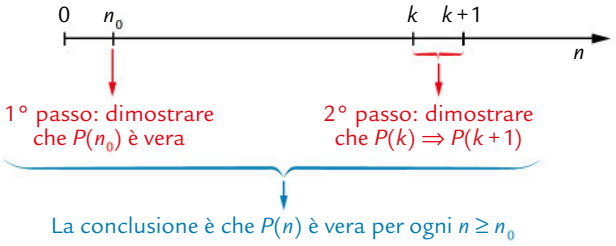
PRINCIPIO | Principio di induzione

Consideriamo una proposizione $P(n)$ (in particolare una uguaglianza o disuguaglianza), dipendente dalla variabile n, con $n \in \mathbf{N}$. Supponiamo che siano verificate le seguenti due condizioni:

a. la proposizione sia vera per un certo $n = n_0$, con $n_0 \in \mathbf{N}$;
b. comunque fissato un intero k con $k \geq n_0$, supposto che la proposizione $P(n)$ sia vera per $n = k$, allora è possibile dimostrare che la proposizione $P(n)$ è vera anche per $n = k + 1$.

Allora possiamo dedurre che la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Possiamo riassumere il metodo di dimostrazione per induzione nel seguente schema:



Particolare attenzione va prestata alla condizione **b**; **non** bisogna dimostrare che la proposizione $P(k + 1)$ è vera, ma bisogna provare che $P(k + 1)$ è *deducibile* da $P(k)$, cioè che $P(k + 1)$ è vera tutte le volte che lo è $P(k)$. In questo passo dell'applicazione del principio di induzione l'*ipotesi*, detta **ipotesi di induzione**, è quindi che $P(n)$ sia vera per $n = k$, mentre *la tesi* è che $P(n)$ sia vera anche per $n = k + 1$.
Alcuni esempi chiariranno meglio le cose.

ESEMPIO Dimostrazione per induzione di una disuguaglianza

Dimostriamo che $2^n > n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

La proposizione $P(n)$ che vogliamo dimostrare essere vera per ogni $n \in \mathbf{N}$ è in questo caso la disuguaglianza «$2^n > n$».

▶ 1° passo **Dimostriamo che $P(0)$ è vera**

Si tratta di dimostrare che $2^n > n$ è vera per $n = 0$. Ciò è ovvio poiché $2^0 = 1 > 0$.

▶ 2° passo **Dimostriamo che se $P(n)$ è vera per $n = k$, allora è vera anche per $n = k + 1$**

Sia $k \geq 0$ fissato. Assumiamo che $P(k)$ sia vera, cioè che:

$2^k > k$ Ipotesi di induzione

Vogliamo dimostrare che allora $P(k + 1)$ è vera, cioè che $2^{k+1} > k + 1$. A questo scopo procediamo come segue, a partire dall'ipotesi di induzione:

$2^k > k \Rightarrow$ Ipotesi di induzione
$\Rightarrow 2^k + 2^k > k + 2^k \Rightarrow$ Aggiungendo ai due membri 2^k
$\Rightarrow 2^k \cdot 2 > k + 2^k \Rightarrow$ Osservando che $2^k + 2^k = 2^k(1 + 1) = 2^k \cdot 2$
$\Rightarrow 2^{k+1} > k + 2^k$ Proprietà delle potenze [5]

Ora, osserviamo che per $k \geq 0$ è $2^k \geq 1$, quindi $k + 2^k \geq k + 1$, pertanto:

$$\underbrace{2^{k+1} > k + 2^k}_{[5]} \geq k + 1 \Rightarrow \underbrace{2^{k+1} > k + 1}_{P(k+1)}$$

Dunque $P(k + 1)$ è vera se è vera $P(k)$.

▶ 3° passo **Concludiamo**

Essendo verificate entrambe le condizioni previste dal principio di induzione, possiamo concludere che $2^n > n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

ESEMPIO Dimostrazione per induzione di un'uguaglianza

Dimostriamo per induzione che $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, con $n \geq 1$.

La proposizione $P(n)$ che vogliamo dimostrare essere vera per ogni $n \geq 1$ è in questo caso l'uguaglianza «$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n\,(n+1)(2n+1)$».

▶ 1° passo **Dimostriamo che $P(1)$ è vera**

Per $n = 1$ l'uguaglianza che vogliamo dimostrare fornisce:

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 1 = 1$$

dunque è vera.

▶ 2° passo **Dimostriamo che se $P(n)$ è vera per $n = k$, allora è vera anche per $n = k + 1$**

Sia $k \geq 1$ fissato. Assumiamo che $P(k)$ sia vera, cioè che:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \qquad \text{Ipotesi di induzione}$$

Vogliamo dimostrare che allora $P(k + 1)$ è vera, cioè che:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]$$

ossia:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)}_{P(k+1)}$$

A questo scopo scriviamo la seguente catena di uguaglianze:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \qquad \text{Per ipotesi di induzione}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] = \qquad \text{Raccogliendo}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \qquad \text{Svolgendo i calcoli all'interno della parentesi quadra}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \qquad \text{Scomponendo il trinomio di secondo grado}$$

Dunque $P(k + 1)$ è vera se è vera $P(k)$.

▶ 3° passo **Concludiamo**

Essendo verificate entrambe le condizioni previste dal principio di induzione, possiamo concludere che l'uguaglianza data è vera per ogni $n \geq 1$.

Approfondimento
Il gioco della Torre di Hanoi

PER SAPERNE DI PIÙ **Alcune somme notevoli**

È bene riflettere su alcune uguaglianze notevoli introdotte in questa Unità.

1. Nel **Paragrafo 2** abbiamo ricavato la formula per calcolare la somma dei primi n termini di una progressione *aritmetica*; da essa segue in particolare la formula per calcolare *la somma dei primi n numeri naturali*, a partire da 1:

$$1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad [6]$$

Una visualizzazione geometrica della [6] è illustrata in un caso particolare in **Fig. 11**.

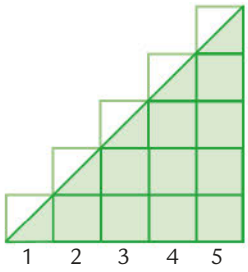


Figura 11 **La somma delle aree dei 5 quadrati di lato 1 è uguale alla somma delle aree del triangolo colorato in verde e dei triangoli più piccoli non colorati.**
Ne segue che:

$$\underbrace{1+2+\ldots+5}_{\text{somma delle aree dei quadrati}} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 5^2}_{\text{area del triangolo verde}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 5}_{\text{area complessiva dei 5 triangoli non colorati di area 1/2}} = \frac{1}{2}\cdot 5(5+1)$$

Considerando n quadrati di lato 1 e ragionando in modo analogo si ottiene la [6].

2. Nell'esempio precedente abbiamo dimostrato per induzione la formula che esprime *la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali*, a partire da 1:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad [7]$$

Una visualizzazione geometrica della [7] è illustrata in **Fig. 12**.

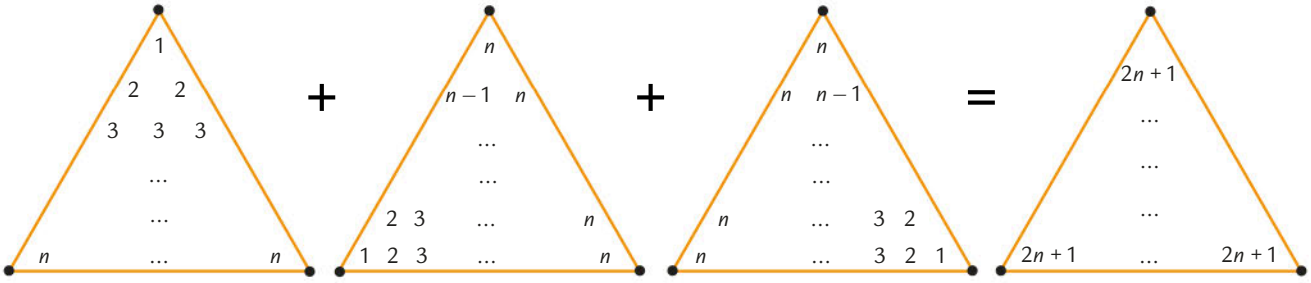


Figura 12 **La somma dei numeri contenuti in ciascuno dei primi tre triangoli è**

$$1+\underbrace{2+2}_{2^2}+\underbrace{3+3+3}_{3^2}+\ldots=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

(osserva che il secondo e il terzo triangolo sono «rotazioni» del primo). Il quarto triangolo contiene $1 + 2 + \ldots + n$ numeri (1 sulla prima riga, 2 seconda, ecc.) ciascuno uguale a $2n + 1$, quindi la somma dei numeri contenuti nel quarto triangolo è

$(1 + 2 + \ldots + n)(2n + 1) = \frac{1}{2}n(n + 1)(2n + 1)$.

Ne segue che:

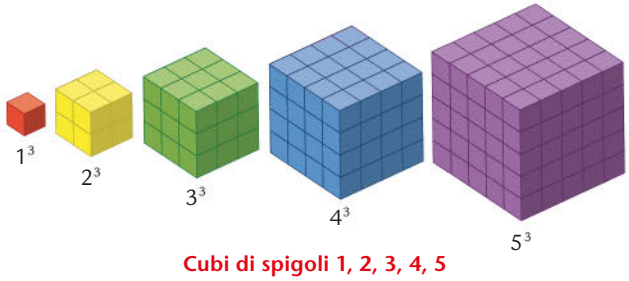
$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\text{, da cui la [7].}$$

3. Sempre per induzione si potrebbe provare la seguente formula, che esprime *la somma dei cubi dei primi n numeri naturali*, a partire da 1:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2=(1+2+\ldots+n)^2 \qquad [8]$$

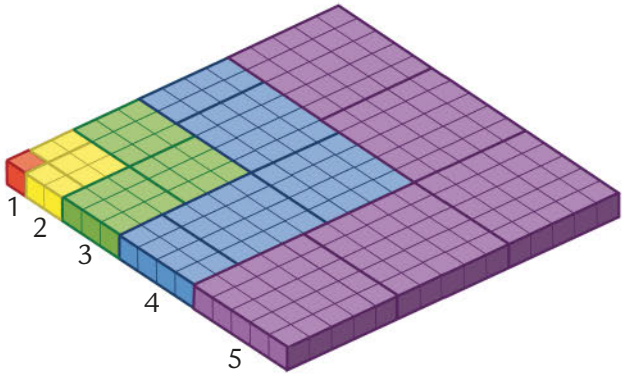
Una visualizzazione geometrica della [8] è illustrata in un caso particolare in **Fig. 13**.

a.



Cubi di spigoli 1, 2, 3, 4, 5

b.



Parallelepipedo di base quadrata
di lato 1 + 2 + ... + 5 e altezza 1

Figura 13 **La somma dei volumi dei cubi nella fig. a è uguale al volume del parallelepipedo nella fig. b, ottenuto ricomponendo i cubetti di spigolo 1 in fig. a:**

$1^3 + 2^3 + \ldots + 5^3 = (1 + 2 + \ldots + 5)^2 \cdot 1 = (1 + 2 + \ldots + 5)^2$

Considerando nella fig. a *n* cubi di lato 1, 2, ..., *n* e procedendo in modo analogo si ottiene la [8].

Utilizzando il simbolo di sommatoria, la [6], la [7] e la [8] si scrivono rispettivamente:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Esercizi p. 183

Percorso delle idee

Successioni e principio di induzione

Successione

Una funzione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali, eventualmente privato di alcuni suoi elementi.

Progressione aritmetica

Una successione in cui la *differenza* tra un termine (a partire dal secondo) e il precedente si mantiene costante.
La differenza costante si chiama *ragione* della progressione.

ESEMPIO

La successione dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5… è una progressione aritmetica di ragione uguale a 1.

Termine generale se il primo termine è a_1 e la ragione è d

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

ESEMPIO

La progressione aritmetica in cui $a_1 = 2$ e $d = 3$ ha termine generale $a_n = 2 + 3(n-1)$ cioè risulta $a_n = 3n - 1$.

Somma dei primi n termini a partire da a_1

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

ESEMPIO

La somma $1 + \ldots + 50$ dei primi 50 numeri naturali diversi da zero, essendo in questo caso

$$a_1 = 1,\ a_n = a_{50} = 50$$

è data da:

$$S_{50} = \frac{50(1+50)}{2} = 1275$$

Progressione geometrica

Una successione in cui il *quoziente* tra un termine (a partire dal secondo) e il precedente si mantiene costante.
Il quoziente costante si chiama *ragione* della progressione.

ESEMPIO

La successione delle potenze di due 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ... è una progressione geometrica di ragione uguale a 2.

Termine generale se il primo termine è a_1 e la ragione è q

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

ESEMPIO

La progressione geometrica in cui $a_1 = 2$ e $q = 3$ ha termine generale $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Somma dei primi n termini a partire da a_1, se la ragione è q

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ESEMPIO

La somma $2^0 + \ldots + 2^9$ delle prime 10 potenze di 2 (a partire dalla potenza di esponente zero), essendo

$$a_1 = 1,\ q = 2$$

è data da:

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1$$

Convergenza e divergenza

Una successione a_n il cui limite per $n \to +\infty$ risulta:

- *finito*, è detta *convergente*;
- *infinito*, è detta *divergente*.

ESEMPI

$a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ è convergente perché $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$

$a_n = n^2$ è divergente perché $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Limiti notevoli

Valgono limiti notevoli analoghi a quelli visti per le funzioni reali di variabile reale. Inoltre:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a > 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Successione definita in modo ricorsivo

Una successione che è definita assegnando il primo termine (i primi termini) e la legge che permette di determinare ciascun termine in funzione del precedente (dei precedenti).

ESEMPIO

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 1 + a_n \end{cases}$$

Alcuni termini della successione sono:

$a_2 = 1 + a_1 = 1 + 3 = 4$

$a_3 = 1 + a_2 = 1 + 4 = 5$

Principio di induzione

Se una proposizione $P(n)$, dipendente dalla variabile $n \in \mathbf{N}$, è tale che:

1. $P(n)$ è vera per $n = n_0$;
2. se $P(k)$ è vera, allora anche $P(k+1)$ è vera, per ogni prefissato valore di k, con $k \geq n_0$;

allora la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Somme notevoli

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

1. Introduzione alle successioni

Teoria p. 151

Rappresentazione tramite il termine generale

Determina i primi cinque termini delle successioni di cui è dato il termine generale. Supponi $n \geq 1$.

1 $a_n = n^2 - 3n - 2$ $[a_1 = -4, a_2 = -4, a_3 = -2, a_4 = 2, a_5 = 8]$

2 $a_n = 3n - 2$

3 $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$ $\left[a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{8}{3}, a_4 = \frac{15}{4}, a_5 = \frac{24}{5}\right]$

4 $a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$

5 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\left[a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = -\frac{1}{8}, a_5 = \frac{1}{16}\right]$

6 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

7 Data la successione definita da $a_n = 3n - 2$, per quale n risulta $a_n = 46$? $[n = 16]$

8 Data la successione definita da $a_n = \frac{n-1}{n+2}$, per quale n risulta $a_n = \frac{3}{4}$? $[n = 10]$

9 Data la successione definita da $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, per quale n risulta $a_n = \frac{1}{64}$? $[n = 8]$

Grafico di una successione

10 Rappresenta il grafico della funzione $y = 2 - 3x$ e quello della successione $a_n = 2 - 3n$. Quali differenze sussistono tra i due grafici?

11 Rappresenta il grafico della funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ e quello della successione $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Quali differenze sussistono tra i due grafici?

Rappresenta il grafico delle seguenti successioni, di cui è dato il termine generale. Supponi $n \geq 1$.

12 $a_n = n^2 - 2n$

13 $a_n = 2n - 2$

14 $a_n = \frac{6}{n}$

15 $a_n = 3 - n$

16 $a_n = 2^{\frac{n}{2}} - 1$

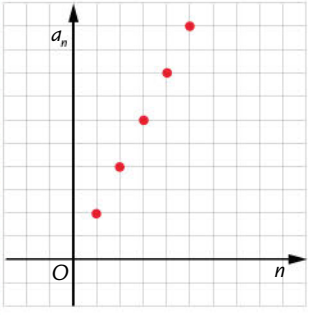
17 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

18 $a_n = (-1)^n \cdot n$

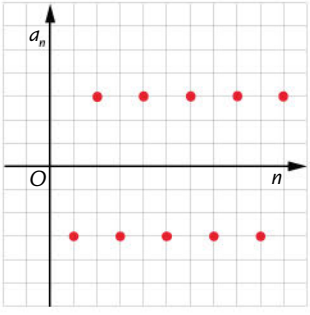
19 $a_n = \frac{(-2)^n}{n}$

Interpretazione di grafici

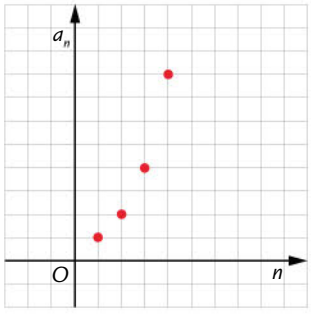
20 Scrivi un possibile termine generale delle successioni di cui è dato il grafico.



a



b



c

Rappresentazione per elencazione

Rappresenta per elencazione le seguenti successioni descritte a parole.

21 La successione dei numeri dispari.

22 La successione dei numeri naturali, diversi da zero, che sono multipli di 6.

23 La successione delle potenze, con esponente intero positivo, di $\frac{1}{3}$.

24 La successione dei cubi dei numeri naturali.

25 La successione dei quadrati dei reciproci degli interi positivi.

26 La successione degli opposti dei quadrati degli interi positivi.

Determina un possibile termine generale per ciascuna delle seguenti successioni.

27 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

28 $2, -2, 2, -2, 2, -2, \ldots$

29 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \ldots$

30 $1, 4, 3, 16, 5, 36, 7, \ldots$

31 $-2, 4, -8, 16, \ldots$

32 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots$

33 $-1, -8, -27, -64, \ldots$

34 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

35 $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \ldots$

Rappresentazione per ricorsione

36 ESERCIZIO GUIDATO

Determina i primi cinque termini della successione così definita ricorsivamente:

$a_1 = 1,\ a_n = 3 + a_{n-1}$

Il primo termine, a_1, è assegnato: $a_1 = 1$.
Devi determinare il secondo, il terzo, il quarto e il quinto termine:

$a_2 = 3 + a_1 = 3 + \ldots = \ldots$ Sostituendo $n = 2$ nella relazione $a_n = 3 + a_{n-1}$

$a_3 = 3 + a_2 = 3 + \ldots = \ldots$ Sostituendo $n = 3$ nella relazione $a_n = 3 + a_{n-1}$

$a_4 = 3 + a_3 = 3 + \ldots = \ldots$ Sostituendo $n = 4$ nella relazione $a_n = 3 + a_{n-1}$

$a_5 = 3 + a_4 = 3 + \ldots = \ldots$ Sostituendo $n = 5$ nella relazione $a_n = 3 + a_{n-1}$

Determina i primi cinque termini di ciascuna delle seguenti successioni definite ricorsivamente.

37 $a_1 = 2,\ a_n = 2 + \frac{1}{2}a_{n-1}$ $\left[a_2 = 3, a_3 = \frac{7}{2}, a_4 = \frac{15}{4}, a_5 = \frac{31}{8}\right]$

38 $a_1 = 1,\ a_n = 2 - a_{n-1}$

39 $a_1 = 3,\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 1$ $\left[a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{3}{4}, a_4 = -\frac{11}{8}, a_5 = -\frac{27}{16}\right]$

40 $a_1 = 512,\ a_n = \sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}}$

41 $a_1 = 1, a_2 = -1,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-1}$ $[a_3 = -2, a_4 = -1, a_5 = 1]$

42 $a_1 = 1, a_2 = -2,\ a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

43 Sai trovare il termine generale della successione definita ricorsivamente da $a_1 = 2,\ a_n = 2 + a_{n-1}$?

44 Sai trovare il termine generale della successione definita ricorsivamente da $a_1 = 3,\ a_n = 1 + a_{n-1}$?

45 Sai trovare il termine generale della successione definita ricorsivamente da $a_1 = 1,\ a_n = 3a_{n-1}$?

46 Sai trovare il termine generale della successione definita ricorsivamente da $a_1 = 4,\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$?

47 Sai trovare il termine generale della successione definita ricorsivamente da $a_1 = 7$ e $a_n = 10 - a_{n-1}$?

Realtà e modelli

48 **Caduta libera.** Un corpo in caduta libera, lasciato cadere con velocità iniziale nulla in assenza di attrito, percorre circa 4,9 m nel primo secondo del moto di caduta, circa 14,7 m nel secondo successivo, circa 24,5 m nel terzo secondo, circa 34,3 m nel secondo successivo al terzo e così via.

a. Scrivi la successione che rappresenta lo spazio s_n (in metri) percorso dal corpo nell'n-esimo secondo del moto, sia in forma ricorsiva sia esplicitandone il termine generale.

b. In quale secondo durante il moto il corpo percorre 583,1 m? [**a.** $s_n = 9{,}8n - 4{,}9$; **b.** nel sessantesimo secondo]

49 **Crescita di una popolazione di insetti.** La densità di una certa popolazione di insetti è di 2000 insetti per ettaro all'inizio dell'anno in cui comincia l'osservazione; si stima che negli anni successivi la densità della popolazione di insetti aumenterà ogni anno del 10% rispetto all'anno precedente. Sia d_1 la densità degli insetti all'inizio del primo anno di osservazione e d_n la densità all'inizio dell'n-esimo anno.



a. Rappresenta la successione d_n in forma ricorsiva e calcola d_2, d_3, d_4.

b. Rappresenta la successione d_n, scrivendone esplicitamente il termine generale.

[**a.** $d_1 = 2000$, $d_n = 1{,}1\ d_{n-1}$, $d_2 = 2200$, $d_3 = 2420$, $d_4 = 2662$; **b.** $d_n = 2000(1{,}1)^{n-1}$]

50 **Velocità di una reazione chimica.** L'aumento della temperatura provoca solitamente un aumento della velocità di una reazione chimica. Supponi che la velocità di una reazione a una certa temperatura T_0 sia v_0 e che ogni incremento della temperatura T_0 di 10 °C provochi un aumento del 12% della velocità di reazione.

a. Scrivi la successione a_n che rappresenta la velocità di reazione dopo n incrementi di 10 °C, sia in forma ricorsiva sia esplicitandone il termine generale.

b. Se la temperatura cresce di 40 °C rispetto a T_0, di quanto aumenta in percentuale la velocità di reazione?

[**a.** $a_0 = v_0$, $a_{n+1} = 1{,}12a_n$; $a_n = v_0(1{,}12)^n$; **b.** circa 57,35%]

51 **ESERCIZIO GUIDATO**

Per ciascuna delle seguenti successioni rappresenta il grafico e stabilisci se è monotòna e se è inferiormente o superiormente limitata:

a. $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ **b.** $a_n = 4 - n^2$, $n \geq 0$

a. Osserva che il grafico della successione è la restrizione del grafico della funzione omografica $y = 2 - \frac{1}{x}$ ai punti aventi ascissa intera positiva. Tenendo conto del fatto che la funzione $y = 2 - \frac{1}{x}$ è strettamente crescente nell'intervallo $(0, +\infty)$ e ammette come asintoto orizzontale la retta $y = 2$, puoi dedurre che la successione è strettamente crescente e limitata.

b. Osserva che il grafico della successione è la restrizione del grafico della funzione quadratica $y = 4 - x^2$ ai punti aventi ascissa intera positiva o nulla. Tenendo conto che la parabola rappresentata dalla funzione quadratica è strettamente decrescente nell'intervallo $[0, +\infty)$ e che tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$, puoi dedurre che la successione è strettamente decrescente e limitata superiormente ma non inferiormente.

Per ciascuna delle seguenti successioni rappresenta il grafico e stabilisci se è monotòna e se è inferiormente o superiormente limitata.

52 $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

53 $a_n = 2 - 2^n$, $n \geq 0$

54 $a_n = n^2 - 4n$, $n \geq 0$

55 $a_n = \sqrt{n+4}$, $n \geq 0$

56 $a_n = (-1)^n n$, $n \geq 0$

57 $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \geq 0$

58 $a_n = -\ln n$, $n \geq 1$

59 $a_n = \frac{n-2}{n+1}$, $n \geq 0$

60 $a_n = \sin n$, $n \geq 0$

61 $a_n = \sqrt{1+n^2}$, $n \geq 0$

2. Progressioni aritmetiche e geometriche

Teoria p. 154

Esercizi introduttivi

62 Vero o falso?

a. la somma di due termini consecutivi di una progressione aritmetica è costante V F
b. la successione 3, 9, 81, ... non può essere una progressione aritmetica V F
c. la ragione di una progressione aritmetica non può essere negativa V F
d. la successione dei multipli di 3 è una progressione aritmetica e ha ragione uguale a 3 V F
e. la successione dei quadrati degli interi è una progressione aritmetica e ha ragione uguale a 2 V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

63 Vero o falso?

a. due termini consecutivi di una progressione geometrica hanno prodotto costante V F
b. la successione 6, 12, 24, ... non può essere geometrica V F
c. in una progressione geometrica è sempre $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_3 > a_2 > a_1$ V F
d. la successione delle potenze di 5 è geometrica e ha ragione 5 V F
e. la successione dei quadrati degli interi non è geometrica V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

Test

64 Una delle seguenti successioni **non** può essere una progressione aritmetica; quale?

A $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \ldots$ B $-1, -2, -4, -8, \ldots$ C $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ D $-2, -4, -6, -8, \ldots$

65 Quale delle seguenti successioni è una progressione aritmetica la cui ragione è uguale a -5?

A $-5, 25, -125, 625, \ldots$ B $-5, -10, -20, -40, \ldots$ C $-5, 0, 5, 10, \ldots$ D $1, -4, -9, -14, \ldots$

66 Qual è il decimo termine della progressione aritmetica in cui $a_1 = -2$ e la ragione è $d = -2$?

A -18 B -20 C -22 D I dati sono insufficienti per rispondere

67 Una delle seguenti successioni **non** può essere una progressione geometrica; quale?

A $\sqrt{3}, 3, \sqrt{27}, 9, \ldots$ B $-2, 4, -8, 16, \ldots$ C $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ D $-2, 6, -18, -54, \ldots$

68 Quale delle seguenti successioni è una progressione geometrica di ragione uguale a -2?

A $-5, -10, -20, -40, \ldots$ B $-2, -4, -8, -16, \ldots$ C $2, -4, 8, -16, \ldots$ D $-5, 10, -10, 40, \ldots$

69 Qual è l'ottavo termine della progressione geometrica in cui $a_1 = -0{,}5$ e la ragione è -2?

A 32 B 64 C 128 D I dati sono insufficienti per rispondere

70 **Giustificare e argomentare** Daniela afferma che nessuna successione numerica può essere contemporaneamente progressione aritmetica e progressione geometrica. Federico, al contrario, sostiene che ne esistono, anche se di poco interesse. Chi ha ragione? Giustifica adeguatamente la risposta.

Progressioni aritmetiche

Di ciascuna delle seguenti progressioni aritmetiche determina la ragione, il termine generale e il decimo termine.

71 $3, 9, 15, 21, \ldots$

72 $-3, -5, -7, -9, \ldots$

73 $3, 7, 11, 15, \ldots$

74 $10, 5, 0, -5, \ldots$

75 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

76 $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

Individua quali delle seguenti successioni sono progressioni aritmetiche. Di quelle che lo sono determina l'ottavo termine e la ragione della progressione. Supponi $n \geq 1$.

77 $a_n = n^2 - 1$

78 $a_n = \frac{3}{2}n - 1$

79 $a_n = 5 - n^{-1}$

80 $a_n = 5 - n$

81 $a_n = -3^n$

82 $a_n = (n+1)^2 - n^2$

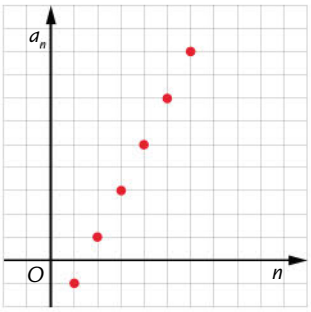
---

83 Considera la progressione aritmetica definita dal termine generale $a_n = 2n - 1$. In corrispondenza di quale n risulta $a_n = 103$?

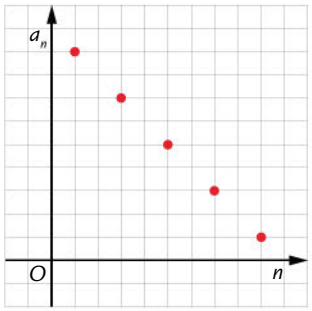
84 Definisci ricorsivamente la progressione aritmetica il cui primo termine è $a_1 = 5$ e la cui ragione è -2.

85 Definisci ricorsivamente la progressione aritmetica il cui termine generale è $a_n = 3n - 4$.

86 **Interpretazione di grafici** Scrivi il termine generale delle progressioni aritmetiche di cui è rappresentato (in parte) il grafico; per ciascuna di esse specifica qual è il primo termine e qual è la ragione.



a



b

Date le informazioni assegnate, relative a una progressione aritmetica, determina l'elemento richiesto.

87 Trova a_{16}, dati $a_1 = 5$ e $d = 4$. $[a_{16} = 65]$

88 Trova a_{20}, dati $a_1 = 2$ e $d = -2$. $[a_{20} = -36]$

89 Trova n, sapendo che $a_1 = 2$, $d = 3$ e $a_n = 65$. $[n = 22]$

90 ESERCIZIO SVOLTO

Troviamo il primo termine a_1 di una progressione aritmetica, dati $a_5 = 5$ e $d = 4$.

1° modo

Per $n = 5$, la formula $a_n = a_1 + (n-1)d$ fornisce:

$a_5 = a_1 + (5-1)d$

Sostituiamo i valori noti, cioè $a_5 = 5$, $d = 4$.

Otteniamo l'equazione:

$5 = a_1 + (5-1) \cdot 4$ da cui risulta: $a_1 = -11$.

2° modo

Per definizione di progressione aritmetica deve essere:

$a_4 = a_5 - 4 = 5 - 4 = 1$

$a_3 = a_4 - 4 = 1 - 4 = -3$

$a_2 = a_3 - 4 = -3 - 4 = -7$

$a_1 = a_2 - 4 = -7 - 4 = -11$

91 Trova a_{15}, dati $a_8 = 2$ e $d = -2$. $[a_{15} = -12]$

92 Trova a_{10}, dati $a_5 = 12$ e $d = -3$. $[a_{10} = -3]$

93 Trova n, dati $a_3 = 7$, $d = -1$ e $a_n = -4$. $[n = 14]$

94 ESERCIZIO SVOLTO

Troviamo il primo termine a_1 e la ragione d di una progressione aritmetica, dati $a_8 = -11$ e $a_{15} = -25$.

Affinché sia $a_8 = -11$, deve essere:

$-11 = a_1 + (8-1)d$ Dalla formula $a_n = a_1 + (n-1)d$, con $n = 8$ e $a_8 = -11$ [*]

Analogamente, affinché sia $a_{15} = -25$, deve essere:

$-25 = a_1 + (15-1)d$ Dalla formula $a_n = a_1 + (n-1)d$, con $n = 15$ e $a_{15} = -25$ [**]

Risolvendo il sistema formato dalle due equazioni [*] e [**] rispetto alle incognite a_1 e d, si trova $a_1 = 3$ e $d = -2$.

95 Trova a_1 e d, dati $a_2 = 2$ e $a_5 = 17$. $[a_1 = -3, d = 5]$

96 Trova a_1 e d, dati $a_5 = 6$ e $a_9 = 12$. $\left[a_1 = 0, d = \frac{3}{2}\right]$

97 Trova n, dati $a_3 = -2$, $a_6 = -8$ e $a_n = -22$. $[n = 13]$

Progressioni geometriche

Di ciascuna delle seguenti progressioni geometriche determina la ragione, il termine generale e il quinto termine.

98 3, 9, 27, 81, ...

99 $-2, 4, -8, 16, \ldots$

100 $-1, 3, -9, 27, \ldots$

101 $10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$

102 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots$

103 $\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$

Stabilisci se le seguenti successioni sono progressioni geometriche. Di quelle che lo sono, determina il quinto termine e la ragione della progressione. Supponi $n \geq 1$.

104 $a_n = 3^{n-2}$

105 $a_n = 3(n-2)$

106 $a_n = 2^{n+1}$

107 $a_n = 3 \cdot 2^{-n}$

108 $a_n = 5 - n^2$

109 $a_n = 2 \cdot (-3)^n$

110 $a_n = -n^3$

111 $a_n = 2^{n+1} - 2^n$

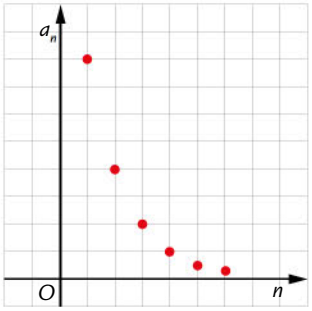
---

112 Considera la progressione geometrica definita da $a_n = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}}$. In corrispondenza di quale n risulta $a_n = 48$?

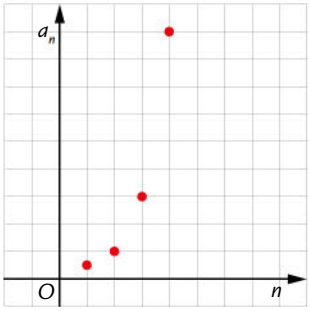
113 Definisci ricorsivamente la progressione geometrica il cui primo termine è 4 e la cui ragione è -2.

114 Definisci ricorsivamente la progressione geometrica il cui termine generale è $a_n = -3 \cdot 2^{n-2}$.

115 **Interpretazione di grafici** Scrivi il termine generale delle progressioni geometriche di cui è rappresentato (in parte) il grafico; per ciascuna di esse specifica qual è il primo termine e qual è la ragione.



a



b

Date le informazioni assegnate, relative a una progressione geometrica, in cui $n \geq 1$, determina l'elemento richiesto.

116 Trova a_5, dati $a_1 = 5$ e $q = 2$. $[a_5 = 80]$

117 Trova a_7, dati $a_1 = 2$ e $q = -2$. $[a_7 = 128]$

---

118 **ESERCIZIO SVOLTO**

Troviamo a_2, dati $a_5 = \frac{4}{9}$ e $q = \frac{1}{3}$.

1° modo

Per $n = 5$, la formula $a_n = a_1 q^{n-1}$ fornisce: $a_5 = a_1 q^{5-1} = a_1 q^4$

Sostituiamo i valori noti, cioè $a_5 = \frac{4}{9}$, $q = \frac{1}{3}$.

Otteniamo l'equazione: $\frac{4}{9} = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^4$ da cui risulta $a_1 = 36$.

Il termine generale della progressione è dunque

$a_n = 36\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ e $a_2 = 36\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} = 12$.

2° modo

Per definizione di progressione geometrica, sarà:

$a_5 = \frac{1}{3}a_4$, quindi $a_4 = 3a_5 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$.

In modo analogo $a_3 = 3a_4 = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ e

$a_2 = 3a_1 = 3 \cdot 4 = 12$.

119 Trova a_1, dati $a_5 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$. $[a_1 = 8]$

120 Trova a_3, dati $a_4 = 6$ e $q = 3$. $[a_3 = 2]$

121 Trova n, sapendo che $a_1 = 9$, $q = -\frac{2}{3}$ e $a_n = -\frac{8}{3}$. $[n = 4]$

122 Trova n, sapendo che $a_3 = 2$, $q = -2$ e $a_n = 512$. $[n = 11]$

---

123 ESERCIZIO SVOLTO

Troviamo a_1 e q, dati $a_4 = \frac{5}{2}$ e $a_6 = \frac{5}{8}$.

Affinché sia $a_4 = \frac{5}{2}$, deve essere:

$\frac{5}{2} = a_1 q^{4-1}$ Dalla formula $a_n = a_1 q^{n-1}$, con $n = 4$ e $a_4 = \frac{5}{2}$ [*]

Analogamente, affinché sia $a_6 = \frac{5}{8}$, deve essere:

$\frac{5}{8} = a_1 q^{6-1}$ Dalla formula $a_n = a_1 q^{n-1}$, con $n = 6$ e $a_6 = \frac{5}{8}$ [**]

Per trovare a_1 e q dobbiamo risolvere il sistema formato dalle due equazioni [*] e [**].

- Dividendo membro a membro le due equazioni [*] e [**], troviamo:

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{a_1 q^3}{a_1 q^5} \Rightarrow 4 = \frac{1}{q^2} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{2}$$

- Sostituendo $\frac{1}{2}$ al posto di q nella [*] e risolvendo l'equazione ottenuta troviamo $a_1 = 20$.
- Sostituendo $-\frac{1}{2}$ al posto di q nella [*] e risolvendo l'equazione ottenuta troviamo $a_1 = -20$.

Il problema ammette quindi *due* soluzioni: $a_1 = 20$, $q = \frac{1}{2}$ oppure $a_1 = -20$, $q = -\frac{1}{2}$.

---

124 Trova a_1 e q, dati $a_4 = -4$ e $a_5 = 16$. $\left[a_1 = \frac{1}{16},\ q = -4\right]$

125 Trova a_1 e q, dati $a_3 = 5$ e $a_5 = \frac{5}{4}$. $\left[a_1 = 20,\ q = \pm\frac{1}{2}\right]$

Somma dei termini di una progressione aritmetica o geometrica

126 ESERCIZIO SVOLTO

Troviamo la somma dei numeri pari compresi tra 2 e 150, inclusi 2 e 150.

La successione dei numeri pari diversi da zero:

2, 4, 6, 8, ...

può essere definita dalla formula: $a_n = 2n$, con $n \geq 1$.

Osserviamo che:

- 2 è il *primo* termine di questa successione;
- 150 è il *settantantacinquesimo* termine (infatti $a_{75} = 2 \cdot 75 = 150$);
- la successione dei numeri pari è una progressione *aritmetica* di ragione 2.

Pertanto il problema dato equivale a determinare la somma dei primi 75 termini di questa progressione. Abbiamo:

$S_{75} = \frac{75}{2}(2 + 150) = 75 \cdot 76 = 5700$ Formula $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, con $n = 75$, $a_1 = 2$ e $a_{75} = 150$

Pertanto, la somma dei numeri pari compresi tra 2 e 150, inclusi 2 e 150, è uguale a 5700.

127 Trova la somma dei primi 40 termini della progressione aritmetica: 1, 5, 9, 13, ... [3160]

128 Trova la somma dei primi 120 numeri naturali, escluso lo zero. [7260]

129 Trova la somma dei numeri dispari compresi tra 1 e 99, inclusi 1 e 99. [2500]

130 Trova la somma di tutti i multipli di 5 compresi tra 10 e 200, inclusi 10 e 200. [4095]

Determina le seguenti somme.

131 $3 + 6 + \ldots + 120$ [2460]

132 $-1 + (-2) + \ldots + (-100)$ [−5050]

133 $10 + 4 + (-2) + (-8) + \ldots + (-68)$ [−406]

134 $1 + 5 + 9 + \ldots + 81$ [861]

135 $\sum_{k=1}^{10} 4k$ [220]

136 $\sum_{k=0}^{12} 5k$ [390]

137 $\sum_{k=1}^{18} (5k - 2)$ [819]

138 $\sum_{k=0}^{25} (a - bk)$ [$26a - 325b$]

---

139 La somma dei primi n numeri pari (escluso lo zero) è 110. Quanto vale n? [10]

140 La somma dei primi n numeri dispari è 169. Quanto vale n? [13]

141 **ESERCIZIO SVOLTO**

Troviamo la somma delle prime dieci potenze di 2, con esponente diverso da zero.

La successione delle potenze di 2, con esponente diverso da zero: 2, 4, 8, 16, ... è una progressione geometrica di ragione 2. Pertanto, il problema dato equivale a determinare la somma dei primi dieci termini di questa progressione. Abbiamo:

$$S_{10} = 2\frac{1-2^{10}}{1-2} =$$ Formula $S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$, con $n = 10$, $a_1 = 2$ e $q = 2$

$$= 2(2^{10} - 1) = 2046$$ Utilizzando una calcolatrice

La somma delle prime dieci potenze di 2, con esponente diverso da zero, è quindi 2046.

142 Trova la somma delle prime cinque potenze di 3, con esponente diverso da zero. [363]

143 Trova la somma delle prime sei potenze di 4, a partire da quella con esponente 0. [1365]

144 Trova la somma dei primi sei termini della successione 3, −6, 12, −24, ... [−63]

145 Trova la somma dei primi sei termini della successione 2, 6, 18, 54, ... [728]

146 Trova la somma dei primi sei termini della successione $2, \frac{2}{10}, \frac{2}{100}, \frac{2}{1000}, \ldots$ [2,22222]

Determina le seguenti somme.

147 $-1 + 3 - 9 + 27 - \ldots - 3^8$ [−4921]

148 $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^6$ $\left[\frac{2059}{729}\right]$

149 $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots + \frac{2}{3^n}$ [$3 - 3^{-n}$]

150 $3 + 6 + 12 + \ldots + 3 \cdot 2^n$ [$3(2^{n+1} - 1)$]

151 $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ $\left[\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)\right]$

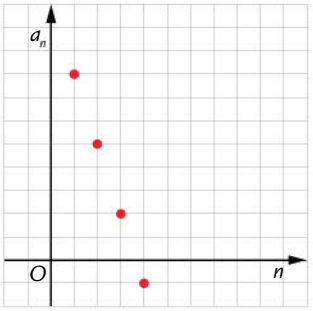
152 $\sum_{k=1}^{n} 2^{k+2}$ $\left[2^{n+3}-8\right]$

153 $\sum_{k=1}^{6}\left(1-3^{1+k}\right)$ [−3270]

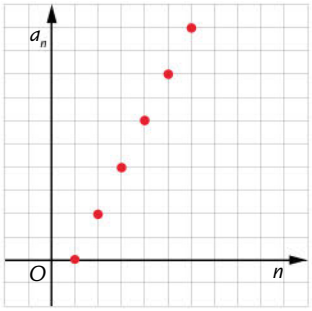
154 $\sum_{k=1}^{n}\left(2^{4-k}+2\cdot 4^k\right)$ $\left[\frac{1}{3}\left(2^{2n+3}+40\right)-2^{4-n}\right]$

Interpretazione di grafici

155 Determina la somma dei primi 20 termini delle progressioni aritmetiche il cui grafico è rappresentato (in parte) in figura.



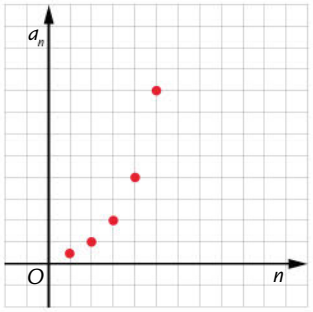
a



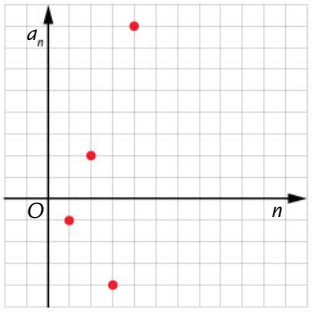
b

[a. −410; b. 380]

156 Determina la somma dei primi dieci termini delle progressioni geometriche il cui grafico è rappresentato (in parte) in figura.



a



b

[a. 511,5; b. 341]

157 La somma delle prime n potenze di $\frac{1}{2}$, con esponente diverso da zero, è $\frac{255}{256}$. Quanto vale n? [8]

158 La somma delle prime n potenze di $-\frac{2}{3}$, con esponente diverso da zero, è $-\frac{266}{729}$. Quanto vale n? [6]

159 Determina per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ risulta $3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{n-1} \geq 93$. [$n \geq 5$]

160 Verifica che per *nessun* $n \in \mathbb{N}$ risulta $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n > 3$.

Problemi

161 ESERCIZIO SVOLTO

Ti sarà probabilmente capitato di costruire «capanne» a più piani con normali carte da gioco. La costruzione è semplicissima: due coppie di carte disposte a «V rovesciata», sormontate da un'ulteriore carta sopra la quale è possibile disporre un'altra «V rovesciata», e così via, proseguendo verso l'alto.

a. Quante carte sono necessarie per costruire una «capanna» a n piani?

b. Bastano le 40 carte di un comune mazzo da briscola per costruire una «capanna» di 5 piani? Con le 108 carte da ramino puoi costruire una «capanna» di 9 piani?



a. Contiamo anzitutto il numero di carte da disporre orizzontalmente; esse sono

$$\underbrace{1+2+\ldots+(n-1)}_{\text{somma degli } n-1 \text{ termini di una progressione aritmetica di ragione 1}} = \frac{n-1}{2}[1+(n-1)] = \frac{n(n-1)}{2}$$

Contiamo ora il numero delle carte che costituiscono le «V rovesciate». Esse sono il doppio del numero delle «V rovesciate» stesse, quindi sono:

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{numero di}\\ \text{V rovesciate}}}\underbrace{(1+2+\ldots+n)}_{\substack{\text{somma dei termini di una progressione aritmetica di ragione 1}}} = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

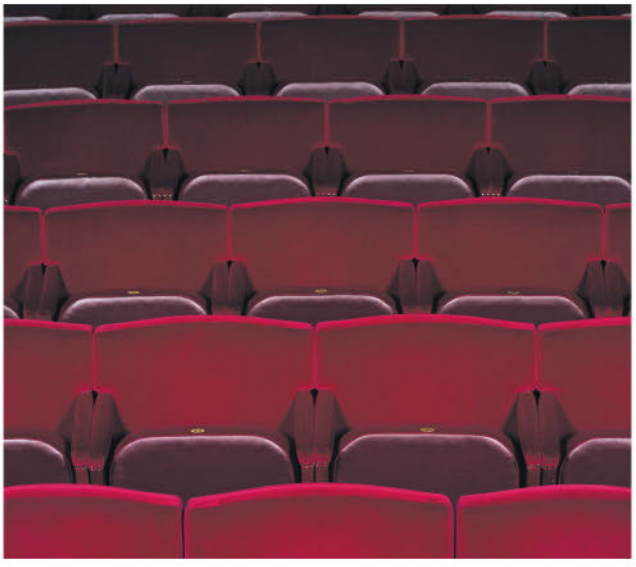
Il numero complessivo $c(n)$ di carte necessarie per formare una capanna di n piani è quindi:

$$c(n) = \frac{n(n-1)}{2} + n(n+1) = \frac{n^2-n}{2} + n^2 + n = \frac{3n^2+n}{2}$$

b. Valutiamo la funzione $c(n)$ in corrispondenza di $n=5$ e $n=9$; abbiamo $c(5)=40$ e $c(9)=126$. Pertanto le 40 carte da briscola bastano (appena) per una capanna di 5 piani, mentre le 108 carte da ramino, benché in numero più che doppio, risultano insufficienti per una costruzione di 9 piani.

●○○ **162** **Retribuzioni/1.** Una compagnia offre una retribuzione di 25 000 euro per il primo anno e un incremento di 2500 euro all'anno per gli anni successivi. Se si accetta questa offerta, quanto si incasserà complessivamente in 10 anni? [362 500 euro]

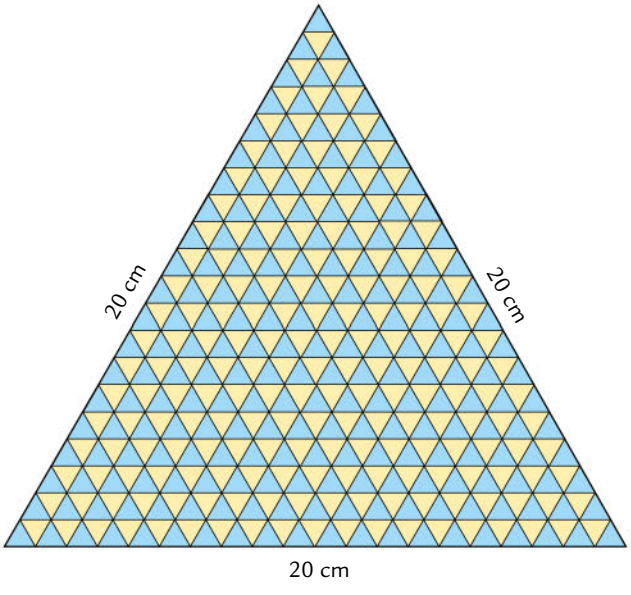
●○○ **163** **A teatro.** I teatri sono spesso costruiti in modo che il numero di posti per fila cresca via via che ci si allontana dalla prima fila. Un teatro ha 28 posti a sedere nella prima fila, 30 nella seconda, 32 nella terza e così via (2 posti in più per ogni fila). Nel teatro ci sono complessivamente 30 file. Quanti posti a sedere ci sono in teatro? [1710]



●○○ **164** **Risparmi.** Paolo nel mese di novembre risparmia 10 centesimi il primo giorno, 20 centesimi il secondo, 30 centesimi il terzo, 40 centesimi il quarto, e così via. Quanto ha risparmiato complessivamente in novembre? [46 euro e 50 centesimi]

●○○ **165** **Retribuzioni/2.** Due compagnie offrono due differenti contratti, della durata di 10 anni. La compagnia A offre una retribuzione per il primo anno di 18 000 euro e un aumento di 2800 euro all'anno per gli anni successivi. La compagnia B offre per il primo anno una retribuzione di 26 000 euro e un aumento, negli anni successivi, di 1200 euro all'anno. Quale delle due offerte è più conveniente, ovvero permette di incassare complessivamente la cifra maggiore nei 10 anni di durata del contratto? [L'offerta della compagnia B]

●○○ **166** **Un mosaico.** Un mosaico ha la forma di un triangolo equilatero, il cui lato è lungo 20 cm. Ogni piastrella del mosaico è a forma di triangolo equilatero, il cui lato è lungo 1 cm. Le piastrelle, gialle e azzurre, si alternano come indicato in figura. Quante piastrelle di ciascun colore ci sono nel mosaico? [190 gialle e 210 azzurre]



167 ESERCIZIO SVOLTO

Un'auto viene acquistata al prezzo di 16 000 euro. A partire dall'anno successivo all'acquisto, l'auto subisce ogni anno un deprezzamento del 25% rispetto al valore dell'anno precedente. Qual è il primo anno in cui il valore dell'auto risulta inferiore ai 1000 euro?



Costruiamo il modello matematico del problema

Sia a_0 il prezzo dell'auto nell'anno dell'acquisto, a_1 il prezzo nel primo anno dopo l'acquisto, ..., a_n il prezzo nell'n-esimo anno dopo l'acquisto. Allora:

$a_0 = 16\,000$ e $\underbrace{a_n}_{\text{il valore dell'auto nell'}n\text{-esimo anno dopo l'acquisto}} \underbrace{=}_{\text{è uguale}} \underbrace{0{,}75}_{\text{al 25\% in meno, cioè al 75\%}} \cdot \underbrace{a_{n-1}}_{\text{del valore nell'anno precedente}}$

Riconosciamo che a_n è una progressione geometrica di primo termine $a_0 = 16\,000$ e ragione $q = 0{,}75$; dunque:

$a_n = 16\,000(0{,}75)^n$

Per rispondere alla domanda dobbiamo trovare il minimo n in modo che risulti $a_n < 1000$.

Facciamo i calcoli

$16000(0{,}75)^n < 1000 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{dividendo per 16000}} \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{16} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{considerando i logaritmi} \\ \text{in base 3/4 dei due membri}}} n \underbrace{>}_{\substack{\text{attenzione} \\ \text{al verso}}} \log_{\frac{3}{4}} \frac{1}{16} \simeq 9{,}64$

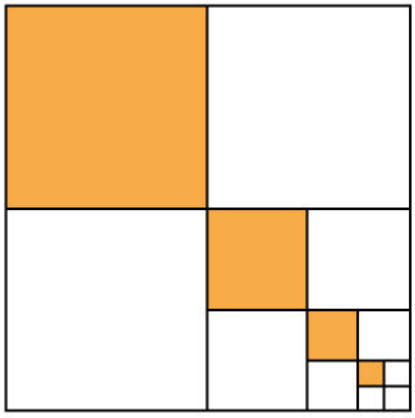
Rispondiamo

Il valore dell'auto scende sotto i 1000 euro nel decimo anno dopo l'acquisto.

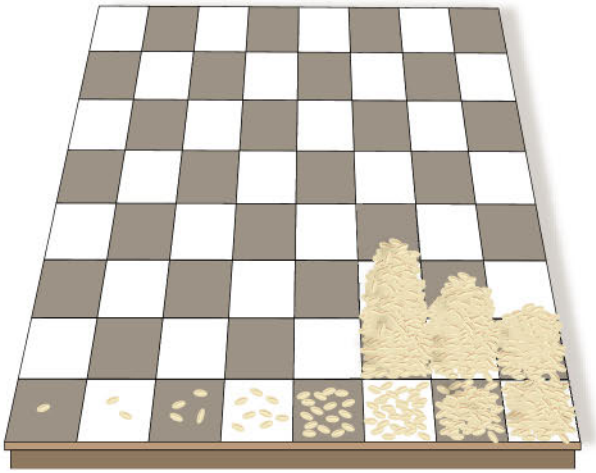
168 Aumento della retribuzione. Supponi di aver firmato un contratto in cui ti viene riconosciuto un compenso di 16 000 euro per il primo anno e un incremento del 5% per ciascuno degli anni successivi. Quale sarà il compenso che riceverai il quinto anno? [Circa 19 448 euro]

169 Oscillazioni di un pendolo. Un pendolo descrive inizialmente, in una sua prima oscillazione, un arco di 20 cm. A ogni oscillazione successiva la lunghezza dell'arco diminuisce del 10% rispetto alla precedente. Qual è la somma delle lunghezze degli archi descritti dal pendolo dopo dieci oscillazioni? [Circa 130,26 cm]

170 Quadrati. Dopo aver colorato, secondo il processo indicato in figura, 10 quadrati, quale frazione del quadrato più grande resta colorata? [Circa il 33,3%]



171 La leggenda dell'inventore degli scacchi. Si racconta che il monarca Shiram, ammirato dal gioco degli scacchi, promise a Sissa, l'inventore del gioco, qualunque cosa gli avesse chiesto come ricompensa. Sissa rispose: «Vostra maestà, mi dia un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza e così via, fino alla 64-esima, raddoppiando ogni volta la ricompensa precedente». Il re non capì subito che non gli sarebbe bastato il grano contenuto in tutti i granai del mondo per soddisfare una così... modesta richiesta! Verifica infatti che il numero dei chicchi richiesti da Sissa è dell'ordine di 10^{19}.
(*Suggerimento*: applica le proprietà delle potenze e il fatto che $2^{10} = 1024$ è bene approssimato da $10^3 = 1000$.)



172 **Scelta fra due tipi di contratti/1.** Due compagnie offrono due diversi contratti: la prima offre una retribuzione di 20 000 euro per il primo anno e un incremento del 6% all'anno per gli anni successivi; la seconda offre una retribuzione di 25 000 euro per il primo anno e un incremento del 3% per gli anni successivi. Quale compagnia offre, in un periodo di 10 anni, la maggiore retribuzione complessiva? [La seconda]

173 **Scelta fra due tipi di contratti/2.** Due compagnie offrono due contratti diversi: la prima offre una retribuzione di 23 000 euro per il primo anno e un incremento del 5% all'anno per gli anni successivi; la seconda offre una retribuzione di 25 000 euro per il primo anno e un incremento del 4% per gli anni successivi. Quale compagnia offre, in un periodo di 10 anni, la maggiore retribuzione complessiva? [La seconda]

174 **Una paga... interessante.** Ti viene offerto un lavoro per il mese di luglio sotto le seguenti particolari condizioni: il primo giorno verrai pagato 1 centesimo, il secondo 2 centesimi, il terzo 4 centesimi, e così via: ogni giorno ti viene pagato il doppio del giorno precedente. Ti sembra un'opportunità di lavoro interessante? Alla fine del mese quanto avrai guadagnato? [10 737 418,23 euro]

175 **Deprezzamento.** Un'auto viene acquistata al prezzo di 15 000 euro. Il primo anno il prezzo dell'auto resta invariato; a partire dal secondo anno, invece, il prezzo diminuisce ogni anno del 20% rispetto all'anno precedente. Quanto varrà l'auto il quinto anno? Qual è il primo anno in cui il valore dell'auto sarà inferiore a 1000 euro? [Il 5° anno l'auto vale 6144 euro; il 14° anno vale meno di 1000 euro]

176 **E se?** **Scelta fra due tipi di contratti/3.** Un giocatore di calcio deve firmare un contratto per 7 anni che prevede 2 000 000 di euro per il primo anno, e deve scegliere tra le seguenti possibilità:

a. un incremento del 4% all'anno, a partire dal secondo anno, rispetto alla retribuzione dell'anno precedente;

b. un incremento fisso di 100 000 euro all'anno, a partire dal secondo anno.

Quale opzione gli consiglieresti di scegliere? Perché?

▶ Cambierebbe la risposta se l'incremento del contratto a fosse del 5% invece del 4%? [La seconda; sì]

177 **Una promessa.** Il primo giorno dell'anno ti viene regalata la somma di 1000 euro e ti viene promessa, per ogni giorno successivo, una cifra pari al 90% di quella che ti è stata data il giorno precedente. Qual è il primo giorno in cui riceverai meno di 1 euro? Quanto hai ricevuto complessivamente dall'inizio quando ciò accade? [Il 67° giorno; circa 9991,40 euro]

Collegamenti **Progressioni e geometria**

178 Siano a, b e c tre numeri positivi in progressione aritmetica di ragione $d \geq 0$. Dimostra che essi rappresentano le misure dei lati di un triangolo se e solo se $d < a$. (*Suggerimento*: ricorda la disuguaglianza triangolare.)

179 Siano a, b e c tre numeri positivi in progressione geometrica di ragione $q \geq 1$. Dimostra che essi rappresentano le misure dei lati di un triangolo se e solo se $q < \phi$, dove $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ è il celebre *numero aureo*.

180 Un triangolo rettangolo ha i lati in progressione geometrica $q > 1$. Applicando il teorema di Pitagora, dimostra che $q = \sqrt{\phi}$, essendo $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ il celebre numero aureo. (*Suggerimento*: indica con a la misura del cateto minore.)

3. Limiti di successioni

Teoria p. 158

Esercizi introduttivi

Test

181 Quale delle seguenti successioni è convergente?

A $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^2}$ B $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ C $a_n = \dfrac{n^4+1}{n^2}$ D $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$

182 Quale delle seguenti successioni è divergente?

A $a_n = \dfrac{n-1}{n^2}$ B $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+5}$ C $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^4+1}$ D $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$

183 Quale delle seguenti successioni è irregolare?

A $a_n = \frac{2}{n}$ B $a_n = (-1)^{2n}$ C $a_n = \frac{n}{2}$ D $a_n = 2\cdot(-1)^n$

184 Quale delle seguenti successioni è divergente?

A $a_n = 1 - e^{-n}$ B $a_n = 1 - \ln n$ C $a_n = 1 - \sin n$ D $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

185 **Vero o falso?**

a. se una successione è superiormente limitata e strettamente decrescente, allora è convergente V F

b. se $a_n \leq 100$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e a_n è strettamente crescente, allora a_n è convergente V F

c. se a_n è limitata e monotòna, allora non può essere divergente V F

d. se $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ e $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 1$ V F

e. se $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e inoltre $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = -1$, allora non può esistere il limite per $x \to 0$ della funzione f V F

f. se la successione a_n è irregolare, allora, qualsiasi sia il carattere di b_n, anche la successione $a_n b_n$ è irregolare V F

[4 affermazioni vere e 2 false]

186 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio:

a. di una successione divergente e superiormente limitata;

b. di una successione convergente e inferiormente limitata;

c. di una successione convergente non monotòna;

d. di una successione divergente non monotòna.

Calcolo di limiti di successioni

Calcola i seguenti limiti di successioni.

187 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n-3}{n+2}$ [5]

188 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+2n-3}{2n^2+7}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

189 $\lim\limits_{n\to+\infty} (5-7n^3)$ $[-\infty]$

190 $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n^3+2n^2-1)$ $[+\infty]$

191 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+3)^2-n^2}{(n+3)^2+n^2}$ [0]

192 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{18n+5}{6n+1}$ [3]

193 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^4-n^2}{n^3+1}$ $[+\infty]$

194 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n-2}{n} - \frac{n}{n-2}\right)$ [0]

195 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+n}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

196 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{3n^3+4}$ [0]

197 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n^3+2}{3n^2-1}$ $[+\infty]$

198 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-4n^2}{1+2n^2}$ $[-2]$

199 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3n-2}{2n} - \frac{n}{n+5}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

200 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{4n+1} - \frac{n^3+1}{n^2-2}\right)$ $[-\infty]$

201 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)^2-n^2}{(3n-1)^2-n^2}$ $\left[\frac{3}{8}\right]$

202 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+5}{n-6}\right)^2$ [4]

203 $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^2)\left(\frac{1-n^3}{n^2+2}\right)$ $[+\infty]$

204 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2-1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$ $[+\infty]$

205 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)\left(\frac{2n^2}{1-n}\right)$ $[-\infty]$

206 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)$ [0]

207 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ [0]

208 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ $[+\infty]$

209 $\lim_{n\to+\infty}\left(2^{-n}+\frac{3}{2^n}\right)$ [0]

210 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{10n}{n+1}-\frac{n}{n+2}}$ [3]

211 $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n^2+4}}$ [3]

212 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ [0]

213 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\ln n}$ [$+\infty$]

214 $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{e^{2n}}$ [0]

215 $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$ [0]

216 $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$ [$+\infty$]

217 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{9n-5}{n+2}}$ [3]

218 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2+5}{n+1}}$ [$+\infty$]

219 $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi n+2}{6n+5}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

220 $\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi n+2}{5-n}\right)$ [-1]

221 $\lim_{n\to+\infty}e^{1-3n}$ [0]

222 $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$ [0]

223 $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-n}+1}{e^{-n}-1}$ [-1]

224 $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n+1}{e^n+3}$ [1]

225 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n}+1}$ [$+\infty$]

226 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n+2}}-\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)$ [0]

227 $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{9n^2+1}-3n\right)$ [0]

228 $\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-2\right)$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

229 $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$ [e^3]

230 $\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ [2]

231 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+n+2}\right)^n$ [0]

232 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n^2+n+2}\right)^n$ [$+\infty$]

233 $\lim_{n\to+\infty}n^2\left(1-\cos\frac{3}{n}\right)$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

234 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{n+2}{n+1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

(*Suggerimento*: ricorda che $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.)

235 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+2)!-(n+1)!}$ [0]

---

236 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola i seguenti limiti, se esistono, utilizzando il criterio del confronto, oppure dimostra la non esistenza del limite.

a. $\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cos n+1}{n}$ **b.** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n\cos n\pi}{n+1}$

a. Osserva che $0\le 2\cos n+1\le 3$, quindi:

$$0\le\frac{2\cos n+1}{n}\le\frac{3}{n}$$

e applica il teorema del confronto. Puoi concludere che il limite dato è uguale a...

b. Osserva anzitutto che $\cos n\pi=(-1)^n$, quindi il limite dato equivale a:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$$

Considera quindi le due sottosuccessioni di $a_n=\frac{(-1)^n n}{n+1}$ costituite, rispettivamente, dai termini di posto pari e da quelli di posto dispari; dimostra che tali sottosuccessioni convergono a due limiti diversi per $n\to+\infty$ e deduci che il limite proposto non esiste.

Calcola i seguenti limiti, se esistono, utilizzando il criterio del confronto, oppure dimostra la non esistenza del limite.

237 **Videolezione** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n+\cos n}{n}$ [0]

238 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n(n^4+1)}{n^5}$ [0]

239 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\cos \pi n}{n^2+1}$ [Non esiste]

240 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{e^{-n}+1}$ [Non esiste]

241 $\lim_{n\to+\infty} \left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^n$ [Non esiste]

242 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\cos n\pi}{2n^2+1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

243 Considera la successione $a_n = 4n$; posto $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, calcola $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n^2}$. [2]

244 Considera la successione $a_n = 5n + 3$; posto $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, calcola $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n^2+1}$. $\left[\frac{5}{2}\right]$

245 Considera la successione $a_n = 3^n$; posto $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, calcola $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{3^n}$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

246 Considera la successione $a_n = 8\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$; posto $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, calcola $\lim_{n\to+\infty} s_n$. [32]

Realtà e modelli

247 **Un apprendista.** La successione $a_n = 30 - 25e^{\frac{1-n}{10}}$ rappresenta, con buona approssimazione, il numero di pezzi prodotti da un apprendista presso un artigiano alla fine della giornata n di lavoro, essendo $n = 1$ la prima giornata di lavoro dell'apprendista. A lungo andare, verso quale valore si stabilizza la produzione giornaliera dell'apprendista?

[30 pezzi/giorno]

248 **Raffreddamento di un pezzo metallico.** Un pezzo metallico, subito dopo la sua produzione, viene lasciato raffreddare. La temperatura (in gradi Celsius) del pezzo è rappresentata con buona approssimazione dalla funzione:

$$T(t) = 350e^{-2t} + 15$$

dove t è il tempo (in ore) trascorso da quando il pezzo è stato lasciato a raffreddare.

a. Calcola il limite della funzione $T(t)$ quando $t \to +\infty$ e interpreta il risultato ottenuto in relazione al problema.

b. Sia d_n la diminuzione di temperatura subita dall'oggetto tra l'ora n e l'ora $n + 1$; scrivi il termine generale della successione d_n e calcola il limite di d_n quando $n \to +\infty$. Interpreta il risultato in relazione al problema.

[**a.** 15; **b.** $d_n = 350(e^{-2n-2} - e^{-2n})$; 0]

Collegamenti Limiti di successioni e geometria

249 Data la retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + 4$, indica con A_0 e A_1 rispettivamente i suoi punti di intersezione con l'asse x e con l'asse y. Conduci per A_1 la perpendicolare ad A_0A_1 e indica con A_2 il suo punto di intersezione con l'asse x. Conduci ora per A_2 la perpendicolare ad A_1A_2 e indica con A_3 il punto di intersezione con l'asse y. Prosegui in tal modo.

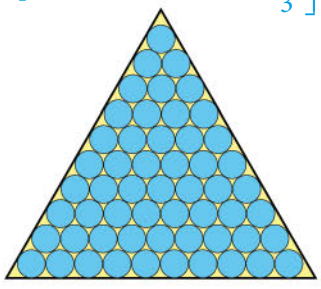
a. Sia l_n la lunghezza del segmento A_nA_{n+1}, con $n \geq 0$, e a_n l'area del triangolo A_nOA_{n+1}, essendo O l'origine del sistema di riferimento. Determina le espressioni analitiche di l_n e di a_n.

b. Si tratta di successioni convergenti o di successioni divergenti?

c. Siano s_n la somma dei primi n termini della successione l_n e S_n la somma dei primi n termini della successione a_n. Determina a cosa convergono tali somme.

[**a.** Si tratta rispettivamente delle progressioni geometriche $l_n = 4\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ e $a_n = 16\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; **b.** entrambe convergono a 0; **c.** convergono rispettivamente a $4\sqrt{5}$ e $\frac{64}{3}$]

250 Osserva la figura. Il triangolo equilatero ha lato di misura 1; supponi che il numero dei cerchi nell'ultima riga (cioè dei cerchi tangenti alla base del triangolo) sia n (in figura è rappresentato il caso particolare in cui $n = 10$), quello della penultima $n - 1$ e così via, fino alla prima riga, che contiene un solo cerchio.



a. Esprimi in funzione di n l'area a_n della regione di piano occupata complessivamente dai cerchi.

b. Quando $n \to +\infty$, i cerchi «riempiono» completamente il triangolo?

[**a.** $a_n = \frac{\pi(n^2+n)}{8(n+\sqrt{3}-1)^2}$; **b.** No, infatti per $n \to +\infty$ abbiamo che $a_n \to \frac{\pi}{8}$, che è minore dell'area del triangolo]

Successioni e funzioni

251 Dimostra che $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin x$ non esiste.

252 Dimostra che $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x^2$ non esiste.

253 Dimostra che $\lim\limits_{x\to0} \cos\frac{1}{x}$ non esiste.

254 Dimostra che $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ non esiste.

4. Principio di induzione

Teoria p. 161

Applicazioni del principio di induzione

255 ESERCIZIO GUIDATO

Dimostra per induzione che $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$, per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$.

- Dimostra che l'uguaglianza è vera per $n=1$.
- Sia $k\geq1$; supponi che l'uguaglianza sia vera per $n=k$, cioè che:
  $2+4+6+\ldots+2k=k(k+1)$ **Ipotesi di induzione**
  e dimostra che allora l'uguaglianza è vera per $n=k+1$, cioè che:
  $2+4+6+\ldots+2k+2(k+1)=(k+1)(k+2)$ **Ciò che devi dimostrare**
- In base al principio di induzione puoi allora concludere che l'uguaglianza è vera per ogni $n\geq1$.

Dimostra per induzione le seguenti uguaglianze.

256 $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$

257 $4+8+12+\ldots+4n=2n(n+1)$ per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$

258 $3+4+5+\ldots+(n+1)=\frac{1}{2}(n^2+3n-4)$ per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$

259 $3+7+11+\ldots+(4n+3)=2n^2+5n+3$ per ogni $n\in\mathbb{N}$

260 $4+8+12+\ldots+4n=2n(n+1)$ per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$

261 $1+4+4^2+\ldots+4^{n-1}=\frac{1}{3}(4^n-1)$ per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$

262 $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$

263 $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$ per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$

264 $1+x+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, con $x\neq1$

Dimostra per induzione le seguenti disuguaglianze.

265 $2^n\geq n+1$ per ogni $n\geq0$

266 $3^n\geq n+2$ per ogni $n\geq1$

267 $3^n\geq(n+2)^2$ per ogni $n\geq3$

268 $n!\geq2^{n-1}$ per ogni $n\geq1$

269 Dimostra che il numero 4^n+5 è multiplo di 3 per ogni $n\geq0$.

270 Determina il minimo intero positivo n maggiore di 2 per cui risulta $2^n\geq n^2$. Dimostra quindi che la disuguaglianza è verificata per ogni valore di n maggiore o uguale al valore trovato all'inizio.

271 Determina il minimo intero positivo n per cui risulta $5^n \geq 3^n + 4^n$. Dimostra quindi che la disuguaglianza è verificata per ogni valore di n maggiore o uguale al valore trovato all'inizio.

272 **Disuguaglianza di Bernoulli.** Dimostra che:

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$, con $x > -1$, per ogni $n \in \mathbf{N}$

273 **Sottoinsiemi di un insieme.** Dimostra che un insieme di n elementi ha esattamente 2^n sottoinsiemi.

274 Dimostra che il numero $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ è divisibile per 13 per ogni $n \geq 0$.

Applicazioni alle successioni definite ricorsivamente

275 ESERCIZIO GUIDATO

Data la successione $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2 \end{cases}$**, dimostra che è convergente e calcolane il limite.**

- Calcolando i primi termini della successione (per esempio i primi cinque) puoi congetturare che la successione è strettamente crescente e superiormente limitata da 3.
- Dimostra per induzione ciò che hai congetturato, cioè che è strettamente crescente e che $a_n < 3$.
- Deduci che la successione è convergente. Detto l il limite, esso deve verificare la relazione:

  $l = \frac{1}{3}l + 2$

  da cui si trova $l = 3$.

276 Considera la successione: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \end{cases}$.

Dimostra che la successione è convergente e calcola il suo limite. [Converge a $\frac{3}{2}$]

277 Considera la successione: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{20 + a_n} \end{cases}$.

Dimostra che la successione è convergente e calcola il suo limite. [Converge a 5]

278 Considera la successione $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{n}}a_n + 3 \end{cases}$.

a. Dimostra che $0 < a_n \leq 6$ per ogni $n \geq 1$.
b. Dimostra che la successione è convergente e calcolane il limite.
[**b.** Prova che la successione è strettamente decrescente per $n \geq 2$; il limite è 3]

279 Considera la successione $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}$.

a. Dimostra che è strettamente crescente.
b. Dimostra che $a_n \geq n^2$ per ogni $n \geq 1$.
c. Studia il carattere della successione.

280 Considera la successione $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 5 - a_n \end{cases}$. Dimostra per induzione che:

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 6 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Deduci che si tratta di una successione irregolare.

Realtà e modelli



281 **Assorbimento di un farmaco/1.** Un medico prescrive una dose di 200 mg di un dato antibiotico ogni 12 ore. Il farmaco in questione ha un'emivita di 12 ore, ovvero ogni 12 ore la metà del farmaco presente nel sangue viene eliminata.

a. Sia u_n la quantità (in milligrammi) di antibiotico presente nel sangue immediatamente dopo la n-esima dose ($n = 1$ corrisponde alla prima dose). Rappresenta u_n in forma ricorsiva, dimostra che ammette limite l e determina il valore di tale limite, senza cercare di individuare il termine generale di u_n. Qual è il significato di tale limite in relazione al problema?

b. Verifica che la successione $v_n = u_n - l$ è geometrica e scrivine il termine generale.

c. Deduci qual è il termine generale della successione u_n e ritrova, per calcolo diretto, il limite della successione u_n per $n \to +\infty$.

$\left[\text{a. } l = 400;\ \text{b. } v_n = -200\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};\ \text{c. } u_n = 400 - 200\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

282 **Assorbimento di un farmaco/2.** Un medico prescrive una dose di 60 mg di un dato antibiotico ogni 12 ore. Il farmaco in questione ha un'emivita di 6 ore, ovvero ogni 6 ore la metà del farmaco presente nel sangue viene eliminata.

a. Sia u_n la quantità (in milligrammi) di antibiotico presente nel sangue immediatamente dopo la n-esima dose ($n = 1$ corrisponde alla prima dose). Rappresenta u_n in forma ricorsiva, dimostra che ammette limite l e determina il valore di tale limite, senza cercare di individuare il termine generale di u_n. Qual è il significato di tale limite in relazione al problema?

b. Verifica che la successione $v_n = u_n - l$ è geometrica e scrivine il termine generale.

c. Deduci qual è il termine generale della successione u_n e ritrova, per calcolo diretto, il limite della successione u_n per $n \to +\infty$.

$\left[\text{a. } l = 80;\ \text{b. } v_n = -20\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1};\ \text{c. } u_n = 80 - 20\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$

283 **Evoluzione di una popolazione/1.** In un lago la popolazione di una certa specie di pesci diminuisce ogni anno del 15% per ragioni legate alla pesca e alla morte naturale. Alla fine di ogni anno vengono introdotti nel lago 1200 nuovi esemplari di pesci di quella specie.

a. Se alla fine del 2013 ($n = 0$) la popolazione di pesci era costituita da 6000 esemplari, rappresenta ricorsivamente la successione u_n che fornisce il numero di esemplari della popolazione al termine dell'n-esimo anno dopo il 2013 (u_1 corrisponde alla popolazione alla fine del 2014). La popolazione cresce o decresce? E come evolve a lungo andare?

b. Se alla fine del 2013 ($n = 0$) la popolazione di pesci era costituita da 9000 esemplari, rappresenta ricorsivamente la successione u_n che fornisce il numero di esemplari della popolazione al termine dell'n-esimo anno dopo il 2013 (u_1 corrisponde alla popolazione alla fine del 2014). La popolazione cresce o decresce? E come evolve a lungo andare?

[**a.** Cresce e tende ad avvicinarsi a un numero di 8000 esemplari;
b. decresce e tende ad avvicinarsi a un numero di 8000 esemplari]

284 **Evoluzione di una popolazione/2.** In un lago la popolazione di una certa specie di pesci diminuisce ogni anno dell'8% per ragioni legate alla pesca e alla morte naturale. Alla fine di ogni anno vengono introdotti nel lago 1000 nuovi esemplari di pesci di quella specie.

Se alla fine del 2013 ($n = 0$) la popolazione di pesci era costituita da k esemplari (con $k \in \mathbf{N}$), rappresenta ricorsivamente la successione u_n che fornisce il numero di esemplari della popolazione al termine dell'n-esimo anno dopo il 2013 (u_1 corrisponde alla popolazione alla fine del 2014). Stabilisci, al variare di k, se la popolazione cresce o decresce e come evolve a lungo andare. [La popolazione cresce e tende ad avvicinarsi a un numero di 12 500 esemplari se $k < 12\,500$; la popolazione decresce e tende ad avvicinarsi a un numero di 12 500 esemplari se $k > 12\,500$; se $k = 12\,500$, la popolazione resta costante]

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

285 **Vero o falso?**

a. la successione $a_n = \sin(n\pi)$ è irregolare V F

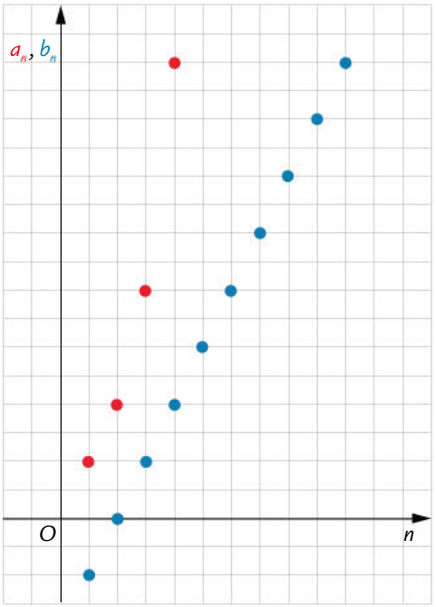
b. la successione $a_n = \cos(n\pi)$ è irregolare V F

c. la successione $a_n = \dfrac{n^2+2n+3}{n+1}$ è divergente V F

d. la successione $a_n = \dfrac{2n+3}{n^2+1}$ è convergente V F

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!+(n+1)!}{n!-(n+1)!} = 0$ V F

Nei quesiti 286-287-288 fai riferimento alla figura seguente, dove sono rappresentati parte dei grafici di due successioni a_n (in rosso) e b_n (in blu), con $n \geq 1$. È noto inoltre che queste due successioni sono aritmetiche o geometriche.



286 Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A la successione a_n è aritmetica, mentre la successione b_n è geometrica

B la successione a_n è geometrica, mentre la successione b_n è aritmetica

C le due successioni a_n e b_n sono entrambe geometriche

D le due successioni a_n e b_n sono entrambe aritmetiche

287 Quanto vale la somma dei primi 10 termini della successione a_n?

A 510 B 1022 C 2046 D 4094

288 Quanto vale la somma dei primi 20 termini della successione b_n?

A 310 B 320 C 330 D 340

289 Quale delle seguenti successioni è divergente?

A $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$ C $a_n = \dfrac{2}{n^2+1}$

B $a_n = \dfrac{n^2+2}{n^2+1}$ D $a_n = \dfrac{2n^2}{n+1}$

290 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+5^n}{2^n}$ è uguale a:

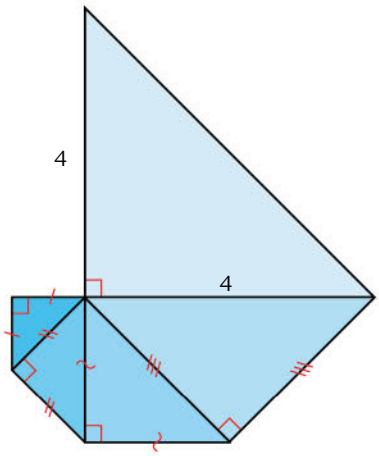
A 0 B $\dfrac{5}{2}$ C $+\infty$ D 1

291 Data una successione a_n convergente al limite finito l, che cosa si può dire della successione $b_n = (-1)^n a_n$?

A Converge a l B Converge a $-l$ C Diverge

D Nessuna delle altre risposte è corretta

292 In figura sono rappresentati alcuni triangoli di una successione infinita; essi sono tutti rettangoli e isosceli. Se indichiamo con a_n la successione delle loro aree e con p_n quella dei loro perimetri, che cosa possiamo dire in merito alle due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$? (Il triangolo di partenza, corrispondente a $n = 1$, è quello di lato 4.)



A Sono entrambe divergenti.

B Sono entrambe convergenti.

C La prima converge e la seconda diverge.

D La prima diverge e la seconda converge.

293 Il $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\sqrt{n+2}$ è uguale a:

A 0 B 1 C $+\infty$ D -1

294 La successione $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$, definita per $n > 1$, è:

A strettamente crescente e convergente

B strettamente crescente e divergente

C strettamente decrescente e convergente

D strettamente decrescente e divergente

295 Trova:

a. il quindicesimo termine della successione $\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{3}, \ldots$ $[29\sqrt{3}]$

b. l'undicesimo termine della successione $1, \sqrt{3}, 3, 3^{\frac{3}{2}}, \ldots$ $[243]$

296 In una progressione aritmetica di ragione $\frac{3}{2}$ è $a_5 = 8$. Scrivi il termine generale della progressione e determina il decimo termine. $\left[a_n = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2},\ a_{10} = \frac{31}{2}\right]$

297 In una progressione geometrica è $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_4 = 9$. Scrivi il termine generale della progressione e determina il sesto termine. $\left[a_n = \frac{1}{3}\cdot 3^{n-1},\ a_6 = 81\right]$

298 Scrivi il termine generale della progressione aritmetica in cui $a_5 = 10$ e $a_{10} = 100$. $[a_n = 18n - 80]$

299 Scrivi il termine generale della progressione geometrica in cui $a_3 = 4$ e $a_6 = \frac{4}{125}$. $\left[a_n = 100\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]$

300 La somma del primo e del secondo termine di una progressione aritmetica è 5, la somma del secondo e del terzo termine è −5. Determina il primo termine della progressione e la ragione. $[a_1 = 5,\ d = -5]$

301 La somma del primo e del secondo termine di una progressione geometrica è 1100, la somma del secondo e del terzo termine è 110. Determina il primo termine della progressione e la ragione. $\left[a_1 = 1000,\ q = \frac{1}{10}\right]$

Giustificare e argomentare

302 Sia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una progressione aritmetica. Spiega perché $3^{a_1}, 3^{a_2}, \ldots, 3^{a_n}$ è una progressione geometrica.

303 Sia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una progressione geometrica a termini positivi. Spiega perché $\ln a_1, \ln a_2, \ldots, \ln a_n$ risulta una progressione aritmetica.

Determina le seguenti somme.

304 $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 150$ $[5700]$

305 $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3^2}{5} + \frac{3^3}{5} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{5}$ $\left[\frac{3^n - 1}{10}\right]$

306 $1 + 3 + 5 + \ldots + 61$ $[961]$

307 $-1 - 2 - 4 - 8 - \ldots - 2^{18}$ $[-524\,287]$

308 $2 + 5 + 8 + \ldots + (-1 + 3n)$ $\left[\frac{1}{2}(3n^2 + n)\right]$

309 $(-15) + (-9) + (-3) + 3 + 9 + \ldots + 219$ $[4080]$

310 Determina per quale valore di a i tre numeri a, $2a - 1$, $a + 2$ sono i primi tre termini di una progressione aritmetica. Calcola inoltre la somma dei primi dieci termini di tale progressione. $[a = 2;\ S_{10} = 65]$

311 Determina per quale valore di a i tre numeri a, $6 - a$, $2a - 12$ sono i primi tre termini di una progressione geometrica. Calcola inoltre la somma dei primi otto termini di tale progressione. $[a = -6;\ S_8 = 510]$

Matematica e informatica

312 Considera il seguente algoritmo, scritto in linguaggio di progetto, e scrivi in forma ricorsiva la successione T_n il cui primo termine è $T_0 = 25$ e di cui l'algoritmo restituisce il termine n, per ogni $n \geq 1$. Deduci quindi il termine generale della successione T_n.

```
Inizio
T := 25
LEGGI n
PER i CHE VA DA 1 a n CON PASSO 1 FAI
T := 0,85 · T + 15
PROSSIMO i
SCRIVI T
Fine
```

$[T_n = 100 - 75 \cdot 0{,}85^n]$

313 Qual è il termine generale della successione di cui l'algoritmo seguente restituisce il termine n, per ogni $n \geq 1$?

```
Inizio
LEGGI n
PER i CHE VA DA 2 a n CON PASSO 1 FAI
S := S + i
PROSSIMO i
SCRIVI S
Fine
```

Calcola i seguenti limiti, se esistono.

314 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n} - \frac{n}{n+3}\right)$ $[0]$

315 $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{n+2}$ $[3]$

316 $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n+2}$ $[0]$

317 $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-1}{6n^2+2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

318 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n$ $[0]$

319 $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^4+n^2+1}{6n^2+2}$ $[+\infty]$

320 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6n+7}{2n-1} + \frac{4n}{n+1}\right)$ $[7]$

321 $\lim_{n\to+\infty}(5 - 2n - n^3)$ $[-\infty]$

322 $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-n^2+1}{n+4}$ $[-\infty]$

323 $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3n^2-1}{n^2}\right)\left(\frac{4-2n}{4n-5}\right)\right]$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

324 $\lim_{n\to+\infty}(n + 2\ln n)$ $[+\infty]$

325 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{n^3}{n^2-1}\right)$ [$-\infty$]

326 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n$ [$+\infty$]

327 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{10n+7}{2n-1}-\frac{3n}{n+1}\right)$ [2]

328 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+6}{n-1}-\frac{3}{n+1}\right)$ [$+\infty$]

329 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2n^2}{4n^2+1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

330 $\lim_{n\to+\infty}e^{-2n}$ [0]

331 $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{5+6n}{1+7n}\right)\right]$ [0]

332 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(4n^2)^2}{2n^4+1}$ [8]

333 $\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}+e^n\right)$ [$+\infty$]

334 $\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\right]$ [2]

335 $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+2}-n\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

336 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\ln n^3}$ [$+\infty$]

337 $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+4}\right)$ [0]

338 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2+1)^3}{(2n^3)^2}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

339 $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-1\right)$ [0]

340 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}}{3n^2+1}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

341 $\lim_{n\to+\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

342 $\lim_{n\to+\infty}\left[n^2\left(1-e^{\frac{-3}{n^2}}\right)\right]$ [3]

343 $\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{\pi}{n}$ [π]

344 $\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)$ [4]

345 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+2n^2+1}{n!}$ [0]

346 $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}$ [e^6]

347 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(-1)^n}{n+1}$ [Non esiste]

348 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{3n+1}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

349 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

350 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(2n+3)n!}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

351 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{2^{n+3}+1}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

Matematica ed economia

352 **Pagamento a rate.** Marco riceve in prestito la somma di 2400 euro che restituirà in dieci rate mensili. La rata mensile è costituita da una quota fissa di 240 euro per la restituzione del debito, più una quota variabile (dovuta all'interesse da pagare) pari allo 0,5% sulla somma ancora da restituire, al netto delle quote fisse pagate. Calcola l'ammontare delle prime due rate e la somma da pagare complessivamente come interesse.



[Prima rata = 252 euro, seconda rata = 250,80 euro; interesse complessivo = 66 euro]

353 **Rendita.** Barbara versa 1000 euro in un deposito bancario alla fine di ogni anno, per 10 anni. Il tasso d'interesse annuo è composto del 2%. Quale sarà il montante a disposizione (cioè la somma del capitale versato e degli interessi maturati) immediatamente dopo il versamento dell'ultima rata?
(*Suggerimento*: ricorda che un capitale C investito per un tempo di n anni al tasso annuo composto i, genera un montante M espresso dalla formula $M = C(1 + i)^n$.) [10 949,72 euro]

Realtà e modelli

●●○ **354** Un pannello isolante è costituito di un materiale fonoassorbente; un suono, attraversando il pannello, perde il 15% della sua intensità (in decibel).

a. Si hanno a disposizione n pannelli, con $n \geq 1$, tutti uguali a quello descritto. Sia I_0 l'intensità del suono prima di attraversare il primo pannello e I_n l'intensità del suono dopo avere attraversato l'n-esimo pannello. Esprimi I_n ricorsivamente, quindi specifica la natura della successione I_n e determina la sua espressione analitica.

b. Consideriamo un suono di intensità iniziale $I_0 = 80$ dB; quale sarà l'intensità del suono dopo avere attraversato quattro pannelli? Arrotonda il risultato a un numero intero.

c. Qual è il minimo numero di pannelli che occorre usare, per fare sì che il suono in uscita abbia perso almeno il 75% della sua intensità?

d. Calcola il limite della successione I_n per $n \to +\infty$ e interpreta il risultato in relazione al problema.

[**a.** $I_n = I_0\,(0{,}85)^n$; **b.** 42 dB; **c.** 9 ; **d.** 0]

●●○ **355** Un serbatoio contiene 100 litri di una soluzione, in cui la concentrazione alcolica è del 30%. Supponi di ripetere consecutivamente la seguente operazione: rimuovere 5 litri di soluzione e rimpiazzarli con 5 litri di una soluzione in cui la concentrazione alcolica è del 20%.



a. Sia C_n la concentrazione alcolica nella soluzione nel serbatoio dopo che l'operazione descritta sia stata ripetuta n volte. Determina C_0, C_1 e C_2, quindi scrivi una definizione ricorsiva di C_n.

b. Dimostra che la successione $C'_n = C_n - 0{,}2$ è geometrica e scrivine il termine generale, quindi deduci l'espressione analitica di C_n.

c. Quante operazioni come quelle descritte sarà necessario compiere, come minimo, per ottenere una soluzione in cui la concentrazione di alcool è inferiore al 25%?

d. Calcola la concentrazione alcoolica limite che verrà raggiunta dalla soluzione nel serbatoio, immaginando di continuare a ripetere indefinitamente l'operazione descritta all'inizio.

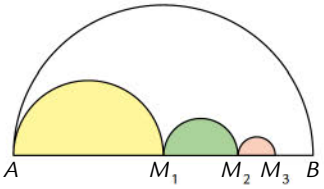
$$\left[\textbf{a. } C_0 = 0{,}3,\ C_1 = 29{,}5\%,\ C_2 \simeq 29{,}03\%,\ C_n = 0{,}95C_{n-1} + 0{,}01;\ \textbf{b. } C_n = \frac{1}{10}(0{,}95)^n + \frac{1}{5};\ \textbf{c. } 14;\ \textbf{d. } 20\%\right]$$

Matematica e storia

●●○ **356** Risolvi il seguente problema proposto nel *Liber Abaci* di Fibonacci (1202): «Un uomo possiede inizialmente 100 denari e spende ogni giorno $\frac{1}{10}$ di ciò che ha. Con quanto rimane dopo 12 giorni?». [Circa 28,24 denari]

●●○ **357** Risolvi il seguente problema proposto per la prima volta dal matematico cinese Zhang Qiujian nel 468: «Un cavallo ha percorso 700 miglia in 7 giorni, dimezzando la sua velocità ogni giorno. Quanto ha percorso il primo giorno?». [Circa 352,76 miglia]

●●○ **358** In riferimento alla figura a lato, il segmento AB misura $2r$. Sia $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la successione in cui a_1 è la misura dell'area del semicerchio di diametro AM_1, a_2 è la misura del semicerchio di diametro M_1M_2, …, a_n è la misura del semicerchio di diametro $M_{n-1}M_n$, e così via, essendo M_1 il punto medio di AB, M_2 il punto medio di M_1B, M_3 il punto medio di M_2B, e così via.



a. Determina il termine generale a_n della successione.

b. Esprimi in funzione di n la somma delle aree dei semicerchi di diametri AM_1, M_1M_2, M_2M_3, …, $M_{n-1}M_n$. Calcola il limite di tale somma per $n \to +\infty$.

$$\left[\textbf{a. } a_n = \frac{\pi r^2}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1};\ \textbf{b. } S_n = \frac{\pi r^2}{6}(1 - 4^{-n}),\ S_n \to \frac{\pi r^2}{6} \text{ per } n \to +\infty\right]$$

Esercizi *più*

Dalle gare

359 Consideriamo la successione a_n definita ponendo $a_1 = 2017$ e, per ogni n, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$. Allora $a_{2017} =$

A -2017 B $\dfrac{-1}{2016}$ C $\dfrac{2016}{2017}$ D 1 E 2017

(Kangourou, 2017)

360 Tredici amici si ritrovano per un gioco da tavolo. Il gioco prevede che a ogni partecipante vengano distribuiti dei sesterzi, in modo che il primo giocatore riceva un sesterzo e ogni giocatore successivo riceva un numero di sesterzi pari al doppio di quelli assegnati al giocatore precedente. Sapendo che ci sono in tutto 10 000 sesterzi, quanti saranno i sesterzi che resteranno non distribuiti?

A 0 B 32 C 205 D 951 E 1809

(Giochi di Archimede, 2014)

361 Un aereo ideale vola da Milano nella direzione di Mosca. Esso parte con una velocità di 1 metro al secondo ma raddoppia la sua velocità a ogni metro percorso. Dopo quanto tempo dalla partenza sarà sulla verticale di Mosca? (Mosca dista da Milano circa 2800 km.)

A Mai
B Più di 2 anni
C Un periodo compreso fra due mesi e tre mesi
D Un periodo compreso fra 3 e 4 ore
E Meno di 2 secondi

(Kangourou, 2002)

362 Calcola la somma:

$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$

(Kangourou, 2003) [5050]

363 In una successione geometrica $a_1, a_2, a_3, \ldots$ valgono le disuguaglianze $a_3 < a_2 < a_4$. Allora sicuramente:

A $a_3 \cdot a_4 > 0$
B $a_2 \cdot a_3 < 0$
C $a_2 \cdot a_4 < 0$
D $a_2 < 0$
E $a_2 \cdot a_3 > 0$

(Kangourou, 2004)

364 Data la funzione $f(x) = 3x + 4$, calcola la somma $S = f(0) + f(1) + 4\,f(2) + \ldots + f(100)$.

(High School Math Contest, Texas 2002) [15554]

365 Giuliana ha scritto un algoritmo per generare una successione di numeri: $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, con m e n numeri naturali. Quanto vale a_{100}?

A 100 B 1000 C 2012 D 4950 E 5050

(Kangourou, 2013)

Successioni e principio di induzione

1 In una progressione aritmetica a_n, con $n \geq 1$, è $a_3 = -8$, $d = -6$. Determina:
a. il termine generale della progressione;
b. il decimo termine;
c. la somma dei primi dieci termini;
d. il limite di a_n per $n \to +\infty$ e il carattere della successione.

2 In una progressione geometrica a_n, con $n \geq 1$, è $a_1 = 6$, $q = \frac{2}{3}$. Determina:
a. il termine generale della progressione;
b. il quinto termine;
c. la somma dei primi cinque termini;
d. il limite di a_n per $n \to +\infty$ e il carattere della successione.

3 Trova x in modo che $x + 2$, $2x - 1$ e $5x + 4$ siano i termini consecutivi di una progressione aritmetica. Qual è la ragione della progressione?

4 Determina x in modo che i tre numeri x, $x - 4$ e $x + 2$ siano i primi tre termini di una progressione geometrica.

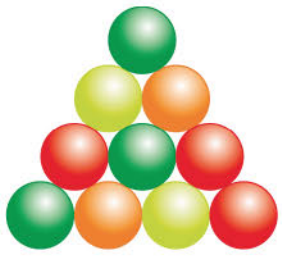
5 Calcola $\frac{1+3+5+\ldots+99}{2+4+6+\ldots+100}$.

6 Risolvi la disequazione $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots + 2 \cdot 3^{n-1} \geq 1000$.

7 Considera la progressione aritmetica a_n tale che $a_1 = 3$ e $a_4 = 15$. Determina il termine generale a_n e calcola $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$.

8 Considera la successione: $a_n = 4 + (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.
a. Scrivi i primi 6 termini della successione, specificando se si tratta di una progressione aritmetica o geometrica (o altro).
b. Esprimi la successione in forma ricorsiva.

9 Chiara intende disporre le sue 100 palline di Natale secondo lo schema in figura, realizzando idealmente un abete natalizio. Da quante file di palline, al massimo, può essere formato l'albero?



Valutazione										
Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Totale
Punteggio massimo	$0{,}25 \cdot 4 = 1$	$0{,}25 \cdot 4 = 1$	1	1	1,25	1,25	1,25	1	1,25	10
Punteggio ottenuto										

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 572

Unità 4

Continuità

Tema G

1. Funzioni continue

In questa Unità riprendiamo e approfondiamo il concetto di funzione continua.

Con GeoGebra
Continuità in un punto

Approfondimenti

Figure animate

Con GeoGebra

Videolezioni

Esercizi interattivi

Continuità in un punto

Richiamiamo la definizione di funzione continua *in un punto* (**Unità 2**).

DEFINIZIONE | Continuità in un punto

Sia f una funzione definita in un intorno (completo) di x_0; se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, la funzione f si dice **continua** in x_0.

È importante fare alcune osservazioni.

- Mentre l'operazione di limite riguarda il comportamento di una funzione in un *intorno* di x_0, disinteressandosi di ciò che accade *nel punto* x_0, la definizione di continuità richiede invece l'analisi del comportamento della funzione sia in un intorno di x_0 sia nel punto x_0, e impone che i due comportamenti non siano difformi.
- Intuitivamente, la condizione $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ si può interpretare dicendo che «se x è vicino a x_0», allora «$f(x)$ è vicino a $f(x_0)$» (**Fig. 1**). Osserva che questa condizione può non essere verificata se f **non** è continua in x_0 (**Fig. 2**).

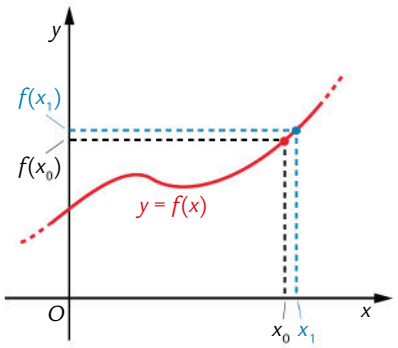


Figura 1 La funzione f è continua in x_0. Spostandoci di poco da x_0, per esempio in x_1, il valore $f(x_1)$ si discosta di poco da $f(x_0)$.

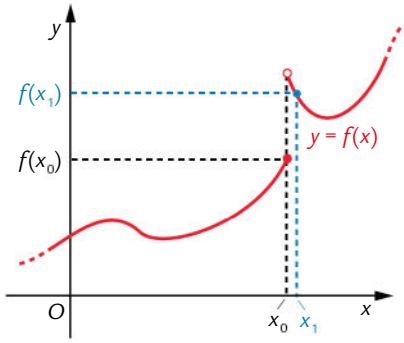


Figura 2 La funzione f **non** è continua in x_0. Spostandoci di poco da x_0, per esempio in x_1, il valore $f(x_1)$ si discosta in modo significativo da $f(x_0)$.

OSSERVA

La funzione rappresentata in Fig. 2 è continua da sinistra, ma non da destra, in x_0.

Se solo uno dei due limiti, da destra o da sinistra, di una funzione f per $x \to x_0$ coincide con $f(x_0)$, si parla di **continuità da destra** o **da sinistra**:

- f è **continua da destra** in x_0 se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$;
- f è **continua da sinistra** in x_0 se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Le definizioni di continuità da destra e da sinistra ci permettono di estendere la definizione di funzione continua in un punto x_0 nel caso in cui la funzione, anziché essere definita in un intorno *completo* di x_0, è definita soltanto in un intorno *destro* o *sinistro* di x_0.

DEFINIZIONE | Continuità in un punto dove la funzione è definita solo a destra o a sinistra

Una funzione f, definita soltanto in un **intorno destro** (**sinistro**) di x_0, si dice continua in x_0 se è **continua da destra** (**sinistra**) in x_0.

Di conseguenza, quando si considerano funzioni definite su un intervallo $[a, b]$, si parla di continuità in a e in b intendendo continuità da destra in a e da sinistra in b. Infine, se x_0 è un punto *isolato* appartenente al dominio di una funzione f, si assume, per convenzione, che f sia *continua* in x_0.

ESEMPIO

La funzione $y = \sqrt{x^2(x-1)}$ ha come dominio l'insieme $\{0\} \cup [1, +\infty)$ (sai giustificare perché?): il punto $x = 0$ è un punto isolato del dominio e, per quanto appena detto, diremo che la funzione f è continua in $x = 0$.

Continuità nel dominio

Se una funzione f di dominio D è continua in tutti i punti di un insieme $A \subseteq D$, diremo che f è continua in A. Se f è continua in tutti i punti del suo dominio, diremo semplicemente che f è una **funzione continua**.
Come abbiamo visto nell'**Unità 2**, tutte le funzioni elementari sono continue.

ESEMPI

a. Le funzioni potenza $y = x^n$, con $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, sono continue in $\mathbf{R}$.

b. La funzione $y = \frac{1}{x}$ è continua in $\mathbf{R} - \{0\}$.

c. Le funzioni esponenziali $y = a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, sono continue in $\mathbf{R}$.

d. Le funzioni logaritmiche $y = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, sono continue in $(0, +\infty)$.

e. Le funzioni $y = \sin x$ e $y = \cos x$ sono continue in $\mathbf{R}$.

f. La funzione $y = \tan x$ è continua in $\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, con $k \in \mathbf{Z}$.

Funzioni continue e operazioni tra funzioni

Si potrebbe dimostrare che tutte le funzioni che si possono ottenere come somma, prodotto, quoziente o composizione da funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione.

ESEMPI

a. La funzione $y = x^2 + e^x$ è continua in $\mathbf{R}$ poiché è la somma delle due funzioni continue $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$.

b. La funzione $y = \frac{x+2}{x-1}$, rapporto delle due funzioni $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x - 1$, è continua nel suo insieme di definizione, cioè in $\mathbf{R} - \{1\}$.

c. La funzione $y = \sin(x^2 + 1)$ è continua in $\mathbf{R}$ poiché è composta dalle due funzioni continue $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2 + 1$.

d. La funzione $y = e^{\frac{1}{x}}$ è composta della funzione $f(x) = e^x$ che è continua in $\mathbf{R}$ e della funzione $g(x) = \frac{1}{x}$, che è continua in $\mathbf{R} - \{0\}$, quindi è continua in $\mathbf{R} - \{0\}$.

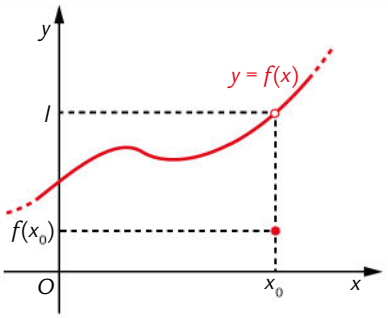
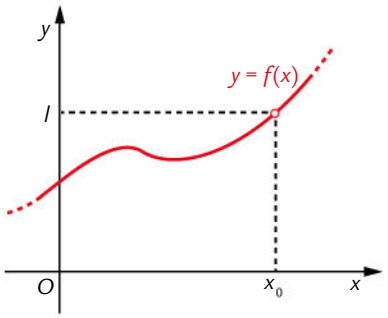
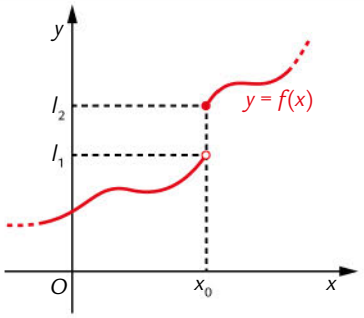
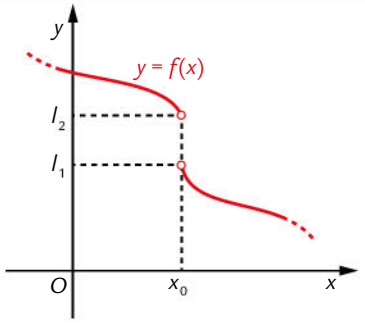
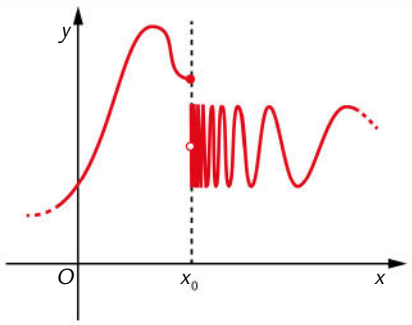
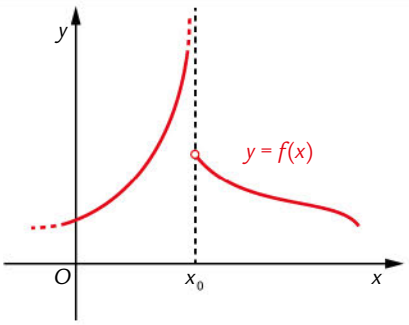
Esercizi p. 210

Con GeoGebra
Classificazione dei punti singolari

2. Punti singolari e loro classificazione

Quale può essere il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto x_0 in cui **non** è continua? Nella tabella seguente sono rappresentati i casi che possono presentarsi e le relative definizioni.

Classificazione dei punti singolari

Definizione	Esempio 1	Esempio 2
Un punto x_0 è detto una **singolarità eliminabile** per una funzione f se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste finito ma o è diverso da $f(x_0)$ (**Fig. 3a**) oppure f **non** è definita in x_0 (**Fig. 3b**).	 **Figura 3a** Il limite della funzione f per $x \to x_0$ esiste finito (è uguale a l) ma è *diverso* da $f(x_0)$.	 **Figura 3b** Il limite della funzione f per $x \to x_0$ esiste finito (è uguale a l) ma la funzione **non** è definita in x_0.
Un punto x_0 è detto un **punto di salto** (o una **singolarità di prima specie**) per f se esistono finiti i limiti di f per $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$ ma essi sono diversi tra loro (**Fig. 3c** e **Fig. 3d**).	 **Figura 3c** $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (l_1, l_2)	 **Figura 3d** $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (l_2, l_1)
Un punto singolare x_0 **è detto di seconda specie** in tutti gli altri casi, ovvero se almeno uno dei due limiti $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ non esiste (**Fig. 3e**) o è infinito (**Fig. 3f**).	 **Figura 3e** $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ non esiste.	 **Figura 3f** $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

ATTENZIONE!
Non c'è uniformità nella letteratura scientifica sulla definizione di *punto di discontinuità*. Molti parlano sempre equivalentemente di punto di discontinuità o di punto singolare, mentre secondo le definizioni date qui a fianco l'appellativo di punto di discontinuità è riservato ai punti singolari *appartenenti al dominio* della funzione.

È importante fare alcune osservazioni.

1. Quando una funzione f presenta in x_0 una singolarità eliminabile si può sempre definire una nuova funzione, detta **prolungamento continuo** di f, coincidente con la funzione data per $x \neq x_0$ e di valore uguale al limite di f quando $x \to x_0$ per $x = x_0$: la nuova funzione così definita risulta continua in x_0. In un certo senso si può quindi «rimuovere» la singolarità: ecco perché si parla di singolarità *eliminabile*.
2. Se x_0 è un punto di salto per la funzione f, il numero $|\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)|$ si dice **salto** di f in $x = x_0$.
3. I punti di singolarità eliminabile e i punti di singolarità di prima e di seconda specie sono detti **punti singolari** di una funzione; nel caso in cui un punto singolare x_0 appartiene al dominio della funzione, esso viene anche detto **punto di discontinuità**.

ESEMPI Studio dei punti singolari di una funzione

Studiamo i punti singolari delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ **b.** $f(x) = [x]$

c. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ **d.** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

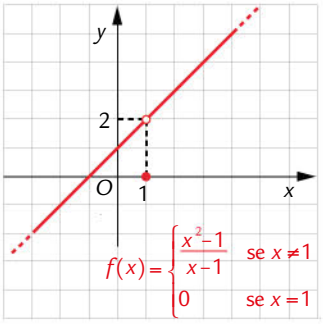
a. La funzione data è definita in tutto **R** ed è continua per $x \neq 1$.
Analizziamo il comportamento della funzione in un intorno di 1:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

Pertanto il limite della funzione f per $x \to 1$ esiste finito ma è *diverso* da $f(1) = 0$. La funzione presenta quindi in $x = 1$ una singolarità *eliminabile* (*vedi* la figura). Il prolungamento continuo di f in $x = 1$ è la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

che coincide con f eccetto che per $x = 1$ e risulta continua anche in $x = 1$ perché $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2$.



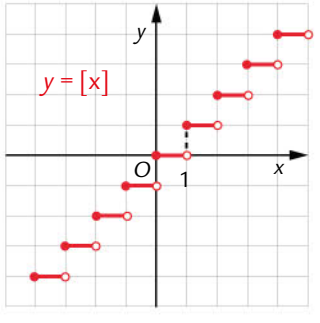
b. Ricorda che con il simbolo $[x]$ si indica la **parte intera** del numero reale x, ossia il numero intero *minore o uguale* più vicino a x; per esempio:

$$[1{,}7] = 1;\ [0{,}2] = [0];\ [-1{,}5] = -2$$

Il grafico della funzione parte intera è rappresentato nella figura a lato. È immediato notare che il punto $x = 0$ (per esempio) è un punto di salto, poiché:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \text{ mentre } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

Analogamente anche $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ così come $x = -1, -2, -3, -4, \ldots$ sono punti di salto.
La funzione parte intera presenta dunque *infiniti* punti singolari: tutti i punti della forma $x = k$, con $k \in \mathbf{Z}$, che risultano punti di salto.



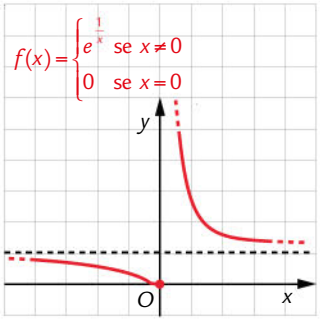
c. La funzione è definita in **R** e continua in $\mathbf{R} - \{0\}$. Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (\to e^{-\infty})$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad (\to e^{+\infty})$$

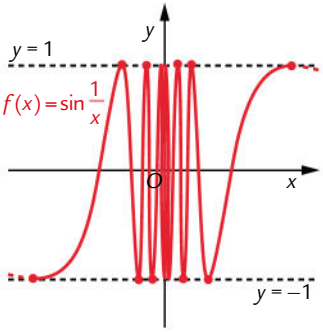
Poiché il limite per $x \to 0^-$ è *finito*, mentre il limite per $x \to 0^+$ è *infinito*, il punto $x = 0$ è una singolarità di seconda specie.

Osserva che, poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$, la funzione f è *continua a sinistra* in $x = 0$; l'asse y risulta invece un asintoto verticale destro per la funzione.



d. La funzione è definita continua in $\mathbf{R} - \{0\}$.

Sia il $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ sia il $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *non esistono*, quindi anche questa funzione presenta per $x = 0$ una singolarità di *seconda specie*. In questo caso però il grafico della funzione in un intorno di 0 non è facilmente rappresentabile; infatti in un intorno di 0 la funzione presenta infinite oscillazioni tra −1 e 1 (*vedi* la figura).



Esercizi p. 213

3. Proprietà delle funzioni continue

In questo paragrafo enunciamo alcuni teoremi che illustrano le proprietà di cui godono le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato.

Con GeoGebra
Teorema di esistenza degli zeri

Il teorema di esistenza degli zeri

TEOREMA 1 | Teorema (di esistenza) degli zeri

Sia f una funzione definita e **continua** in un intervallo **chiuso e limitato** $[a, b]$. Se $f(a)\,f(b) < 0$, allora la funzione ammette **almeno uno zero** in (a, b), ossia esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Approfondimento
Dimostrazione del teorema degli zeri

Il teorema afferma un fatto intuitivo: se una funzione continua f assume agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ valori *discordi*, il suo grafico deve avere *almeno* un punto di intersezione con l'asse x (**Fig. 4**). Il punto d'intersezione può *non* essere unico (**Fig. 5**); inoltre la condizione espressa dal teorema è *sufficiente*, ma *non necessaria*, affinché esista uno zero della funzione nell'intervallo considerato (**Fig. 6**).

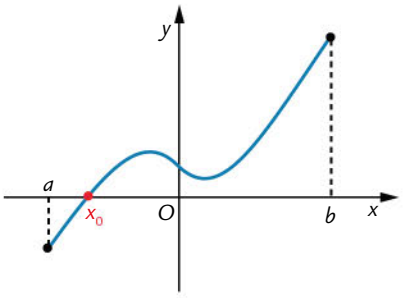


Figura 4 La funzione assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ e si annulla in *un solo* punto.

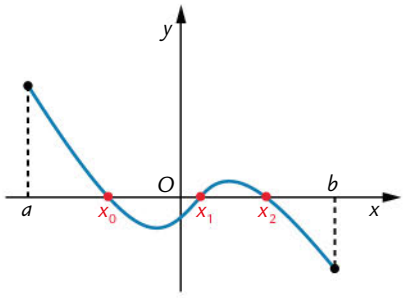


Figura 5 La funzione assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ e si annulla in *tre* punti.

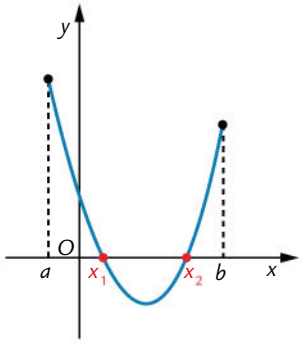


Figura 6 La funzione non assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $[a, b]$, ma ammette ugualmente due zeri.

ESEMPI Applicazione del teorema degli zeri

La funzione $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1, 2]$ e risulta $f(1) = -1$ e $f(2) = 3$. Poiché $f(1)f(2) < 0$, è applicabile il teorema degli zeri. Esso ci assicura che la funzione ammette *almeno uno zero* nell'intervallo considerato, cioè $x^3 - x^2 - 1 = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $(1, 2)$.

CONTROESEMPI Necessità delle ipotesi del teorema degli zeri

a. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è definita e continua nell'insieme $\mathbf{R} - \{0\}$, assume sia valori negativi sia valori positivi, ma non si annulla mai (**Fig. 7**). Rispetto al teorema degli zeri cade l'ipotesi che la funzione sia definita in un *intervallo chiuso e limitato*.

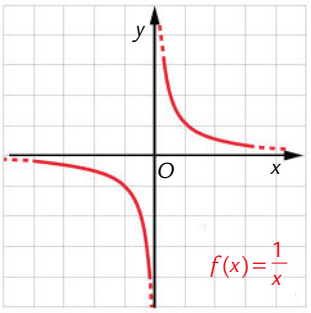


Fig. 7

b. Nell'intervallo $[-2, 2]$ la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è definita ma non è continua in $x = 0$; assume valori discordi agli estremi dell'intervallo ($f(-2) = -1$ e $f(2) = 1$), tuttavia non si annulla nell'intervallo $[-2, 2]$ (**Fig. 8**). Rispetto al teorema degli zeri cade l'ipotesi che la funzione sia *continua* nell'intervallo considerato.

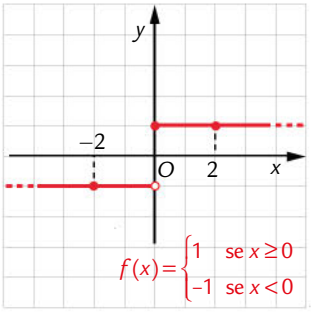


Fig. 8

OSSERVA

Nello studio dell'analisi, l'enunciato di un teorema è di solito accompagnato, oltre che dalla dimostrazione, anche dalla discussione della *necessità delle ipotesi*. Si fa cioè vedere, mediante opportuni *controesempi*, che se cade una delle ipotesi del teorema, allora la tesi può non essere più vera.

c. La funzione $f(x) = \sin x + 2$ è continua in tutto **R**, in particolare in ogni intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, tuttavia non si annulla mai. Rispetto al teorema degli zeri, cade l'ipotesi che risulti $f(a) \cdot f(b) < 0$ in qualche intervallo $[a, b]$.

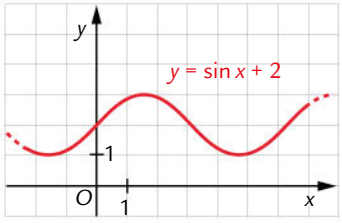


Fig. 9

Il teorema di Weierstrass

TEOREMA 2 | Teorema di Weierstrass

Sia f una funzione **continua** in un **intervallo chiuso e limitato** $[a, b]$; allora f ammette **massimo** M e **minimo** m in $[a, b]$, ossia esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Con GeoGebra
Teorema di Weierstrass

Il massimo e il minimo possono essere assunti sia all'*interno* dell'intervallo sia agli *estremi* e tutti i casi sono possibili (**Figg. 10-11-12**). Inoltre la condizione espressa dal teorema è *sufficiente*, ma *non necessaria*, a garantire l'esistenza del massimo e del minimo di una funzione in un intervallo (**Fig. 13**).

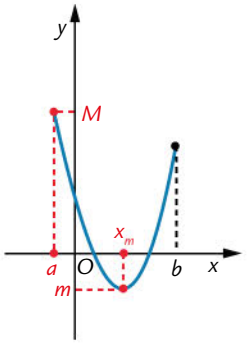


Figura 10 La funzione assume minimo in un punto *interno* ad $[a, b]$ e massimo nell'*estremo a*.

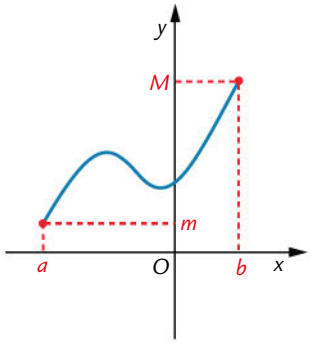


Figura 11 La funzione assume sia il minimo sia il massimo agli *estremi* dell'intervallo $[a, b]$.

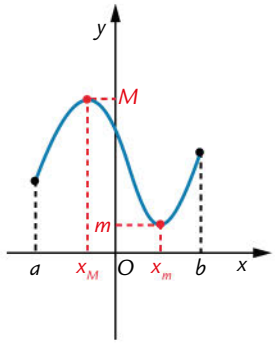


Figura 12 La funzione assume sia il minimo sia il massimo in punti *interni* all'intervallo $[a, b]$.

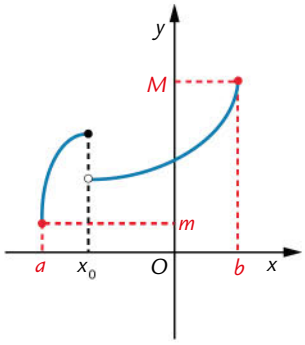


Figura 13 La funzione assume massimo e minimo in $[a, b]$ pur *non* essendo continua in $[a, b]$.

ESEMPIO Applicazione del teorema di Weierstrass

La funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ è continua in qualsiasi intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ (perché?). Pertanto il teorema di Weierstrass garantisce che la funzione ammette minimo assoluto e massimo assoluto in ciascun intervallo di questo tipo, per esempio in $[-1, 2]$ o in $[10, 100]$.

OSSERVA

Il teorema di Weierstrass garantisce l'*esistenza* del minimo e del massimo ma non dà indicazioni su come trovarli; di quest'ultimo problema ci occuperemo nelle prossime Unità.

CONTROESEMPI Necessità delle ipotesi del teorema di Weierstrass

a. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$, nell'intervallo chiuso e limitato $[-2, 2]$, ammette massimo uguale a 5, ha estremo inferiore uguale a 0 ma non ammette minimo (**Fig. 14**). Rispetto alle ipotesi del teorema di Weierstrass cade l'ipotesi che la funzione sia *continua* in $[-2, 2]$.

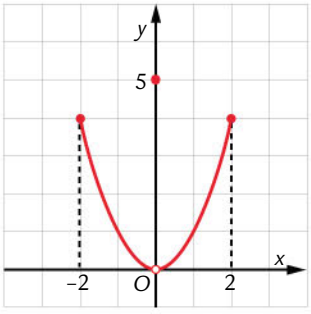


Figura 14

b. La funzione $f(x) = x^2$, nell'intervallo $[-1, 2)$ è continua: ammette minimo uguale a 0 ma non ammette massimo (**Fig. 15**). Rispetto alle ipotesi del teorema di Weierstrass cade l'ipotesi che la funzione sia definita su un intervallo *chiuso*.

c. La funzione $f(x) = \arctan x$, nell'intervallo $[0, +\infty)$, è continua: ammette minimo uguale a 0 ed estremo superiore uguale a $\frac{\pi}{2}$ ma non ammette massimo (**Fig. 16**).

Rispetto alle ipotesi del teorema di Weierstrass cade l'ipotesi che la funzione sia definita su un intervallo *limitato*.

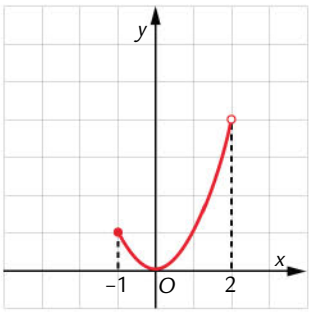


Figura 15

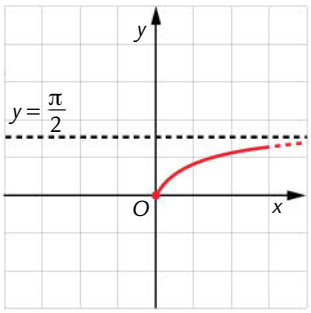


Figura 16

Il teorema dei valori intermedi

Dal teorema degli zeri e dal teorema di Weierstrass segue il seguente teorema.

Con GeoGebra
Teorema dei valori intermedi (o di Darboux)

TEOREMA 3 | Teorema dei valori intermedi (o di Darboux)

Una funzione f **continua** in un intervallo **chiuso e limitato** $[a, b]$ assume tutti i valori compresi fra il suo minimo m e il suo massimo M in $[a, b]$.
In altre parole, per ogni $k \in (m, M)$ esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = k$.

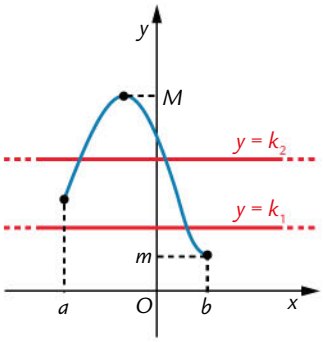


Figura 17

L'interpretazione grafica del teorema dei valori intermedi è la seguente: se f è una funzione continua in $[a, b]$, detti m e M, rispettivamente, il minimo e il massimo valore assunto da f in questo intervallo, ogni retta di equazione $y = k$, con $m < k < M$, interseca il grafico della funzione f almeno in un punto (**Fig. 17**).

Figura animata
Interpretazione grafica del teorema dei valori intermedi

ESEMPIO Applicazione del teorema dei valori intermedi

Applichiamo il teorema dei valori intermedi alla funzione $f(x) = x + 2^x$ nell'intervallo $[0, 3]$.

Nell'intervallo $[0, 3]$ la funzione è continua, in quanto somma di funzioni continue. Possiamo quindi applicare il teorema dei valori intermedi.
Per determinare il minimo e il massimo di f in $[0, 3]$ osserviamo che la funzione f è *strettamente crescente*, perché è somma di funzioni strettamente crescenti, quindi:

$$\min_{x\in[0,3]} f(x) = f(0) = 1 \qquad \max_{x\in[0,3]} f(x) = f(3) = 11$$

Per il teorema dei valori intermedi possiamo allora affermare che la funzione f assume nell'intervallo $[0, 3]$ tutti i valori compresi tra 1 e 11. In altre parole, l'equazione $x + 2^x = k$ ammetterà (almeno) una soluzione nell'intervallo $[0, 3]$ per ogni k tale che $1 < k < 11$.

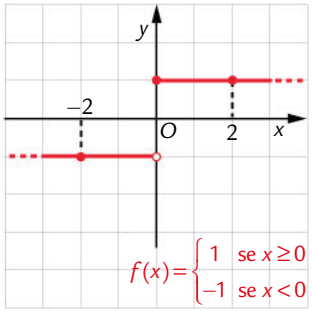


Figura 18

CONTROESEMPI Necessità delle ipotesi del teorema dei valori intermedi

a. La funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, nell'intervallo $[-2, 2]$, assume valore minimo uguale a -1 e massimo uguale a 1 ma non assume nessun valore compreso fra -1 e 1 (**Fig. 18**). Rispetto alle ipotesi del teorema dei valori intermedi cade l'ipotesi di *continuità* nell'intervallo $[-2, 2]$ (la funzione non è continua per $x = 0$).

b. La funzione $f(x) = x$ è continua nell'insieme $X = [0, 2] \cup [3, 5]$; in questo insieme la funzione ha minimo uguale a 0 e massimo uguale a 5 ma non assume alcun valore compreso tra 2 e 3 (**Fig. 19**).
Rispetto alle ipotesi del teorema dei valori intermedi cade l'ipotesi che il dominio della funzione sia un *intervallo*.

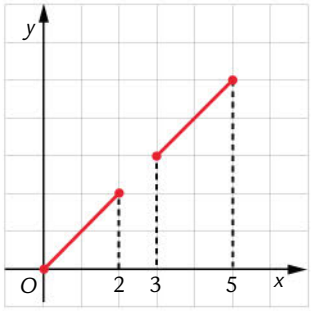


Figura 19

Esercizi p. 218

4. Asintoti e grafico probabile di una funzione

Con GeoGebra
Asintoti di una funzione

In questo paragrafo vedremo che le nuove conoscenze acquisite circa i limiti e la continuità ci consentono notevoli passi avanti nella risoluzione del problema di tracciare il grafico di una funzione reale di variabile reale. A tale scopo è opportuno anzitutto riprendere le nozioni sugli *asintoti* che abbiamo già introdotto e ampliarle, introducendo il concetto di *asintoto obliquo*.

Asintoti orizzontali e verticali

Nell'**Unità 2** abbiamo già definito gli asintoti verticali e orizzontali di una funzione.
Una retta di equazione $x = x_0$, con $x_0 \in \mathbf{R}$, è un **asintoto verticale** per una funzione se il limite della funzione per $x \to x_0$ è $-\infty$ o $+\infty$ o ∞.
Se il limite della funzione è infinito solo per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0^+$ si parla, rispettivamente, di **asintoto verticale sinistro** o di **asintoto verticale destro**.
Alcuni casi sono rappresentati nelle **Figg. 20-21-22**.

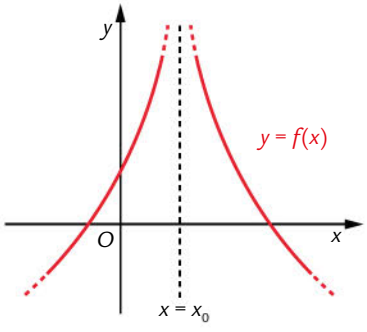


Figura 20 Grafico di una funzione che ammette la retta di equazione $x = x_0$ come asintoto verticale bilatero (cioè sia a destra sia a sinistra).

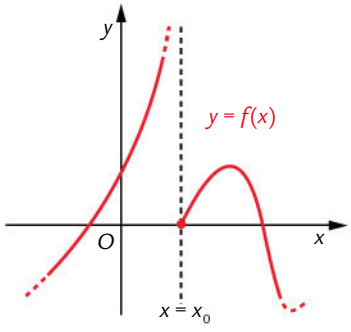


Figura 21 Grafico di una funzione che ammette la retta di equazione $x = x_0$ come asintoto verticale sinistro.

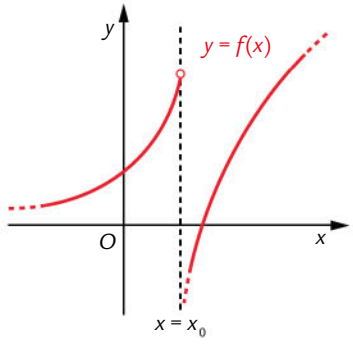


Figura 22 Grafico di una funzione che ammette la retta di equazione $x = x_0$ come asintoto verticale destro.

Una retta di equazione $y = l$, con $l \in \mathbf{R}$, è un **asintoto orizzontale** per una funzione se il limite della funzione per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$ o per $x \to \infty$ è l.
Se il limite è l solo per $x \to +\infty$ si parla più precisamente di **asintoto orizzontale destro**; se il limite è l solo per $x \to -\infty$ si parla più precisamente di **asintoto orizzontale sinistro**.

Alcuni casi sono rappresentati nelle **Figg. 23-24-25**.

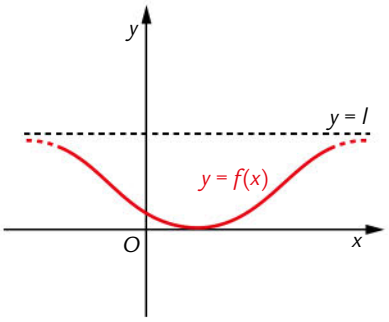


Figura 23 Grafico di una funzione che ammette la retta di equazione $y = l$ come asintoto orizzontale bilatero (cioè sia a destra sia a sinistra).

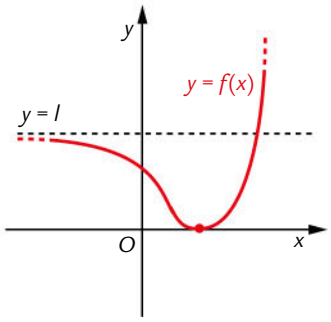


Figura 24 Grafico di una funzione che ammette la retta di equazione $y = l$ come asintoto orizzontale sinistro.

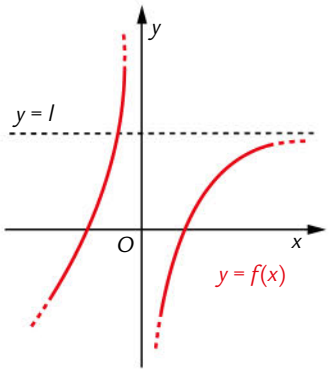


Figura 25 Grafico di una funzione che ammette la retta di equazione $y = l$ come asintoto orizzontale destro.

Per determinare gli eventuali asintoti verticali e orizzontali di una funzione f di equazione $y = f(x)$ bisogna anzitutto determinare il dominio D della funzione e poi calcolare i limiti cui tende la funzione agli estremi degli intervalli dove è definita.

ESEMPIO Ricerca di asintoti verticali e orizzontali

Ricerchiamo gli eventuali asintoti verticali e orizzontali delle seguenti funzioni:

a. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **b.** $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$ **c.** $y = e^{\frac{1}{x}}$ **d.** $y = \sqrt{\ln x}$

a. La funzione è definita per $x \neq \pm 1$, quindi il suo dominio è:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

Per ricercare eventuali asintoti *verticali* dobbiamo calcolare i limiti della funzione agli estremi *finiti* degli intervalli che costituiscono il dominio. In questo caso, quindi, dovremo calcolare i limiti per $x \to -1$ e per $x \to 1$.

- $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \infty$, quindi $x = -1$ è un asintoto *verticale*

  Più precisamente, studiando il segno della funzione si vede che:

  $$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$$

- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \infty$, quindi $x = 1$ è un asintoto *verticale*

  Più precisamente, studiando il segno della funzione, si vede che:

  $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

Per ricercare eventuali asintoti *orizzontali* dobbiamo calcolare i limiti della funzione agli estremi *infiniti* degli intervalli che costituiscono il dominio. In questo caso, quindi, dovremo calcolare i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$, quindi $y = 1$ è un asintoto *orizzontale* (bilatero)

b. La funzione è definita per $x \neq -2$ (osserva che $x^2 + 1$ è sempre positivo quindi non occorre porre nessuna condizione per l'esistenza del radicale).
Il dominio della funzione è dunque:

$$(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

ATTENZIONE!

Per brevità abbiamo scritto (e scriveremo in situazioni analoghe) «$x = -1$ è un asintoto verticale» invece di «la retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale».

OSSERVA

La funzione $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ è pari. Pertanto, una volta individuato uno dei due asintoti verticali, l'altro si può dedurre anche senza il calcolo di limiti, per simmetria rispetto all'asse y.

Per la ricerca degli eventuali asintoti verticali calcoliamo il limite per $x \to -2$:

- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = \infty$, quindi $x = -2$ è un asintoto *verticale*

Per la ricerca degli eventuali asintoti *orizzontali* calcoliamo i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$:

- $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = -1$$

quindi $y = -1$ è un asintoto *orizzontale sinistro.*

- $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

quindi $y = 1$ è un asintoto *orizzontale destro.*

c. La funzione è definita per $x \neq 0$, quindi il suo dominio è:

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Vediamo se esistono asintoti *verticali*:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

quindi $x = 0$ è un asintoto *verticale destro* per la funzione.
Osserva che è essenziale calcolare *separatamente* i limiti per $x \to 0^-$ e per $x \to 0^+$, essendo questi *diversi* tra loro.
Vediamo se esistono asintoti *orizzontali*:

- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$, quindi $y = 1$ è un *asintoto orizzontale* (bilatero)

d. La funzione è definita purché sia $\begin{cases} \ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$, cioè per $x \geq 1$; il dominio è quindi l'intervallo $[1, +\infty)$. Osserviamo che la funzione data è *continua* nel suo dominio (in quanto composta di funzioni continue), per cui:

- $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln 1} = 0$

pertanto *non* ci sono asintoti verticali.
Per vedere se esistono asintoti *orizzontali*, studiamo il comportamento della funzione quando $x \to +\infty$; poiché:

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\ln x} = +\infty$

non ci sono nemmeno asintoti orizzontali. Osserva che in questo caso non ha senso il calcolo del limite per $x \to -\infty$ poiché il dominio della funzione *non* è inferiormente illimitato.

OSSERVA

Nell'esempio b, è stato essenziale calcolare *separatamente* i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, essendo *diversi* tra loro. Un altro esempio di funzione che ha comportamenti diversi per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ è $y = \arctan x$, che ha come asintoto orizzontale destro la retta $y = \frac{\pi}{2}$ e come asintoto orizzontale sinistro la retta $y = -\frac{\pi}{2}$.

Nel primo esempio invece abbiamo potuto compattare la scrittura, calcolando il limite per $x \to \pm\infty$, poiché il comportamento della funzione $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ era il medesimo.

Concludiamo osservando che se una funzione è *periodica* (non costante) non esistono i limiti per $x \to \pm\infty$, quindi **non** esistono asintoti orizzontali. Per esempio, le funzioni seno, coseno e tangente non hanno asintoti orizzontali.

Asintoti obliqui

Se una funzione **non** presenta asintoti *orizzontali*, può accadere che ammetta asintoti *obliqui*. Intuitivamente, ciò significa che può esistere una retta, non orizzontale, alla quale il grafico della funzione si avvicina indefinitamente.

DEFINIZIONE | Asintoto obliquo

Una retta di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, si dice **asintoto obliquo** per una funzione $y = f(x)$ per $x \to \infty$ quando:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + q)| = 0 \qquad [1]$$

Se la condizione [1] è verificata solo per $x \to -\infty$ o per $x \to +\infty$, si dice, rispettivamente, che $y = mx + q$ è un asintoto obliquo **sinistro** o un asintoto obliquo **destro**.

La [1] equivale alla richiesta che la distanza tra il punto P del grafico di f di ascissa x e il punto Q sulla retta $y = mx + q$ avente la stessa ascissa di P tenda a 0 quando $x \to \infty$ (**Fig. 26**).

La definizione precedente **non** è però operativa, nel senso che, data una funzione, non ci permette di stabilire se esistono asintoti obliqui e, in caso affermativo, di determinarli; per risolvere questi problemi è utile il seguente teorema.

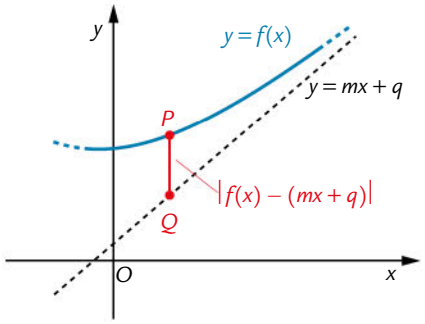


Figura 26 La retta $y = mx + q$, con $m \neq 0$ è un asintoto obliquo per f se e solo se la distanza PQ tende a 0 quando $x \to \infty$.

TEOREMA 4 | Esistenza e calcolo dell'asintoto obliquo

La retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$ se e solo se:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ con $m \in \mathbf{R}$ e $m \neq 0$ [2]
- $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q$ con $q \in \mathbf{R}$ [3]

Se le condizioni [2] e [3] sono verificate solo per $x \to +\infty$ oppure per $x \to -\infty$, l'asintoto obliquo sarà soltanto destro o sinistro.

DIMOSTRAZIONE

1. **Supponiamo che la retta $y = mx + q$ sia un asintoto obliquo per la funzione e dimostriamo che allora sono soddisfatte le condizioni [2] e [3]**

Poiché $y = mx + q$ è un asintoto obliquo, in base alla definizione deve essere:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + q)| = \lim_{x\to\infty} |x| \left| \frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \right| = 0$$

Questo fattore deve $\to 0$ poiché il $|x| \to +\infty$ e il risultato del limite è finito

Affinché $\left| \frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \right| \to 0$ per $x \to \infty$, essendo $\frac{q}{x} \to 0$, deve essere:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$ È quindi soddisfatta la [2]

D'altra parte deve essere anche:

$$0 = \lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + q)| = \lim_{x\to\infty} |(f(x) - mx) - q|$$

da cui:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q$$ È quindi soddisfatta la [3]

2. Supponiamo che siano verificate le condizioni [2] e [3] e dimostriamo che allora la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo

L'ipotesi che valga la [3] implica che:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx+q)| = \lim_{x\to\infty} |(f(x) - mx) - q| = |q - q| = 0$$

Quindi, in base alla definizione [1], la retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per la funzione.

ESEMPI Ricerca di asintoti obliqui

Calcoliamo gli eventuali asintoti obliqui delle seguenti funzioni:

a. $y = \dfrac{x^3+1}{x^2+2x}$

b. $y = \sqrt{x^2+1} - x$

c. $y = x + \ln x$

a. Osserviamo che il dominio della funzione è $\mathbf{R} - \{-2, 0\}$, quindi, essendo inferiormente e superiormente illimitato, ha senso indagare sul comportamento della funzione sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$. Abbiamo che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x^2+2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

quindi **non** ci sono asintoti orizzontali; *potrebbero* allora esistere asintoti obliqui. Abbiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x^3+2x^2} = 1 \qquad m = 1$$

Poiché tale limite è finito, ha senso continuare:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{(f(x) - 1\cdot x)}_{f(x)-mx} = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\left(\frac{x^3+1}{x^2+2x} - x\right)}_{\text{forma indeterminata } +\infty-\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1-x(x^2+2x)}{x^2+2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x^2}{x^2+2x} = -2 \qquad q = -2$$

Concludiamo che l'*asintoto obliquo* esiste e ha equazione $y = \underbrace{x - 2}_{mx+q}$.

b. Il dominio della funzione è $\mathbf{R}$. Controlliamo anzitutto se esistono asintoti orizzontali:

- $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(\sqrt{x^2+1} - x)}_{\text{forma indeterminata } +\infty-\infty} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

quindi $y = 0$ è un *asintoto orizzontale destro*, mentre per $x \to -\infty$ potrebbe esistere *asintoto obliquo sinistro*.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}=$$

$|x| = -x$ per $x \to -\infty$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)=-2 \qquad m=-2$$

$$\lim_{x\to-\infty}[\underbrace{f(x)+2x}_{f(x)-mx}]=\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{\sqrt{x^2+1}+x}_{\text{forma indeterminata } +\infty-\infty})=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0 \qquad q=0$$

Pertanto, la retta $y=-2x$ è un *asintoto obliquo sinistro*.

c. Il dominio della funzione è $(0, +\infty)$. Ha perciò senso la ricerca di asintoti orizzontali od obliqui *destri*. Poiché:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\ln x)=+\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali; vediamo se esiste un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1 \qquad m=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \qquad q \text{ non esiste finito}$$

Poiché l'ultimo limite è infinito, concludiamo che **non** esiste asintoto obliquo.

RIFLETTI

1. Se per $x \to \pm\infty$ esiste asintoto orizzontale, **non** si pone il problema della ricerca dell'asintoto obliquo.

2. Se per $x \to \pm\infty$ **non** esiste asintoto orizzontale, si calcola il limite per $x \to \pm\infty$ di $\frac{f(x)}{x}$: se questo limite non esiste o è infinito o nullo, **non** esiste asintoto obliquo e la ricerca termina. In caso contrario, indicato con m il limite ottenuto, si passa a calcolare il limite per $x \to \pm\infty$ di $[f(x) - mx]$: affinché esista effettivamente l'asintoto obliquo anche quest'ultimo limite deve esistere ed essere finito.

È importante fare alcune osservazioni.

- Per le funzioni *razionali frazionarie*, cioè per le funzioni di equazione $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$, dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi, è un facile esercizio verificare che l'asintoto obliquo esiste se e solo se il grado di $P(x)$ supera di 1 quello di $Q(x)$.
- Se l'espressione analitica di una funzione si presenta nella forma

  $$f(x)=mx+q+\varepsilon(x)$$

  dove $\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to \infty$ (o $-\infty$ o $+\infty$), è intuitivo che il grafico della funzione, per $x \to \infty$ (o $-\infty$ o $+\infty$), tende «ad avvicinarsi sempre più» a quello della retta di equazione $y = mx + q$. In effetti, applicando il **Teorema 4** si può verificare che in tale ipotesi la retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto per la funzione. Questa osservazione consente spesso di riconoscere «a colpo d'occhio» l'esistenza di un asintoto. Per esempio, consideriamo la funzione:

  $$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

  Poiché $\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to \infty$, possiamo immediatamente affermare che $y = x$ è un asintoto obliquo per la funzione.

Grafico probabile di una funzione

Alla luce delle nuove conoscenze che abbiamo acquisito circa gli asintoti, riprendiamo il problema di tracciare il grafico di una funzione. Data una funzione, fino a questo punto eravamo in grado (almeno nei casi più semplici) di:

1. determinarne il dominio;
2. riconoscerne eventuali simmetrie evidenti (cioè rispetto all'asse y o all'origine);
3. determinare gli eventuali punti d'intersezione del suo grafico con gli assi;
4. studiarne il segno.

Ora possiamo arricchire la nostra analisi con un quinto punto:

5. *calcolare i limiti agli estremi degli intervalli dove la funzione è definita.*

Ciò consente di studiare eventuali punti singolari della funzione e di scoprire l'esistenza di eventuali asintoti verticali e/o orizzontali; se non esistono asintoti orizzontali, siamo inoltre in grado di ricercare eventuali asintoti obliqui.
L'insieme delle informazioni ricavate dai cinque punti indicati consente in molti casi di tracciare il grafico di una funzione con buona approssimazione, come mostriamo nel prossimo esempio. Parleremo di **grafico probabile**, perché alcuni elementi rimangono ancora incerti (per esempio la determinazione degli eventuali punti di minimo o di massimo).

ESEMPIO Grafico probabile di una funzione razionale frazionaria

Tracciamo il grafico probabile della funzione $y = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 9}$.

- **Dominio**

La funzione che dobbiamo studiare è *razionale frazionaria* ed è definita per i valori di x che non annullano il denominatore, cioè per $x \neq \pm 3$. Perciò il *dominio* della funzione è:

$$D = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

- **Simmetrie**

È facile verificare che $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, quindi la funzione non presenta simmetrie evidenti.

- **Punti d'intersezione con gli assi**

Asse x

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 9} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x+1)(x-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il grafico interseca quindi l'asse x nei punti di coordinate $(-1, 0)$ e $(2, 0)$.

Asse y

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 9} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{4}{9} \simeq 0{,}4 \end{cases}$$

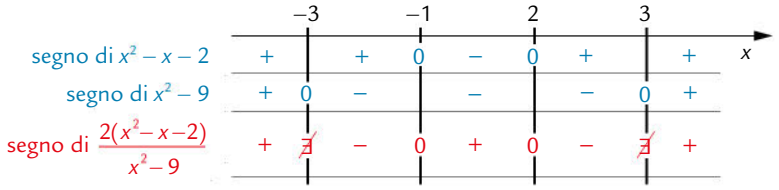
Il grafico interseca quindi l'asse y nel punto di coordinate $\left(0, \frac{4}{9}\right)$.

- **Segno**

Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{2x^2-2x-4}{x^2-9}>0 \Rightarrow \frac{2(x^2-x-2)}{x^2-9}>0 \Rightarrow \frac{2(x+1)(x-2)}{x^2-9}>0$$

Otteniamo il seguente schema.



Le informazioni fin qui raccolte sul grafico della funzione sono rappresentate in **Fig. 27**.

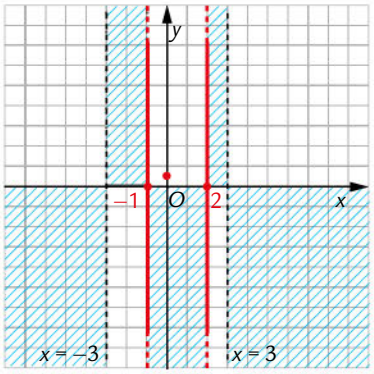


Figura 27 Il grafico della funzione appartiene alle regioni di piano non escluse dal tratteggio.

- **Limiti agli estremi dell'insieme di definizione e asintoti**

Ricordiamo che $D=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-2x-4}{x^2-9}=2$$

quindi $y=2$ è un *asintoto orizzontale*.

$$\lim_{x\to-3^-}\frac{2x^2-2x-4}{x^2-9}=+\infty \qquad \lim_{x\to-3^+}\frac{2x^2-2x-4}{x^2-9}=-\infty$$

Per determinare il segno dell'infinito tieni conto del segno della funzione

quindi $x=-3$ è un *asintoto verticale*.

$$\lim_{x\to3^-}\frac{2x^2-2x-4}{x^2-9}=-\infty \qquad \lim_{x\to3^+}\frac{2x^2-2x-4}{x^2-9}=+\infty$$

quindi anche $x=3$ è un *asintoto verticale*.
Ai fini di tracciare con maggior precisione il grafico della funzione è utile ricercare eventuali suoi punti d'intersezione con l'asintoto orizzontale, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x^2-2x-4}{x^2-9} \\ y=2 \end{cases}$$

Si trova come soluzione $x=7$, $y=2$, quindi il grafico della funzione interseca l'asintoto orizzontale nel punto di coordinate $(7, 2)$.

Possiamo rappresentare graficamente le nuove informazioni raccolte come indicato in **Fig. 28**.

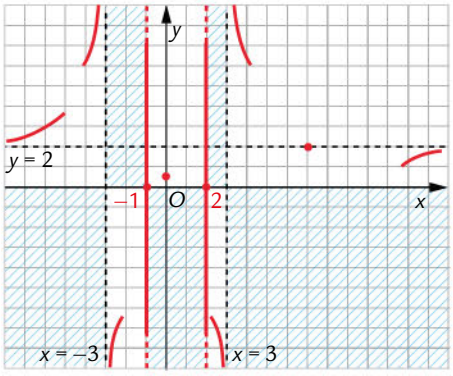


Figura 28 **Rappresentazione del comportamento della funzione agli estremi degli intervalli dove è definita.**

- **Grafico**

Un grafico probabile della funzione data, che riassume tutte le informazioni fin qui ottenute, è tracciato in **Fig. 29**.

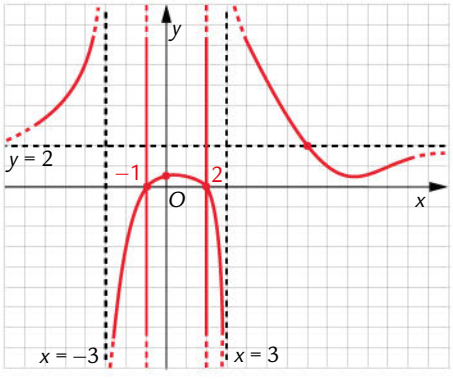


Figura 29 **Grafico probabile della funzione.**

ATTENZIONE!

Osserva che lo studio dei punti d'intersezione con l'asintoto orizzontale ci ha permesso di *escludere* che il grafico della funzione fosse del tipo riprodotto in Fig. 30.

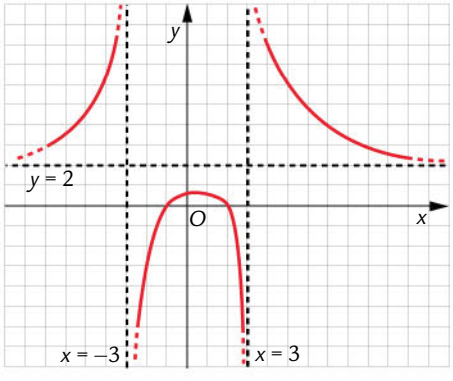


Figura 30

Esercizi p. 222

Continuità

Funzione continua in un punto x_0

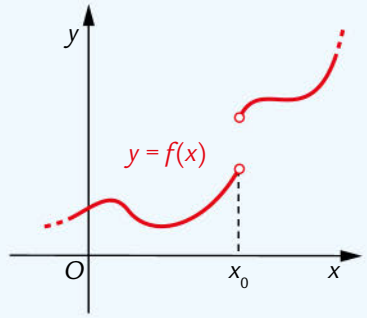
Funzione per cui:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Classificazione dei punti singolari

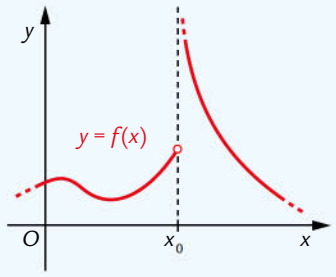
Comportamento nell'intorno di un punto in cui una funzione **non** è continua.

Singolarità di prima specie (punto di salto)



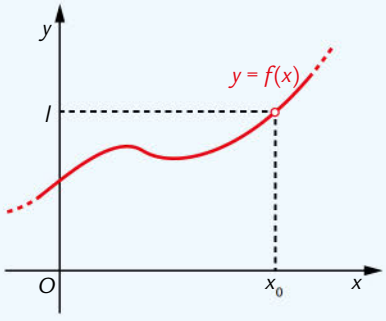
Entrambi i limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ esistono finiti ma sono diversi

Singolarità di seconda specie



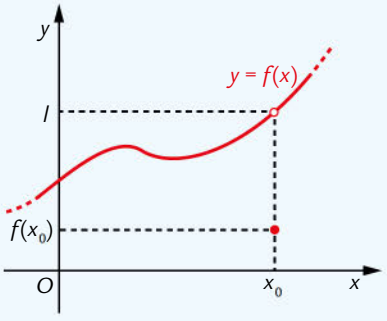
almeno uno dei due limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ non esiste o è infinito

Singolarità eliminabile



Il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito ma la funzione $f(x)$ non è definita in x_0

oppure



il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$

Funzione continua

Una funzione che è continua in ogni punto del suo dominio.

Proprietà delle funzioni continue

Teorema degli zeri

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.
Se la funzione assume valori *discordi* agli estremi dell'intervallo $[a, b]$, allora f ammette almeno uno zero interno all'intervallo.

ESEMPIO

La funzione $y = x^3 - x - 1$ ammette almeno uno zero nell'intervallo $[0, 2]$ poiché $f(0) = -1$ e $f(2) = 5$, quindi $f(0) \cdot f(2) < 0$.

Teorema di Weierstrass

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$; allora f ammette massimo assoluto e minimo assoluto in $[a, b]$.

ESEMPIO

La funzione $y = e^{-x^2}$ ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'intervallo $[-10, 150]$.

Teorema dei valori intermedi

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$; allora f assume tutti i valori compresi tra il suo minimo assoluto e il suo massimo assoluto.

ESEMPIO

La funzione $y = x^3$ assume nell'intervallo $[-2, 2]$ tutti i valori compresi tra -8 e 8.

Asintoti di una funzione $y = f(x)$

- Gli eventuali asintoti *orizzontali* o *verticali* si trovano calcolando i limiti della funzione agli estremi (finiti e infiniti) del dominio.
- La retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto obliquo se e solo se

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q \end{cases} \quad \text{con } m, q \in \mathbf{R} \text{ e } m \neq 0$$

Grafico probabile

Grafico di una funzione ottenuto studiandone il dominio, eventuali simmetrie, il segno e gli asintoti.

Esercizi

1. Funzioni continue

Teoria p. 192

Esercizi introduttivi

1 Verifica che la funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ è continua nel punto $x=1$.

2 Spiega perché la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$ **non** è continua per $x=1$.

3 Spiega perché la funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ **non** è continua nel punto $x=1$.

4 Spiega perché la funzione $f(x)=\ln(x^3+1)$ è continua.

5 La funzione $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ è continua? E la funzione $g(x)=\log(\cos x)$?

Traccia il grafico di una funzione f che soddisfi le proprietà indicate.

6 f non è continua in $x=2$ ma $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ esistono finiti e sono uguali fra loro.

7 f è continua da destra, ma non è continua, in $x=2$ ed è continua da sinistra, ma non è continua, in $x=4$.

8 f non è continua né da destra né da sinistra in $x=3$ e i limiti $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ esistono finiti ma sono diversi tra loro.

---

9 **Vero o falso?**

a. se f e g sono due funzioni continue in $\mathbf{R}$, anche la funzione $f\circ g$ è continua in $\mathbf{R}$ V F

b. se una funzione è invertibile, allora è continua V F

c. se una funzione è continua, allora è invertibile V F

d. tutte le funzioni costanti sono continue V F

e. se una funzione è strettamente monotona, allora è invertibile e continua V F

[3 affermazioni false e 2 vere]

Continuità in un punto e funzioni continue

10 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo l'insieme dei punti in cui le seguenti funzioni sono continue:

a. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4}$ **b.** $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\leq 0\\ \cos x & x>0\end{cases}$ **c.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$

a. La funzione f è ottenuta dal quoziente di due funzioni continue, quindi è continua in ogni punto del suo dominio. Poiché f è definita per $x\neq\pm 2$, possiamo dire che f è continua nell'insieme $\mathbf{R}-\{\pm 2\}$.

b. La funzione f è continua nell'intervallo $(-\infty, 0)$ (perché ivi coincide con $\sin x$, che è una funzione continua) e nell'intervallo $(0, +\infty)$ (perché ivi coincide con $\cos x$, che è una funzione continua). L'unico punto in cui la funzione *potrebbe* non essere continua è il punto $x=0$. Per $x=0$ la funzione f è definita e risulta $f(0)=\sin 0=0$; tuttavia:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin x=0 \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$$

Quindi f **non** è continua in 0. L'insieme dei punti dove f è continua è allora $\mathbf{R}-\{0\}$.

c. La funzione f è continua per ogni $x\neq 0$ (perché?). L'unico punto in cui la funzione *potrebbe* non essere continua è il punto $x=0$. Per $x=0$ la funzione f è definita e risulta $f(0)=2$; inoltre, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$.

Poiché $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=2$, la funzione f è continua *anche* in 0, quindi è continua in $\mathbf{R}$.

Determina l'insieme dei punti in cui le seguenti funzioni sono continue.

11 $f(x) = -x^3 + x^2$ [R]

12 $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ $[\mathbb{R} - \{-2\}]$

13 $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x}$ $[\mathbb{R} - \{-1, 0\}]$

14 $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-10}$ $[\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{10}\}]$

15 $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3}$ $[\mathbb{R} - \{1, -3\}]$

16 $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$ $[\mathbb{R} - \{\pm 1, 0\}]$

17 $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ $[(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)]$

18 $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ [R]

19 $f(x) = \dfrac{x^4-\sqrt{x}}{x^2+2x+1}$ $[[0, +\infty)]$

20 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}}{x^4-16}$ $[[1, 2) \cup (2, +\infty)]$

21 $f(x) = \log(x^2 - 1)$ $[(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]$

22 $f(x) = \log|x^2 - 1|$ $[\mathbb{R} - \{1, -1\}]$

23 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

24 $f(x) = \ln|\sin x|$ $[\mathbb{R} - \{k\pi\}]$

25 $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right\}\right]$

26 $f(x) = \dfrac{1}{4\sin x \cos x - 1}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{12} + k\pi, \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\right\}\right]$

27 $f(x) = \ln(2\sin x - 1)$ $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

28 $f(x) = \ln(2\cos x - 1)$ $\left[-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

29 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x > 1 \end{cases}$ $[\mathbb{R} - \{1\}]$

30 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le -1 \\ 2x+3 & -1 < x < 0 \\ 4 & x \ge 0 \end{cases}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

31 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le -1 \\ 2x+1 & -1 < x < 0 \\ x+2 & x \ge 0 \end{cases}$ $[\mathbb{R} - \{-1, 0\}]$

32 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \cos x + 1 & x > 0 \end{cases}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

33 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ \cos x + 1 & x \ge 0 \end{cases}$ [R]

34 $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ \ln(1+x) & x > 0 \end{cases}$ [R]

35 $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ \log_2(2+x) & x > 0 \end{cases}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

36 $f(x) = \begin{cases} 2^x & x < \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2x+1} & x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$ [R]

37 $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x < 2 \\ \sqrt{2x+1} & x \ge 2 \end{cases}$ $[\mathbb{R} - \{2\}]$

Esercizi con parametri

38 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo per quali valori di a e b la funzione $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) + a & x \le 0 \\ \cos x & 0 < x \le \pi \\ b - \cos x & x > \pi \end{cases}$ è continua in R.

- La funzione f è certamente continua in $\mathbb{R} - \{0, \pi\}$; basta imporre che sia continua anche in $x = 0$ e in $x = \pi$.
- Studiamo il comportamento della funzione in un intorno di $x = 0$; abbiamo:

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} [\ln(x^2+1) + a] = a \qquad f(0) = a \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1$

  f sarà continua in 0 se e solo se: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, da cui $a = 1$.

  Studiamo il comportamento della funzione in un intorno di $x = \pi$; abbiamo:

  $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} \cos x = -1 \qquad f(\pi) = -1 \qquad \lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^+} (b - \cos x) = b + 1$

  Analogamente al caso precedente, deduciamo che f è continua in $x = \pi$ se e solo se $b + 1 = -1$, cioè se $b = -2$.
- In definitiva, f è continua in R se e solo se $a = 1$ e $b = -2$.

Determina i valori dei parametri in modo che le seguenti funzioni risultino continue.

39 $f(x)=\begin{cases} x^2-k & x<4 \\ 2x+2k & x\geq 4 \end{cases}$ $\left[k=\frac{8}{3}\right]$

40 **Videolezione** $f(x)=\begin{cases} ax+4 & x\leq 2 \\ ax^2-4 & x>2 \end{cases}$ $[a=4]$

41 $f(x)=\begin{cases} x+k & x\geq 1 \\ 1-2x^2 & x<1 \end{cases}$ $[k=-2]$

42 $f(x)=\begin{cases} x^2-k & x\leq -2 \\ kx+1 & x>-2 \end{cases}$ $[k=-3]$

43 $f(x)=\begin{cases} x^2-kx+1 & x<2 \\ x+k & x\geq 2 \end{cases}$ $[k=1]$

44 $f(x)=\begin{cases} x^2-2kx+1 & x<1 \\ \frac{k}{x} & x\geq 1 \end{cases}$ $\left[k=\frac{2}{3}\right]$

45 $f(x)=\begin{cases} kx-2 & x<1 \\ \frac{k}{x+1} & x\geq 1 \end{cases}$ $[k=4]$

46 $f(x)=\begin{cases} kx-2 & x<k \\ 2x^2-5 & x\geq k \end{cases}$ $\left[k=\pm\sqrt{3}\right]$

47 $f(x)=\begin{cases} (3-k)x & x<k \\ 2x^2-6x & x\geq k \end{cases}$ $[k=0 \vee k=3]$

48 $f(x)=\begin{cases} \frac{1-e^{kx}}{x} & x<0 \\ \frac{x^2+2}{x^2+4} & x\geq 0 \end{cases}$ $\left[k=-\frac{1}{2}\right]$

49 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & x\neq 0 \\ k & x=0 \end{cases}$ $[k=0]$

50 $f(x)=\begin{cases} \sin x & x\leq \frac{\pi}{2} \\ x+a & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left[a=1-\frac{\pi}{2}\right]$

51 $f(x)=\begin{cases} ax+\tan x & x\leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{ax}{2}+2 & x>\frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\left[a=\frac{8}{\pi}\right]$

52 $f(x)=\begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} & x<0 \\ a & x=0 \\ \frac{\ln(1+bx)}{2x} & x>0 \end{cases}$ $[a=3,\ b=6]$

53 $f(x)=\begin{cases} \arctan\frac{1}{x} & x<0 \\ 2x+k & x\geq 0 \end{cases}$ $\left[k=-\frac{\pi}{2}\right]$

54 $f(x)=\begin{cases} \cos 2x & x<0 \\ a & x=0 \\ \frac{\log(1+2x)^b}{x} & x>0 \end{cases}$ $\left[a=1,\ b=\frac{1}{2}\right]$

55 $f(x)=\begin{cases} 2\cos(a+x) & x\leq 0 \\ 1 & 0<x<1 \\ \log_2(bx) & x\geq 1 \end{cases}$ $\left[a=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ b=2\right]$

---

56 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} \sin x+a & -\pi\leq x\leq \pi \\ \cos x & \pi<x\leq 2\pi \\ b-\cos x & 2\pi<x<3\pi \end{cases}$$

Determina a e b in modo che risulti continua nell'insieme dove è definita, quindi traccia il grafico della funzione in corrispondenza dei valori di a e b trovati. $[a=-1,\ b=2]$

57 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a^2+4 & x>a \\ |x+2| & x\leq a \end{cases}$$

Determina per quali valori reali di a è continua in **R**, quindi traccia il grafico delle funzioni corrispondenti ai valori di a trovati. $[a=-6 \vee a=2]$

58 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq a \\ 6-x & x\leq a \end{cases}, \text{ con } a\geq 0$$

Determina a in modo che sia continua in **R**, quindi traccia il grafico della funzione f corrispondente al valore di a trovato. $[a=4]$

2. Punti singolari e loro classificazione

Teoria p. 194

Esercizi introduttivi

59 **Vero o falso?**

a. se una funzione ha una singolarità nel punto $x = 0$, allora $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ è diverso da $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ V F

b. se una funzione ha una singolarità in un punto $x = x_0$, può sempre essere ridefinita in $x = x_0$, in modo da renderla continua in $x = x_0$ V F

c. se la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto per la funzione f, allora il punto x_0 è un punto di singolarità di seconda specie per la funzione V F

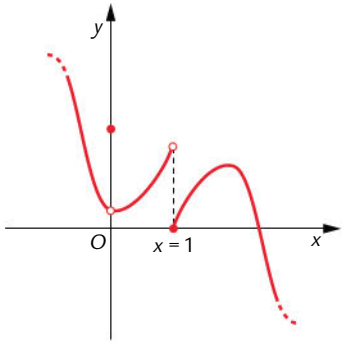
d. sapendo che $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, si può affermare che per $x = 0$ la funzione f presenta un punto di singolarità eliminabile V F

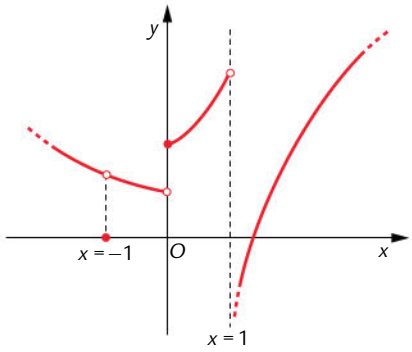
e. sapendo che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ e che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, si può affermare che per $x = 0$ la funzione f presenta un punto di salto V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

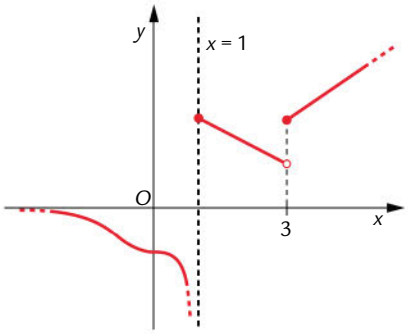
Interpretazione di grafici

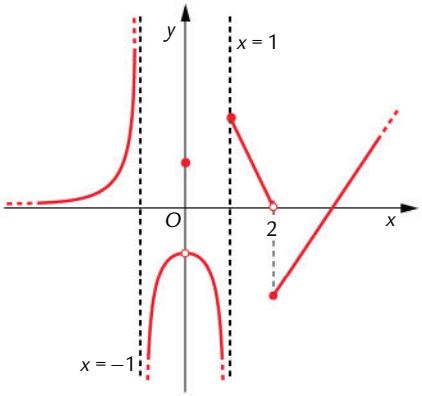
60 Classifica i punti singolari delle funzioni che hanno i grafici riportati nelle seguenti figure.



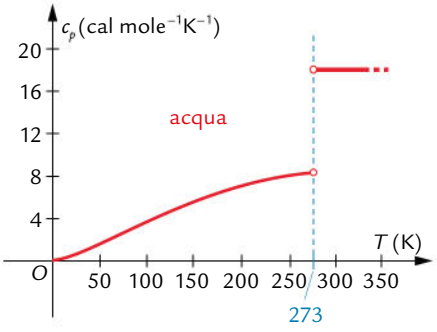


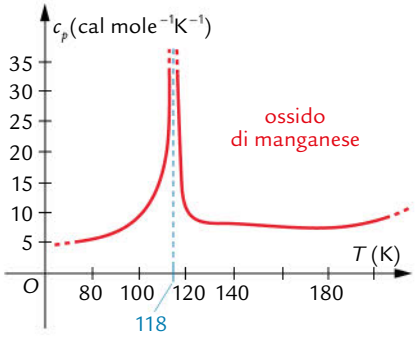
61 Classifica i punti singolari delle funzioni che hanno i grafici riportati nelle seguenti figure.



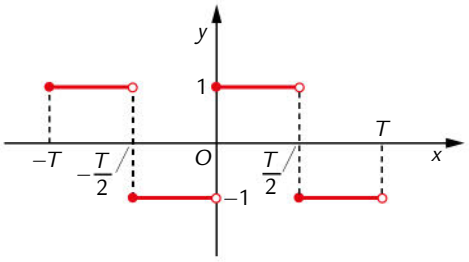


62 **Matematica e chimica** Nelle due figure seguenti sono rappresentati i grafici delle funzioni che esprimono i calori specifici, a pressione costante, di alcune sostanze in funzione della temperatura.
Individua i punti singolari e la loro natura. In generale, in un grafico che rappresenta il calore specifico di una sostanza in funzione della temperatura, di che cosa è indice un punto di singolarità?

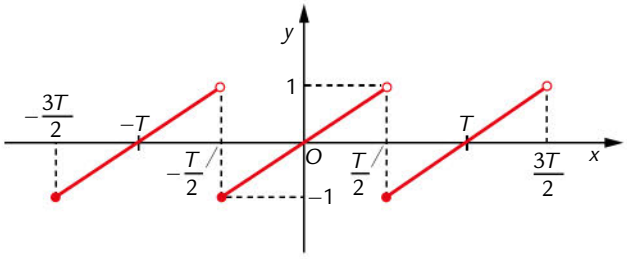




63 **Matematica ed elettronica** Nelle figure seguenti sono riportati i grafici di due funzioni periodiche di periodo T che si incontrano di frequente nello studio dell'elettronica, in quanto rappresentano la forma di alcuni segnali: la cosiddetta onda quadra e l'onda a dente di sega. Dall'analisi del grafico di ciascuna delle due funzioni, individua i loro punti singolari, specificandone il tipo.



Onda quadra



Onda a dente di sega

64 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione che possieda le seguenti caratteristiche:
a. presenta in $x = 0$ un punto di singolarità eliminabile e nel punto $x = 2$ un punto di salto;
b. presenta in $x = 0$ un punto di salto ma è continua da destra in $x = 0$ e presenta un punto di singolarità di seconda specie in $x = 3$;
c. presenta in $x = 0$ un punto di salto ma è continua da sinistra per $x = 0$ e presenta un punto di singolarità di seconda specie in $x = 3$.

Classificazione dei punti di singolarità

Traccia il grafico delle seguenti funzioni e individua gli eventuali punti di singolarità, classificandoli. Nel caso di un punto di salto, specifica l'entità del salto.

65 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \le 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ [$x = 1$: salto = 2]

66 $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x \le 0 \\ \dfrac{4}{x} & x > 0 \end{cases}$ [$x = 0$: seconda specie]

67 $f(x) = \begin{cases} -2 & x < -2 \\ x + 2 & -2 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ [$x = -2$: salto = 2; $x = 0$: seconda specie]

68 $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 + 2 & 0 < x < 2 \\ 2 & x \ge 2 \end{cases}$ [$x = 0$: eliminabile; $x = 2$: salto = 4]

69 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ x - 2 & 0 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$ [$x = 0$: seconda specie; $x = 5$: salto = 2]

70 $f(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ -2 & x = 0 \\ x^2 & 0 < x \le 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$ [$x = 0$: eliminabile; $x = 2$: salto = 2]

71 $f(x) = \begin{cases} -3 & x < -3 \\ -\sqrt{9 - x^2} & -3 \le x \le 3 \\ \dfrac{1}{x - 3} & x > 3 \end{cases}$ [$x = -3$: salto = 3; $x = 3$: seconda specie]

72 $f(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & -2 \le x \le 2 \\ x & x > 2 \end{cases}$ [$x = 2$: salto = 2]

73 **ESERCIZIO SVOLTO**

Individuiamo e classifichiamo i punti singolari della funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

- La funzione è definita e continua per $x \neq \pm 1$. Per classificare i punti singolari, studiamo il comportamento della funzione in un intorno di -1 e in un intorno di 1.
- In un intorno di -1 si ha: $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = +\infty$

  quindi $x = -1$ è un punto singolare di *seconda specie* (e la retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale).
- In un intorno di 1 si ha: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \dfrac{3}{2}$

  forma indeterminata del tipo 0/0

  quindi $x = 1$ è un punto singolare *eliminabile*.

Individua e classifica gli eventuali punti singolari delle seguenti funzioni algebriche.

74 $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-2}$ [$x=2$: eliminabile]

75 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ [$x=-3$: eliminabile]

76 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$ [$x=2$: eliminabile; $x=-2$: seconda specie]

77 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$ [$x=1$: eliminabile; $x=-4$: seconda specie]

78 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}$ [$x=-4$: seconda specie; $x=1$: eliminabile]

79 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-3x-4}$ [$x=-1$, $x=4$: seconda specie]

80 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x-1)(x^2-3x+2)}$ [$x=1$: seconda specie; $x=2$: eliminabile]

81 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$ [$x=1$: eliminabile; $x=-1$: seconda specie]

82 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-2x^2+2x-1}$ [$x=1$: eliminabile]

83 $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^3-2x^2-x+2}$ [$x=2$: eliminabile; $x=\pm1$: seconda specie]

84 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$ [$x=3$: eliminabile]

85 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}$ [$x=2$: seconda specie]

86 $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ [$x=3$: eliminabile]

---

87 Stabilisci se la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{|x-4|}$ può essere prolungata con continuità nel punto $x=4$.

88 Verifica che la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$ può essere prolungata con continuità nel punto $x=4$ e definisci il prolungamento continuo.

89 **ESERCIZIO SVOLTO**

Individuiamo e classifichiamo i punti singolari della funzione $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

La funzione è definita e continua purché sia $x>0$ e $\ln x\neq 0$, cioè per $x>0\wedge x\neq 1$.
Il suo dominio è quindi $(0,1)\cup(1,+\infty)$ e i punti singolari sono $x=0$ e $x=1$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$, quindi il punto $x=0$ è una singolarità *eliminabile*.
  $\to\dfrac{1}{-\infty}$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\ln x}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\ln x}=+\infty$, quindi il punto $x=1$ è una singolarità di *seconda specie*.
  $\to\dfrac{1}{0^-}$ $\to\dfrac{1}{0^+}$

Individua e classifica gli eventuali punti singolari delle seguenti funzioni trascendenti.

90 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ [$x=0$: eliminabile; $x=1$: seconda specie]

91 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-1}$ [$x=0$: eliminabile; $x=e$: seconda specie]

92 $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$ [$x=3$: seconda specie]

93 $f(x)=e^{\frac{x-1}{x^2-4}}$ [$x=\pm2$: seconda specie]

94 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\tan x}$ $\left[x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\text{: seconda specie}\right]$

95 $f(x)=\dfrac{\tan x+1}{\cos 2x}$ $\left[x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \text{ e } x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\text{: seconda specie; } x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\text{: eliminabili}\right]$

96 $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{\sin x-\cos x}$ $\left[x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\text{: eliminabili; } x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\text{: seconda specie}\right]$

97 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ [$x=0$: salto]

98 $f(x)=2^{\frac{1}{\ln x}}$ [$x=0$: eliminabile; $x=1$: seconda specie]

99 $f(x)=\dfrac{1}{\log_2(1-\cos x)}$ $\left[x=2k\pi\text{: eliminabili; } x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\text{: seconda specie}\right]$

100 $f(x)=\ln(\arctan x)$ [$x=0$: seconda specie]

101 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{\sin x}}}$ [$x=k\pi$: salti]

102 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{(x-1)^2}$ [$x=1$: eliminabile]

103 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x^3-x^2}$ [$x=0$: eliminabile; $x=1$: salto]

104 **ESERCIZIO GUIDATO**

Individua e classifica i punti singolari della funzione $f(x)=\dfrac{|x^2-1|\,(x^2-x)}{x^2-1}$.

- Osserva che la funzione è definita e continua per $x\neq\pm1$.
- Studia il comportamento della funzione in un intorno di $x=-1$.
  Osserva che, per il calcolo del limite per $x\to-1^-$, puoi supporre $x<-1$; quindi $|x^2-1|=x^2-1$, mentre per il calcolo del limite per $x\to-1^+$ puoi supporre $-1<x<1$, quindi $|x^2-1|=1-x^2$:

  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x^2-1)(x^2-x)}{x^2-1}=$ ..... $\qquad\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{(1-x^2)(x^2-x)}{x^2-1}=$ .....

  Poiché $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, puoi concludere che la funzione presenta in $x=-1$ un punto di .....
- Studia il comportamento della funzione in un intorno di $x=1$.
  Svolgendo considerazioni simili al caso precedente per quanto concerne il valore assoluto, si ha:

  $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(1-x^2)(x^2-x)}{x^2-1}=$ ..... $\qquad\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x^2-1)(x^2-x)}{x^2-1}=$ .....

  Dunque per $x=1$ la funzione presenta un punto di singolarità .....

Individua e classifica gli eventuali punti singolari delle seguenti funzioni contenenti termini in valore assoluto.

105 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ [$x=-1$: seconda specie; $x=1$: salto]

106 $f(x)=\dfrac{|x-3|\,(x-3)}{x-3}$ [$x=3$: eliminabile]

107 $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x^2-9}$ [$x=-3$: di seconda specie; $x=3$: salto]

108 $f(x)=\dfrac{|x-3|}{(x-3)^2}$ [$x=3$: di seconda specie]

109 $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x^2-x}$ [$x=0$: seconda specie; $x=1$: salto]

110 $f(x)=\dfrac{|x|-1}{x^3-3x^2-4x}$ [$x=0$, $x=4$: seconda specie; $x=-1$: eliminabile]

111 $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x^3-3x^2-4x}$ [$x=0$, $x=4$: seconda specie; $x=-1$: salto]

112 $f(x)=\log\dfrac{|x-1|}{x^2+1}$ [$x=1$: seconda specie]

113 $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{|\cos x-1|}$ [$x=2k\pi$: eliminabili]

114 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|2x^2-\pi x|}$ [$x=0$: salto; $x=\dfrac{\pi}{2}$: seconda specie]

115 $f(x)=\arctan(\ln|x|)$ [$x=0$: eliminabile]

116 $f(x)=\dfrac{1}{1-\ln|\sin x|}$ [$x=k\pi$: eliminabili]

117 **ESERCIZIO GUIDATO**

Individua e classifica gli eventuali punti singolari delle seguenti funzioni:

a. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ **b.** $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & x\leq 0\\ \dfrac{\sin x}{x} & 0<x<1\\ x+2 & x\geq 1\end{cases}$

a. L'unico punto dove la funzione potrebbe non essere continua è $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=$ ..... e $f(0)=$ .....

quindi $x=0$ è un punto di singolarità .....

b. Gli unici punti dove la funzione potrebbe non essere continua sono $x=0$ e $x=1$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-x+1)=1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$ e $f(0)=1$

  quindi la funzione f è ..... in $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin x}{x}=$ ..... $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x+2=$ .....

  quindi $x=1$ è un punto di .....

Individua e classifica gli eventuali punti singolari delle seguenti funzioni definite per casi.

118 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x<1\\ 2x & x\geq 1\end{cases}$ [$x=1$: salto]

119 $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & x<1\\ x^2+3x-3 & x\geq 1\end{cases}$ [Continua in R]

120 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & x<2\\ x-2 & x\geq 2\end{cases}$ [$x=2$: seconda specie]

121 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4} & x<-2\\ x+2 & x\geq -2\end{cases}$ [$x=-2$: salto]

122 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & x\leq 1\\ \sin(\pi x) & x>1\end{cases}$ [Continua in R]

123 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & x<-1\\ \dfrac{\cos x-1}{x^2} & -1\leq x<0\\ -\dfrac{1}{2} & x>0\end{cases}$ [$x=-1$: salto; $x=0$: eliminabile]

124 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^4}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ [Seconda specie]

125 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^4}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ [Continua anche in 0]

126 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x<1\\ x-1 & x\geq 1\end{cases}$ [Continua in R]

127 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}} & x<1 \\ x-1 & x\geq 1 \end{cases}$ [$x=1$: seconda specie]

128 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & x>0 \end{cases}$ [$x=0$: eliminabile]

129 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & 1<x\leq 2 \\ x+4 & x>2 \end{cases}$ [$x=1$: eliminabile; $x=2$: salto]

130 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ \arctan\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2} & 0<x<1 \\ \arctan x & x\geq 1 \end{cases}$ [$x=0$: eliminabile; $x=1$: salto]

131 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x<0 \\ e^{\frac{1}{\ln x}} & x>0 \end{cases}$ [$x=0$: eliminabile, $x=1$: seconda specie]

132 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x<0 \\ 1 & x=0 \\ e^{\frac{1}{\ln x}} & x>0 \end{cases}$ [$x=1$: seconda specie; continua in $x=0$]

Realtà e modelli



133 **Costo di un parcheggio**. Un parcheggio applica le seguenti tariffe giornaliere: 2 euro per ogni ora o frazione di ora fino a un massimo di 3 ore; 1 euro per ogni ora o frazione di ora per le ore successive alla terza fino a un massimo di 6 ore; tariffa fissa di 10 euro al giorno per una sosta di oltre 6 ore. Traccia il grafico della funzione che esprime il costo giornaliero (in euro), in funzione del tempo t di sosta (in ore); individua gli eventuali punti di discontinuità della funzione e classificali.

134 **Flat tax**. Considera un sistema di tassazione del reddito nel quale chi ha un reddito lordo fino a 80 000 euro all'anno paga il 15%, mentre chi ha un reddito superiore paga il 20%. Indica con x il reddito (lordo) di un contribuente e considera la funzione che esprime il reddito netto (cioè detratto dell'imposta da pagare) in funzione di x. Scrivi l'espressione analitica della funzione e rappresentala. Stabilisci se è continua e se è strettamente crescente. Se non è continua, classifica eventuali punti di discontinuità e interpretane il significato in relazione al problema.

135 **Prezzo di una merce**. Una merce viene venduta al prezzo di 1,5 euro al kg per ordinativi fino a 5 kg; per ogni kg eccedente i 5 kg il prezzo al kg viene scontato del 20%. Gli ordinativi possono essere al massimo di 10 kg e prevedono un ulteriore costo di 20 euro per le spese di spedizione per ordinativi fino a 5 kg e un costo di 40 euro per ordinativi compresi tra i 5 kg e i 10 kg. Scrivi l'espressione analitica della funzione che esprime il costo complessivo di un ordine di x kg di merce. Stabilisci se è continua e, in caso contrario, studia i punti di discontinuità.



136 **Spedizioni**. Un corriere fa pagare un costo fisso di 20 euro per la spedizione di pacchi fino a 2 kg. Per ogni kg o frazione di kg aggiuntivo, è previsto un ulteriore costo di 5 euro. Considera la funzione che esprime il costo per la spedizione del pacco (in euro), in funzione del peso x del pacco (in kg). Traccia il grafico di tale funzione per $0\leq x\leq 5$; individua inoltre gli eventuali punti di discontinuità della funzione e classificali.

3. Proprietà delle funzioni continue

Teoria p. 196

Teorema degli zeri

137 **Inventa tu.** L'enunciato «Se f è una funzione continua in $[a, b]$ e se ammette uno zero nell'intervallo (a, b), allora $f(a)$ e $f(b)$ sono discordi» è *falso*. Mostralo tracciando il grafico di una funzione che costituisca un controesempio.

138 **Test.** In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x)=3\ln x-x$ soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri?

A $[0, 1]$ B $[1, 2]$ C $[2, 3]$ D $[3, 4]$

139 **Vero o falso?**

a. sia f una funzione continua nell'intervallo $[-1, 1]$; se $f(-1) > 0$ e $f(1) > 0$, allora f non può avere zeri appartenenti all'intervallo $[-1, 1]$ V F

b. se f è una funzione definita nell'intervallo $[-1, 1]$ ed è tale che $f(-1) > 0$ e $f(1) < 0$, allora f ha almeno uno zero appartenente all'intervallo $[-1, 1]$ V F

c. sia f una funzione continua nell'intervallo $[-1, 1]$; se $f(-1) < 0$ e $f(1) > 0$, allora f ha almeno uno zero appartenente all'intervallo $[-1, 1]$ V F

d. se f è una funzione continua e strettamente crescente nell'intervallo $[-1, 1]$ ed è tale che $f(-1) < 0$ e $f(1) > 0$, allora f ha un unico zero appartenente all'intervallo $[-1, 1]$ V F

e. se f è una funzione continua nell'intervallo $[-1, 1]$ e tale che $f(-1) > 0$ e $f(1) < 0$, allora f ha un unico zero appartenente all'intervallo $[-1, 1]$ V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

140 **ESERCIZIO SVOLTO**

Data la funzione $f(x) = x - 2\ln|x|$, in quale dei seguenti intervalli è possibile applicare il teorema degli zeri?

a. $[-1, 0]$ **b.** $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ **c.** $[1, 2]$

a. Nell'intervallo $[-1, 0]$ la funzione data **non** è continua, perché non è definita in $x = 0$. **Non** è quindi possibile applicare il teorema degli zeri alla funzione in questo intervallo.

b. Nell'intervallo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ la funzione è continua; inoltre $f(-1) = -1$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}89$. Poiché la funzione è *continua* nell'intervallo dato e assume valori *discordi* agli estremi, possiamo applicare il teorema degli zeri e affermare in base a esso che la funzione deve avere almeno uno zero appartenente all'intervallo $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

c. Nell'intervallo $[1, 2]$ la funzione è continua ma **non** assume valori discordi agli estremi; infatti $f(1) = 1$ e $f(2) \simeq 0{,}61$, quindi non possiamo applicare il teorema degli zeri.

Stabilisci se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema degli zeri nell'intervallo indicato, motivando adeguatamente la risposta.

141 **Videolezione** $f(x) = x^3 - x + 1$ $[0, 2]$

142 $f(x) = x^4 - x - 1$ $[1, 2]$

143 **E se?** $f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{x^3 - 1} + x^4$ $[-1, 2]$

▶ Cambia la risposta considerando l'intervallo $[2, 4]$?

144 **Videolezione** $f(x) = x + \log_2 x$ $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

145 $f(x) = 2x + \log_2 x$ $[1, 4]$

146 $f(x) = e^{\frac{x}{1-x}} - x + 1$ $[1, 2]$

147 **E se?** $f(x) = \sin x - \cos x$ $[0, \pi]$

▶ Cambia la risposta considerando l'intervallo $[-\pi, \pi]$?

148 $f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{|x|}} - 2x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $[-1, 1]$

149 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} - x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $[-1, 1]$

150 Dopo avere verificato che la funzione $f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri nell'intervallo $\left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$, mostra che essa ammette *infiniti* zeri in $\left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

151 Dimostra, utilizzando il teorema degli zeri, che l'equazione $\ln x = e^{-x}$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $(1, 2)$.

152 Dimostra, utilizzando il teorema degli zeri, che l'equazione $x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5 = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $(2, 3)$.

Teorema di Weierstrass

153 **Vero o falso?**

a. se f è una funzione continua nell'intervallo $[0, 2]$, allora ammette certamente massimo e minimo assoluti in tale intervallo V F

b. se f è una funzione definita nell'intervallo $[0, 2]$, ma discontinua in qualche punto di questo intervallo, allora certamente *non* ammette massimo e minimo assoluti in tale intervallo V F

c. se f è una funzione continua in un sottoinsieme $D \subseteq \mathbf{R}$, allora certamente f ammette massimo e minimo assoluti in D V F

d. se f è una funzione continua nell'insieme $[0, 2] \cup [4, 5]$, allora ammette certamente massimo e minimo assoluti in questo insieme V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

154 **Inventa tu.** L'enunciato *inverso* del teorema di Weierstrass «Se una funzione f ammette massimo e minimo nell'intervallo $[a, b]$ allora è continua in $[a, b]$» è *falso*. Mostralo tracciando il grafico di una funzione che costituisca un controesempio.

155 **ESERCIZIO SVOLTO**

Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^3+1}$, in quale dei seguenti intervalli è possibile applicare a essa il teorema di Weierstrass?

a. $[-1, 0]$ **b.** $[-3, -2]$ **c.** $(1, 2)$ **d.** $[1, +\infty)$

a. La funzione non è continua in $[-1, 0]$, perché non è definita per $x = -1$. Non è quindi possibile applicare il teorema di Weierstrass.
b. La funzione è continua in $\mathbf{R} - \{-1\}$, quindi in particolare in $[-3, -2]$: è possibile perciò applicare il teorema di Weierstrass e affermare che la funzione ammette massimo e minimo nell'intervallo $[-3, -2]$.
c. L'intervallo $(1, 2)$ non è chiuso. Non è possibile quindi applicare il teorema di Weierstrass.
d. L'intervallo $[1, +\infty)$ non è limitato, quindi il teorema di Weierstrass non è applicabile.

Stabilisci se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo indicato, motivando la risposta.

156 $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$

157 $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-2}$ $[0, 1]$

158 $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-2}$ $[1, 2]$

159 $f(x) = \dfrac{1}{2-x^2}$ $[1, 2]$

160 $f(x) = x^5 + x^4 + \sin x$ $[10, 20]$

161 $f(x) = \dfrac{x^5-1}{x^4-x^2}$ $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$

162 E se? $f(x) = \dfrac{x}{x^4-x^2-2}$ $[0, 1]$

Cambia la risposta considerando l'intervallo $[1, 2]$?

163 Videolezione $f(x) = \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$ $[1, 2]$

164 $f(x) = \dfrac{1}{3-\sqrt{x}}$ $[3, 9]$

165 $f(x) = \log|\sin x|$ $[1, 4]$

166 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x(2\sin x - \sqrt{2})}$ $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

167 $f(x) = \begin{cases} 2 & x \le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x > 1 \end{cases}$ $[1, 2]$

168 $f(x) = \begin{cases} 4 & x \le 4 \\ \dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}} & x > 4 \end{cases}$ $[2, 6]$

169 Traccia il grafico della funzione $f(x) = |e^x - 1|$ e determina il minimo e il massimo assoluto nell'intervallo $[-2, 2]$. L'esistenza del massimo e del minimo assoluti era prevedibile in base al teorema di Weierstrass?

Teorema dei valori intermedi

170 **Vero o falso?**

a. se una funzione f è continua nell'intervallo $[0, 2]$ e ammette minimo uguale a 0 e massimo uguale a 4, allora esiste certamente $x_0 \in [0, 2]$ tale che $f(x_0) = 3$ V F

b. se una funzione f è definita nell'intervallo $[-2, 2]$ e ammette minimo uguale a 0 e massimo uguale a 4, allora esiste certamente $x_0 \in [0, 2]$ tale che $f(x_0) = 1$ V F

c. se una funzione f è definita nell'intervallo $[0, 2]$ e ammette minimo uguale a 0 e massimo uguale a 4, ma è discontinua in qualche punto dell'intervallo $[0, 2]$, allora potrebbe non esistere alcun $x_0 \in [0, 2]$ tale che $f(x_0) = 3$ V F

d. se una funzione f è continua nell'intervallo $[0, 2]$ e ammette minimo uguale a 0 e massimo uguale a 3, allora, considerata la funzione g definita da $g(x) = e^{f(x)}$, esiste $x_0 \in [0, 2]$ tale che $g(x_0) = 8$ V F

[3 affermazioni vere e 1 falsa]

171 Utilizzando il teorema dei valori intermedi, giustifica perché la funzione $f(x) = x^3 + 2x$ deve assumere almeno una volta il valore 11 per qualche $x \in [1, 2]$.

172 Utilizzando il teorema dei valori intermedi, giustifica perché la funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$ deve assumere almeno una volta il valore $\frac{4}{5}$ per qualche $x \in [0, 1]$.

173 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione, avente come dominio l'intervallo $[-2, 2]$ e tale che:

a. abbia un punto di salto in $x = 0$ e **non** soddisfi la tesi del teorema dei valori intermedi nell'intervallo $[-2, 2]$;

b. abbia un punto di salto in $x = 0$ e tuttavia soddisfi la tesi del teorema dei valori intermedi nell'intervallo $[-2, 2]$.

Traccia il grafico delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato e verifica che ammettono in tale intervallo minimo e massimo assoluti. Stabilisci quindi se assumono tutti i valori possibili compresi tra il minimo e il massimo assoluti e, in caso affermativo, se ciò era prevedibile in base al teorema dei valori intermedi.

174 $f(x) = x^3$ $[-1, 2]$

175 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ $[-1, 2]$

176 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ $[-1, 1]$

177 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ e^x - 1 & x < 0 \end{cases}$ $[-3, 3]$

178 $f(x) = |x - 2| - x$ $[0, +\infty)$

179 $f(x) = \log_2 |x - 1|$ $[2, 3]$

Problemi dalla realtà

180 **ESERCIZIO SVOLTO**

Paolo esce di casa alle 15 e si reca a fare una passeggiata. Rientra a casa alle 16. Dimostriamo che, tra le 15:30 e le 16, c'è un istante in cui Paolo si trova a una distanza da casa uguale a quella in cui si trovava 30 minuti prima.



Comprendiamo il problema e formalizziamolo

Sia $d(t)$ la funzione che esprime la distanza di Paolo da casa in funzione del tempo t, misurato in minuti, trascorso dalle 15. Dal momento che Paolo non può scomparire da un luogo e riapparire in un altro, possiamo assumere che la funzione $d(t)$ sia *continua*. Dobbiamo dimostrare che esiste $t_0 \in (30, 60)$, tale che $d(t_0) = d(t_0 - 30)$. Una tale t_0 è una soluzione dell'equazione $d(t) - d(t - 30) = 0$, perciò consideriamo la funzione $f(t) = d(t) - d(t - 30)$ e cerchiamo di applicare a essa il *teorema degli zeri* nell'intervallo $[30, 60]$.

Svolgiamo la dimostrazione

La funzione $f(t) = d(t) - d(t - 30)$ è continua, in quanto differenza di funzioni continue. Risulta inoltre:

$$f(30) = d(30) - \underbrace{d(0)}_{0} = d(30) > 0 \qquad f(60) = \underbrace{d(60)}_{0} - d(30) = -d(30) < 0$$

Pertanto, per il teorema degli zeri, deve esistere $t_0 \in (30, 60)$ per cui $f(t_0) = 0$, cioè tale che $d(t_0) = d(t_0 - 30)$. Ciò conclude la dimostrazione.

Realtà e modelli

181 **Un investimento.** Maria investe alla fine di ogni anno, per 5 anni, 1000 euro al tasso annuo composto uguale a i. Il montante generato dal capitale complessivamente investito all'atto dell'ultimo versamento effettuato è dato dalla formula:

$$M = 1000\frac{(1+i)^5-1}{i}$$

Dimostra che esiste un tasso di interesse i, compreso tra il 4% e il 5%, che consente di ottenere un montante M uguale a 5500 euro.

182 **Gita al lago.** Barbara lascia la sua auto in un parcheggio alle 10 del mattino del venerdì e compie una escursione, lungo un sentiero pianeggiante, per raggiungere un lago. Il percorso dal parcheggio al lago è lungo 8 km. Barbara raggiunge il lago alle 12 del venerdì, passa lì l'intera giornata e si ferma a dormire presso un rifugio. Alle 10 del mattino del sabato riparte e, percorrendo lo stesso sentiero, alle 12 ritorna al parcheggio. Dimostra che esiste un punto lungo il sentiero per il quale Barbara passa esattamente alla stessa ora, sia all'andata sia al ritorno.
(*Suggerimento*: indica con $f(t)$ e $g(t)$ le funzioni che esprimono la distanza, in kilometri, di Barbara dal parcheggio, calcolata lungo il sentiero, t ore dopo le 10 del mattino rispettivamente il venerdì e il sabato; considera quindi la funzione $z(t) = f(t) - g(t)$ e applica a essa il teorema dei valori intermedi in un opportuno intervallo.)



183 **Gita in montagna.** Alle 8 di mattina di sabato Alessandro inizia un'escursione in montagna, per raggiungere la vetta di un monte. Giunto in vetta, pernotta al rifugio, quindi la domenica mattina, alle 8, inizia la discesa lungo lo stesso sentiero percorso all'andata, diretto al luogo di partenza del giorno prima. Dimostra che esiste un punto lungo il sentiero per il quale Alessandro passa esattamente alla stessa ora, sia all'andata sia al ritorno. (*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente.)



4. Asintoti e grafico probabile di una funzione

Teoria p. 199

Esercizi introduttivi

184 **Vero o falso?**

a. se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, essendo $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi aventi lo stesso grado, allora la funzione f ammette certamente asintoto orizzontale V F

b. se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, essendo $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi e x_0 è uno zero di $P(x)$, allora la retta di equazione $x = x_0$ è certamente un asintoto verticale della funzione f V F

c. se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, essendo $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi rispettivamente di grado 5 e di grado 4, allora la funzione f ammette certamente asintoto obliquo V F

d. se una funzione ammette asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, allora non può ammettere asintoto obliquo per $x \to +\infty$ V F

e. se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ esiste finito, allora la funzione f ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$ V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

Test

185 Una funzione ha come dominio $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Per determinare gli eventuali asintoti orizzontali occorre calcolare:

A soltanto il limite della funzione per $x \to -1^-$
B soltanto il limite della funzione per $x \to 1^+$
C i limiti della funzione sia per $x \to -1^-$ sia per $x \to 1^+$
D i limiti della funzione per $x \to \pm\infty$

186 Una funzione ha come dominio $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Per determinare gli eventuali asintoti verticali occorre calcolare:

A soltanto il limite della funzione per $x \to -1-$
B soltanto il limite della funzione per $x \to 1^+$
C i limiti della funzione sia per $x \to -1^-$ sia per $x \to 1^+$
D i limiti della funzione per $x \to \pm\infty$

187 Una funzione è tale che $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$. Allora possiamo affermare che:

A $x = 3$ è un asintoto verticale
B $y = 3$ è un asintoto orizzontale
C non esistono asintoti verticali
D non esistono asintoti orizzontali

188 Una funzione è tale che $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty$. Allora possiamo affermare che:

A $x = 3$ è un asintoto verticale
B $y = 3$ è un asintoto orizzontale
C non esistono asintoti verticali
D non esistono asintoti orizzontali

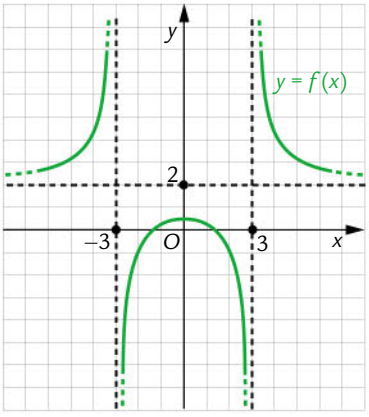
189 Una funzione è tale che $\lim\limits_{x\to3} f(x) = 4$. Allora possiamo affermare che:

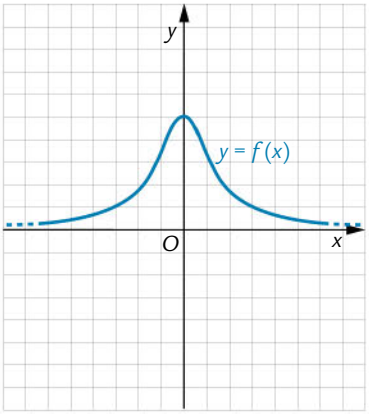
A $x = 3$ è un asintoto verticale
B $y = 4$ è un asintoto orizzontale
C non esistono asintoti verticali
D se $f(3) = 4$, la funzione è continua in $x = 3$

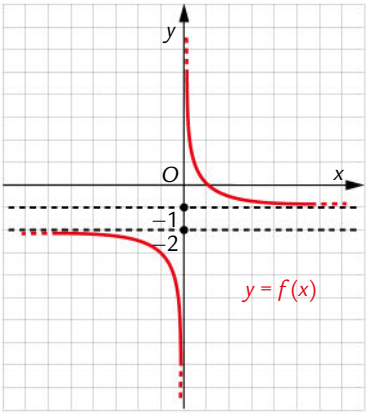
190 Una funzione è tale che $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$. Allora possiamo affermare che:

A $y = x$ è un asintoto obliquo
B $y = 2x$ è un asintoto obliquo
C $y = 2 + x$ è un asintoto obliquo
D se esiste asintoto obliquo, è parallelo alla retta di equazione $y = 2x$

191 **Interpretazione di grafici** In ciascuna delle seguenti figure sono rappresentati il grafico di una funzione e i relativi asintoti. Scrivi le equazioni degli asintoti e i limiti che li definiscono.







La ricerca degli asintoti di una funzione

192 **ESERCIZIO GUIDATO**

Determina gli eventuali asintoti della funzione $y = f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$.

- Verifica che il dominio della funzione è l'insieme $D = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$, che può essere scritto come unione di intervalli nella forma: $(-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$
- Per determinare gli eventuali asintoti *verticali* devi calcolare i limiti in corrispondenza dei *punti di singolarità* della funzione, quindi in questo caso devi calcolare i limiti di f per $x \to -1$ e per $x \to 3$:

$\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-3)} = \ldots\ldots \Rightarrow x = -1$ è un punto di singolarità .....

$\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3} = \ldots\ldots \Rightarrow x = 3$ è un asintoto verticale

- Per determinare gli eventuali asintoti *orizzontali* devi calcolare i limiti agli estremi *infiniti* degli intervalli che costituiscono il dominio, quindi per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$. Calcolando questi limiti troverai che *non* ci sono asintoti orizzontali. Potrebbe quindi esistere un asintoto obliquo.
- Controlla se esistono asintoti *obliqui*:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x(x^2-2x-3)} = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow m = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1-x(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots}{x^2-2x-3} = \ldots\ldots \Rightarrow q = \ldots\ldots$$

Pertanto la retta di equazione ..... è un asintoto obliquo.

- In definitiva, gli asintoti della funzione sono le rette di equazioni:

$x = \ldots\ldots$ e $y = \ldots\ldots$

Determina gli asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) delle seguenti funzioni algebriche razionali.

193 $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ $[x=-1, x=1; y=0]$

194 $y = \dfrac{x+5}{2x^2-4x}$ $[x=0, x=2; y=0]$

195 $y = \dfrac{x^2-2}{x^2+2x-4}$ $[x=-1\pm\sqrt{5}; y=1]$

196 $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x+1}$ $[x=\pm 1; y=0]$

197 $y = \dfrac{2x}{4x^2-4x+1}$ $\left[x=\frac{1}{2}; y=0\right]$

198 $y = \dfrac{x^2+3x+1}{x}$ $[x=0; y=x+3]$

199 $y = \dfrac{2x^2+3x}{x+5}$ $[x=-5; y=2x-7]$

200 $y = \dfrac{x^2+4}{2x-3}$ $\left[x=\frac{3}{2}; y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right]$

201 $y = \dfrac{6x^2+1}{2x^2-4}$ $[x=\pm\sqrt{2}; y=3]$

202 $y = \dfrac{8x^2-1}{8-2x^2}$ $[x=\pm 2; y=-4]$

203 $y = \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{9x}{3x-1}$ $\left[x=-1, x=\frac{1}{3}; y=-1\right]$

204 $y = \dfrac{1}{x^3-9x}$ $[x=0, x=\pm 3; y=0]$

205 $y = \dfrac{x^3+8}{x^2-9}$ $[x=\pm 3; y=x]$

206 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+3x-10}$ $[x=2, x=-5; y=1]$

207 $y = \dfrac{4-x^2}{2x^2+x-1}$ $\left[x=-1, x=\frac{1}{2}; y=-\frac{1}{2}\right]$

208 $y = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ $[x=1; y=1]$

209 $y = \dfrac{2x^4+1}{x^3-x}$ $[x=-1, x=0, x=1; y=2x]$

210 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ $[y=1]$

211 $y = \dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ $[x=3, x=1; y=x-2]$

212 $y = \dfrac{3x-1}{4x^2-3x}$ $\left[x=0, x=\frac{3}{4}; y=0\right]$

213 $y = \dfrac{3x}{x^2-3} - \dfrac{4x}{2x-1}$ $\left[x=\pm\sqrt{3}, x=\frac{1}{2}; y=-2\right]$

214 $y = \dfrac{x^3+4}{x^3-3x}$ $\left[x=0, x=\pm\sqrt{3}; y=1\right]$

215 $y = \dfrac{4x^4}{x^3-4x^2}$ $[x=4; y=4x+16]$

216 $y = \dfrac{x^3}{3x^2+7x-6}$ $\left[x=-3, x=\frac{2}{3}; y=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}\right]$

217 $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}$ $[y=0]$

218 $y = \dfrac{x^2-4}{2x^2+6x-20}$ $\left[x=-5; y=\frac{1}{2}\right]$

219 $y = \dfrac{x}{2x^2+3x+1} - \dfrac{6x^2}{3x^2+2x+1}$ $\left[x=-\frac{1}{2}, x=-1; y=-2\right]$

220 $y=\dfrac{x^3+3x^2}{x^4-81}$ $[x=3;\ y=0]$

221 $y=\dfrac{2x^2+3}{x^4-4x^2+3}$ $[x=\pm\sqrt{3}, x=\pm1;\ y=0]$

222 $y=\dfrac{x^3}{2x^3-8x^2+6x-24}$ $\left[x=4;\ y=\dfrac{1}{2}\right]$

223 $y=\dfrac{x^5}{4x^4-1}$ $\left[x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ y=\dfrac{1}{4}x\right]$

224 $y=\dfrac{x^2}{|x|-1}$ $[x=\pm1,\ y=x+1$ (destro); $y=-x+1$ (sinistro)$]$

225 $y=\dfrac{3x^2}{|x^2-1|-1}$ $[x=\pm\sqrt{2};\ y=3]$

Determina gli asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) delle seguenti funzioni algebriche irrazionali.

226 $y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ $[x=4;\ y=1]$

227 $y=\sqrt{\dfrac{9x-1}{4x-3}}$ $\left[x=\dfrac{3}{4};\ y=\dfrac{3}{2}\right]$

228 $y=\sqrt{4x^2-9}$ $[y=2x$ (destro); $y=-2x$ (sinistro)$]$

229 $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-5}$ $[x=\pm\sqrt{5}]$

230 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{5-x^2}$ $[y=0]$

231 $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $[x=0$ (destro); $y=x$ (destro)$]$

232 $y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ $[x=\pm1;\ y=0$ (destro)$]$

233 $y=\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}$ $[x=\pm2;\ y=0$ (sinistro)$]$

234 $y=\sqrt{\dfrac{25x^2-25}{9-x^2}}$ $[x=\pm3]$

235 $y=\sqrt{\dfrac{25x^2-25}{x^2-9}}$ $[x=\pm3;\ y=5]$

236 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ $[x=-1;\ y=-1$ (sinistro), $y=1$ (destro)$]$

237 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ $[x=\pm1;\ y=-1$ (sinistro), $y=1$ (destro)$]$

238 **Videolezione** $y=\sqrt{x^2+1}-4x$ $[y=-5x$ (sinistro); $y=-3x$ (destro)$]$

239 **Videolezione** $y=x-\sqrt{x^2-4}$ $[y=2x$ (sinistro); $y=0$ (destro)$]$

240 $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2-x^2}$ $[x=\pm\sqrt{2};\ y=1$ (sinistro); $y=-1$ (destro)$]$

241 $y=x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ $\left[x=-1$(sinistro); $y=x-\dfrac{1}{2}\right]$

242 $y=\sqrt[3]{x^3-x}$ $[y=x]$

243 $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}$ $\left[y=x-\dfrac{2}{3}\right]$

244 $y=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+1}}$ $[y=x-1$ (destro), $y=-x+1$ (sinistro)$]$

---

245 **ESERCIZIO SVOLTO**

Determiniamo il dominio e gli asintoti delle seguenti funzioni:

a. $y=f(x)=(x-1)e^{-x}$ **b.** $y=f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln x-1}$

a. La funzione f è definita e continua in **R**, quindi è certamente *priva* di *asintoti verticali*.
Studiamo il comportamento della funzione per $x\to-\infty$ e per $x\to+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{(x-1)e^{-x}}_{(-\infty)(+\infty)}=-\infty \Rightarrow$ **non** c'è asintoto orizzontale sinistro

$\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{(x-1)e^{-x}}_{0\cdot\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\dfrac{x-1}{e^x}}_{\text{gerarchie degli infiniti}}=0\Rightarrow y=0$ (cioè l'asse x) è un *asintoto orizzontale destro*

Resta da controllare se esistono asintoti obliqui per $x\to-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\dfrac{x-1}{x}}_{\to1}\ \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}=+\infty \Rightarrow$ **non** esiste alcun asintoto obliquo sinistro

b. La funzione è definita purché sia $x > 0$ e $\ln x \neq 1$, cioè per $x > 0$ e $x \neq e$. Il dominio è quindi $(0, e) \cup (e, +\infty)$.
Per la ricerca degli eventuali asintoti verticali dobbiamo valutare i limiti di f per $x \to 0^+$ e per $x \to e$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1} \underset{\text{ponendo } \ln x = t}{=} \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{t-1} = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ è un punto di singolarità eliminabile}$$

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \infty \Rightarrow x = e \text{ è un } \textit{asintoto verticale}$$

Per quanto riguarda l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali dobbiamo calcolare il limite di f per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 1} \underset{\text{ponendo } \ln x = t}{=} \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{t-1} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ è un } \textit{asintoto orizzontale}$$

Dal momento che esiste un asintoto orizzontale, **non** si pone il problema della ricerca di asintoti obliqui.

Determina gli asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) delle seguenti funzioni trascendenti.

246 $y = e^{2x} - e^x$ [$y = 0$ (sinistro)]

247 $y = \frac{1}{e^x - 2}$ [$x = \ln 2$; $y = 0$ (destro), $y = -\frac{1}{2}$ (sinistro)]

248 $y = \frac{e^x}{x^2 - 1}$ [$x = \pm 1$; $y = 0$ (sinistro)]

249 $y = \frac{e^{-x} - 1}{x^2 - 2x}$ [$x = 0$, $x = 2$; $y = 0$ (destro)]

250 $y = e^{-2x} + x - 1$ [$y = x - 1$ (destro)]

251 $y = \ln^2 x$ [$x = 0$ (destro)]

252 $y = \ln\left(\frac{x-4}{x^2-1}\right)$ [$x = -1$ (destro), $x = 1$ (sinistro), $x = 4$ (destro)]

253 $y = \ln\left(\frac{x-4}{x-1}\right)$ [$x = 1$ (sinistro), $x = 4$ (destro); $y = 0$]

254 $y = xe^x$ [$y = 0$ (sinistro)]

255 $y = (x^2 - 1)e^{-x}$ [$y = 0$ (destro)]

256 $y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}$ [$x = \pm 1$; $y = 0$ (destro)]

257 $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ [$x = 1$ (destro); $y = e$]

258 $y = x + e^x$ [$y = x$ (sinistro)]

259 **Videolezione** $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ [$x = 0$; $y = -1$ (sinistro), $y = 1$(destro)]

260 $y = \frac{1}{1 - e^{-x}}$ [$x = 0$; $y = 0$ (sinistro), $y = 1$ (destro)]

261 $y = \frac{\ln x}{x}$ [$x = 0$ (destro); $y = 0$ (destro)]

262 $y = \frac{x}{\ln x}$ [$x = 1$]

263 $y = \frac{1}{\ln x - 1}$ [$x = e$; $y = 0$ (destro)]

264 $y = \frac{1 - \ln x}{2 + \ln x}$ [$x = e^{-2}$; $y = -1$ (destro)]

265 $y = e^{\frac{x+1}{x^2-2x}}$ [$x = 0$ (sinistro), $x = 2$ (destro); $y = 1$]

266 $y = xe^{\frac{1}{x}}$ [$x = 0$ (destro); $y = x + 1$]

267 $y = (x - 2)e^{\frac{1}{x}}$ [$x = 0$ (destro); $y = x - 1$]

268 $y = \frac{1}{2 - \log_2(x-1)^2}$ [$x = -1$ $x = 3$; $y = 0$]

269 $y = \log_2 \frac{x}{2x - 1}$ [$x = 0$(sinistro), $x = \frac{1}{2}$ (destro); $y = -1$]

270 $y = \log\left|\frac{x}{x^2 - 4}\right|$ [$x = 0$, $x = \pm 2$]

271 $y = \frac{1}{1 - \tan x}$ [$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$]

272 $y = \frac{1}{\log_2(\cos x) + 1}$ [$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$]

273 $y = \arctan x + x$ [$y = x - \frac{\pi}{2}$ (sinistro), $y = x + \frac{\pi}{2}$ (destro)]

274 $y = \arctan \frac{x-1}{x+1}$ [$y = \frac{\pi}{4}$]

275 $y = \ln(1 + e^{2x})$ [$y = 0$ (sinistro), $y = 2x$ (destro)]

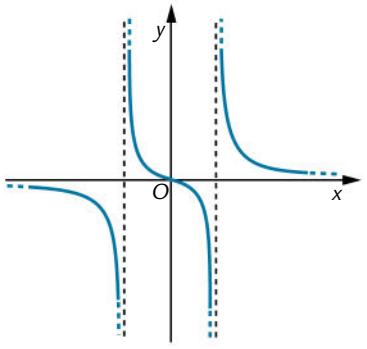
Grafico probabile di funzioni algebriche

Interpretazione di grafici

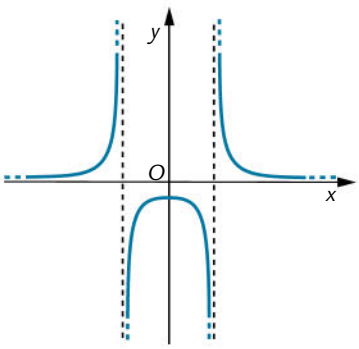
●○○ **276** Sulla base di considerazioni sulle simmetrie e sugli asintoti, associa a ciascuna delle seguenti funzioni il grafico relativo, scelto tra quelli sottostanti.

a. $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ **b.** $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ **c.** $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ **d.** $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

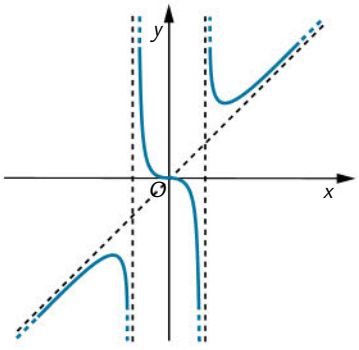
A.



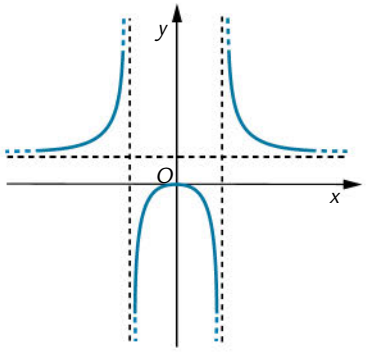
B.



C.



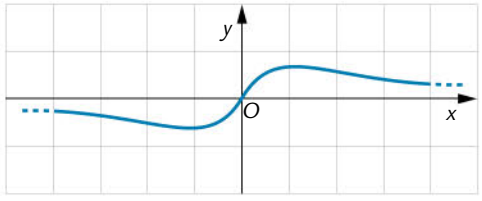
D.



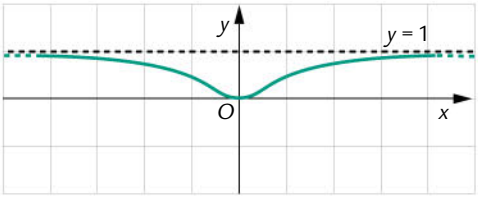
●○○ **277** Sulla base di considerazioni sulle simmetrie e sugli asintoti, associa a ciascuna delle seguenti funzioni il grafico relativo, scelto tra quelli sottostanti.

a. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ **b.** $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ **c.** $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ **d.** $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

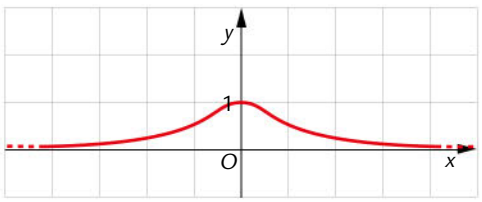
A.



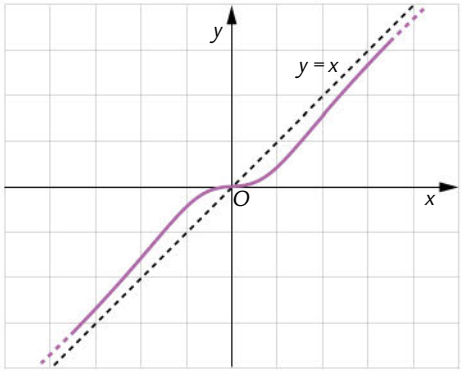
B.



C.



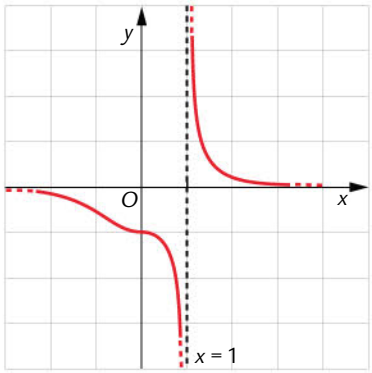
D.



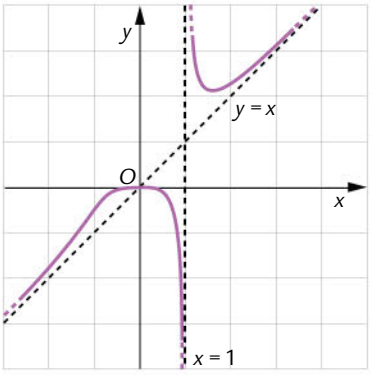
278 Sulla base di considerazioni sugli zeri e sugli asintoti, associa a ciascuna delle seguenti funzioni il grafico relativo, scelto tra quelli sottostanti.

a. $y = \frac{1}{x^3-1}$ **b.** $y = \frac{x^2}{x^3-1}$ **c.** $y = \frac{x^3}{x^3-1}$ **d.** $y = \frac{x^4}{x^3-1}$

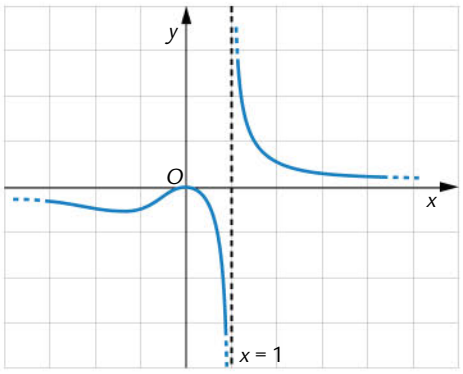
A.



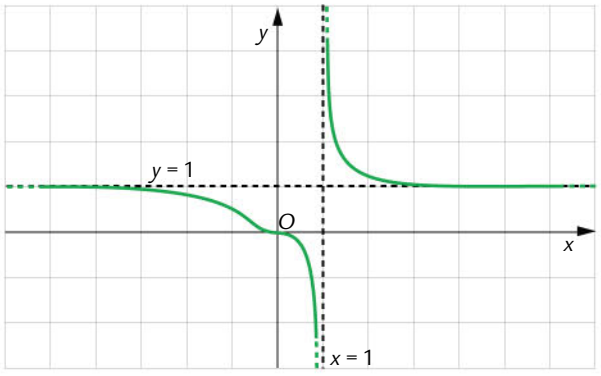
B.



C.



D.



Traccia il grafico probabile delle seguenti funzioni algebriche (determina il dominio, eventuali simmetrie, il segno e studia l'esistenza di asintoti e la natura di eventuali punti di singolarità).

279 $y = \frac{x}{x^2-1}$ [$D = \mathbf{R} - \{\pm 1\}$; f è dispari e $y > 0$ per $-1 < x < 0 \vee x > 1$; asintoti: $x = \pm 1$, $y = 0$]

280 $y = \frac{1}{x^2-2x}$ [$D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$; $y > 0$ per $x < 0 \vee x > 2$; asintoti: $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$]

281 $y = \frac{x^2}{x^2-4x-5}$ [$D = \mathbf{R} - \{-1, 5\}$; $y > 0$ per $x < -1 \vee x > 5$; asintoti: $x = -1$, $x = 5$, $y = 1$]

282 $y = x - \frac{1}{x}$ [$D = \mathbf{R} - \{0\}$; f è dispari e $y > 0$ per $-1 < x < 0 \vee x > 1$; asintoti: $x = 0$, $y = x$]

283 $y = \frac{x}{x^2-2x+1}$ [$D = \mathbf{R} - \{1\}$; $y > 0$ per $x > 0 \wedge x \neq 1$; asintoti: $x = 1$, $y = 0$]

284 $y = \frac{x^2-x}{(x-2)^2}$ [$D = \mathbf{R} - \{2\}$; $y > 0$ per $x < 0 \vee x > 1$, con $x \neq 2$; asintoti: $x = 2$, $y = 1$]

285 $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2+x-2}$ [$D = \mathbf{R} - \{-2, 1\}$; $y > 0$ per $x < -2 \vee x > 1$; asintoti: $x = 1$, $x = -2$, $y = 1$]

286 $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$ [$D = \mathbf{R} - \{1\}$; $y > 0$ per $x > 0 \wedge x \neq 1$; asintoti: $x = 1$, $y = x + 2$]

287 $y = \frac{x^3+1}{x^2-4}$ [$D = \mathbf{R} - \{\pm 2\}$; $y > 0$ per $-2 < x < -1 \vee x > 2$; asintoti: $x = \pm 2$, $y = x$]

288 **Videolezione** $y = \frac{x^3+1}{x^2+2x-3}$ [$D = \mathbf{R} - \{1, -3\}$; $y > 0$ per $-3 < x < -1 \vee x > 1$; asintoti: $x = 1$, $x = -3$, $y = x - 2$]

289 $y = \frac{x^3+1}{x^2-x-2}$ [$D = \mathbf{R} - \{-1, 2\}$; $y > 0$ per $x > 2$; $x = -1$ è un punto di singolarità eliminabile; asintoti: $x = 2$, $y = x + 1$]

290 $y = \dfrac{x}{|x^2-1|}$ [$D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; dispari; $y > 0$ per $x > 0 \wedge x \neq 1$; asintoti: $x = \pm 1$, $y = 0$]

291 $y = \dfrac{|x|}{x^2-1}$ [$D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; pari; $y > 0$ per $x < -1 \vee x > 1$; asintoti: $x = \pm 1$, $y = 0$]

292 ESERCIZIO SVOLTO

Tracciamo il grafico della funzione $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$.

Dominio ed eventuali simmetrie

La funzione è definita purché $x^2 - 1 \geq 0$ e $x + 2 \neq 0$, cioè per:

$x \leq -1 \vee x \geq 1$, con $x \neq -2$

quindi il dominio della funzione è:

$D = (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, +\infty)$

È facile riconoscere che la funzione non è né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{x^2-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dunque il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti di coordinate $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.
Per $x = 0$ la funzione non è definita, quindi non ha senso cercare punti d'intersezione con l'asse y.

Segno

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < -1 \vee x > 1$$

Limiti agli estremi degli intervalli che formano il dominio e studio degli asintoti

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x}{x+2}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = -1 \Rightarrow y = -1$ è un asintoto orizzontale *sinistro*

$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = +\infty \Rightarrow x = -2$ è un asintoto verticale

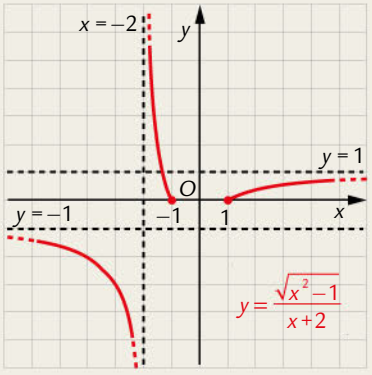
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = f(-1) = 0 \Rightarrow f$ è continua da sinistra in -1

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 0 \Rightarrow f$ è continua da destra in 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+2}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1$ è un asintoto orizzontale *destro*

Le ascisse degli eventuali punti d'intersezione del grafico della funzione con l'asintoto orizzontale *sinistro*, $y = -1$, si ottengono risolvendo l'equazione $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = -1$ che, come si può verificare, non fornisce alcuna soluzione; quindi non ci sono punti d'intersezione.

Le ascisse degli eventuali punti d'intersezione con l'asintoto orizzontale *destro*, $y = 1$, si ottengono risolvendo l'equazione $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = 1$ che, come si può verificare, ha la sola soluzione $x = -\dfrac{5}{4}$; quindi c'è un solo punto d'intersezione con l'asintoto destro, di coordinate $\left(-\dfrac{5}{4}, 1\right)$.



Grafico

Un grafico probabile della funzione, in base alle informazioni raccolte, è quello tracciato in figura.

Traccia il grafico probabile delle seguenti funzioni irrazionali.

293 $y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ — $[D=(-1,0]\cup(1,+\infty);\ y\geq 0$ per ogni $x\in D$; asintoti: $x=-1$ (destro), $x=1$ (destro) e $y=0$ (destro)$]$

294 $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-3x}}$ — $[D=(0,2]\cup(3,+\infty);\ y\geq 0$ per ogni $x\in D$; asintoti: $x=0$, $x=3$, $y=0]$

295 **Videolezione** $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ — $[D=[0,1)\cup(1,+\infty);\ y>0$ per $x>1$; asintoti: $x=1$, $y=1]$

296 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ — $[D=\mathbf{R}-\{0\};$ dispari; $y>0$ per $x>0$; asintoti: $y=-1$ (sinistro); $y=1$ (destro); $x=0]$

297 $y=\sqrt{x^2+3x-4}-2x$ — $\left[D=(-\infty,-4]\cup[1,+\infty);\ y>0$ per $x\leq -4$; asintoti: $y=-x+\dfrac{3}{2}$ (destro); $y=-3x-\dfrac{3}{2}$ (sinistro)$\right]$

298 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ — $[D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty);$ dispari; $y>0$ per $x>1$; asintoti: $y=-1$ (sinistro); $y=1$ (destro)$]$

299 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+4}$ — $[D=(-\infty,-4)\cup(-4,-2]\cup[2,+\infty);\ y>0$ per $-4<x<-2\vee x>2$; asintoti: $x=-4$, $y=1$ (destro) e $y=-1$ (sinistro)$]$

300 $y=\sqrt{x^2+3}+2x$ — $[D=\mathbf{R};\ y>0$ per $x>-1$; asintoti: $y=x$ (sinistro), $y=3x$ (destro)$]$

301 $y=\sqrt{x^2+x+1}-x-1$ — $\left[D=\mathbf{R};\ y>0$ per $x<0$; asintoti: $y=-\dfrac{1}{2}$ (destro), $y=-2x-\dfrac{3}{2}$ (sinistro)$\right]$

302 $y=x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ — $[D=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty);\ y>0$ per $x>1$; asintoti: $x=1$ (destro), $y=x+1]$

Grafico probabile di funzioni trascendenti

303 **ESERCIZIO SVOLTO**

Tracciamo il grafico probabile della funzione $y=e^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Dominio ed eventuali simmetrie

La funzione è definita purché $x^2-1\neq 0$, cioè per $x\neq\pm 1$. Perciò il dominio della funzione è:

$D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

È facile riconoscere che la funzione non è né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y=0 \\ y=e^{\frac{x}{x^2-1}} \end{cases} \Rightarrow e^{\frac{x}{x^2-1}}=0 \Rightarrow \text{impossibile}$$

Pertanto, non esistono punti d'intersezione con l'asse x.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=e^{\frac{x}{x^2-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Il grafico della funzione interseca quindi l'asse y nel punto di coordinate $(0, 1)$.

Segno

$e^{\frac{x}{x^2-1}}>0$ per ogni $x\in D$ — Un esponenziale è sempre positivo

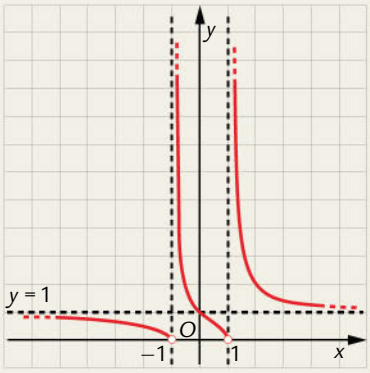
Limiti agli estremi del dominio e studio degli asintoti

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x^2-1}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}}=e^0=1$ $\Rightarrow y=1$ è un asintoto orizzontale *sinistro*

$\lim\limits_{x\to -1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}} = 0, \lim\limits_{x\to -1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} = +\infty$ $\Rightarrow x=-1$ è un punto singolare di seconda specie; la retta $x=-1$ è un asintoto verticale *destro*

$\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}} = 0, \lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} = +\infty$ $\Rightarrow x=1$ è un punto singolare di seconda specie; la retta $x=1$ è un asintoto verticale *destro*

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{x}{x^2-1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}} = e^0 = 1$ $\Rightarrow y=1$ è un asintoto orizzontale *destro*



Le ascisse degli eventuali punti d'intersezione con l'asintoto orizzontale, $y=1$, si ottengono risolvendo l'equazione $e^{\frac{x}{x^2-1}} = 1$ che, come si può verificare, ha la sola soluzione $x=0$; quindi c'è un solo punto d'intersezione con l'asintoto orizzontale, di coordinate (0, 1).

Grafico

Un grafico probabile della funzione, in base alle informazioni raccolte, è quello tracciato in figura.

304 **ESERCIZIO SVOLTO**

Tracciamo il grafico probabile della funzione $y = \ln\dfrac{2-x}{x^2}$.

Dominio ed eventuali simmetrie

La funzione è definita purché sia $\dfrac{2-x}{x^2} > 0$, cioè per $x<2$ con $x\neq 0$. Il dominio della funzione è quindi:

$D = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$

È facile riconoscere che la funzione non è né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y = \ln\dfrac{2-x}{x^2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln\dfrac{2-x}{x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2-x}{x^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \vee x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Pertanto, il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti di coordinate (−2, 0) e (1, 0).
Per $x=0$ la funzione **non** è definita, quindi non ha senso cercare punti di intersezione con l'asse y.

Segno

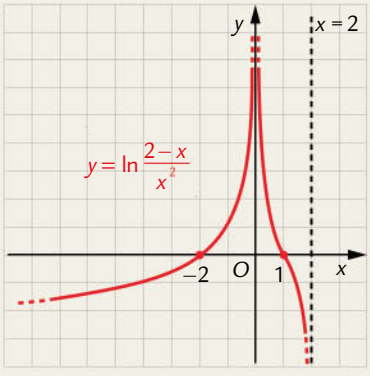
$$\ln\frac{2-x}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{2-x}{x^2} > 1 \Rightarrow 2-x > x^2 \wedge x\neq 0 \Rightarrow -2 < x < 1 \wedge x \neq 0$$

Limiti agli estremi del dominio e studio degli asintoti

$\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\dfrac{2-x}{x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln\dfrac{2-x}{x^2} = +\infty$ $\Rightarrow x=0$ è un asintoto verticale

$\lim\limits_{x\to 2^-} \ln\dfrac{2-x}{x^2} = -\infty$ $\Rightarrow x=2$ è un asintoto verticale *sinistro*



Si può inoltre verificare che $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, quindi non esistono asintoti obliqui.

Grafico

Un grafico probabile della funzione, in base alle informazioni raccolte, è quello tracciato in figura.

Traccia il grafico probabile delle seguenti funzioni trascendenti esponenziali e logaritmiche.

305 $y = \dfrac{e^x}{1-e^x}$ [$D = \mathbf{R} - \{0\}$; $y>0$ per $x<0$; asintoti: $x=0$, $y=0$ (sinistro), $y=-1$ (destro)]

306 $y = \dfrac{2^x - 1}{2^x - 2}$ [$D = \mathbf{R} - \{1\}$; $y>0$ per $x<0 \vee x>1$; asintoti: $x=1$; $y=1$ (destro), $y=\dfrac{1}{2}$ (sinistro)]

307 **Videolezione** $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ [$D = \mathbf{R} - \{0\}$; $y>0$ per $x>0$; asintoti: $x=0$; $y=1$ (destro), $y=0$ (sinistro)]

308 $y = \ln(x^2 - 1)$ $[D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $y > 0$ per $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$; asintoti: $x = \pm 1]$

309 $y = e^{\frac{x}{x^2+x-2}}$ $[D = \mathbf{R} - \{-2, 1\}$; $y > 0$ per ogni $x \in D$; $x = -2$ e $x = 1$ sono punti di singolarità di seconda specie; asintoti: $x = -2$ (destro), $x = 1$ (destro), $y = 1]$

310 $y = e^{\frac{x^2}{x-2}}$ $[D = \mathbf{R} - \{2\}$; $y > 0$ per ogni $x \in D$; $x = 2$: singolarità di seconda specie; asintoti: $x = 2$ (destro); $y = 0$ (sinistro)]

311 $y = \ln \frac{x+1}{(x-1)^2}$ $[D = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$; $y > 0$ per $0 < x < 3$ con $x \neq 1$; asintoti: $x = -1$ (destro) e $x = 1]$

312 $y = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$ $[D = (0, e) \cup (e, +\infty)$, $y > 0$ per $1 < x < e$; $x = 0$ è un punto di singolarità eliminabile; asintoti: $y = -1$ (destro), $x = e]$

313 $y = \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $[D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $y > 0$ per ogni $x \in D$; asintoti: $x = \pm 1$, $y = 0]$

314 $y = \frac{2 - \log_2 x}{\log_2 x}$ $[D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$; $y > 0$ per $1 < x < 4$; $x = 0$: singolarità eliminabile; asintoti: $x = 1$, $y = -1$ (destro)]

315 $y = \ln \left| \frac{3x}{2x^2 - 2} \right|$ $\left[D = \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$; pari; $y > 0$ per ogni $-2 < x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < x < 2$, con $x \neq \pm 1$; asintoti: $x = \pm 1$, $x = 0\right]$

316 ESERCIZIO SVOLTO

Tracciamo il grafico probabile della funzione $y = f(x) = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$.

Periodo

La funzione data è periodica di periodo 2π, perciò ci limitiamo a studiarla, per esempio, nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Dominio

La funzione è definita purché il denominatore sia diverso da zero:

$\sin x - \cos x \neq 0 \Rightarrow \tan x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}$ e $x \neq \frac{5\pi}{4}$ Limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi]$

Pertanto, nell'intervallo prescelto la funzione è definita in: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

Intersezioni con gli assi

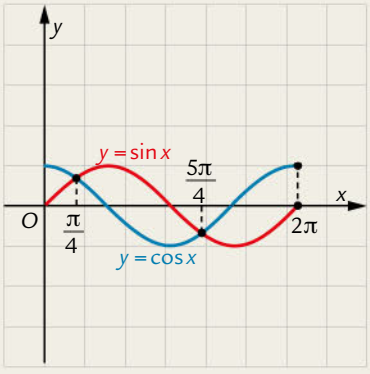
L'equazione $y = 0$ è evidentemente priva di soluzioni, quindi non esistono punti d'intersezione con l'asse x.
Per $x = 0$ si ha $f(0) = -1$, quindi la funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, -1)$.

Segno

$\frac{1}{\sin x - \cos x} > 0 \Rightarrow \sin x - \cos x > 0 \Rightarrow \sin x > \cos x$

Possiamo risolvere quest'ultima disequazione graficamente, per esempio confrontando i grafici di $y = \sin x$ e di $y = \cos x$, e tenendo presente che le ascisse dei loro punti d'intersezione sono i valori di x per i quali $\sin x - \cos x = 0$, cioè $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$.

Vediamo così che la funzione è positiva per: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

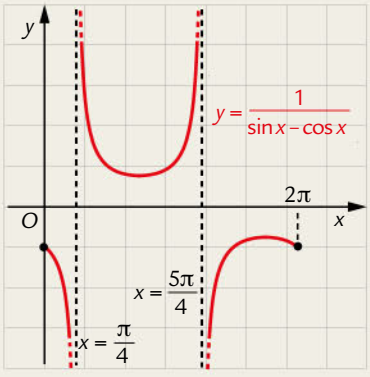


Limiti agli estremi del dominio e studio degli asintoti

Poiché stiamo studiando la funzione in un intervallo limitato, $[0, 2\pi]$, è ovvio che non si pone il problema di cercare asintoti orizzontali od obliqui.
In $x = 0$ e in $x = 2\pi$ la funzione è continua e risulta $f(0) = f(2\pi) = -1$.
Gli unici limiti da calcolare sono quelli per $x \to \frac{\pi}{4}$ e per $x \to \frac{5\pi}{4}$; abbiamo:

$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ è un asintoto verticale

$\lim_{x \to \left(\frac{5\pi}{4}\right)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \left(\frac{5\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ è un asintoto verticale



Grafico

Un grafico probabile della funzione, in base alle informazioni raccolte, è quello tracciato in figura.

Traccia il grafico probabile delle seguenti funzioni goniometriche.

317 $y = \dfrac{1}{\sin 2x}$ [Funzione periodica di periodo π, dispari; limitati a studiarla nell'intervallo $[0, \pi]$. In tale intervallo è definita per $x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \pi$, è positiva per $0 < x < \frac{\pi}{2}$; asintoti: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$]

318 $y = \dfrac{\tan x}{\tan x - 1}$ [Periodo $= \pi$; limitati a studiarla nell'intervallo $[0, \pi]$. In tale intervallo è definita per $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{\pi}{4}$, è positiva per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < x < \pi$; $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di singolarità eliminabile; asintoto: $x = \frac{\pi}{4}$]

319 $y = \dfrac{\cos x}{2\sin x - 1}$ [Periodo $= 2\pi$; limitati a studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$. In tale intervallo è definita per $x \neq \frac{\pi}{6}$ e $x \neq \frac{5\pi}{6}$, è positiva per $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$; asintoti: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$]

320 $y = \dfrac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ [Funzione periodica di periodo π e pari; limitati a studiarla nell'intervallo $[0, \pi]$. In tale intervallo è definita per $x \neq \frac{\pi}{4}$ e $x \neq \frac{3\pi}{4}$, è positiva per $0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4} < x < \pi$; asintoti: $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$]

321 $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \tan x}$ [Funzione periodica di periodo 2π; limitati a studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$. In tale intervallo è definita per $x \neq \frac{\pi}{4}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{5\pi}{4}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, è positiva per $0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{2} < x < \pi \vee \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$; punti di singolarità eliminabile: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$; asintoti: $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$]

322 $y = \ln(2\cos^2 x - \cos x)$ [Periodo $= 2\pi$, limitati a studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$; in tale intervallo è definita per $0 \leq x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi$, è positiva per $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$; asintoti: $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{3}$]

323 $y = \ln \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$ [Periodo $= 2\pi$; limitati a studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$: la funzione è definita per $0 < x < \pi$ ed è positiva per $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; asintoti: $x = 0$ e $x = \pi$]

324 $y = e^{\tan x}$ [Periodo $= \pi$; nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione è definita per $x \neq \frac{\pi}{2}$ ed è sempre positiva; il punto $x = \frac{\pi}{2}$ è di singolarità di seconda specie (in particolare la retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale sinistro)]

325 $y = e^{\frac{1}{\tan x}}$ [Periodo $= \pi$; nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione è definita per $x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \pi$ ed è sempre positiva; il punto $x = \frac{\pi}{2}$ è di singolarità eliminabile; asintoti: $x = 0$ (destro) e $x = \pi$ (destro)]

Esercizi con parametri

326 ESERCIZIO SVOLTO

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{ax^2 + bx + c}$, con $a \neq 0$; determiniamo a, b, c in modo che abbia la retta di equazione $y = x + 2$ come asintoto obliquo e la retta di equazione $x = -4$ sia un suo asintoto verticale.

▸ **Imponiamo che l'asintoto obliquo sia la retta di equazione $y = x + 2$**

Esprimiamo anzitutto in funzione dei parametri a, b e c il coefficiente angolare m e il termine noto q dell'asintoto obliquo (che certamente esiste, dal momento che si tratta di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore):

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{ax^3 + bx^2 + cx} = \frac{1}{a}$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{1}{a}x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{ax^2+bx+c}-\frac{1}{a}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3-x(ax^2+bx+c)}{a(ax^2+bx+c)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-bx^2-cx}{a^2x^2+bax+ca}=-\frac{b}{a^2}$$

Affinché la funzione ammetta come asintoto obliquo la retta di equazione $y=x+2$ dovrà essere $m=1$ e $q=2$, quindi:

$$\begin{cases}\frac{1}{a}=1\\ -\frac{b}{a^2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}$$

Imponiamo che la retta di equazione $x=-4$ sia un asintoto verticale

Sostituendo i valori trovati, $a=1$ e $b=-2$, otteniamo la funzione:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-2x+c}$$

Questa funzione ha come asintoto verticale la retta $x=-4$ se e solo se $\lim_{x\to-4}f(x)=\infty$. Quest'ultima condizione si verifica se e solo se -4 annulla il denominatore della funzione f; quindi deve essere:

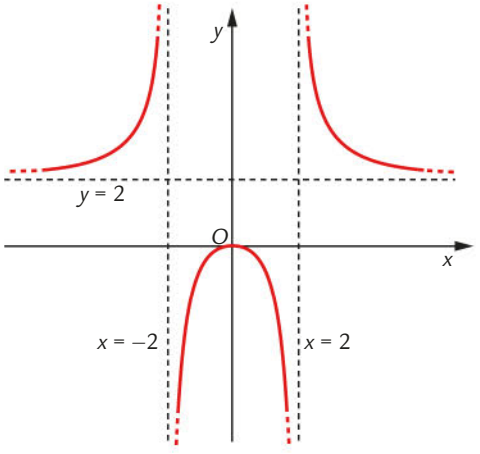
$(-4)^2-2(-4)+c=0\Rightarrow c=-24$

Conclusione

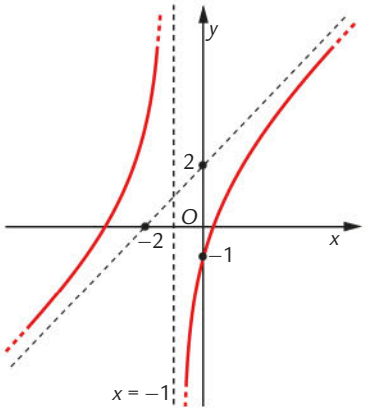
La funzione che soddisfa le condizioni richieste è quella che si ottiene per $a=1$, $b=-2$, $c=-24$.

Interpretazione di grafici

327 In figura sono rappresentati il grafico di una funzione e i suoi asintoti (tratteggiati). Sapendo che l'equazione della funzione è del tipo $y=\frac{ax^2}{x^2+b}$, quali sono i valori di a e di b? $[a=2,\ b=-4]$



328 In figura sono rappresentati il grafico di una funzione e i suoi asintoti (tratteggiati). Sapendo che l'equazione della funzione è del tipo $y=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$, quali sono i valori di a, b, c? $[a=3,\ b=-1,\ c=1]$



329 Considera la funzione $f(x)=\frac{ax^2+1}{x^2+bx+1}$. Determina a e b in modo che ammetta la retta $y=2$ come asintoto orizzontale e la retta $x=-2$ sia un suo asintoto verticale. $\left[a=2,\ b=\frac{5}{2}\right]$

330 Considera la funzione $f(x)=\frac{ax^3+bx^2+1}{x^2+x}$. Determina a e b in modo che ammetta come asintoto obliquo la retta di equazione $y=2x-1$. $[a=2,\ b=1]$

331 Considera la funzione $f(x)=\frac{ax^3+bx^2+1}{x^2+c}$. Determina a, b, c in modo che ammetta come asintoto obliquo la retta $y=2x-1$ e la retta $x=1$ sia un suo asintoto verticale. $[a=2,\ b=-1,\ c=-1]$

332 Considera la funzione $f(x)=\frac{ax^3+bx^2+1}{x^2+c}$. Determina a, b, c in modo che ammetta come asintoto obliquo la retta $y=-x+1$ e passi per il punto di coordinate (1, 1). $[a=-1,\ b=1,\ c=0]$

333 **Videolezione** Considera la funzione $f(x)=\frac{ax^2+1}{x^2+bx+c}$. Determina a, b, c in modo che ammetta come asintoto orizzontale la retta $y=2$ e come *unico* asintoto verticale la retta $x=-2$. $[a=2, b=4, c=4]$

334 Considera la funzione $f(x)=\frac{ax^4+bx^2+1}{x^3-1}$. Determina a e b in modo che ammetta come asintoto obliquo la retta $x-2y=0$ e sia priva di asintoti verticali. $\left[a=\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2}\right]$

335 Considera la funzione $f(x)=\frac{ax^3+x^2+1}{x^2+x+b}$. Determina a e b in modo che ammetta un asintoto orizzontale e il suo grafico passi per il punto di coordinate $(0, -2)$. $\left[a=0, b=-\frac{1}{2}\right]$

336 Considera la funzione $f(x)=\frac{ax^2+1}{x^2+bx+1}$. Determina per quali valori di a e b la funzione è priva di asintoti verticali e ammette come asintoto orizzontale l'asse x. $[a=0 \wedge -2<b<2]$

337 Trova a, b, c in modo che la funzione $y=\frac{ax^2+1}{x^2+bx+c}$ abbia gli stessi asintoti della funzione $y=\ln\left(\frac{x-3}{x-4}\right)^2$. $[a=0, b=-7, c=12]$

338 Data la funzione $y=\frac{1}{2x^2+ax+3}$, determina per quali valori di a:

a. possiede due asintoti verticali, uno dei quali ha equazione $x=-1$;

b. possiede un solo asintoto verticale;

c. non possiede alcun asintoto verticale. [**a.** $a=5$; **b.** $a=\pm 2\sqrt{6}$; **c.** $-2\sqrt{6}<a<2\sqrt{6}$]

339 Trova k e h in modo che la funzione $y=\frac{ke^x+1}{e^x+h}$ abbia come asintoto orizzontale destro la retta di equazione $y=3$ e come asintoto orizzontale sinistro la retta di equazione $y=2$. $\left[k=3, h=\frac{1}{2}\right]$

340 Trova a e b in modo che il grafico della funzione $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{bx+1}$ intersechi l'asse y nel punto $(0, 4)$ e ammetta come asintoto orizzontale per $x\to-\infty$ la retta di equazione $y=2$. $\left[a=16, b=-\frac{1}{2}\right]$

341 Trova a e b in modo che il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}+ax+b$ abbia come asintoto obliquo per $x\to+\infty$ la retta di equazione $y=5x+7$. $[a=4, b=5]$

342 Trova k e h in modo che il grafico della funzione $y=\frac{k}{2^x-h}$ abbia come asintoto verticale la retta di equazione $x=3$ e come asintoto orizzontale per $x\to-\infty$ la retta di equazione $y=2$. $[h=8, k=-16]$

343 Considera la funzione $f(x)=\log_2\left|\frac{ax^2+1}{x^2+b}\right|$. Determina per quali valori di a e b la funzione f:

a. possiede asintoti orizzontali;

b. ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y=\frac{1}{2}$;

c. la retta di equazione $x=-1$ è un suo asintoto verticale.

[**a.** $a\neq 0$; **b.** $a=\pm\sqrt{2}$; **c.** $a=-1\wedge b\neq -1$ oppure $a\neq -1\wedge b=-1$]

344 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{kx}-1}{x} & x<0\\[2ex] \dfrac{x^2-(k+1)x+3k-4}{x+2} & x\geq 0\end{cases}$$

a. Determina k in modo che sia continua in $\mathbf{R}$.

b. In corrispondenza del valore di k trovato, determina tutti gli eventuali asintoti della funzione.

[**a.** $k=4$; **b.** $y=0$ (sinistro), $y=x-7$ (destro)]

345 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x+5}{e^x+2} & x\leq 0\\[2ex] \dfrac{\ln(kx+1)}{3x} & x>0\end{cases}$$

a. Determina k in modo che sia continua in $\mathbf{R}$.

b. In corrispondenza del valore di k trovato, determina tutti gli eventuali asintoti della funzione. $\left[\text{**a.** } k=6;\ \text{**b.** } y=\frac{5}{2}\text{ (sinistro)}, y=0\text{ (destro)}\right]$

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

346 **Vero o falso?**

a. la funzione $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ può essere prolungata con continuità in $x=0$ V F

b. la funzione $f(x)=\begin{cases} e^x+2 & x\le 0 \\ -x^2+k & x>0 \end{cases}$ non può mai essere continua, per nessun valore di k V F

c. se una funzione presenta un punto di singolarità di seconda specie in un punto $x=c$, allora sicuramente c non appartiene al suo dominio V F

d. la funzione $f(x)=x-e^{-x}$ ha come asintoto obliquo la bisettrice del primo e del terzo quadrante V F

e. la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ presenta un asintoto verticale V F

Test

347 Quale delle seguenti funzioni è continua in tutto R?

A $y=\ln x$ C $y=e^x$

B $y=\dfrac{1}{x}$ D $y=\sqrt{x}$

348 Nel punto $x=0$ la funzione $y=\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-4x}$:

A è continua
B presenta una singolarità eliminabile
C presenta un salto
D presenta una singolarità di seconda specie

349 Nel punto $x=4$ la funzione $y=\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-4x}$:

A è continua
B presenta una singolarità eliminabile
C presenta un salto
D presenta una singolarità di seconda specie

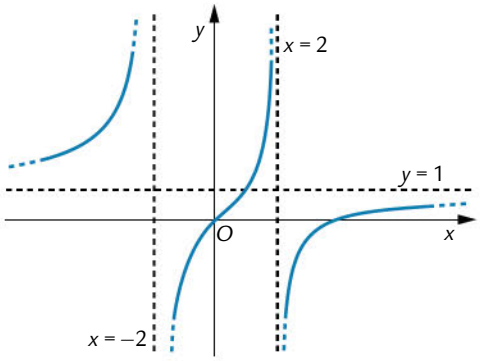
350 Una funzione razionale fratta del tipo $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi, può avere asintoto orizzontale solo se il grado di $P(x)$:

A supera di 2 il grado di $Q(x)$
B è minore o uguale al grado di $Q(x)$
C è maggiore del grado di $Q(x)$
D supera di 1 il grado di $Q(x)$

351 Quale delle seguenti funzioni può avere come grafico quello in figura?

A $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-4}$ C $y=\dfrac{x-4}{x^2-4}$

B $y=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4}$ D $y=\dfrac{x^3-4x^2}{x^2-4}$



352 Nel punto $x=3$ la funzione $y=\dfrac{x-3}{|x-3|}$:

A è continua
B presenta una singolarità eliminabile
C presenta un salto
D presenta una singolarità di seconda specie

---

353 Quale delle seguenti funzioni non possiede asintoti verticali?

A $y=\dfrac{1}{e^x}$ B $y=\dfrac{1}{x^2}$ C $y=\ln x$ D $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

354 Quale delle seguenti funzioni possiede un asintoto orizzontale?

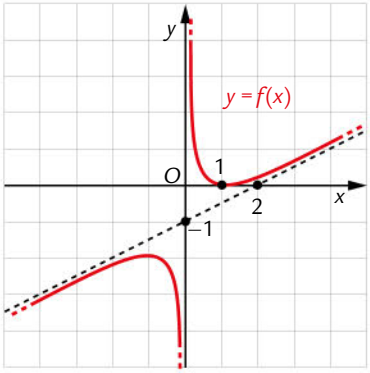
A $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ B $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ C $y=\sqrt{x+1}$ D $y=\ln(x+1)$

355 Quale delle seguenti funzioni possiede un asintoto obliquo?

A $y=\dfrac{x^2}{x^3+1}$ B $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ C $y=\dfrac{x^3}{x+1}$ D $y=\dfrac{x}{x^3+1}$

Interpretazione di grafici

356 Il grafico di una funzione $y = f(x)$ è quello riportato in figura, dove è stato tracciato (tratteggiato) anche l'asintoto obliquo della funzione. Il grafico della funzione presenta come ulteriore asintoto l'asse y ed è tangente all'asse x nel punto di coordinate $(1, 0)$.



a. Completa le seguenti scritture:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ...$ $\lim_{x\to0^-} f(x) = ...$ $\lim_{x\to0^+} f(x) = ...$

$\lim_{x\to1} f(x) = ...$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ...$

b. Determina l'equazione dell'asintoto obliquo della funzione.

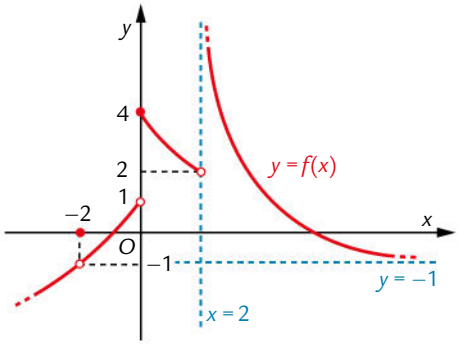
c. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$? Perché?

d. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right]$? Perché?

e. Qual è il dominio della funzione $y = \sqrt{f(x)}$?

f. Qual è il dominio della funzione $y = \ln f(x)$?

357 Il grafico di una funzione $y = f(x)$ è quello riportato in figura, dove sono stati tracciati (tratteggiati in blu) anche gli asintoti della funzione.



a. Qual è il dominio della funzione?

b. Completa le seguenti scritture:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ...$ $\lim_{x\to-2} f(x) = ...$ $\lim_{x\to0^-} f(x) = ...$ $\lim_{x\to0^+} f(x) = ...$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = ...$ $\lim_{x\to2^+} f(x) = ...$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ...$

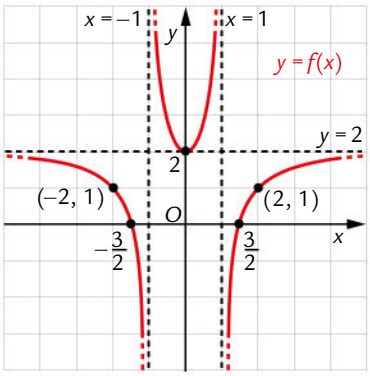
c. Quali sono gli asintoti della funzione?

d. Quali sono i punti singolari della funzione?

e. Per ciascuno dei punti di singolarità individuati, specifica il tipo.

f. In base alle informazioni deducibili dal grafico, è possibile stabilire quanto vale $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$?

358 Il grafico di una funzione $y = f(x)$ è quello riportato in figura, dove sono stati tracciati (tratteggiati) anche gli asintoti della funzione. Il grafico della funzione passa in particolare per i punti indicati, di coordinate $(0, 2)$, $\left(\pm\frac{3}{2}, 0\right)$ e $(\pm2, 1)$.



Per ciascuna delle seguenti affermazioni, stabilisci se è vera o falsa.

a. il dominio della funzione è **R** V F

b. la funzione rappresentata è pari V F

c. le equazioni degli asintoti verticali sono $x = \pm\frac{3}{2}$. V F

d. l'equazione dell'asintoto orizzontale è $y = 2$ V F

e. $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ V F

f. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ V F

g. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ V F

h. $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x)$ V F

i. la funzione rappresentata è invertibile V F

j. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ V F

[6 affermazioni vere e 4 false]

Studia gli eventuali punti singolari delle seguenti funzioni e tracciane il grafico.

359 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x}$ [$x=0$: eliminabile; $x=-3$: seconda specie]

360 $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$ [$x=-1$: seconda specie; $x=1$: eliminabile]

361 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-x-6}$ [$x=-2$: eliminabile; $x=3$: seconda specie]

362 $f(x)=\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-4}$ [$x=2$: eliminabile; $x=-2$: seconda specie]

363 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 2\\ 2x+1 & x>2\end{cases}$ [$x=2$: salto]

364 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+1 & x<2\\ x+4 & x\ge 2\end{cases}$ [$x=2$: salto]

365 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & x<0\\ \dfrac{4}{x} & x>0\end{cases}$ [$x=0$: seconda specie]

366 $f(x)=\begin{cases}x^2-5x+1 & x<2\\ x-7 & x\ge 2\end{cases}$ [Continua in **R**]

367 $f(x)=\begin{cases}-x-2 & x<-2\\ 4-x^2 & -2\le x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & 0<x\le 1\\ -1 & x>1\end{cases}$ [$x=0$: seconda specie; $x=1$: salto; altrove è continua]

368 $f(x)=\dfrac{|x^2-9|}{x+3}$ [$x=-3$: salto]

369 $f(x)=\dfrac{x+3}{|x^2-9|}$ [$x=-3$: salto; $x=3$: seconda specie]

A mente **Determina gli asintoti delle seguenti funzioni.**

370 $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

371 $y=-3e^{2x}$

372 $y=\ln(x+5)$

373 $y=\dfrac{6x^2}{2x^2+1}$

374 $y=2x+\dfrac{1}{x}$

375 $y=e^{-x}+3x+5$

Determina gli asintoti delle seguenti funzioni.

376 $y=\dfrac{2x^2+1}{4x^2-4x}$ $\left[x=0, x=1; y=\dfrac{1}{2}\right]$

377 $y=\dfrac{x^2}{x^2-9}$ $[x=\pm 3; y=1]$

378 $y=\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ [$x=0, x=1; y=2$]

379 $y=\dfrac{6x^2}{2x^2-x-1}$ $\left[x=-\dfrac{1}{2}, x=1; y=3\right]$

380 $y=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ [$y=x-1$]

381 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$ [$x=-2, x=1; y=0$]

382 $y=\dfrac{2x^2-8}{x^2-5x+6}$ [$x=3; y=2$]

383 $y=\sqrt{\dfrac{9x-9}{x+2}}$ [$x=-2; y=3$]

384 $y = \sqrt{4x^2 - 9}$ $[y = \pm 2x]$

385 $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 4}{2x^2 - 2}$ $\left[x = \pm 1;\ y = \dfrac{1}{2}x - 1\right]$

386 $y = 2x + e^{-x}$ $[y = 2x \text{ (destro)}]$

387 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$ $[x = 1,\ x = 3;\ y = -1 \text{ (sinistro)},\ y = 1 \text{ (destro)}]$

388 $y = \sqrt{x^2 + 2} - x - 1$ $[y = -1 \text{ (destro)},\ y = -2x - 1 \text{ (sinistro)}]$

---

389 **Giustificare e argomentare**

Considera la funzione $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi. Secondo Andrea, «la funzione $f(x)$ ha tanti punti singolari quanti sono gli zeri di $Q(x)$». Beatrice puntualizza: «più precisamente, la funzione $f(x)$ ha tanti asintoti verticali quanti sono gli zeri di $Q(x)$». Carlo, infine, osserva: «Andrea e Beatrice affermano la stessa cosa». Dei tre, uno solo ha ragione. Chi e perché?

Traccia il grafico probabile delle seguenti funzioni.

390 $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

391 $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x - 4}$

392 $y = \dfrac{x^3 - 8}{x^2}$

393 $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 9}$

394 $y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x - 3}$

395 $y = x + 1 - \dfrac{2}{x^2}$

396 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

397 $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 3}$

398 $y = \dfrac{(x-1)^3}{x^2 - 4}$

399 $y = \sqrt{x^2 - 4}$

400 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

401 $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

402 $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$

403 $y = e^{\frac{1}{x} - 1}$

404 $y = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}} - 2}$

405 $y = \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} - e^2}$

406 $y = \dfrac{1 - \log_2 x}{1 + \log_2 x}$

407 $y = \ln \dfrac{x}{x - 1}$

408 $y = \log_2 \dfrac{x}{x^2 - 1}$

---

409 **Inventa tu.** Traccia il grafico e determina l'espressione analitica di una funzione che soddisfi tutte le seguenti condizioni:

a. sia definita in **R** e continua in **R** eccetto che nei punti $x = -1$ e $x = 0$;

b. per $x = -1$ presenti un punto di singolarità eliminabile;

c. per $x = 0$ presenti un punto di salto.

410 **Inventa tu.** Traccia il grafico e scrivi l'espressione analitica di una funzione che possieda le seguenti caratteristiche:

a. presenta per $x = 1$ una singolarità eliminabile e per $x = 3$ un punto di salto, con salto uguale a 2;

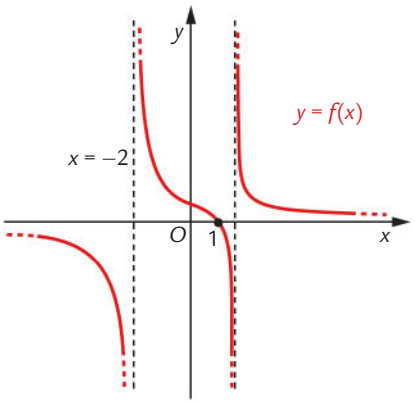
b. presenta due punti di singolarità di seconda specie, rispettivamente in $x = 0$ e in $x = 2$, ma in quest'ultimo è continua da sinistra;

c. presenta un punto di salto, con salto uguale a 3 in $x = -2$, una singolarità di seconda specie in $x = 0$ e una singolarità eliminabile in $x = 2$.

Esercizi con parametri

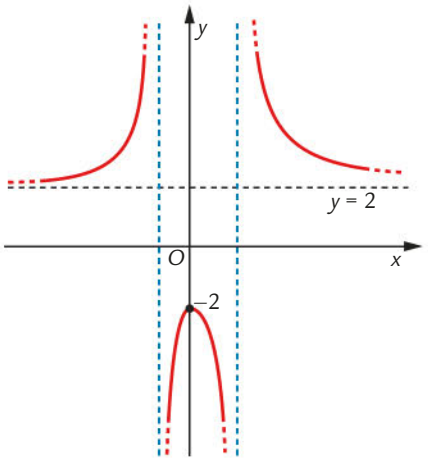
Interpretazione di grafici

411 In figura sono rappresentati il grafico di una funzione del tipo $f(x)=\dfrac{2x+a}{2x^2+x+b}$ e i suoi asintoti.
Determina i valori di a e di b e le equazioni degli asintoti diversi da $x=-2$.



$\left[a=-2, b=-6, x=\dfrac{3}{2}, y=0\right]$

412 In figura sono rappresentati il grafico di una funzione di equazione del tipo $f(x)=\dfrac{6-ax^2}{2x^2-x+b}$ e i suoi asintoti. Determina i valori di a e b e le equazioni degli asintoti verticali.



$\left[a=-4, b=-3, x=-1, x=\dfrac{3}{2}\right]$

413 Determina a, b e c in modo che la funzione $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x+c}$ abbia come asintoto obliquo la retta di equazione $y=2x-1$ e come asintoto verticale la retta di equazione $x=2$. $[a=2, b=-5, c=-2]$

414 Considera la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(a-3)x^2+x+2}$. Determina per quali valori del parametro reale a:

a. ammette asintoto obliquo;
b. ammette asintoto orizzontale;
c. non ammette asintoti verticali.

$\left[\textbf{a. } a=3;\ \textbf{b. } a\neq 3;\ \textbf{c. } a>\dfrac{25}{8}\right]$

415 Considera la funzione $f(x)=\dfrac{(a-2)x^3+x^2}{ax^2+6x+1}$. Determina per quali valori del parametro reale a:

a. ammette asintoto obliquo;
b. ammette asintoto orizzontale;
c. non ammette né asintoto orizzontale né asintoto obliquo;
d. ammette almeno un asintoto verticale.

[**a.** $a\neq 0 \wedge a\neq 2$; **b.** $a=2$; **c.** $a=0$; **d.** $a\leq 9$]

416 Data la funzione $f(x)=\begin{cases} e^x+k & x<0 \\ x^2-3x+2k & x>0 \end{cases}$, determina i valori da assegnare al parametro k affinché:

a. la funzione presenti un punto di salto per $x=0$, con salto uguale a 2;
b. la funzione presenti un punto di singolarità eliminabile per $x=0$; in questo caso scrivi poi l'espressione della funzione che prolunga per continuità $f(x)$ in tale punto.

In entrambi i casi precedenti disegna il grafico della funzione ottenuta.

$\left[\textbf{a. } k=-1 \vee k=3; \textbf{b. } k=1; g(x)=\begin{cases} e^x+1 & x\leq 0 \\ x^2-3x+2 & x>0 \end{cases}\right]$

Realtà e modelli

417 **Temperatura**. In tabella sono riportate le temperature registrate a Bologna nel corso di una rigida giornata invernale. Supponi (naturalmente) che la temperatura sia funzione *continua* del tempo.

Ora	00	03	06	09	12	15	18	21	24
Temperatura	+1 °C	−2 °C	−3 °C	−3 °C	−1 °C	+2 °C	+4 °C	+3 °C	+2 °C



a. Puoi affermare che per almeno due volte nel corso della giornata la temperatura è stata di 0 °C? Se sì, in quali intervalli di tempo? Di quale teorema ti servi?
b. Puoi sostenere che soltanto in due momenti della giornata la temperatura è stata di 0 °C? Spiega.
c. Perché non puoi affermare che la temperatura minima assoluta nel corso della giornata è stata di −3 °C? Ciò è in contrasto con il teorema di Weierstrass?
d. Puoi comunque sostenere che l'escursione termica in giornata (cioè la differenza tra la temperatura massima e la temperatura minima) è stata di *almeno* 7 °C?

418 **Travaso dell'olio**. Devi travasare olio da una latta in bottiglie di vetro e hai a disposizione un imbuto di forma conica di diametro di 12 cm e altezza di 15 cm. L'imbuto, se riempito fino all'orlo, si svuota in 1 minuto e 30 secondi.
a. Calcola quanto olio (in cm^3) versi al secondo nella bottiglia.
b. La bottiglia è costituita da una parte cilindrica e dal «collo». La parte cilindrica si può assimilare a un cilindro di diametro 8 cm e altezza 20 cm. Supponi di non riempire il collo della bottiglia. Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni $V(t)$ e $h(t)$ che rappresentano rispettivamente il volume (in cm^3) di olio nella bottiglia e l'altezza (in cm) raggiunta dal livello dell'olio nella bottiglia in funzione del tempo t (in s).
c. Immagina ora di avere collocato 3 bottiglie uguali una accanto all'altra e di avere predisposto un imbuto in ciascuna bottiglia (anche gli imbuti sono tutti uguali), inoltre supponi che sia trascurabile il tempo che trascorre tra l'istante in cui una bottiglia si riempie completamente e quello in cui inizi a versare olio nell'imbuto della successiva.
La funzione $h(t)$ prima determinata rappresenta ora l'altezza del livello dell'olio nella bottiglia che nell'istante considerato si sta riempiendo. Rappresenta, in un opportuno sistema di riferimento, il grafico della funzione $h(t)$; individua inoltre gli eventuali punti di discontinuità e classificali.
d. Scrivi infine l'espressione analitica della funzione rappresentata al punto precedente.

[**a.** Circa 6,3 cm^3/s; **b.** $V(t) = 2\pi t$, $h(t) = \frac{1}{8}t$; **c.** salti per $t = 160$, $t = 320$; **d.** $h(t) = \begin{cases} \frac{t}{8} & 0 \le t \le 160 \\ \frac{t-160}{8} & 160 < t \le 320 \\ \frac{t-320}{8} & 320 < t \le 480 \end{cases}$]

Esercizi *più*

419 Stabilisci per quali valori del parametro reale k la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3k+1}{2x+k} & x < 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & x > 0 \end{cases}$ presenta per $x = 0$:
a. una singolarità eliminabile;
b. una singolarità di seconda specie;
c. un punto di salto con salto uguale a 3.

[**a.** $k = -1$; **b.** $k = 0$; **c.** $k = -\frac{1}{4}$ oppure $k = \frac{1}{2}$]

Dalle gare

420 La funzione $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4x+3}$ ammette come asintoti verticali:

A solo la retta di equazione $x = 1$ B solo la retta di equazione $x = 2$ C solo la retta di equazione $x = 3$
D le rette di equazioni $x = 1$ e $x = 3$ E nessuna delle precedenti risposte è esatta

(Fgcu Math Competition 2012)

421 Sono date le funzioni $f(x) = x^2 - x + a$ e $g(x) = \begin{cases} f(x+1) & x \le 0 \\ f(x-1) & x > 0 \end{cases}$. Per quale valore di a la funzione $y = [g(x)]^2$ è continua in $x = 0$?

A −2 B −1 C 0 D 1 E Nessuno dei precedenti

(University of North Georgia, Mathematics Tournament 2013)

Prova di autoverifica

Continuità

1 **Vero o falso?**

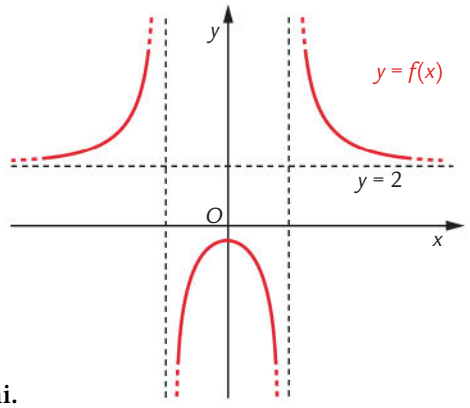
a. Il teorema degli zeri è applicabile alla funzione $f(x) = x + \ln x$ definita nell'intervallo $[1, 4]$ V F

b. Il salto della funzione $y = \frac{x}{|x|}$ in $x = 0$ è uguale a 2 V F

c. Una funzione $f(x)$ definita in tutto **R** può avere al massimo due asintoti obliqui V F

d. La funzione $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ ha una singolarità di seconda specie in $x = 1$ V F

2 In figura è riportato il grafico di una funzione di espressione analitica del tipo $f(x) = \frac{ax^2 + 3}{2x^2 - 6}$.



a. Qual è il valore di a? E quali sono le equazioni degli asintoti verticali?

b. È vero che è possibile applicare alla funzione il teorema di Weierstrass in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nel dominio della funzione?

c. La funzione $f(x)$ non ha né massimi né minimi assoluti. Tuttavia ciò non contraddice il teorema di Weierstrass. Perché?

Studia la natura degli eventuali punti di singolarità delle seguenti funzioni.

3 $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$

4 $y = \begin{cases} x^2 + 3x & x \le 1 \\ 2^{x+1} + 2 & x > 1 \end{cases}$

Determina gli asintoti delle seguenti funzioni.

5 $y = \frac{2x^3 + 3x^2}{x^2 - 4}$

6 $y = \frac{1}{\sqrt{4x + 9}}$

7 Traccia il grafico probabile della funzione: $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

8 Considera la funzione $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3x - 1 & x \le 1 \\ \frac{x^2 + 2ax - 5}{3x + a} & x > 1 \end{cases}$. Determina (se esistono) i valori di a per cui la funzione in $x = 1$:

a. è continua;

b. presenta una singolarità di seconda specie;

c. presenta una singolarità di tipo salto.

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
Punteggio massimo	$0{,}25 \cdot 4 = 1$	$0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$	1	1	1	1	2	$0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$	10
Punteggio ottenuto									

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 573

Utilizzare tecniche e procedure di calcolo

Calcola i seguenti limiti.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)^2}{(2x+3)(3x-5)}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{3x+2}{x-1}\right)$ $[+\infty]$

3 $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{4-x^2}$ $[-\infty]$

4 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$ $[0]$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{2x-1}-\dfrac{6x+5}{2x-1}\right)$ $[+\infty]$

6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-7}+\dfrac{3}{x}\right)$ $[0]$

7 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}$ $[8]$

8 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$ $\left[\frac{6}{5}\right]$

9 **E se?** $\lim\limits_{x\to1}\ln(x-1)^2$

Cambierebbe il risultato calcolando il limite per $x\to1^+$ della funzione $\ln^2(x-1)$ $[-\infty$; sì$]$

10 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}+e^{-\frac{1}{x}}\right)$ $[2]$

11 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-3}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2\left(\dfrac{x^2+x+1}{4x^2+1}\right)$ $[-2]$

13 $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{2-\cos^2x}{\cos x}\right)$ $[0]$

14 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{2x}+e^{1+2x}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

15 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+e^x\right)$ $[-\infty]$

16 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin2x}{x}+\dfrac{\cos3x-1}{x^2}\right)$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

17 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+3}$ $[e^2]$

18 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x\cos3x}{x}$ $[2]$

19 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(ex+1)-\ln x\right]$ $[1]$

20 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x}$ $[2]$

21 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4x^2+x+1)\sqrt{9x+1}}{(2x^2-x-1)\sqrt{x}}$ $[6]$

22 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3x}{x^2}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

23 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^2+2x}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

24 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{2^{x+3}+2^x}{2^x-1}\right)\left(\dfrac{2^{1-x}+2}{2^{-x}-1}\right)\right]$ $[-18]$

25 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{10}(n+1)!}{n!(2n^{11}+1)}$, $n\in\mathbb{N}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

Calcola i seguenti limiti, dopo avere calcolato le somme che compaiono al numeratore e al denominatore.

26 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+4+.....+2n}{2+4+6+8+.....+2n}$, $n\in\mathbb{N}$ $[2]$

27 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+(0{,}3)+(0{,}3)^2+...(0{,}3)^n}{1+(0{,}5)+(0{,}5)^2+...(0{,}5)^n}$, $n\in\mathbb{N}$ $\left[\frac{5}{7}\right]$

Studia gli eventuali punti di singolarità delle seguenti funzioni.

28 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$ $[x=-1$: singolarità di seconda specie; $x=2$: singolarità eliminabile$]$

29 $y=\begin{cases}x^2-1 & x<-1\\ 2x+2 & -1\le x<1\\ x+1 & x\ge1\end{cases}$ $[x=1$: salto $=2]$

30 $y=\dfrac{|x^2-3x+2|}{x^2-1}$ $[x=-1$: singolarità di seconda specie; $x=1$: salto $=1]$

31 $y=e^{\frac{1}{x^3-2x^2}}$ $[x=0$: singolarità eliminabile; $x=2$: singolarità di seconda specie$]$

32 $y=\dfrac{x}{\ln(x+1)}$ $[x=-1$ e $x=0$: entrambi punti di singolarità eliminabili$]$

Traccia il grafico probabile delle seguenti funzioni.

33 $y=\dfrac{4x^2-1}{2x^2}$

34 $y=\dfrac{x^2-4}{x+3}$

35 $y=\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

36 $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-25}$

37 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-4}{x^3}}$

38 $y=\dfrac{x^4+1}{x^3-1}$

39 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-3x}}$

40 $y=\dfrac{2^x-1}{2^x-4}$

41 $y=\ln\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right|$

42 $y=2^{\frac{x-2}{x}}$

43 $y=\dfrac{1-\ln x^2}{1+\ln x}$

44 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+4}$

---

45 Traccia il grafico probabile della funzione $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$. Deduci da esso il grafico probabile delle due funzioni $y=-f(x)$ e $y=|f(x)|$.

46 Traccia il grafico probabile della funzione $y=f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2}$. Deduci da esso il grafico probabile delle due funzioni $y=-f(x)$ e $y=|f(x)|$.

47 Determina a e b in modo che due asintoti della funzione $y=\dfrac{(a-2)x^2+1}{ax^2+b}$ siano $x=3$ e $y=2$. [$a=-2,\ b=18$]

48 Determina a e b in modo che due asintoti della funzione $y=\dfrac{(a+1)x^2+1}{(2x+b)(3x+1)}$ siano $x=-2$ e $y=4$. [$a=23,\ b=4$]

49 Per quali valori di k la funzione $y=\dfrac{1}{2x^2-3x+k}$ è priva di asintoti verticali? $\left[k>\dfrac{9}{8}\right]$

50 Determina per quali $a\in\mathbb{R}$ la funzione $y=\dfrac{(a^2-1)x^5-2(a+1)x^4-x^3+2}{x^3-1}$:

a. ammette un asintoto obliquo;
b. ammette un asintoto orizzontale;
c. ammette un asintoto verticale.

In ciascun caso, supposta verificata la condizione trovata, specifica l'equazione dell'asintoto.

[**a.** $a=1$, asintoto obliquo: $y=-4x-1$; **b.** $a=-1$, asintoto orizzontale: $y=-1$; **c.** $a\neq 1\pm\sqrt{3}$, asintoto verticale: $x=1$]

51 Determina, se esistono, $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}$ tali che la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-a\cos x}{x^2} & x<0\\ x^2+b & 0<x\leq 1\\ \dfrac{e^{2x-2}-1}{x-1} & x>1\end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$. [$a=2,\ b=1$]

Risolvere problemi e costruire modelli

52 Scrivi l'equazione della parabola γ con asse parallelo all'asse y, passante per i punti $O(0,0)$, $A(4,0)$ e $B(5,5)$. Sia r la retta OB e s la retta parallela all'asse x passante per B. Sull'arco $\overset{\frown}{OB}$ della parabola, considera un punto P di ascissa x e indica con H la sua proiezione sulla retta r e con K la sua proiezione sulla retta s. Calcola il limite del rapporto $\dfrac{PH\sqrt{2}}{PK}$ al tendere di P a B.

[**a.** $y=x^2-4x$; **b.** $r: y=x$, $s: y=5$, si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x-x^2}{5-x^2+4x}$, che è uguale a $\dfrac{5}{6}$]

53 Data la parabola di equazione $y = x^2$, considera su di essa un punto P, di ascissa a, con $a > 0$.

a. Scrivi l'equazione della retta t, tangente alla parabola in P, e della retta n, normale alla parabola in P.

b. Indica con A il punto in cui la tangente interseca l'asse x e con B il punto in cui la normale interseca l'asse y. Detta O l'origine degli assi, calcola il limite del rapporto tra l'area del triangolo PAB e l'area del triangolo AOB, quando $a \to +\infty$.

[**a.** $t: y = 2ax - a^2$, $n: y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$; **b.** $A\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(0, a^2 + \frac{1}{2}\right)$; si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{4a^2+1}{2a^2+1}$, uguale a 2]

54 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$, tangente in B alla retta di equazione $y = -4(x - 2)$. Sia V il vertice della parabola e P un punto di ordinata t appartenente all'asse della parabola. Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{t\to+\infty} (\overline{PB} - \overline{PV})$

b. $\lim\limits_{t\to-\infty} (\overline{PB} - \overline{PV})$

[$y = 4 - x^2$; **a.** si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{t\to+\infty} (\sqrt{t^2+4} - t + 4)$, che è uguale a 4; **b.** si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{t\to-\infty} (\sqrt{t^2+4} + t - 4)$, che è uguale a -4]

55 Dato un quadrato $ABCD$, di lato a, sia P un punto sul prolungamento di AB dalla parte di B. Indica con x la distanza di P da B e calcola il limite cui tende la differenza $\overline{PD} - \overline{PC}$ quando $x \to +\infty$.

[Si giunge a dover calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2ax + 2a^2} - \sqrt{x^2 + a^2}\right)$; a]

56 Sia ABC un triangolo in cui $B\hat{A}C = x$, $A\hat{B}C = 2x$ e $\overline{AB} = a$. Calcola il limite dell'espressione $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ quando x tende a zero.

$\left[\frac{7}{2}\right]$

Realtà e modelli

57 **Crescita di una popolazione.** Si stima che il numero di abitanti di una città (in migliaia), trascorsi t anni a partire da adesso, sia bene interpretato dalla funzione:

$$f(t) = \frac{300t^2 + 120t + 420}{10t^2 + 5t + 20}$$

a. Quanti sono attualmente gli abitanti della città?

b. Quanti saranno, secondo questo modello, gli abitanti della città tra 1 anno?

c. A lungo andare, quanti diverranno gli abitanti della città? Secondo il modello assunto, possono crescere indefinitamente?

[**a.** 21 000; **b.** 24 000; **c.** tendono ad avvicinarsi a 30 000]

58 **Decadimento radioattivo.** Una sostanza radioattiva perde il 15% della sua massa nel corso di un anno. Sia M_0 la massa iniziale della sostanza all'inizio di un dato anno, M_1 la massa persa nel corso del primo anno, M_2 la massa persa nel corso del secondo anno ed M_n la massa persa nel corso dell'n-esimo anno. Sia inoltre P_n la massa della sostanza persa complessivamente nel corso dei primi n anni. Determina le espressioni analitiche di M_n e di P_n e calcola i loro limiti quando $n \to +\infty$, interpretando i risultati in relazione al problema.

59 **Biliardo.** Prima della «spaccata» che dà avvio al gioco, le 15 palle numerate del biliardo sono disposte a formare un «triangolo equilatero» il cui «lato» è formato da 5 palle.



a. Contravvenendo al regolamento, Francesco e Luca vorrebbero iniziare il gioco «spaccando» un «triangolo equilatero» il cui «lato» è formato da un numero di palle doppio. Quante palle sarebbero necessarie per costruire un tale triangolo?

A Il doppio B Il quadruplo C Meno del triplo ma più del doppio D Meno del quadruplo ma più del triplo

b. Francesco e Luca hanno a disposizione un numero di palle numerate doppio del normale; da quante palle è costituito il lato del più grande «triangolo equilatero» costruibile con le palle a disposizione? E da quante palle è costituito complessivamente tale «triangolo»?

[D; 7 palle; 28 palle]

60 **Concentrazione di un farmaco nel sangue.** La concentrazione di un farmaco nel sangue (in mg/L) dopo t ore da una somministrazione avvenuta per via orale all'istante $t = 0$ è espressa dalla funzione $c(t) = 120(e^{-0,2t} - e^{-0,4t})$. Dimostra che, sia nelle prime cinque ore dalla somministrazione, sia tra la quinta e la decima ora, esiste un istante in cui la concentrazione del farmaco nel sangue risulta di 20 mg/L.



61 **Capitalizzazione nel continuo.** Un capitale C_0, applicato in regime di capitalizzazione composta per t anni a un tasso di interesse annuo i, genera un capitale finale C, detto **montante**, assegnato dalla formula:

$$C = C_0(1+i)^t$$



Supponiamo ora che la capitalizzazione avvenga ogni 6 mesi anziché ogni anno. Dopo 6 mesi riscuoteremmo un capitale:

$$C = C_0\left(1+\frac{i}{2}\right)$$

Se, subito dopo avere riscosso il capitale, lo reinvestissimo immediatamente per altri 6 mesi otterremo alla fine un montante:

$$C = \underbrace{C_0\left(1+\frac{i}{2}\right)}_{\text{montante ottenuto dopo 6 mesi}} + \underbrace{C_0\left(1+\frac{i}{2}\right)\frac{i}{2}}_{\text{interesse generato nei 6 mesi successivi}} = C_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^2$$

E così via, se ritirassimo il capitale ottenuto dopo 1 anno e lo reinvestissimo nuovamente per altri 6 mesi otterremmo dopo 1 anno e mezzo (3 semestri) un montante:

$$C = C_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^3$$

Dopo, per esempio, 3 anni (6 semestri) avremmo un montante:

$$C = C_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^6 = C_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2\cdot 3}$$

In generale un capitale C_0, investito a un tasso annuo i, composto n volte in un anno, genera dopo t anni un montante C espresso dalla formula:

$$C = C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Supponiamo di portare al limite estremo il numero n di volte in cui l'interesse viene composto in un anno, cioè di fare tendere n a infinito. Ciò significa che gli interessi iniziano a loro volta a produrre interesse in un istante immediatamente successivo a quello in cui sono maturati. Si parla in questo caso di **capitalizzazione nel continuo**, perché non vi è soluzione di continuità nella capitalizzazione: a ogni istante matura interesse e questo viene aggiunto al capitale per produrre, a sua volta, nuovo interesse.

a. Dimostra che un capitale C_0, investito in regime di capitalizzazione continua a un tasso annuo i, genera dopo t anni un montante C espresso dalla formula:

$$C = C_0 e^{it}$$

b. Supponi che un capitale di 10 000 euro venga investito per 5 anni al tasso annuo del 4%, composto annualmente; quale montante si otterrebbe dopo 5 anni? Quale montante si otterrebbe se la capitalizzazione, anziché essere annuale, fosse ogni 3 mesi? E se fosse continua? [**b.** Circa 12 167 euro; circa 12 202 euro; circa 12 214 euro]

62 **Irpef.** L'imposizione fiscale sul reddito delle persone fisiche IRPEF è un'imposta sui redditi complessivi del contribuente. Nel 2018 era definita in funzione di scaglioni di reddito, secondo quanto riportato nella tabella seguente.

Reddito r	Aliquota, $A(r)$	IRPEF (lorda), $I(r)$
0 (€) $< r \leq$ 15 000 (€)	23%	$0{,}23r$
15 000 (€) $< r \leq$ 28 000 (€)	27%	$3450 + 0{,}27(r - 15\,000)$
28 000 (€) $< r \leq$ 55 000 (€)	38%	$6960 + 0{,}38(r - 55\,000)$
55 000 (€) $< r \leq$ 75 000 (€)	41%	$17\,720 + 0{,}41(r - 55\,000)$
$r >$ 75 000 (€)	43%	$25\,420 + 0{,}43(r - 75\,000)$

La funzione che descrive l'imposta è particolare: è importante osservare che a partire dal secondo scaglione si somma la massima IRPEF dello scaglione precedente all'aliquota applicata solo alla parte di reddito eccedente rispetto al massimo reddito dello scaglione precedente.

a. Rappresenta in un piano cartesiano opportuno la funzione $A(r)$. Stabilisci se è una funzione continua e, nel caso non lo sia, classifica i punti di discontinuità.

b. Rappresenta in un piano cartesiano opportuno la funzione $I(r)$. Stabilisci se è una funzione continua e, nel caso non lo sia, classifica i punti di discontinuità.

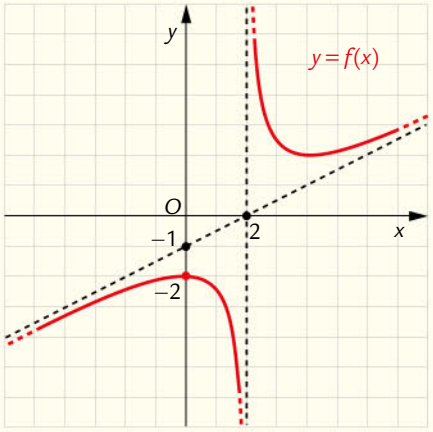
Supponi una rimodulazione delle quote IRPEF secondo cui l'aliquota dello scaglione 28 000 (€) $< r \leq$ 55 000 (€) scenda al 35% e si introduca un nuovo scaglione per i redditi superiori ai 120 000 euro con aliquota al 46%.

c. Scrivi, in tale ipotesi, l'espressione analitica della nuova funzione $I(r)$.

d. Calcola quanto risparmierebbe un contribuente con un reddito di 45 000 euro e quanto dovrebbe pagare in più un contribuente con un reddito di 300 000 euro. [**d.** risparmio = 510 euro; quota aggiuntiva = 4590 euro]

Interpretare grafici e dati

63 In figura è rappresentato il grafico di una funzione la cui equazione è della forma $y = ax + b + \dfrac{c}{x+d}$. In figura sono stati rappresentati, tratteggiati, gli asintoti.

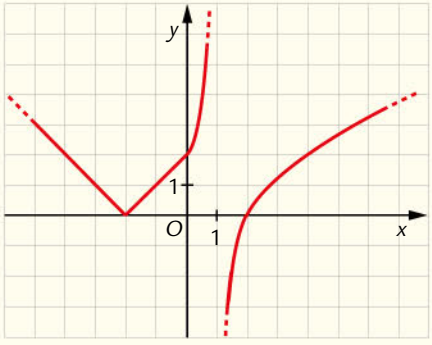


In base alle informazioni che puoi dedurre dal grafico, determina i valori di a, b, c, d.

$\left[a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 2, d = -2\right]$

64 In figura è rappresentato il grafico di una funzione del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} |x - a + 1| & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 4}{2x - 2} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

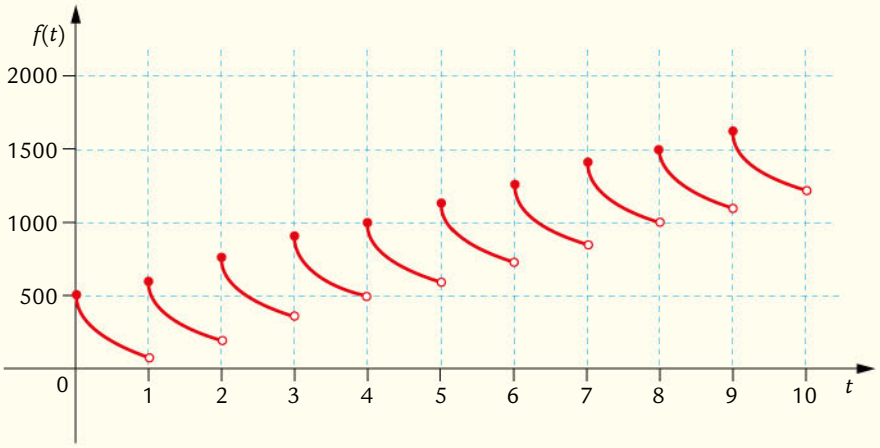


a. Stabilisci a quale valore di a corrisponde la funzione rappresentata e determina l'equazione del suo asintoto obliquo destro.

b. Verifica che esiste un altro valore di a per cui $f(x)$ è continua in $x = 0$ e traccia il grafico della funzione corrispondente.

[**a.** $a = -1, y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; **b.** $a = 3$]

65 **Cloro in una piscina.** Ogni giorno vengono dissolti 500 g di cloro in una piscina. In figura è mostrato il grafico che rappresenta la quantità $f(t)$ di cloro presente nella piscina dopo t giorni.



a. La funzione $f(t)$ è continua? In caso di risposta negativa, stabilisci in quali punti è discontinua e il tipo di discontinuità.

b. Qual è il significato in relazione al problema del $\lim_{t\to 2^-} f(t)$? E del $\lim_{t\to 2^+} f(t)$?

c. Qual è approssimativamente la quantità di cloro presente nella piscina alla fine del terzo giorno? E all'inizio del quarto?

Esporre, argomentare e dimostrare

66 Traccia il grafico e fornisci l'espressione analitica di una funzione definita e continua su tutto **R** tale che:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

67 Traccia il grafico e fornisci l'espressione analitica di una funzione che presenti un punto di discontinuità eliminabile per $x = 0$, un punto di salto per $x = 3$ e come asintoto per $x \to +\infty$ la retta di equazione $y = 1$.

68 Considera la funzione $f(x) = \sqrt{1-e^x}\cdot e^{\sqrt{x}}$ e spiega se ha senso calcolare il $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

69 Sia f una funzione dispari, definita e continua in **R**. Sapendo che $f(5) > 80$, possiamo affermare che esiste $x \in \mathbf{R}$ per cui $f(x) = -50$? Giustifica adeguatamente la risposta.

70 Sapendo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, è possibile calcolare $\lim_{x\to 0}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot f(x)\right]$? E sapendo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$? Giustifica adeguatamente la risposta.

71 Stabilisci se le seguenti affermazioni relative a due funzioni f e g sono vere o false; se sono vere giustificale, altrimenti fornisci un controesempio.

a. Se f è continua in x_0, allora $|f|$ è continua in x_0.

b. Se $|f|$ è continua in x_0, allora f è continua in x_0.

c. Se f è continua in x_0 e g è continua in x_0 anche la funzione $f+g$ è continua in x_0.

d. Se $f+g$ è continua in x_0, allora f è continua in x_0 e g è continua in x_0.

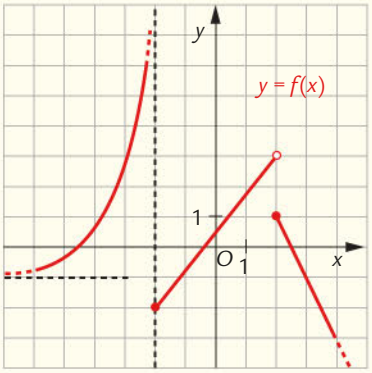
72 Sia f una funzione continua tale che l'equazione $f(x) = 5$ ha una e una sola soluzione in **R**, appartenente all'intervallo $[1, 2]$. Dimostra che se $f(2) = 7$, allora $f(3) > 5$.

73 Dimostra che un trapezio isoscele è circoscrivibile a una circonferenza se e solo se la base minore, il lato obliquo e la base maggiore sono in progressione aritmetica.

74 Dimostra per induzione che, per ogni $n \geq 1$, risulta $3+6+9+\ldots+3n = \frac{3}{2}n(n+1)$.

75 Dimostra per induzione che, per ogni $n \geq 1$, il numero $n^3 + 2n$ è divisibile per 3.

1 In figura sono rappresentati il grafico di una funzione di equazione $y = f(x)$ e i suoi asintoti (questi ultimi tratteggiati in nero). Completa le seguenti scritture.



a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots$

b. $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \ldots\ldots$

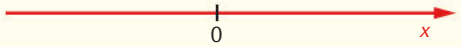
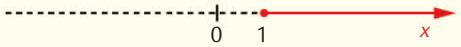
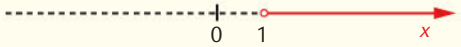
c. $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \ldots\ldots$

d. $\lim_{x\to2^-} f(x) = \ldots\ldots$

e. $\lim_{x\to2^+} f(x) = \ldots\ldots$

f. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$

2 Associa a ogni funzione nella prima colonna della tabella l'insieme rappresentato nella seconda colonna che costituisce il suo dominio.

a. $y = \ln(x-1)$	**A.** 
b. $y = \ln\lvert 1-x\rvert$	**B.** 
c. $y = \sqrt{x-1}$	**C.** 
d. $y = e^{1-x}$	**D.** 

3 Nel 2015, i ricavi di un negozio ammontavano a 50 000 euro, mentre i costi erano di 30 000 euro. Supponi che in ogni anno successivo al 2015 i ricavi aumentino del 5% rispetto all'anno precedente e i costi aumentino del 10% rispetto all'anno precedente. Sia G_n il guadagno nell'n-esimo anno dopo il 2015 ($n = 0$ corrisponde al 2015, $n = 1$ al 2016 e così via).

a. Completa la tabella:

Anno	2015	2016	2017
Ricavi	.....	.....	.....
Costi	.....	.....	.....
Guadagno	.....	.....	.....

b. Scrivi la formula che esprime G_n in funzione di n:

$G_n = \ldots\ldots$

c. Qual è il limite della successione G_n quando $n \to +\infty$? Come puoi interpretare questo risultato in relazione al problema?

Risposta: .....

4 La forza gravitazionale esercitata dalla Terra su una massa unitaria posta a distanza r dal centro della Terra è espressa della funzione:

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, R è il raggio della Terra e M è la massa della Terra. La funzione $F(r)$:

A è continua

B presenta una singolarità eliminabile per $r = \mathbf{R}$

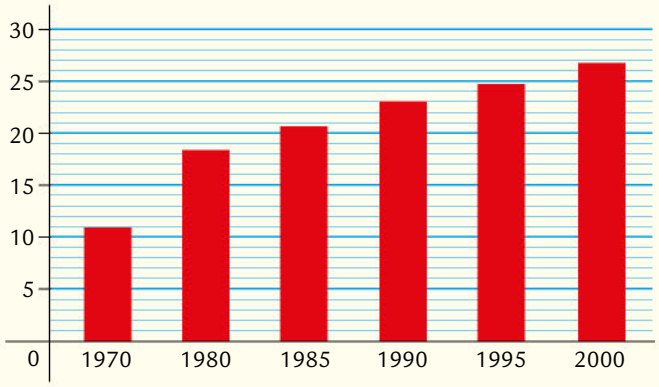
C presenta un salto per $r = \mathbf{R}$

D presenta un asintoto per $r = \mathbf{R}$

Tema G Limiti e continuità

5 Da una serie di censimenti vengono tratti i seguenti dati, che riguardano il numero di persone (in milioni) che vivono da sole negli USA.

1970	10,9
1980	18,3
1985	20,6
1990	23,0
1995	24,7
2000	26,7



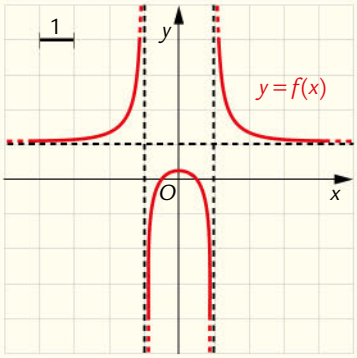
La funzione $f(x) = 2{,}6 \cdot \sqrt{x} + 11$, dove x è il numero degli anni dopo il 1970 ed $f(x)$ il corrispondente numero di persone che vivono sole, costituisce un buon modello che interpreta i dati ricavati. Secondo questo modello, in che anno ci saranno 35 milioni di americani a vivere soli?

A All'incirca nel 2055
B All'incirca nel 2065
C All'incirca nel 2045
D Mai

6 Qual è il risultato del limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-1)(6x+4)}{3x^2+5}$?

Risposta: .....

7 In relazione alla figura, dove sono rappresentati il grafico di una funzione $y = f(x)$ e i suoi asintoti, stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.



a. la funzione è invertibile V F
b. la funzione è continua in tutto **R** V F
c. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ V F
d. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ V F
e. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ V F
f. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ V F
g. il dominio della funzione $y = \sqrt{f(x)}$ è $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ V F
h. il dominio della funzione $y = \ln f(x)$ è lo stesso della funzione $y = \sqrt{f(x)}$ V F
i. il dominio della funzione $y = \ln|f(x)|$ è lo stesso della funzione $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ V F

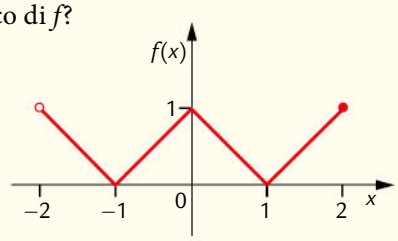
8 Determina il dominio della funzione:

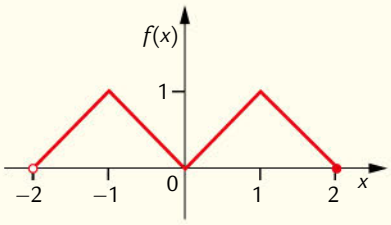
$$y = \frac{\ln(5-x)}{\ln(x-2)}$$

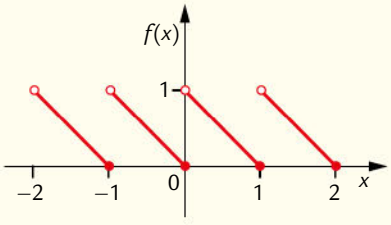
Risposta: .....

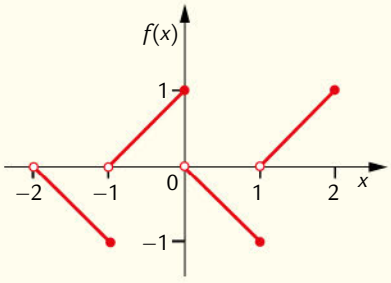
9 Considera la funzione così definita: $f(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{se} \quad -2<x\le -1\\ x+1 & \text{se} \quad -1<x\le 0\\ -x+1 & \text{se} \quad 0<x\le 1\\ x-1 & \text{se} \quad 1<x\le 2\end{cases}$

Qual è il grafico di f?

A 

B 

A 

B 

(Timss 2008)

10 In riferimento alla funzione f dell'esercizio precedente, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A È continua in tutto l'intervallo $(-2, 2]$
B È discontinua in $x=-1$
C È discontinua in $x=0$
D È discontinua in $x=1$

11 Il programma di formazione di un'azienda ha determinato che in media un nuovo operaio produce $P(s)$ pezzi al giorno dopo s giorni di lavoro, dove $P(s)=\dfrac{70s}{s+7}$.

a. Calcola $\lim\limits_{s\to+\infty} P(s)$. Risultato: .....

b. Spiega il significato del limite calcolato al punto precedente in relazione al problema.

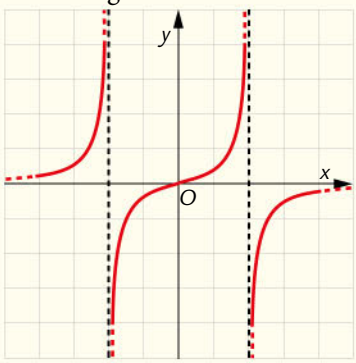
.....

.....

c. L'operaio potrà arrivare a produrre più di 100 pezzi al giorno? SÌ NO

Giustificazione: .....

12 Quale delle seguenti funzioni ha il grafico in figura?

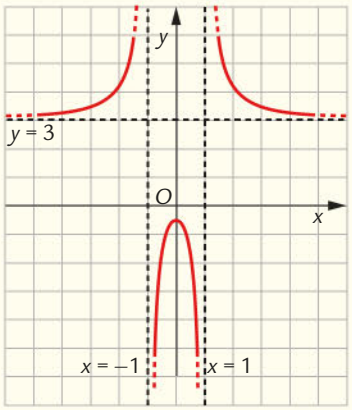


A $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ B $y=\dfrac{x}{x^2+4}$ C $y=\dfrac{x}{4-x^2}$ D $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

13 Per quale valore di k la funzione $f(x)=\begin{cases}x^2-3x & x\le 1\\ x+2k & x>1\end{cases}$ è continua in **R**?

A $k=-\dfrac{1}{2}$ B $k=-1$ C $k=-\dfrac{3}{2}$ D Per nessun valore di k

14 In figura sono rappresentati il grafico di una funzione di equazione del tipo $y = \frac{ax^2+1}{2x^2+b}$ e i suoi asintoti.



a. Qual è il valore di a?

Risposta: .....

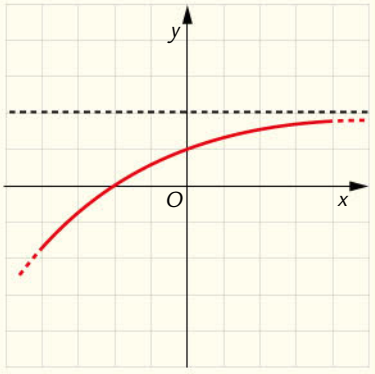
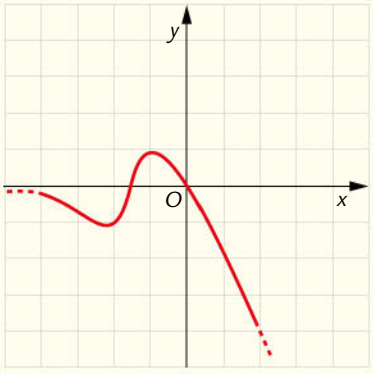
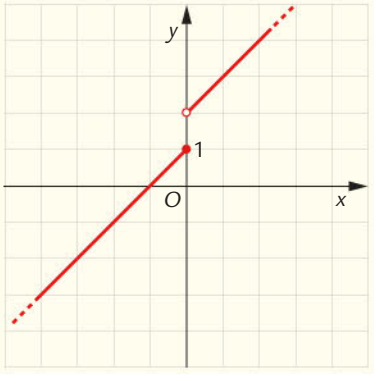
b. Qual è il valore di b?

Risposta: .....

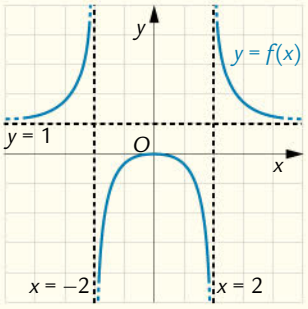
15 Secondo la legge di Boyle, in condizioni di temperatura costante la pressione P di un gas perfetto è inversamente proporzionale al suo volume V. Quando $V \to 0^+$, che cosa accade a P?

A Tende a 0
B Tende a 1
C Tende a $+\infty$
D Le informazioni sono insufficienti per stabilirlo

16 Ciascuna delle tre affermazioni nella prima riga della tabella è *falsa*. Stabilisci se la figura riportata al di sotto è un possibile controesempio.

Se una funzione f è strettamente crescente allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	Se una funzione f, definita in R, è tale che $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, allora la funzione è negativa per $x \le 0$.	Se una funzione f, definita in R, è tale che $f(0) = 1$, allora la funzione f è continua in $x = 0$.
		
È un controesempio? SÌ NO	È un controesempio? SÌ NO	È un controesempio? SÌ NO

17 In relazione al grafico in figura, di cui sono rappresentati gli asintoti, completa i limiti.



a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ .....

b. $\lim_{x\to0} f(x) =$ .....

c. $\lim_{x\to2^-} f(x) =$ .....

d. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ .....

18 La funzione $v(t) = 98\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right)$ costituisce un buon modello per descrivere la velocità $v(t)$ (in m/s) di un paracadutista di 70 kg, che si lancia da un aereo con velocità nulla prima di aprire il paracadute. Assumendo questo modello, rispondi alle seguenti domande.

a. Quale sarà la velocità del paracadutista dopo 20 s? Arrotonda il risultato a un numero intero.

Risposta: .....

b. A quale velocità limite tende ad avvicinarsi la velocità del paracadutista?

Risposta: .....

c. Dopo quanto tempo la velocità del paracadutista sarà il 90% della velocità limite di cui al punto precedente? Arrotonda il risultato a un numero intero.

Risposta: .....

19 Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. La funzione $y = \dfrac{1}{x^2+3x+5}$ ammette asintoti verticali. V F

b. La funzione $y = \dfrac{1}{x^2+3x-5}$ ammette asintoti verticali. V F

c. La funzione $y = \dfrac{x^2}{x^2+3x+5}$ ammette asintoti orizzontali. V F

d. La funzione $y = \dfrac{x^3}{x^2+3x+5}$ ammette asintoti orizzontali. V F

20 Il modello matematico che descrive l'evoluzione di una popolazione predice che quest'ultima tenderà, a lungo andare, a estinguersi. Quale può essere, secondo questo modello, la funzione che esprime il numero $N(t)$ di individui della popolazione al tempo t?

A $N(t) = \dfrac{1000e^{2t}}{4+e^{2t}}$ B $N(t) = \dfrac{1000}{4+e^{2t}}$ C $N(t) = \dfrac{1000}{4+e^{-2t}}$ D $N(t) = \dfrac{1000e^{2t}}{4+e^{-2t}}$

21 Il modello matematico che descrive l'evoluzione di una popolazione predice che quest'ultima tenderà, a lungo andare, a crescere indefinitamente. Quale può essere, secondo questo modello, la funzione che esprime il numero $N(t)$ di individui della popolazione al tempo t?

A $N(t) = \dfrac{1000e^{2t}}{4+e^{2t}}$ B $N(t) = \dfrac{1000}{4+e^{2t}}$ C $N(t) = \dfrac{1000}{4+e^{-2t}}$ D $N(t) = \dfrac{1000e^{2t}}{4+e^{-2t}}$

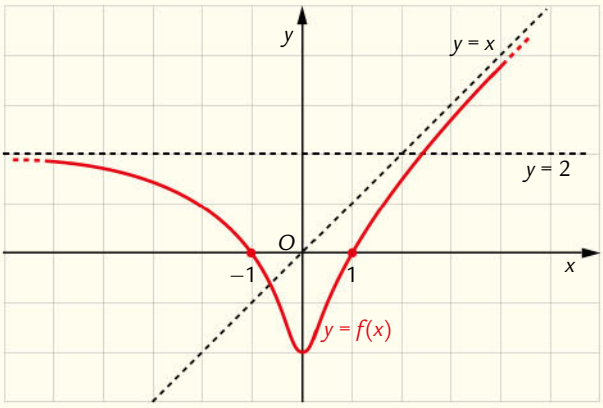
22 Il modello matematico che descrive l'evoluzione di una popolazione predice che quest'ultima tenderà, a lungo andare, ad avvicinarsi a una soglia limite di 200 esemplari. Quale può essere, secondo questo modello, la funzione che esprime il numero $N(t)$ di individui della popolazione al tempo t?

A $N(t) = \dfrac{1000e^{2t}}{1+5e^{2t}}$ B $N(t) = \dfrac{1000}{4+e^{2t}}$ C $N(t) = \dfrac{1000e^{2t}}{1+4e^{2t}}$ D $N(t) = \dfrac{1000e^{-2t}}{4+e^{-2t}}$

23 Nella figura sono rappresentati il grafico di una funzione $y = f(x)$ e i suoi asintoti.

a. Qual è il dominio della funzione $y = \dfrac{1}{f(x)}$?

Risposta: .....



b. Scegli l'affermazione corretta a proposito degli asintoti verticali della funzione $y = \dfrac{1}{f(x)}$ e, nel caso scegliessi la seconda o la terza affermazione, completala:

A la funzione è priva di asintoti verticali

B la funzione presenta un solo asintoto verticale, di equazione $x =$ .....

C la funzione presenta esattamente due asintoti verticali, di equazione $x =$ ..... e $x =$ .....

c. Scegli l'affermazione corretta a proposito degli asintoti orizzontali della funzione $y = \dfrac{1}{f(x)}$ e, nel caso scegliessi la seconda o la terza affermazione, completala:

A la funzione è priva di asintoti orizzontali

B la funzione presenta come asintoto orizzontale, sia a destra che a sinistra, la retta di equazione $y =$ .....

C la funzione presenta come asintoto orizzontale a destra la retta di equazione $y =$ ..... e come asintoto orizzontale a sinistra la retta di equazione $y =$ .....

1 L'insieme delle soluzioni della disequazione

$x\,|\,x-1\,|<2$

è della forma:

A (a, b)
B $(b, +\infty)$
C $(-\infty, a)\cup(b, +\infty)$
D $(-\infty, a)$

(Analisi matematica 1, novembre 2008, Ingegneria, Politecnico di Milano)

2 Determina l'insieme in cui la funzione

$$f(x)=\frac{\ln(x+6)}{\ln(x-6)}$$

assume valori strettamente negativi.

(Istituzioni di matematiche, settembre 2010, Biologia, Università di Pavia) $[6<x<7]$

3 Determina l'insieme in cui la funzione

$$f(x)=(e^{6x}-e^{x})(6x-2)$$

assume valori strettamente negativi.

(Istituzioni di matematiche, giugno 2010, Biologia, Università di Pavia) $\left[0<x<\frac{1}{3}\right]$

4 Sia $g(x)=(7x-2)\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$. Allora $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ è:

A 7
B -7
C $-\infty$
D non esiste

(Analisi matematica 1, gennaio 2009, Ingegneria, Politecnico di Torino)

5 Data la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{a} & x>0\\ 9^{x+a^2} & x\le 0\end{cases}$$

determina i valori di $a\in\mathbf{R}$ per cui la funzione f è continua in $\mathbf{R}$.

(Analisi 1, febbraio 2010, Informatica, Università di Torino) $\left[a=0\vee a=\frac{1}{2}\right]$

6 Data la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{2x^3} & x>0\\ 2k^2+kx^3-x & x\le 0\end{cases}$$

determina per quali valori di k la funzione f è continua in $x=0$.

(Istituzioni di matematiche 1, luglio 2011, Architettura, Università di Roma) $\left[k=\pm\frac{1}{2}\right]$

7 Calcola $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+10x^2}{x+x^2}+\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

(Analisi matematica 1, gennaio 2008, Ingegneria, Università di Pavia) [11]

8 Calcola $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{7x^3-1}{(1-x)^3}+2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+3e^{3x}\right]$.

(Analisi matematica 1, febbraio 2009, Ingegneria, Università di Pavia) [2]

9 Calcola $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_{\pi}(1+\pi x)}{x}$.

(Analisi matematica 1, Ingegneria, Università di Trieste 2001) $\left[\frac{\pi}{\ln\pi}\right]$

10 Considera due successioni a_n e b_n tali che $a_n\to 0^+$ per $n\to+\infty$ e $0\le b_n\le 3$. Stabilisci, giustificando la risposta, se le seguenti proposizioni sono vere. Fornisci un controesempio in caso di proposizione falsa.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=+\infty$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n^2=0$

(Analisi matematica 1, Ingegneria, Università di Roma 2009)

11 Il grafico in figura rappresenta quello di una delle seguenti funzioni, limitatamente all'intervallo [0, 1].

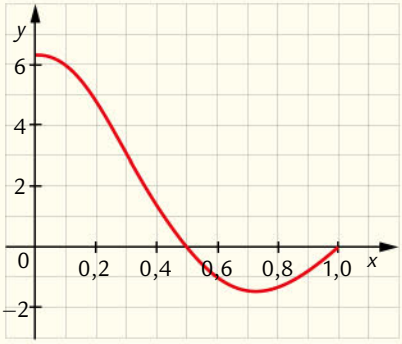
A $f(x)=\dfrac{\sin(2\pi x)}{x}$

B $g(x)=x-x^3$

C $h(x)=(1-x)\dfrac{e^x-1}{x}$

D $i(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}(1-2x)^2$

Quale?
Giustifica adeguatamente la risposta.



(Analisi matematica 1, Corso di laurea in scienze statistiche, Università di Milano 2010)

Compito di realtà 1

Evoluzione di una popolazione di camosci

In un parco naturale vengono immessi 72 camosci. A causa di limitazioni dovute alle risorse di cibo che l'ambiente può fornire, si stima che a lungo andare la popolazione di camosci potrà avvicinarsi sempre di più alla soglia limite di 1800 esemplari, senza tuttavia mai superarla.



La crescita della popolazione di camosci può essere modellizzata tramite una funzione della forma:

$$P(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 2^{-\frac{t}{5}}}, \text{ con } t \geq 0$$

dove $P(t)$ rappresenta con buona approssimazione il numero di camosci dopo un tempo t (misurato in anni) dal momento della loro immissione ($t = 0$), mentre a e b sono parametri positivi.

1 In base ai dati a disposizione, ricava i valori di a e b che si adattano alla situazione descritta.

2 Stima, in base al modello che hai determinato, quale sarà il numero di camosci dopo 15 anni dalla loro immissione.

3 Puoi affermare che $P(t)$ è una funzione crescente del tempo t?

Trascorsi 15 anni, purtroppo, la popolazione di camosci inizia a diminuire a causa di una malattia infettiva che porterà progressivamente alla morte di tutti gli esemplari.

4 Stabilisci quale delle seguenti funzioni può descrivere l'evoluzione della popolazione, per $t \geq 15$. Motiva adeguatamente la risposta.

A $P(t) = \dfrac{450}{(t+15)^2 + 1}$

B $P(t) = \dfrac{450}{(t-15)^4 + 1}$

C $P(t) = \dfrac{450t^2}{(t-15)^2 + 1}$

D $P(t) = \dfrac{450t^4}{(t-15)^4 + 1}$

5 In base al modello individuato al punto **4**, dopo quanto tempo dalla comparsa della malattia il numero dei camosci presenti nel parco naturale ritornerà a essere lo stesso iniziale, cioè 72?

6 Traccia il grafico probabile, per $t \geq 0$, della funzione $P(t)$, definita a tratti, che descrive l'evoluzione della popolazione di camosci nell'ipotesi di comparsa della malattia, assumendo che l'evoluzione per $t \geq 15$ sia modellizzata dalla funzione individuata al punto **4**. Analizza in particolare che cosa accade per $t = 15$ dal punto di vista della continuità.

Risposte p. 575

Compito di realtà 2

Raffreddamento di un oggetto



In base alla legge di raffreddamento di Newton, la temperatura (in °C) di un corpo posto a raffreddare in un ambiente in cui la temperatura è costante uguale a T_A, varia secondo la legge:

$$T(t) = T_A + (T_0 - T_A)e^{-kt}$$

dove:

- **t è il tempo, misurato in ore, trascorso dall'istante iniziale ($t = 0$) in cui il corpo è stato posto a raffreddare;**
- **T_0 è la temperatura (in °C) del corpo all'istante $t = 0$;**
- **k è una costante positiva che dipende dal materiale di cui è costituito il corpo.**

Un oggetto prodotto industrialmente, la cui temperatura iniziale è di 220 °C, è posto a raffreddare nell'istante $t = 0$ in un ambiente la cui temperatura è costante ed è uguale a 20 °C.

1 Scrivi la funzione $T_1(t)$ che esprime la temperatura del corpo in funzione del tempo t trascorso dall'istante iniziale, supponendo $k = 0{,}5$. Giustifica perché si tratta di una funzione decrescente.

2 Stabilisci qual è la temperatura dell'oggetto dopo 4 ore.

3 Calcola il limite della funzione $T_1(t)$ per $t \to +\infty$ e interpreta il risultato in relazione al problema.

4 Stabilisci dopo quanto tempo la temperatura dell'oggetto sarà pari al 50% di quella iniziale. Esprimi il risultato sia in forma esatta sia in modo approssimato, arrotondando ai minuti.

Considera ora la successione d_n che esprime di quanto è diminuita la temperatura dell'oggetto tra l'ora n e l'ora $n + 1$, essendo n il numero di ore trascorse dall'istante iniziale $t = 0$.

5 Scrivi il termine generale della successione d_n e calcolane il limite per $n \to +\infty$. Interpreta il risultato in relazione al problema.

Un secondo oggetto, la cui temperatura iniziale è nuovamente 220 °C, viene posto a raffreddare nell'istante $t = 0$ nello stesso ambiente del primo. Questo secondo oggetto è costituito, però, di un materiale, che raffredda più velocemente: precisamente, il secondo oggetto raggiunge le stesse temperature del primo nella metà del tempo.

6 Scrivi la funzione $T_2(t)$ che esprime la temperatura del secondo oggetto in funzione del tempo t (in ore) trascorso dall'istante iniziale $t = 0$. Dopo quanto tempo la temperatura del secondo oggetto sarà la metà di quella del primo?

7 Calcola i seguenti limiti, interpretando i risultati in relazione al problema.

a. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{T_1(t)}{T_2(t)}$

b. $\lim\limits_{t \to +\infty} (T_1(t) - T_2(t))$

c. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{T_1(t) - T_A}{T_2(t) - T_A}$

Risposte p. 576

TEMA H

Calcolo differenziale



Dopo avere studiato il fondamentale concetto di *limite*, in questo Tema lo metteremo a frutto introducendo tramite esso uno strumento del tutto nuovo: quello di *derivata* di una funzione.

Dal punto di vista geometrico, il concetto di derivata nasce dal problema della ricerca della **retta tangente a una curva** in un suo punto, mentre dal punto di vista applicativo la derivata è lo strumento che serve per descrivere la **velocità con cui varia una grandezza**.

Studiando le derivate e le loro applicazioni, intraprenderemo lo studio di quella parte dell'analisi infinitesimale chiamata *calcolo differenziale*.

Unità 5
La derivata

Unità 6
Teoremi sulle funzioni derivabili

Unità 7
Lo studio di funzione

PREREQUISITI

- Il concetto di limite
- Il calcolo dei limiti
- Il concetto di continuità

COMPETENZE

- Utilizzare gli strumenti del calcolo differenziale nella descrizione e modellizzazione di fenomeni di varia natura

Unità 5

Tema H

La derivata

- Approfondimenti
- Matematica nella storia
- Figure animate
- Con GeoGebra
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

1. Il concetto di derivata

Il problema della retta tangente

Consideriamo il seguente problema.

◆ **PROBLEMA**

Nello studio delle coniche abbiamo definito il concetto di retta tangente a una conica in un suo punto. Come è possibile definire il concetto di retta tangente a una curva in un suo punto per una curva qualsiasi (non necessariamente una conica)?

Come primo tentativo, potremmo essere portati a rispondere: è l'unica retta passante per P che non interseca la curva in altri punti. Tuttavia è facile rendersi conto che questa definizione non si adatta, per esempio, alle curve disegnate in **Fig. 1** e in **Fig. 2**.

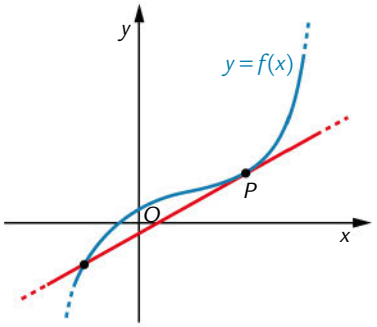


Figura 1 La retta tangente alla curva in P interseca la curva in un altro punto.

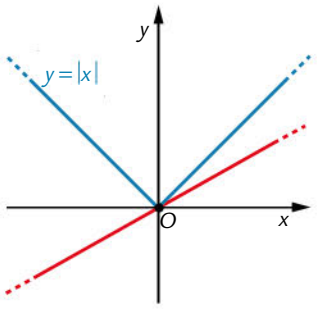


Figura 2 Ci sono infinite rette passanti per O che intersecano la curva in un solo punto, ma intuitivamente non siamo disposti a ritenere tali rette tangenti alla curva.

Un altro tentativo potrebbe essere quello di ripetere la definizione vista per le coniche: una retta tangente a una curva in un punto P è la retta che ha una *intersezione doppia* con la curva in P. Ma anche in questo caso, passando dall'ambito delle coniche a una curva generica, sorgono problemi. Per esempio, supponiamo di voler determinare la retta tangente al grafico della funzione $y = \sin x$ nell'origine e tentiamo di applicare il procedimento che utilizzavamo per le coniche. Poniamo dunque a sistema il fascio di rette passanti per l'origine con l'equazione della curva; otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = mx \end{cases}$$

la cui equazione risolvente è:

$$\sin x = mx$$

Questa equazione però *non* è polinomiale, dunque il metodo cui eravamo abituati dalla geometria analitica crolla nel presupposto teorico, perché non c'è modo di contare la molteplicità delle soluzioni di questa equazione, quindi di imporre che la soluzione $x = 0$ sia doppia.

Ci rendiamo conto perciò che, sebbene geometricamente il concetto di retta tangente sembri intuitivo, non è così ovvio definirlo rigorosamente per una generica curva. Abbandonata la speranza di poter definire il concetto di retta tangente in base al numero dei punti di intersezione con la curva, ci rendiamo conto che, per risolvere il problema, dobbiamo introdurre qualche idea nuova. L'elemento chiave per fare

DALLA STORIA

Furono principalmente **Leibniz** (1646-1716) e **Newton** (1642-1727) a sviluppare le idee che diedero origine, tra la fine del Seicento e l'inizio del Settecento, al calcolo differenziale, cioè al calcolo con le derivate. *Vedi* in proposito la scheda *Matematica nella storia* disponibile in pdf.

emergere queste nuove idee è guardare il problema da un punto di vista *dinamico*. Data la funzione $y = f(x)$ e un punto $P(x_0, f(x_0))$ appartenente al suo grafico, per definire la retta tangente al grafico di f in P consideriamo anzitutto una retta passante per P e *secante* la curva in un ulteriore punto Q, «vicino» a P, di ascissa $x_0 + h$ (**Fig. 3**).

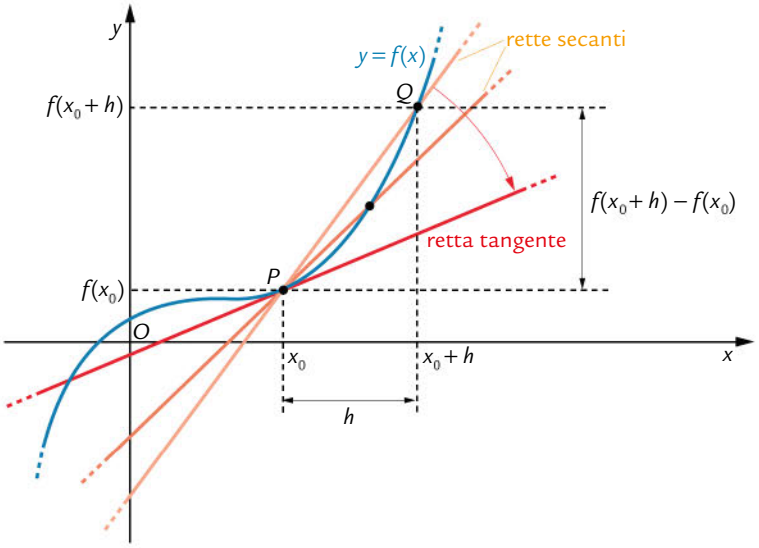


Figura 3

Figura animata
Costruzione della retta tangente al grafico di una funzione

Sappiamo che il coefficiente angolare della retta PQ è espresso dalla formula:

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e che la retta PQ ha equazione:

$$y - f(x_0) = m_{PQ}(x - x_0)$$

Immaginiamo ora che h tenda a 0. Il punto Q si muove sul grafico di f e si avvicina a P, fino a sovrapporsi a esso quando $h = 0$. Contestualmente la *retta secante* ruota intorno a P, fino ad avvicinarsi a una posizione «limite» che intuitivamente possiamo identificare con quella della *retta tangente*. Consideriamo allora il limite cui tende il coefficiente angolare della retta PQ quando h tende a 0:

$$\lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad [1]$$

Matematica nella storia
Nascita e sviluppo del concetto di derivata

Se questo limite esiste ed è finito, possiamo definire la retta tangente come la retta passante per P e avente questo coefficiente angolare. Grazie al concetto di *limite*, siamo così riusciti a trovare una buona definizione di *retta tangente* a una *curva*.

Il problema della velocità istantanea

Consideriamo un oggetto, lasciato cadere da una certa altezza. La velocità dell'oggetto cambia a ogni istante. Come possiamo definire e calcolare la velocità dell'oggetto *in un dato istante*? Supponiamo di conoscere la legge oraria $s(t)$ dell'oggetto, cioè la funzione che esprime la posizione dell'oggetto in funzione del tempo. Sappiamo che la *velocità media* dell'oggetto in un intervallo di tempo $[t_0, t_0 + h]$ è data dal rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato, cioè dal rapporto:

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Tale velocità media sarà un'approssimazione tanto migliore del modulo della *velocità istantanea* in t_0 quanto più l'intervallo temporale è piccolo. È ragionevole allora considerare il limite al quale tende la velocità media quando h tende a 0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \qquad [2]$$

Se questo limite è finito, possiamo assumere che il suo valore sia il modulo della velocità istantanea in t_0.

La derivata in un punto

Svincolandoci dal problema della retta tangente e da quello della velocità istantanea, possiamo costruire e studiare un limite analogo ai limiti [1] e [2] per una funzione qualsiasi.

1. Consideriamo una funzione f definita in un intorno di x_0.
2. Consideriamo un piccolo incremento h di x_0 e il punto $x_0 + h$ (con $h \neq 0$ e h piccolo a sufficienza perché $x_0 + h$ continui ad appartenere al dominio di f).
3. Definiamo il **rapporto incrementale** della funzione nel punto x_0, relativo all'incremento h, come il rapporto tra l'incremento registrato dalla funzione quando la variabile indipendente passa dal valore x_0 al valore $x_0 + h$ e l'incremento stesso:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Il significato geometrico del rapporto incrementale è illustrato in **Fig. 4**.

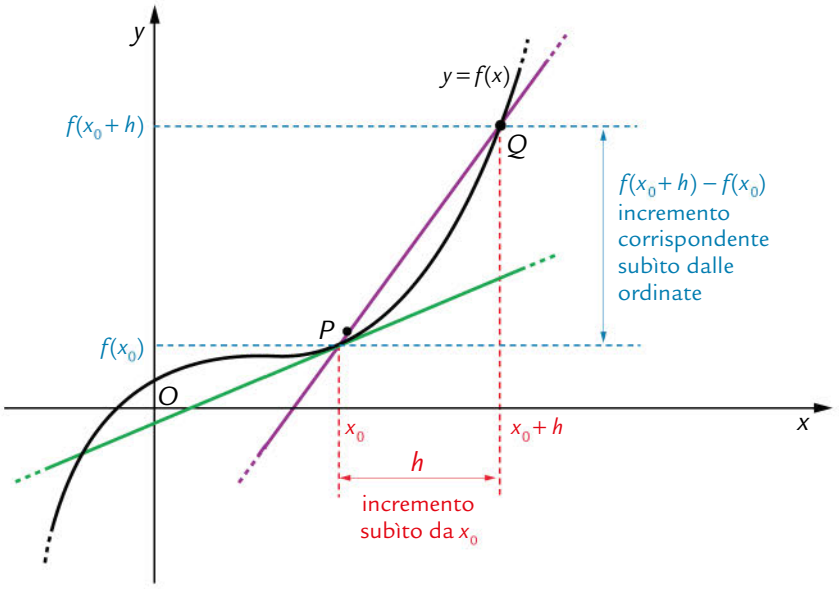


Figura 4 Il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta PQ.

4. Calcoliamo il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale: la derivata è precisamente questo limite.

Con GeoGebra
Derivata di una funzione in un punto

DEFINIZIONE | Derivata di una funzione in un punto

Una funzione di equazione $y = f(x)$, definita in un intorno (completo) di x_0, si dice **derivabile** in x_0 se

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad [3]$$

esiste ed è **finito**. Questo limite prende il nome di **derivata prima** (o semplicemente **derivata**) di f in x_0 e si indica con il simbolo $f'(x_0)$.

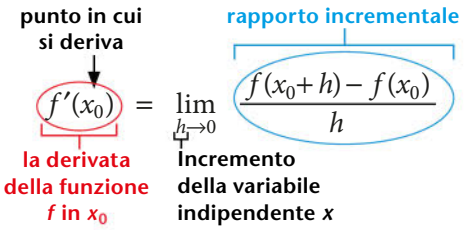
ALTRE NOTAZIONI

Per indicare la derivata di f in x_0, oltre a $f'(x_0)$, sono in uso anche le seguenti notazioni:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0};\ Df(x_0);\ \dot{f}(x_0)$$

La prima notazione, $\frac{df}{dx}$, è detta **notazione di Leibniz**.

Schematicamente:



ESEMPIO Calcolo della derivata di una funzione in un punto in base alla definizione

Calcoliamo la derivata della seguente funzione nel punto indicato:

$f(x) = x^2$ in $x_0 = 2$

Dobbiamo calcolare il limite [3] con $x_0 = 2$ e $f(x) = x^2$; abbiamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \qquad \text{Limite [3] con } x_0 = 2$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \qquad \text{In questo caso } f(x) = x^2$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4+h^2+4h-4}{h} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

Dunque la funzione è derivabile in $x_0 = 2$ e risulta $f'(2) = 4$. Ne possiamo dedurre l'interpretazione grafica riportata in **Fig. 5**.

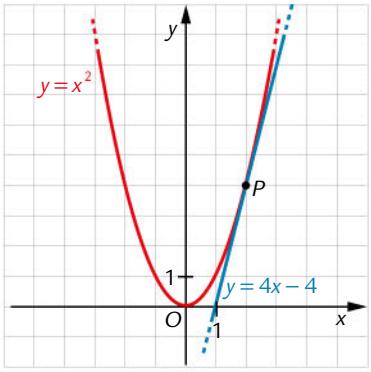


Figura 5 Il coefficiente angolare della tangente alla parabola di equazione $f(x) = x^2$ nel suo punto di ascissa 2 è $f'(2) = 4$.

L'interpretazione del *rapporto incrementale* come velocità *media* e della *derivata* come velocità *istantanea* può essere estesa in svariati contesti: ogni qualvolta $f(t)$ è una funzione che esprime il valore di una grandezza variabile nel tempo, il rapporto incrementale della funzione in un intervallo di tempo Δt si può interpretare come velocità media (o tasso di variazione medio) di quella grandezza nell'intervallo considerato, mentre la derivata $f'(t_0)$ della funzione si può interpretare come velocità istantanea (o tasso di variazione istantaneo) di quella grandezza nell'istante t_0.

ESEMPIO

Funzione	Significato del rapporto incrementale	Significato della derivata
$T(t)$ è la funzione che esprime la temperatura (in gradi Celsius) di un certo ambiente in funzione del tempo t (in secondi).	Il rapporto: $\frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$ rappresenta la velocità media di variazione della temperatura nell'intervallo $[t_0, t_0+\Delta t]$.	La derivata: $T'(t)$ rappresenta la velocità di variazione della temperatura all'istante t_0. Per esempio, se fosse: $T(t_0) = 10$ e $T'(t_0) = -0{,}1$ vorrebbe dire che nell'istante t_0 la temperatura è di 10 °C e in quell'istante sta *decrescendo* (la derivata è *negativa*) alla velocità di 0,1 °C/s.

L'unità di misura della derivata di una funzione $y = f(x)$ in un punto (come suggerito dalla notazione di Leibniz) è il rapporto tra l'unità di misura della variabile dipendente (y) e l'unità di misura della variabile indipendente (x).

ALTRE NOTAZIONI

Per indicare la derivata prima di $y = f(x)$, oltre a f', sono in uso le seguenti notazioni:

$$y'; Df; \frac{df}{dx}; \dot{f}$$

Per indicare la derivata seconda di f, oltre a f'', sono in uso anche le seguenti notazioni:

$$y''; D^2f; \frac{d^2f}{dx^2}; \ddot{f}$$

Esercizi p. 286

La funzione derivata e le derivate successive

Data una funzione $f(x)$ si chiama funzione **derivata** (prima) di $f(x)$, e si indica con il simbolo $f'(x)$, la funzione che:

- ha come dominio D l'insieme dei valori di x per cui $f(x)$ è derivabile;
- associa a ogni $x \in D$ la corrispondente derivata della funzione f calcolata nel punto x.

Una volta calcolata la funzione $f'(x)$, possiamo ripetere il ragionamento, calcolando la derivata di $f'(x)$: si ottiene in questo modo la **derivata seconda** della funzione $f(x)$, che si indica con il simbolo $f''(x)$. In modo analogo si può definire la **derivata di ordine** n, o derivata n-esima, che si indica con il simbolo $f^{(n)}(x)$.
Una funzione $f(x)$ si dice:

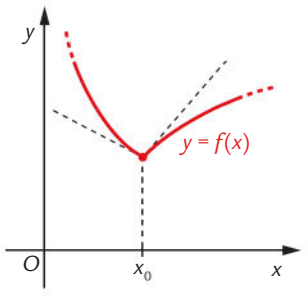
- derivabile due volte in x_0 se $f(x)$ e $f'(x)$ sono derivabili in x_0;
- derivabile tre volte in x_0 se $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sono derivabili in x_0;
- derivabile n volte in x_0 se $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ sono derivabili in x_0.

2. Continuità e derivabilità

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che una funzione è *derivabile* in un punto x_0 se il limite [3] *esiste* ed è *finito*. Geometricamente, ciò significa che nel punto x_0 *deve esistere* la tangente al grafico della funzione e quest'ultima **non** deve essere *verticale*; se cade una di queste due condizioni siamo in presenza di un punto in cui la funzione **non** è derivabile (**Fig. 6**).

RIMANDO

Analizzeremo più in dettaglio le varie tipologie dei punti di non derivabilità nel Paragrafo 6.



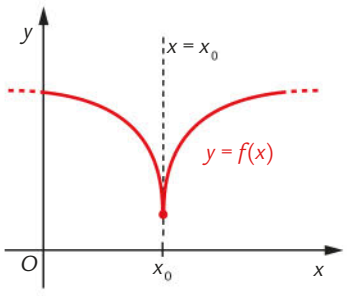


Figura 6

a. Non esiste la retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0: infatti nell'intorno sinistro e destro di x_0 il grafico ammette tangenti *diverse*. Nel punto x_0 la funzione **non** è derivabile.

b. La retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0 esiste, ma è *verticale*. Anche in questo caso nel punto di ascissa x_0 la funzione **non** è derivabile.

In particolare, la continuità in un punto x_0 **non** è sufficiente a garantire la derivabilità in x_0.

ESEMPIO Funzione continua ma non derivabile in un punto

Dimostriamo che la funzione $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$.

La funzione $f(x) = |x|$ è continua in tutto $\mathbf{R}$, quindi in particolare in $x = 0$. Tuttavia **non** è derivabile in 0; infatti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \qquad \text{Limite [3] con } x_0 = 0$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$\text{e } \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \textit{ non} \text{ esiste poiché } \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \text{ mentre } \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Graficamente la non derivabilità in $x = 0$ si traduce nel fatto che in (0, 0) non è definita la retta tangente al grafico di $f(x) = |x|$ (**Fig. 7**).

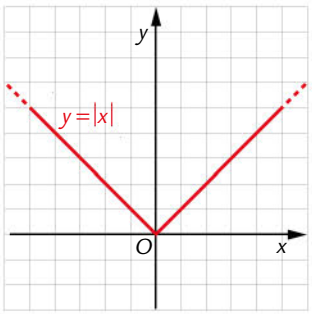


Figura 7 Non esiste alcuna retta passante per l'origine e tangente al grafico della funzione $f(x) = |x|$.

Derivata destra e derivata sinistra

La funzione $f(x) = |x|$ **non** è derivabile in $x = 0$, tuttavia abbiamo visto nell'esempio precedente che esistono finiti i limiti del rapporto incrementale per $h \to 0^+$ e per $h \to 0^-$: per questo motivo si dice che la funzione è derivabile a destra e a sinistra in $x = 0$, come precisato nella seguente definizione.

DEFINIZIONE | Derivata destra e derivata sinistra

Una funzione di equazione $y = f(x)$, definita in un intorno di x_0, si dice **derivabile a destra** o **a sinistra** in x_0 rispettivamente se:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{o} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

esiste ed è finito. Questi limiti prendono rispettivamente il nome di **derivata destra** e **derivata sinistra** di f in x_0 e si indicano con i simboli:

$$f'_+(x_0) \quad \text{e} \quad f'_-(x_0)$$

ESEMPIO Derivata destra e derivata sinistra

Nel caso della funzione $f(x) = |x|$, possiamo scrivere:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \qquad \text{e} \qquad f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Se una funzione è definita soltanto in un intorno destro (sinistro) di x_0, si dice derivabile in x_0 se è derivabile a destra (sinistra) in x_0.
Di conseguenza, dire che f è derivabile nell'intervallo $[a, b]$ significa dire che f è derivabile per ogni $x \in (a, b)$ e che è derivabile a destra in a e a sinistra in b.

Continuità e derivabilità

Abbiamo già osservato che la continuità **non** implica la derivabilità; vale invece il viceversa, come espresso dal seguente teorema.

TEOREMA 1 | Derivabilità e continuità

Se f è una funzione **derivabile** in x_0, allora f è **continua** in x_0.

DIMOSTRAZIONE

- Dobbiamo provare che f è continua in x_0, ossia che risulta:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se poniamo $x = x_0 + h$ e perciò scriviamo $h \to 0$ al posto di $x \to x_0$, la tesi diventa:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

ossia:

$$\lim_{h\to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0$$

- Abbiamo:

$$\lim_{h\to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h\to 0} h \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Poiché f è derivabile in x_0, per $h \to 0$ il secondo fattore dell'ultimo limite scritto tende a $f'(x_0) \in \mathbf{R}$, mentre il primo fattore tende ovviamente a 0. Poiché i due fattori tendono a due limiti finiti, possiamo applicare il teorema sul limite di un prodotto e continuare la catena di uguaglianze come segue:

$$\lim_{h\to 0} h \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0 \cdot f'(x_0) = 0$$

Esercizi p. 291

3. Derivate delle funzioni elementari

Il calcolo delle derivate **non** viene generalmente effettuato tramite la *definizione* (come limite del rapporto incrementale), perché sarebbe troppo laborioso. Si ricorre invece alla *tabella delle derivate delle funzioni elementari*, cui giungeremo alla fine di questo paragrafo, e ad alcune *regole di derivazione*, che saranno oggetto dei prossimi paragrafi.

Le derivate della funzione costante e della funzione potenza

TEOREMA 2 | Derivata della funzione costante

La funzione **costante** $f(x) = c$, con $c \in \mathbf{R}$, è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la sua derivata è la **funzione nulla**:

$$f'(x) = 0$$

DIMOSTRAZIONE

In base alla definizione, la derivata della funzione costante è per ogni $x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

TEOREMA 3 | Derivata della funzione identica

La funzione **identica** $f(x) = x$ è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la sua derivata è la **funzione costante uguale a 1**:

$$f'(x) = 1$$

DIMOSTRAZIONE

In base alla definizione, la derivata della funzione identica è per ogni $x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Il **Teorema 3** può essere interpretato come teorema che fornisce la derivata della funzione $f(x) = x^n$ nel caso particolare in cui $n = 1$. Studiamo ora le derivate delle funzioni potenza $f(x) = x^n$, con $n > 1$.

Approfondimento
Dimostrazione alternativa del teorema sulla derivata di una funzione potenza a esponente positivo

TEOREMA 4 | Derivata della funzione potenza a esponente intero positivo

La funzione **potenza** $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbf{N}$ e $n > 1$, è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la sua derivata è la funzione:

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

Definizione di derivata

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} =$$

Sviluppo binomiale

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h} =$$

Semplificando

$$= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}}_{\text{per } n>1 \text{ questi termini contengono tutti un fattore uguale a } h\text{, quindi tendono a 0 quando } h \text{ tende a 0}}\right] = nx^{n-1}$$

RICORDA

In base al teorema del binomio di Newton:

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k =$$

$$= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n$$

ESEMPI

a. La derivata di $f(x) = x^2$ è $f'(x) = 2x^{2-1}$, cioè $f'(x) = 2x$.

b. La derivata di $f(x) = x^3$ è $f'(x) = 3x^{3-1}$, cioè $f'(x) = 3x^2$.

Con una dimostrazione simile a quella del **Teorema 4** si potrebbe dimostrare il seguente teorema, che estende la regola di derivazione delle funzioni potenza anche al caso in cui l'esponente **non** sia un numero naturale.

TEOREMA 5 | Derivata della funzione potenza a esponente reale

Per ogni valore di x per cui la funzione **potenza** $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbf{R}$, è derivabile risulta:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

La formula fornita dal **Teorema 5** permette di calcolare le derivate di tutte le funzioni che possono essere scritte sotto forma di potenza, quali per esempio:

$$\sqrt{x} \qquad \sqrt[3]{x} \qquad \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x^2}$$

ESEMPI Derivate di funzioni potenza

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \frac{1}{x}$ b. $f(x) = \sqrt{x}$ c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

a. Osserviamo che $f(x) = x^{-1}$, dunque:

$$f'(x) = \underbrace{-1 \cdot x^{-1-1}}_{\alpha x^{\alpha-1}} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \alpha = -1$$

b. Osserviamo che $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, dunque:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}}_{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \alpha = \frac{1}{2}$$

c. Osserviamo che $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, dunque:

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}-1}}_{\alpha x^{\alpha-1}} = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \qquad \alpha = -\frac{1}{3}$$

ATTENZIONE!

Una funzione potenza può non essere derivabile in $x = 0$; per esempio, puoi verificare in base alla definizione che

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

non è derivabile in $x = 0$ poiché il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale è $+\infty$. Per questa ragione l'insieme dei valori di x per cui una funzione potenza è derivabile può variare: per esempio, è $\mathbf{R}$ per la funzione $f(x) = x^4$, è $\mathbf{R} - \{0\}$ per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, è $\mathbf{R}^+$ per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$.

Le derivate delle funzioni esponenziali e logaritmiche

TEOREMA 6 | Derivata della funzione esponenziale

La funzione **esponenziale** $f(x) = a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la sua derivata è la funzione $f'(x) = a^x \ln a$.

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \qquad \text{Definizione di derivata}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \qquad f(x) = a^x$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = \qquad \text{Raccogliendo } a^x \text{ al numeratore}$$

$$= a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \ln a \qquad \text{Limite notevole [16], vedi Teorema 10 dell'Unità 2}$$

TEOREMA 7 | Derivata della funzione logaritmica

La funzione **logaritmica** $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, è derivabile per ogni $x > 0$ e la sua derivata è la funzione $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$.

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$ Definizione di derivata

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} =$$ $f(x) = \log_a x$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} =$$ Ricorda che $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} =$$ Moltiplicando e dividendo il denominatore per x, in modo da ricondurci al limite notevole [15] (Teorema 10 dell'Unità 2)

$\frac{h}{x} \to \frac{1}{\ln a}$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$ Il limite è stato calcolato eseguendo implicitamente la sostituzione $\frac{h}{x} = t$

ESEMPI

a. La derivata di $f(x) = 2^x$ è $f'(x) = 2^x \ln 2$.

b. La derivata di $f(x) = \log_3 x$ è $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$.

OSSERVA

La semplicità della derivata della funzione esponenziale e della funzione logaritmica quando la base è il numero e è il motivo per cui in analisi tale numero è la base privilegiata di esponenziali e logaritmi.

Dai **Teoremi 6** e **7** seguono, nel caso particolare in cui $a = e$, le formule:

$$\mathrm{D}e^x = e^x \qquad \mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x}$$

Le derivate delle funzioni seno e coseno

Concludiamo questo paragrafo presentando le derivate delle funzioni *seno* e *coseno* (le derivate della funzione tangente e delle funzioni goniometriche inverse saranno ricavate più avanti).

TEOREMA 8 | Derivata della funzione seno

La funzione **seno** $f(x) = \sin x$ è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la sua derivata è la funzione $f'(x) = \cos x$.

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$ Definizione di derivata

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$ Formula di addizione del seno

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} =$$ Raccogliendo parzialmente $\sin x$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\right) =$$ Ricorda i limiti notevoli del Teorema 8 dell'Unità 2

$$= \cos x$$

In modo del tutto analogo, si potrebbe dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 9 | Derivata della funzione coseno

La funzione **coseno** $f(x) = \cos x$ è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la sua derivata è la funzione $f'(x) = -\sin x$.

SINTESI

Derivate di funzioni elementari	
Funzione	**Derivata**
c (*costante*), $c \in \mathbf{R}$	0
x	1
x^α, $\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\log_a x$, $a > 0 \wedge a \neq 1$	$\frac{1}{x \ln a}$
a^x, $a > 0 \wedge a \neq 1$	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

CASI PARTICOLARI

$D x^2 = 2x$

$D \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

$D \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D \ln x = \frac{1}{x}$

$D e^x = e^x$

Esercizi p. 292

4. Algebra delle derivate

In questo paragrafo esaminiamo le relazioni tra l'operazione di derivazione e le operazioni algebriche tra funzioni.

La linearità della derivata

L'operazione di derivazione si comporta «bene» rispetto all'addizione di due funzioni e alla moltiplicazione *per una costante*. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA 10 | Linearità della derivata

Siano f e g due funzioni derivabili in un punto x interno sia al dominio di f, sia al dominio di g; allora anche la funzione $f+g$ è derivabile in x e vale la formula:

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x) \qquad [4]$$

Inoltre, se c è una costante, anche la funzione $c \cdot f$ è derivabile in x e risulta:

$$D[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x) \qquad [5]$$

RICORDA

Un punto si dice *interno* a un insieme $D \subseteq \mathbf{R}$ se esiste un intorno completo del punto contenuto nell'insieme D stesso.

DIMOSTRAZIONE

- Dimostriamo la [4].

$$D[f(x) + g(x)] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - [f(x) + g(x)]}{h} = \quad \text{Definizione di derivata}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \quad \text{Riordinando i termini}$$

$$\lim_{h \to 0} \left[\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\text{tende a } f'(x) \in \mathbf{R} \text{ per } h \to 0 \text{ perché } f \text{ è derivabile in } x} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\text{tende a } g'(x) \in \mathbf{R} \text{ per } h \to 0 \text{ perché } g \text{ è derivabile in } x} \right]$$

Poiché entrambi gli addendi hanno limiti *finiti* per $h \to 0$ possiamo applicare il teorema sul limite di una somma e concludere come segue:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

- La dimostrazione della [5] è pressoché immediata:

$$D[c \cdot f(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

Conseguenza del **Teorema 10** è che la derivata della *combinazione lineare* di funzioni derivabili è la *combinazione lineare* delle derivate; ciò si esprime dicendo che l'operazione di derivazione è **lineare**.
In particolare, poiché $a - b = a + (-1)b$ per ogni $a, b \in \mathbf{R}$, abbiamo:

$$D[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

ESEMPI Derivate di combinazioni lineari di funzioni elementari

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = x^3 + 2\sin x$ **b.** $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

Basta ricordare le derivate delle funzioni elementari e applicare la proprietà di linearità della derivata.

a. $f'(x) = \underbrace{D(x^3 + 2\sin x) = Dx^3 + 2 \cdot D\sin x}_{\text{linearità della derivata}} = \underbrace{3x^2 + 2\cos x}_{\text{derivate delle funzioni elementari}}$

b. $f'(x) = \underbrace{D\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) = D\frac{1}{x} - D\ln x}_{\text{linearità della derivata}} = \underbrace{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}_{\text{derivate delle funzioni elementari}}$

La derivata del prodotto di due funzioni

Rispetto al *prodotto* di funzioni l'operazione di derivazione **non** si comporta bene come rispetto alla somma: la derivata del prodotto di due funzioni, infatti, **non** è il prodotto delle derivate dei due fattori, come ci si può rendere conto considerando le due funzioni $f(x) = g(x) = x$. Abbiamo infatti $f(x) \cdot g(x) = x^2$, quindi:

$$[f(x) \cdot g(x)] = D(x^2) = 2x \quad \text{mentre} \quad f'(x) \cdot g'(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

Il legame esistente fra la derivata del prodotto e le derivate dei fattori è espresso nel seguente teorema.

TEOREMA 11 | Derivata del prodotto

Siano f e g due funzioni derivabili in un punto x interno sia al dominio di f sia al dominio di g; allora la funzione $f \cdot g$ è derivabile in x e vale la formula:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad [6]$$

DIMOSTRAZIONE

Per definizione:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

Sottraiamo e sommiamo al numeratore il termine $g(x + h) \cdot f(x)$ ed eseguiamo opportuni raccoglimenti:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) \overbrace{- g(x+h) \cdot f(x) + g(x+h) \cdot f(x)}^{\text{termine sottratto e aggiunto}} - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) \cdot [f(x+h) - f(x)] + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\underbrace{g(x+h)}_{\substack{\text{tende a } g(x) \in \mathbf{R} \\ \text{per } h \to 0 \text{ perché } g \\ \text{è continua in } x \\ \text{(essendo derivabile)}}} \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\substack{\text{tende a } f'(x) \in \mathbf{R} \\ \text{per } h \to 0 \text{ perché} \\ f \text{ è derivabile in } x}} + f(x) \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\substack{\text{tende a } g'(x) \in \mathbf{R} \\ \text{per } h \to 0 \text{ perché} \\ g \text{ è derivabile in } x}} \right]$$

Poiché i fattori di entrambi gli addendi hanno tutti limiti *finiti* per $h \to 0$, possiamo applicare il teorema sul limite di una somma e il teorema sul limite di un prodotto e continuare la catena di uguaglianze come segue:

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

RICORDA

Se g è una funzione continua, l'operazione di limite può essere «portata dentro» al simbolo di funzione g, quindi:

$\lim_{h\to 0} g(x+h) =$

$= g[\lim_{h\to 0}(x+h)] = g(x)$

Nella pratica il **Teorema 11** si utilizza secondo il seguente «slogan»: «la derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla derivata della prima funzione moltiplicata per la seconda, più la prima funzione moltiplicata per la derivata della seconda».

ESEMPI Derivate del prodotto di funzioni

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = x^3 \ln x$ **b.** $f(x) = (\sin x)\sqrt{x}$

a. $f'(x) = \underbrace{3x^2}_{\substack{\text{derivata della prima funzione,} \\ \text{cioè di } x^3}} \cdot \underbrace{\ln x}_{\substack{\text{seconda} \\ \text{funzione}}} + \underbrace{x^3}_{\substack{\text{prima} \\ \text{funzione}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\text{derivata della seconda} \\ \text{funzione, cioè di } \ln x}} = 3x^2 \ln x + x^2$

b. $f'(x) = \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivata della prima} \\ \text{funzione,} \\ \text{cioè di } \sin x}} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_{\substack{\text{seconda} \\ \text{funzione}}} + \underbrace{\sin x}_{\substack{\text{prima} \\ \text{funzione}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{derivata della seconda} \\ \text{funzione, cioè di } \sqrt{x}}} = \sqrt{x}\cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$

La derivata del quoziente di due funzioni

Anche la derivata del *quoziente* di due funzioni **non** è il quoziente delle derivate (sai trovare un controesempio?). Il legame tra le derivate di f e di g e la derivata di $\frac{f}{g}$ è espresso nel seguente teorema.

TEOREMA 12 | Derivata del quoziente

Siano f e g due funzioni derivabili in un punto x interno sia al dominio di f sia al dominio di g; allora la funzione $\frac{f}{g}$ è derivabile per tutti valori di x per cui $g(x) \neq 0$ e risulta:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \qquad [7]$$

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che, per ogni x per cui $g(x) \neq 0$, risulta:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = f(x)$$

Deriviamo entrambi i membri di questa identità, applicando al primo membro la regola del prodotto:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \cdot g(x) + \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x) = f'(x)$$

Ne segue che:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \cdot g(x) = f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)}$$

Dividendo il primo e l'ultimo membro per $g(x)$, otteniamo infine:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Dal teorema precedente, considerando il caso particolare in cui la funzione al numeratore è uguale a 1, segue immediatamente il seguente corollario.

COROLLARIO | Derivata della funzione reciproca

Sia f una funzione derivabile in un punto x; allora la funzione reciproca è derivabile per tutti i valori di x per cui $f(x) \neq 0$ e vale la formula:

$$D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

ESEMPIO Derivata di un quoziente

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Applichiamo la regola di derivazione del quoziente:

$$f'(x) = \frac{\overbrace{Dx^3}^{\text{derivata del numeratore}} \cdot \overbrace{(x^2-1)}^{\text{denominatore}} - \overbrace{x^3}^{\text{numeratore}} \cdot \overbrace{D(x^2-1)}^{\text{derivata del denominatore}}}{\underbrace{(x^2-1)^2}_{\text{quadrato del denominatore}}} = \quad \text{Formula [7]}$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \quad \text{Calcolando le derivate}$$

$$= \frac{x^2(3x^2-3-2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \quad \text{Raccogliendo } x^2\text{. È sempre bene cercare di scrivere la derivata scomposta in fattori}$$

ESEMPIO Derivata della funzione reciproca

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$.

In base al corollario precedente, abbiamo:

$$f'(x) = -\frac{\overbrace{D(x^3+1)}^{\text{derivata del denominatore}}}{\underbrace{(x^3+1)^2}_{\text{quadrato del denominatore}}} = -\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$$

Grazie alla formula sulla derivata del quoziente, possiamo determinare le derivate della funzione *tangente* e della funzione *cotangente*. Si ricava che:

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

Ricaviamo come esercizio le due formule.

ESEMPIO Verifica della formula relativa alla tangente

Calcoliamo la derivata di $f(x) = \tan x$.

Poiché $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, per il **Teorema 12** abbiamo:

$$D\tan x = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

L'espressione ottenuta si può scrivere nelle due forme equivalenti:

$$\frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{o} \quad 1 + \tan^2 x$$

ESEMPIO Verifica della formula relativa alla cotangente

Calcoliamo la derivata di $f(x) = \cot x$.

Osserviamo che $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$; per il **Teorema 12** abbiamo:

$$\mathrm{D}\cot x = \mathrm{D}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

L'espressione ottenuta si può anche scrivere nella forma equivalente: $-(1 + \cot^2 x)$

Esercizi p. 295

5. Derivata della funzione composta e della funzione inversa

In questo paragrafo studiamo le relazioni tra l'operazione di derivazione e le operazioni di *composizione* e *inversione* di funzioni.

Il teorema di derivazione delle funzioni composte

Consideriamo la funzione:

$$y = \sqrt{x^2+1}$$

Le regole di derivazione che abbiamo imparato finora **non** consentono di calcolarne la derivata. Possiamo tuttavia osservare che la funzione può essere vista come funzione composta, $f \circ g$, delle due funzioni:

$$f(u) = \sqrt{u} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 + 1$$

e che sappiamo calcolare le derivate di f e di g. Per calcolare la derivata della funzione originaria basterebbe allora conoscere quali relazioni sussistono tra la derivata della funzione composta, $f \circ g$, e le derivate delle funzioni componenti, f e g.
Tali relazioni sono espresse nel prossimo teorema, che ci limitiamo a enunciare.

TEOREMA 13 | Derivata di una funzione composta

Sia g una funzione derivabile in x e f una funzione derivabile in $g(x)$; allora la funzione **composta** $f \circ g$ è derivabile in x e vale la formula:

$$\mathrm{D}(f \circ g) = \mathrm{D}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad [8]$$

ALTRE NOTAZIONI

Se utilizziamo la *notazione di Leibniz* per le derivate, ponendo:

$y = f(u)$ e $u = g(x)$

possiamo riscrivere la [8] nella forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Nella pratica la formula [8] si applica secondo lo schema indicato nelle note in colore qui di seguito:

$$\mathrm{D}[\underbrace{f}_{\text{funzione esterna}}(\underbrace{g(x)}_{\text{funzione interna}})] = \underbrace{f'}_{\text{derivata della funzione esterna}}(\underbrace{g(x)}_{\text{valutata sulla funzione interna}}) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{derivata della funzione interna}}$$

ESEMPIO Derivata di una funzione composta

Calcoliamo la derivata della funzione $y = \sin(x^2 + 1)$.

$$y' = \mathrm{D}[\underbrace{\sin}_{\text{funzione esterna}}(\underbrace{x^2+1}_{\text{funzione interna}})] = \underbrace{\cos}_{\text{derivata della funzione esterna}}(\underbrace{x^2+1}_{\text{valutata sulla funzione interna}}) \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivata della funzione interna}}$$

Ragionando similmente a quest'ultimo esempio, sulla base del teorema di derivazione della funzione composta si possono ottenere le seguenti regole di derivazione, che *generalizzano* le regole di derivazione delle funzioni elementari nel caso in cui l'argomento sia diverso da x.

Generalizzazione delle formule delle derivate delle funzioni elementari		
$D[f(x)]^{\alpha} = \alpha \cdot [f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$	$\alpha \in \mathbf{R}$	[9]
$D\log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\frac{1}{\ln a}$	$a > 0 \wedge a \neq 1$	[10]
$D\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$		[11]
$D\,a^{f(x)} = f'(x) \cdot a^{f(x)} \ln a$	$a > 0 \wedge a \neq 1$	[12]
$D\,e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$		[13]
$D\sin f(x) = f'(x)\cos f(x)$		[14]
$D\cos f(x) = -f'(x)\sin f(x)$		[15]
$D\tan f(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$		[16]
$D\cot f(x) = -\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$		[17]

OSSERVA

Se consideriamo la funzione $y = \ln|f(x)|$ abbiamo che:

$$y = \begin{cases} \ln f(x) & f(x) > 0 \\ \ln[-f(x)] & f(x) < 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$y' = \begin{cases} \frac{f'(x)}{f(x)} & f(x) > 0 \\ \frac{-f'(x)}{-f(x)} & f(x) < 0 \end{cases}$$

In definitiva:

$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ per ogni x per cui $f(x) \neq 0$, quindi risulta anche:

$$D\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ESEMPI Derivate di funzioni composte

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni:

a. $y = (x^3 + 1)^4$ **b.** $y = e^{\sin 2x}$ **c.** $y = \tan^2(1 + x^2)$

a. Dobbiamo derivare la funzione:

$$y = [f(x)]^4 \text{ essendo } f(x) = x^3 + 1$$

Abbiamo:

$$y' = 4[f(x)]^{4-1} f'(x) = \qquad \text{Per la [9]}$$
$$= 4(x^3 + 1)^3 \cdot 3x^2 = 12x^2(x^3 + 1)^3$$

b. Dobbiamo derivare la funzione:

$$y = e^{f(x)} \text{ essendo } f(x) = \sin 2x$$

Abbiamo:

$$y' = f'(x) \cdot e^{f(x)} = \qquad \text{Per la [13]}$$
$$= [\sin(2x)]' e^{\sin 2x} =$$
$$= 2\cos 2x \cdot e^{\sin 2x} \qquad \text{Per la [14]}$$

c. Dobbiamo derivare la funzione:

$$y = [f(x)]^2 \text{ essendo } f(x) = \tan(1 + x^2)$$

Abbiamo:

$$y' = 2 \cdot [f(x)]^{2-1} \cdot f'(x) = \qquad \text{Per la [9]}$$
$$= 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) =$$
$$= 2\tan(1 + x^2) \cdot [\tan(1 + x^2)]' =$$
$$= 2\tan(1+x^2) \cdot \frac{2x}{\cos^2(1+x^2)} \qquad \text{Per la [16]}$$

La derivata della funzione inversa

Concludiamo la presentazione delle regole di derivazione occupandoci dei legami tra la derivata di una funzione e quella della sua *inversa*.
Il più importante risultato al riguardo è espresso dal seguente teorema.

TEOREMA 14 | Derivata della funzione inversa

Sia f una funzione **continua** e **invertibile** in un **intervallo** I.
Se f è derivabile in un punto $x \in I$ e $f'(x) \neq 0$, allora la funzione inversa $g = f^{-1}$ è derivabile nel punto $y = f(x)$ e vale la formula:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad [18]$$

DIMOSTRAZIONE

Per semplicità ci limitiamo a effettuare la dimostrazione *ammettendo* che la funzione g sia *derivabile* in y. Supposta verificata questa condizione, osserviamo che, essendo g la funzione inversa di f, deve valere l'identità:

$$g(f(x)) = x$$

Derivando i due membri di questa equazione (al primo membro occorre applicare la regola di derivazione della funzione composta), otteniamo:

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Poiché per ipotesi $y = f(x)$ e $f'(x) \neq 0$, ne segue:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

È importante fare alcune osservazioni.

a. La [18] ha una semplice *interpretazione geometrica*, che ne chiarisce il significato. Sappiamo che i grafici delle due funzioni f e $g = f^{-1}$ sono *simmetrici* rispetto alla *bisettrice del primo e del terzo quadrante* (**Fig. 7**). Tale simmetria si conserva anche tra la retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x e la retta tangente al grafico della funzione g nel punto di ascissa y (essendo $y = f(x)$); pertanto i coefficienti angolari delle due rette tangenti, uguali a $f'(x)$ e $g'(y)$, devono essere *reciproci*, ossia:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

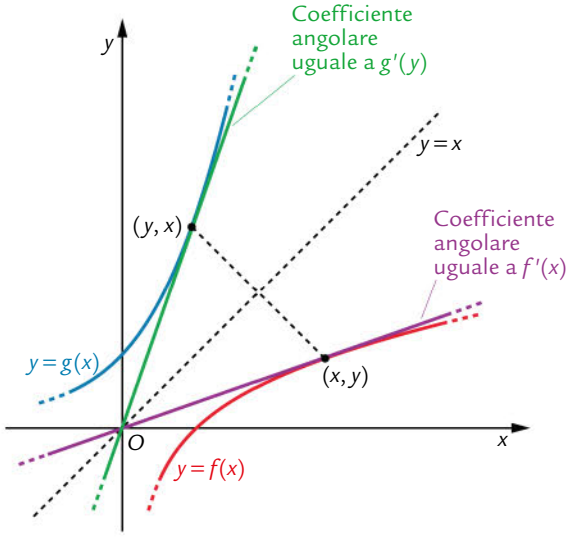


Figura 7 Interpretazione grafica del legame tra derivata di una funzione e derivata della funzione inversa.

RICORDA

Due rette simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante hanno coefficienti angolari reciproci (sai giustificare perché?).

Figura animata
Interpretazione grafica del legame tra la derivata di una funzione e la derivata della funzione inversa

b. Rifletti sul significato della [18]:

$$\underbrace{g'(y)}_{\text{derivata dell'inversa di una funzione } f \text{ nel punto } y} = \underbrace{\frac{1}{f'(x)}}_{\text{reciproca della derivata di } f \text{ valutata sulla } \textit{controimmagine} \text{ di } y \text{ nella funzione } f}$$

L'applicazione della [18] è quindi subordinata al fatto di *saper determinare* la controimmagine di y nella f.

RIFLETTI

Siamo riusciti a determinare la derivata di g in un punto sebbene sia impossibile scrivere *esplicitamente* l'espressione analitica della funzione g (dal momento che l'equazione $y = 2x + \ln x$ non è risolvibile algebricamente).

ESEMPIO Applicazione del teorema della funzione inversa

Data la funzione $f(x) = 2x + \ln x$, giustifichiamo perché è invertibile e, detta $g(x) = f^{-1}(x)$ la sua inversa, calcoliamo $g'(f(1)) = g'(2)$.

- La funzione $f(x) = 2x + \ln x$ è la somma di due funzioni che sono *strettamente crescenti*; ne segue che è strettamente crescente e perciò invertibile.
- Per calcolare $g'(2)$ dobbiamo anzitutto determinare la controimmagine di 2 nella funzione f. Il testo indica che $f(1) = 2$, cioè che la controimmagine di 2 nella f è 1.
- Ora conosciamo tutti gli elementi per poter applicare la formula [18]:

$$g'(2) = \frac{1}{f'(1)}$$

Poiché $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ e, quindi, $f'(1) = 3$, concludiamo che $g'(2) = \frac{1}{3}$.

Le derivate delle funzioni goniometriche inverse

Il teorema di derivazione della funzione inversa consente di determinare le derivate delle funzioni *goniometriche inverse*. Cominciamo con il ricavare la derivata della **funzione arcoseno**. Consideriamo la funzione f, restrizione della funzione goniometrica seno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e, per ogni $y \in (-1, 1)$, sia x la controimmagine di y nella f; allora, detta g la funzione inversa di f, per il **Teorema 14**:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad [19]$$

Nella formula $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ non va preso in considerazione il segno meno poiché stiamo supponendo $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, quindi $\cos x \ge 0$

x è la controimmagine di y nella restrizione della funzione seno, quindi $\sin x = y$

D'altro canto la funzione g, per come è stata definita, non è altro che la funzione arcoseno, quindi la [19] può essere riscritta in modo equivalente nella seguente forma:

$$\mathrm{D}\arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad \forall y \in (-1, 1)$$

La lettera y con cui è qui indicata la variabile *indipendente* della funzione arcoseno può naturalmente essere sostituita con qualsiasi altra; utilizzeremo come di consueto la lettera x e scriveremo:

$$\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall x \in (-1, 1)$$

In modo del tutto analogo si possono dimostrare le seguenti formule.

$$\mathrm{D}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\mathrm{D}\arctan x = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\mathrm{D}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1 + x^2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

ESEMPI

Calcoliamo le derivate delle funzioni:

a. $y = \arcsin x + \arccos x$ **b.** $y = x\arctan x$

a. Risulta: $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = 0$

b. Applicando il teorema sulla derivazione del prodotto abbiamo:

$$y' = 1 \cdot \arctan x + x \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \arctan x + \frac{x}{1 + x^2}$$

COLLEGHIAMO I CONCETTI — Il calcolo delle derivate

Riassumiamo nelle seguenti tabelle tutte le formule e le regole di derivazione che abbiamo incontrato.

Derivate fondamentali	Formule generalizzate ottenute in base al teorema di derivazione delle funzioni composte
$Dc = 0$ $(c \in \mathbf{R})$, $Dx = 1$	
$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$	$D[f(x)]^\alpha = \alpha[f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$D\sin x = \cos x$	$D\sin f(x) = f'(x) \cdot \cos f(x)$
$D\cos x = -\sin x$	$D\cos f(x) = -f'(x)\sin f(x)$
$D\tan x = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$D\tan f(x) = f'(x)(1+\tan^2 f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$D\log_a x = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$	$D\log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{\ln a}$
$D\ln x = D\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$D\ln f(x) = D\ln\lvert f(x)\rvert = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$Da^x = a^x \cdot \ln a$	$Da^{f(x)} = f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot \ln a$
$De^x = e^x$	$De^{f(x)} = f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\arcsin f(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\arccos x = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$D\arctan f(x) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

Principali regole di derivazione
$D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$
$D[c\cdot f(x)] = c\cdot f'(x)$
$D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ In particolare: $D\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
$D[f(g(x))] = f'(g(x))\cdot g'(x)$

La derivata di funzioni la cui espressione analitica è della forma $[f(x)]^{g(x)}$, con $f(x) > 0$, si può calcolare previa trasformazione dell'espressione analitica in forma *esponenziale*, similmente a quanto già visto nell'**Unità 2** a proposito del calcolo di alcuni limiti:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Per esempio:

$$Dx^x = De^{\ln x^x} = De^{\underbrace{x\ln x}_{e^{f(x)}}} = \underbrace{\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)}_{f'(x)} e^{\underbrace{x\ln x}_{e^{f(x)}}} = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$$

Esercizi p. 301

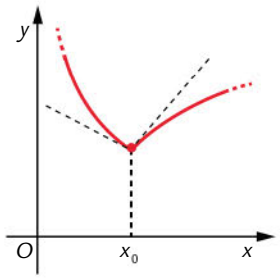
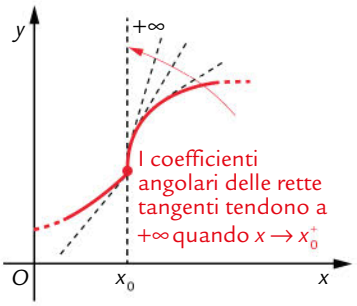
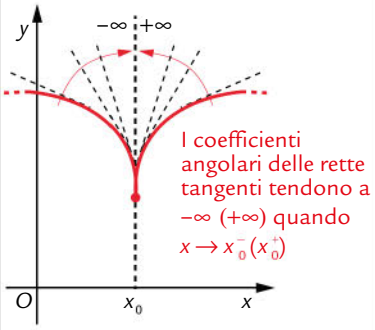
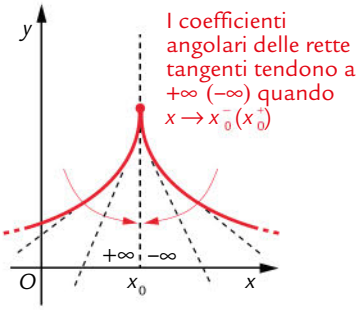
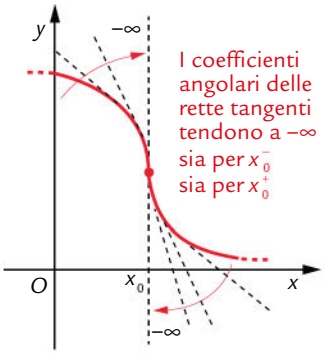
6. Classificazione e studio dei punti di non derivabilità

Abbiamo visto all'inizio di questa Unità che una funzione continua in un punto può **non** essere derivabile in quel punto. Quali comportamenti può presentare il grafico di una funzione nell'intorno di un punto in cui **non** è derivabile? In questo paragrafo rispondiamo a questa domanda.

Con GeoGebra
Classificazione dei punti di non derivabilità

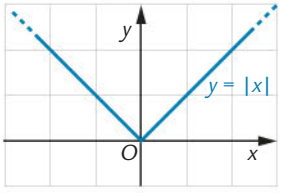
La classificazione dei punti in cui una funzione non è derivabile

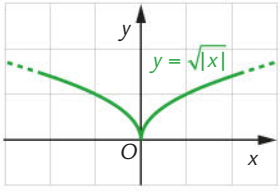
Supponiamo che f sia una funzione definita in un intorno completo di x_0, continua ma non derivabile in x_0. I casi più frequenti che possono presentarsi sono quelli riassunti nella seguente tabella.

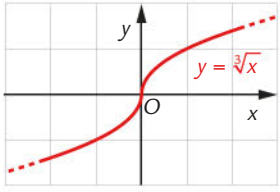
Tipo	Caratterizzazione	Esempio 1	Esempio 2
Punto angoloso	La derivata destra e la derivata sinistra in x_0 esistono, sono diverse tra loro e almeno una delle due è finita. Geometricamente significa che esistono due diverse tangenti in x_0, una a destra e una a sinistra.	 Punto angoloso in cui le due derivate destra e sinistra sono finite e diverse tra loro; precisamente, nel caso in esame: $f'_-(x_0) < 0 \wedge f'_+(x_0) > 0$	 Punto angoloso in cui una delle due derivate (quella da destra) è infinita; precisamente, nel caso in esame: $f'_-(x_0) > 0 \wedge f'_+(x_0) = +\infty$
Cuspide	Sia la derivata destra sia la derivata sinistra in x_0 sono infinite, e di segno opposto. In particolare, la tangente nel punto x_0 è verticale.	 Cuspide in cui: $f'_-(x_0) = -\infty \wedge f'_+(x_0) = +\infty$	 Cuspide in cui: $f'_-(x_0) = +\infty \wedge f'_+(x_0) = -\infty$
Flesso a tangente verticale	Sia la derivata destra sia la derivata sinistra in x_0 sono infinite, e hanno lo stesso segno. In particolare, la tangente nel punto x_0 è verticale.	 Flesso a tangente verticale in cui: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty$	 Flesso a tangente verticale in cui: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty$

ESEMPI

Le tre funzioni $y = |x|$, $y = \sqrt{|x|}$ e $y = \sqrt[3]{x}$ presentano in $x = 0$ rispettivamente un punto angoloso, una cuspide e un flesso a tangente verticale.







PER SAPERNE DI PIÙ **Un altro caso di non derivabilità**

La tabella precedente non offre la casistica completa, ma solamente le circostanze più ricorrenti: resta infatti escluso il caso (piuttosto raro) in cui la derivata in un punto non esiste, né finita né infinita.
Per esempio, la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in 0 (sai giustificare perché?) ma non è derivabile perché risulta:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

non esiste

Il grafico della funzione (**Fig. 8**) presenta infinite oscillazioni intorno all'origine.

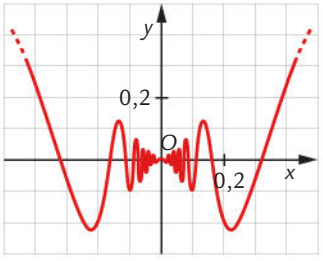


Figura 8

Lo studio della derivabilità di una funzione in un punto

Nella maggior parte dei casi è possibile determinare la derivata di una funzione *senza* ricorrere alla *definizione*. Talvolta però ci si può imbattere in punti in cui le regole di derivazione non sono applicabili, come mostriamo nei prossimi esempi.

ESEMPI Punti in cui i teoremi sulle derivate non sono applicabili

a. Sia $y = |x|x^2$: questa funzione è il prodotto delle due funzioni $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^2$. Il teorema sulla derivata del prodotto di due funzioni ci consente di determinare la derivata per ogni $x \neq 0$, mentre per $x = 0$ la funzione f non è derivabile, quindi cade una delle ipotesi per poter utilizzare il teorema.

b. Sia $y = \sqrt{2x-1}$; questa funzione si può vedere come funzione composta $f \circ g$ delle due funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x - 1$. Il teorema sulla derivata della funzione composta è applicabile per $x \neq \frac{1}{2}$, mentre per $x = \frac{1}{2}$ cade una delle ipotesi per poter utilizzare il teorema poiché la funzione f non è derivabile in corrispondenza di $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

c. Sia $y = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$; la funzione è certamente derivabile per ogni $x < 0$ e per ogni $x > 0$ perché coincide con due funzioni derivabili, mentre nessun teorema ci garantisce a priori la derivabilità nel punto di raccordo $x = 0$.

RICORDA

Per poter applicare il teorema sulla derivata del prodotto a due funzioni *f* e *g* in un punto *x*, le due funzioni devono essere *entrambe* derivabili in *x*.
Per poter applicare il teorema sulla derivata della funzione composta e determinare la derivata in *x* della funzione $f \circ g$ occorre che *g* sia derivabile in *x* e che *f* sia derivabile in *g*(*x*).

Gli esempi precedenti mostrano i tre casi più frequenti in cui capita di incontrare un punto x_0 in cui le regole di derivazione **non** sono applicabili:

a. quando x_0 annulla l'argomento di un *valore assoluto*;
b. quando x_0 annulla l'argomento di una *radice*;
c. quando x_0 è un *punto di raccordo* di una funzione definita per casi.

Naturalmente, il fatto che gli ordinari teoremi non siano applicabili **non** significa che la funzione non sia derivabile in quel punto, ma soltanto che lo studio della derivabilità va effettuato ricorrendo direttamente alla *definizione* oppure facendo uso del *teorema sul limite della derivata* che enunciamo qui di seguito.

TEOREMA 15 | Limite della derivata

Sia f una funzione **continua** in x_0 e derivabile in un intorno di x_0, eccetto al più x_0; sia f' la sua funzione derivata. Se **esistono** (finiti o infiniti) i limiti:

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l_2$$

allora risulta:

$$f_-'(x_0) = l_1 \quad \text{e} \quad f_+'(x_0) = l_2$$

In particolare, se $l_1 = l_2 \in \mathbf{R}$, allora f è **derivabile** in x_0 e $f'(x_0) = l_1 = l_2$.

ESEMPI Studio della derivabilità di una funzione

Studiamo gli eventuali punti di non derivabilità delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = |x|x$ **b.** $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(x+1)$ **c.** $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 2x+1 & x \geq 0 \end{cases}$

a. La funzione è continua in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \neq 0$ è certamente derivabile in base al teorema sulla derivata del prodotto di due funzioni. Per studiare il comportamento in $x = 0$ possiamo indifferentemente applicare il *teorema precedente* oppure la *definizione* di derivata in un punto. Poiché:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

Dobbiamo scrivere $x > 0$, non $x \geq 0$, perché a questo punto non sappiamo ancora se la funzione è derivabile in $x = 0$: lo stiamo appunto studiando.

abbiamo che:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -2x = 0$$

Ne deduciamo che la funzione $f(x)$ è derivabile anche in 0 e $f'(0) = 0$. Alla medesima conclusione si giunge direttamente dalla definizione stessa di derivata; infatti:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\,h}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$$

IN UN ALTRO MODO

L'esempio b avrebbe potuto essere risolto anche tramite il Teorema 15. Poiché:

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (x+1) + \sqrt[3]{x} \cdot 1$

e $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$

ritroviamo lo stesso risultato.

b. La funzione è continua in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \neq 0$ è certamente derivabile in base al teorema sulla derivata del prodotto di due funzioni. Per studiare il comportamento nel punto $x = 0$ conviene applicare direttamente la *definizione* di derivata in un punto; abbiamo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\,(h+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Concludiamo allora che in $x = 0$ la funzione **non** è derivabile e presenta un *punto di flesso a tangente verticale*.

c. La funzione è continua in $\mathbf{R}$ (verificalo) e certamente derivabile per ogni $x < 0$ e per ogni $x > 0$. Per studiare il comportamento nel punto di raccordo utilizziamo il **Teorema 15**. Abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

e inoltre:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2$$

Concludiamo allora che $f_-'(0) = 1$ e $f_+'(0) = 2$, dunque nel punto $x = 0$ la funzione **non** è derivabile e presenta un *punto angoloso*.

Esercizi p. 308

7. Applicazioni geometriche del concetto di derivata

In questo e nel prossimo paragrafo presentiamo alcune *applicazioni* del concetto di derivata.

Retta tangente e normale a una curva

All'inizio di questa Unità abbiamo osservato che, se una funzione f è derivabile in un punto x_0, il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P(x_0, f(x_0))$ è uguale a $f'(x_0)$, quindi l'equazione della **retta tangente** è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad [20]$$

L'equazione della **retta normale** nel punto x_0 (cioè della perpendicolare alla tangente in x_0) è allora, supposto $f'(x_0) \neq 0$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad [21]$$

In base alle regole di derivazione che abbiamo scoperto nei paragrafi precedenti, il calcolo di $f'(x_0)$ non presenta difficoltà, quindi siamo sempre in grado di scrivere l'equazione della retta tangente e della retta normale.

ESEMPIO Equazione della retta tangente e della normale

Data la funzione $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$, scriviamo l'equazione della retta tangente e della retta normale al suo grafico nel punto di ascissa $x = 1$.

- L'equazione della retta tangente è:

  $y - f(1) = f'(1)\,(x - 1)$ Formula [20]

  Dobbiamo calcolare $f(1)$ e $f'(1)$.
- Per sostituzione si ottiene immediatamente che $f(1) = \frac{1}{3}$.
- Per calcolare $f'(1)$ calcoliamo anzitutto la derivata della funzione; puoi facilmente verificare che:

  $$f'(x) = \frac{2 - x^2}{(x^2+2)^2}$$

  quindi:

  $$f'(1) = \frac{2 - 1^2}{(1^2+2)^2} = \frac{1}{9}$$

- L'equazione della retta *tangente* è allora:

  $$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}(x - 1) \quad \text{ossia} \quad y = \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}$$

- L'equazione della *normale* è:

  $$y - \frac{1}{3} = -9(x - 1) \quad \text{ossia} \quad y = -9x + \frac{28}{3}$$

Tangenza tra due curve

Due curve si definiscono **tangenti** in un loro punto comune, di ascissa x_0, se e solo se hanno in questo punto la stessa retta tangente. Questa condizione equivale all'uguaglianza dei *coefficienti angolari* delle rette tangenti nel punto comune, ossia all'uguaglianza delle derivate in x_0.
Si deduce perciò il seguente criterio di tangenza.

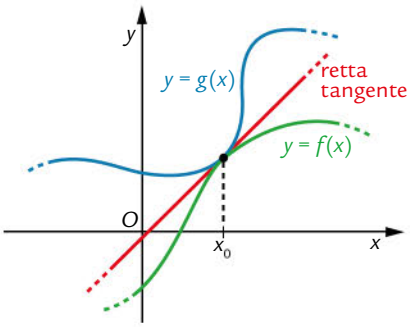


Figura 9

DEFINIZIONE | Tangenza tra due curve

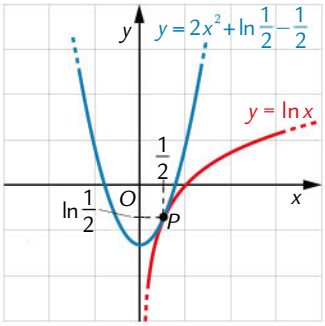
Consideriamo le due curve grafici delle due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$.
Esse sono **tangenti** in un punto di ascissa x_0, in cui sia f sia g sono derivabili (**Fig. 9**), se e solo se risulta:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \qquad [22]$$

La prima delle due equazioni del sistema [22] esprime il fatto che il punto di tangenza deve essere un punto *in comune* alle due curve, mentre la seconda equazione esprime, come abbiamo detto, l'uguaglianza dei *coefficienti angolari* delle tangenti.

ESEMPIO Tangenza tra due curve

Determiniamo per quale valore di k le due curve di equazioni $y = 2x^2 + k$ e $y = \ln x$ sono tangenti, precisando il punto di contatto.



- Indichiamo con $P(x_0, y_0)$ il punto di tangenza (incognito) tra le due curve.
- Impostiamo il sistema che si ottiene imponendo la condizione [22]:

$$\begin{cases} 2x_0^2 + k = \ln x_0 & f(x_0) = g(x_0) \\ 4x_0 = \frac{1}{x_0} & f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

  Risolvendo il sistema troviamo:

$$x_0 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad k = \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

- Abbiamo così trovato sia il valore di k, sia l'ascissa del punto di tangenza.
  Per trovare l'ordinata del punto di tangenza basta sostituire l'ascissa nell'equazione di una delle funzioni; si ottiene così $y_0 = \ln\frac{1}{2}$, quindi il punto di contatto ha coordinate $\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2}\right)$.

Esercizi p. 313

8. Applicazioni del concetto di derivata nelle scienze e nella tecnica

Le derivate e lo studio del moto

Supponiamo che un corpo in moto rettilineo si muova secondo la legge oraria:

$$s = s(t)$$

dove la variabile dipendente s rappresenta la posizione e la variabile indipendente t rappresenta il tempo. Abbiamo già visto nel **Paragrafo 1** che:

- la velocità (scalare) media del corpo in un intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ è data dal rapporto tra lo spostamento e il tempo impiegato:

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

  quindi è rappresentata dal *rapporto incrementale* della legge oraria.
- la velocità (scalare) istantanea in t è il limite cui tende la velocità media quando $\Delta t \to 0$ cioè la *derivata* della legge oraria nel punto t:

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

Analogamente, l'accelerazione (scalare) media, sempre nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$, è definita dalla relazione:

$$a_m = \frac{v_i(t + \Delta t) - v_i(t)}{\Delta t}$$

quindi rappresenta il rapporto incrementale della funzione velocità istantanea.
Il limite di questo rapporto quando Δt tende a 0 rappresenta l'**accelerazione istantanea** che possiede il corpo all'istante t e coincide con la *derivata della funzione velocità istantanea* nel punto t, ovvero con la derivata seconda della legge oraria nel punto t:

$$a_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_i(t + \Delta t) - v_i(t)}{\Delta t} = v_i'(t) = s''(t)$$

ESEMPIO Calcolo della velocità e dell'accelerazione

La legge del moto di un corpo che si muove su di una traiettoria rettilinea è $s = t^3 - 9t^2 + 15t$, dove t è misurato in secondi ed s in metri. Calcoliamo:

a. la velocità e l'accelerazione all'istante t;
b. la velocità e l'accelerazione dopo 4 s.

a. La funzione velocità è la derivata della legge oraria, quindi:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 18t + 15$$

La funzione accelerazione è la derivata della funzione velocità, quindi:

$$a(t) = v'(t) = 6t - 18$$

b. Dopo 4 secondi, la velocità sarà uguale a:

$$v(4) = 3 \cdot 4^2 - 18 \cdot 4 + 15 = -9 \text{ m/s}$$

mentre l'accelerazione sarà uguale a:

$$a(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 \text{ m/s}^2$$

Le derivate nelle scienze e nella tecnica

In generale l'interpretazione del rapporto incrementale come tasso di variazione medio e della derivata come tasso di variazione istantaneo (vedi il **Paragrafo 1**) porta a svariate applicazioni del concetto di derivata nelle scienze e nella tecnica; per esempio:

- se $q(t)$ è la funzione che esprime la *quantità di carica* che attraversa una sezione di un conduttore nell'intervallo di tempo da 0 a t, il rapporto:

$$\frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$$

rappresenta l'intensità media di corrente nell'intervallo $[t_0, t_0 + \Delta t]$, mentre passando al limite per $\Delta t \to 0$ si ottiene l'*intensità di corrente* all'istante t_0:

$$i(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = q'(t_0)$$

- se $L(t)$ è la funzione che esprime il *lavoro* (in joule) compiuto da una certa macchina nell'intervallo di tempo da 0 a t (in secondi), il rapporto:

$$\frac{L(t_0 + \Delta t) - L(t_0)}{\Delta t}$$

rappresenta la potenza media (in watt) generata dalla macchina nell'intervallo $[t_0, t_0 + \Delta t]$, mentre passando al limite per $\Delta t \to 0$ si ottiene la *potenza* generata all'istante t_0:

$$P(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L(t_0 + \Delta t) - L(t_0)}{\Delta t} = L'(t_0)$$

Ti invitiamo a cercare altre applicazioni del concetto di derivata come tasso istantaneo di variazione.
Le innumerevoli applicazioni che potrai scoprire mettono in luce che la potenza della matematica sta anche nella sua astrattezza: proprio perché la derivata è stata definita come un concetto *astratto*, può essere interpretata in vari modi e trovare applicazioni in contesti anche molto differenti tra loro.

Le derivate nei problemi con due velocità correlate

Supponiamo che due variabili, in relazione tra loro, varino entrambe nel tempo. In alcuni problemi è nota la velocità di variazione di una delle due variabili in un dato istante e si vuole determinare la velocità di variazione dell'altra variabile nello stesso istante. La chiave per risolvere questi problemi è calcolare la derivata dei due membri dell'equazione che esprime la relazione tra le due variabili, in modo da trovare la corrispondente relazione tra le loro velocità.

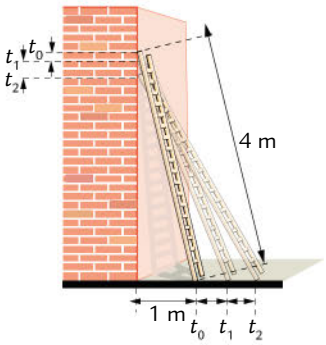


Figura 10 Posizione della scala agli istanti $t_0 = 0$ s, $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s.

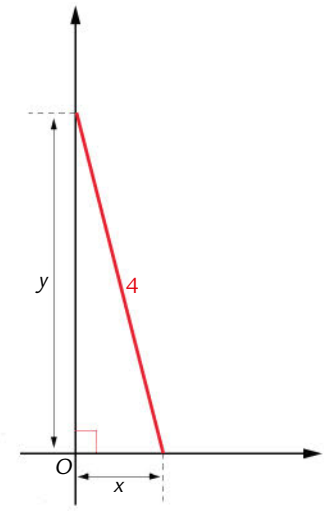


Figura 11

PROBLEMA SVOLTO 1 ◆ La scala

Una scala, lunga 4 m, è appoggiata a una parete. La base della scala è a 1 m dalla parete all'istante $t_0 = 0$ e scivola lungo il terreno alla velocità di 0,5 m/s. Qual è la velocità della cima della scala dopo 2 secondi?

FAMILIARIZZIAMO CON IL PROBLEMA

Facciamo un disegno (**Fig. 10**). È importante osservare, come mostra chiaramente la figura, che la cima e la base della scala si muovono a velocità *differenti*: infatti, mentre la base percorre lo stesso spazio in ciascuno dei due intervalli di tempo rappresentati, la cima percorre nel secondo intervallo di tempo (tra 1 e 2 secondi) uno spazio maggiore di quello percorso nel primo intervallo (tra 0 e 1 secondo), quindi la sua velocità non è costante. Cerchiamo perciò di costruire un modello che ci aiuti a calcolare la velocità della cima della scala.

COSTRUIAMO IL MODELLO DEL PROBLEMA

Indichiamo con x la distanza della base della scala dal muro e con y la distanza della cima della scala dal terreno (**Fig. 11**); sia x che y sono *funzioni del tempo*: $x = x(t)$ e $y = y(t)$.
La velocità della base della scala è la derivata di x rispetto a t, mentre la velocità della cima è la derivata di y rispetto a t.
Il modello matematico del problema è allora il seguente:

calcolare $y'(2)$, sapendo che $x'(t) = 0{,}5$ e che $x(0) = 1$

RISOLVIAMO IL MODELLO

Grazie al teorema di Pitagora possiamo esprimere y in funzione di x:

$$y(t) = \sqrt{16 - x^2(t)}$$

Deriviamo ora i due membri di questa equazione rispetto al tempo, tenendo conto che *sia x sia y sono funzioni del tempo*, quindi al secondo membro occorre applicare il teorema di derivazione delle funzioni composte; abbiamo allora:

$$y'(t) = -\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{16 - x^2(t)}}$$

Per valutare questa espressione quando $t = 2$, occorre calcolare il valore di x all'istante $t = 2$. Poiché $x(0) = 1$ e la velocità della base della scala è di 0,5 m/s, sarà $x(2) = 2$, quindi:

$$y'(2) = -\frac{x(2) \cdot x'(2)}{\sqrt{16 - x^2(2)}} = -\frac{2 \cdot 0{,}5}{\sqrt{16 - 4}} \simeq -0{,}29$$

RISPONDIAMO

La velocità della cima della scala, dopo 2 secondi, è circa uguale a −0,29 m/s. Il segno *meno* esprime il fatto che la distanza della cima della scala dal suolo sta *decrescendo*, quindi la velocità è *negativa*.

Esercizi p. 320

9. Il differenziale

Consideriamo una funzione derivabile $y = f(x)$ e supponiamo che la variabile indipendente x subisca una piccola variazione Δx. Facciamo riferimento per semplicità al caso illustrato in **Fig. 12**, in cui la variazione subita da x e la corrispondente variazione subita da y (quest'ultima indicata con Δy e rappresentata dal segmento QS) sono *incrementi*. Nelle applicazioni è spesso necessario stimare il valore di Δy. In prima approssimazione, possiamo valutare tale incremento sulla retta *tangente* al grafico della funzione nel punto x anziché sulla funzione stessa; vale a dire:

$$\Delta y \approx \overline{QR} = \overline{PQ} \cdot \tan\alpha = \Delta x \cdot f'(x)$$

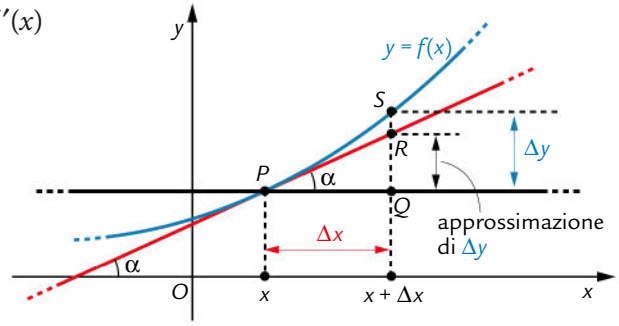


Figura 12

Figura animata
Il differenziale

Con GeoGebra
Esplorazione del concetto di differenziale

PROPRIETÀ | Approssimazione della variazione della variabile

Se $y = f(x)$ è una funzione derivabile in x, la variazione Δy subita da y quando x subisce una piccola variazione Δx è approssimativamente uguale a $f'(x)\,\Delta x$; in simboli:

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x \qquad [25]$$

ESEMPIO

L'intensità di corrente i che percorre un filo conduttore di resistenza R alle cui estremità sia applicata una differenza di potenziale V, per la legge di Ohm, è data dalla formula $i = \frac{V}{R}$. Se V si mantiene costante, mentre R subisce una piccola variazione ΔR, l'intensità di corrente subirà una variazione Δi che, per la [25], è approssimativamente uguale a $-\frac{V}{R^2}\Delta R$.

Come si intuisce chiaramente dalla **Fig. 12**, l'approssimazione [25] risulta *tanto* migliore *quanto più* l'incremento Δx è piccolo.
Un incremento infinitesimo (ossia molto piccolo) di x viene solitamente indicato con il simbolo dx (anziché con Δx) ed è chiamato **differenziale di x**; la variazione di y corrispondente a un incremento infinitesimo dx della variabile x, *valutata sulla retta tangente* al grafico della funzione $y = f(x)$, viene chiamata **differenziale** della funzione f in x e indicata con dy.

DEFINIZIONE | Differenziale di una funzione

Se $y = f(x)$ è una funzione derivabile in x, il **differenziale** della funzione f relativo al punto x e all'incremento dx, indicato con dy, è così definito:

$$dy = f'(x)\,dx \qquad [26]$$

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $f(x) = 4\sin x$. Abbiamo che $f'(x) = 4\cos x$, quindi il differenziale di f relativo al punto x e all'incremento dx è:

$$dy = f'(x)\,dx = 4\cos x\,dx$$

Ciò significa che un incremento infinitesimo dx della variabile x produce una variazione di y approssimativamente uguale a dy. Per esempio, se x cresce da $x = \pi$ a $x = \pi + 0{,}1$, allora risulta $x = \pi$, $dx = 0{,}1$ e $dy = 4\cos\pi(0,\,1) = 4(-1)(0{,}1) = -0{,}4$: quindi y *diminuisce* (il valore del differenziale è *negativo*) approssimativamente di 0,4.

RIFLETTI

In pratica, per passare dalla [25] alla [26], si è solo introdotta una nuova notazione: l'incremento di x è stato indicato con dx e il valore *approssimato* di Δy, calcolato sulla retta tangente, è stato indicato con dy. La [26] è coerente con la rappresentazione della derivata di una funzione nella notazione di Leibniz; infatti, dividendo i due membri della [26] per dx si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Esercizi p. 323

La derivata

Continuità e derivabilità

Se una funzione è derivabile nel punto x_0, allora è continua in x_0. **Non** vale invece il viceversa.

Funzione derivabile in un punto x_0

Funzione per cui esiste ed è finito il limite: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Il valore del limite è la **derivata** della funzione in x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Se il limite esiste finito solo per $h\to 0^-$ ($h\to 0^+$) si dice che la funzione è derivabile a sinistra (destra) di x_0 e la derivata sinistra (destra) si indica con $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$).

Funzione derivata di una funzione $f(x)$

La funzione $f'(x)$ che ha come dominio l'insieme dei valori di x per cui la funzione $f(x)$ è derivabile e che associa a ogni valore di x la corrispondente derivata.

Derivate delle funzioni elementari

$Dc = 0,\ c \in \mathbf{R}$

$Dx = 1$

$Dx^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbf{R}$

$D\sin x = \cos x$

$D\cos x = -\sin x$

$D\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$Da^x = a^x \cdot \ln a$

$De^x = e^x$

$D\log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$

$D\ln x = \frac{1}{x}$

Regole di derivazione

$D[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$

$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$D[f(g(x)] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Teorema sul limite della derivata

Sia f una funzione continua in x_0 e derivabile in un intorno di x_0, eccetto al più x_0; sia f' la sua funzione derivata.
Se esistono (finiti o infiniti) i limiti:

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l_2$$

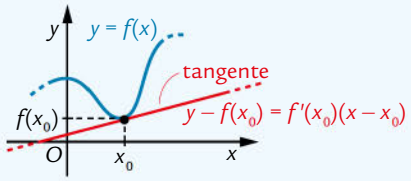
allora risulta:

$$f'_-(x_0) = l_1 \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = l_2$$

In particolare, se $l_1 = l_2 \in \mathbf{R}$, allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l_1 = l_2$.

Interpretazione geometrica

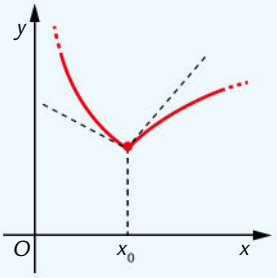
Una funzione derivabile in un punto x_0 è una funzione per cui esiste e non è verticale la tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0; in tal caso il coefficiente angolare della tangente è $f'(x_0)$.



Comportamenti più comuni nell'intorno di un punto in cui una funzione *non* è derivabile.

Punto angoloso

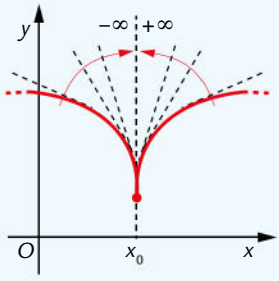
La tangente **non** esiste.



Le derivate destra e sinistra sono *diverse* e almeno una delle due è finita.

Cuspide

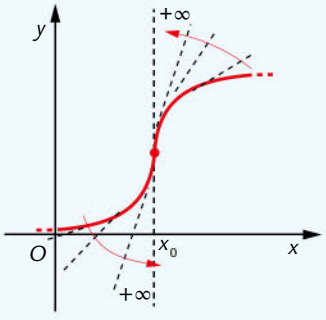
La tangente esiste, ma è *verticale*.



Le derivate destra e sinistra sono *infinite* di segno *opposto*.

Flesso a tangente verticale

La tangente esiste, ma è *verticale*.



Le derivate destra e sinistra sono *infinite* e uguali.

Interpretazione cinematica

Se $s(t)$ è la funzione che esprime la legge oraria di un corpo in moto rettilineo in funzione del tempo, allora la derivata prima $s'(t)$ della funzione $s(t)$ rappresenta la velocità (scalare) istantanea del corpo all'istante t.

La derivata come velocità istantanea di variazione

Se una funzione $f(t)$ esprime come varia una grandezza in funzione del tempo, la derivata prima $f'(t)$ esprime la velocità istantanea di variazione della grandezza.

ESEMPIO

Sia $T(t)$ la funzione che esprime la temperatura (in °C) di un corpo in funzione del tempo t (in s). Se risulta $T(t_0) = 10$ e $T'(t_0) = -0{,}1$ significa che nell'istante t_0 la temperatura è di 10 °C e in quell'istante sta *decrescendo* (perché la derivata è negativa) alla velocità di 0,1 °C/s.

Esercizi

1. Il concetto di derivata

Teoria p. 258

Esercizi introduttivi

1 **Caccia all'errore.** La seguente definizione di derivata contiene un errore. Individualo e correggilo:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)+h-f(x_0)}{h}$$

2 **Caccia all'errore.** Secondo Veronica, una data funzione $f(x)$ è derivabile in x_0, appartenente al suo dominio, se e solo se esiste il limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Quale errore ha commesso Veronica?

Test

3 Per calcolare in base alla definizione la derivata della funzione $y=f(x)$ nel punto $x_0=2$, quale dei seguenti limiti occorre calcolare?

A $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(h)}{h}$ B $\lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{h}$ C $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ D $\lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)+f(2)}{h}$

4 Per calcolare in base alla definizione la derivata della funzione $y=f(x)$ nel punto $x_0=0$, quale dei seguenti limiti occorre calcolare?

A $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)+f(0)}{h}$ B $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ C $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$ D $\lim_{h\to 0} \frac{f(-h)}{h}$

5 Per calcolare in base alla definizione la derivata della funzione $y=x^2$ nel punto $x_0=-2$, quale dei seguenti limiti occorre calcolare?

A $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+4}{h}$ B $\lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2+4}{h}$ C $\lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2-4}{h}$ D $\lim_{h\to 0} \frac{(-2-h)^2-4}{h}$

6 Per calcolare in base alla definizione la derivata della funzione $y=e^{2x}$ nel punto $x_0=0$, quale dei seguenti limiti occorre calcolare?

A $\lim_{h\to 0} \frac{e^{2h}+1}{h}$ B $\lim_{h\to 0} \frac{e^{2h}}{h}$ C $\lim_{h\to 0} \frac{e^{h}}{2h}$ D $\lim_{h\to 0} \frac{e^{2h}-1}{h}$

7 **Associazione.** Ciascuno dei limiti riportati nella prima colonna rappresenta la derivata di una funzione f in un punto x_0 indicato. Fai le associazioni corrette.

a. $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$	A. $f(x)=x^2$	$x_0=4$
b. $\lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^3+8}{h}$	B. $f(x)=x^2$	$x_0=-4$
c. $\lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2-16}{h}$	C. $f(x)=x^3$	$x_0=2$
d. $\lim_{h\to 0} \frac{(-4+h)^2-16}{h}$	D. $f(x)=x^3$	$x_0=-2$

Calcolo della derivata in un punto in base alla definizione

8 **ESERCIZIO GUIDATO**

Determina, in base alla definizione, la derivata di ciascuna delle seguenti funzioni, nel punto indicato a fianco.

a. $f(x) = x^2 + 3x, \quad x_0 = 2$

b. $f(x) = e^{2x}, \quad x_0 = 0$

a. Ricorda che la derivata di una funzione in un punto x_0, se esiste, è uguale al seguente limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

In questo caso devi applicare la definizione con $x_0 = 2$, quindi devi calcolare il seguente limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(2+h)^2 + 3(2+h)}^{f(2+h)} - \overbrace{10}^{f(2)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + \ldots\ldots}{2h} = \lim_{h\to 0} h + \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Dunque $f'(2) = \ldots\ldots$

b. Devi calcolare il seguente limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{2h} - \ldots\ldots}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{2h} - \ldots\ldots}{2h} \cdot 2 = \ldots\ldots$$

Dunque $f'(0) = \ldots\ldots$

Determina, in base alla definizione, la derivata di ciascuna delle seguenti funzioni nel punto indicato a fianco.

9 $f(x) = -2x + 4$ $\quad x_0 = 2$ $\quad [-2]$

10 $f(x) = x^2 - 2x$ $\quad x_0 = 3$ $\quad [4]$

11 $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x_0 = 1$ $\quad [-1]$

12 $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 4$ $\quad \left[\frac{1}{4}\right]$

13 $f(x) = x^2 - 5x + 1$ $\quad x_0 = -1$ $\quad [-7]$

14 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\quad x_0 = 2$ $\quad [-1]$

15 $f(x) = x^2 - 2x$ $\quad x_0 = 4$ $\quad [6]$

16 $f(x) = 2\sqrt{x}$ $\quad x_0 = 3$ $\quad \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

17 **Videolezione** $f(x) = x^3$ $\quad x_0 = -1$ $\quad [3]$

18 $f(x) = \sin 2x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad [2]$

19 $f(x) = \ln x$ $\quad x_0 = 1$ $\quad [1]$

20 $f(x) = \cos x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad [0]$

21 $f(x) = e^x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad [1]$

22 $f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = \pi$ $\quad [-1]$

23 $f(x) = \tan x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad [1]$

24 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ $\quad x_0 = 0$ $\quad [0]$

25 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad x_0 = 8$ $\quad \left[\frac{1}{12}\right]$

26 $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 4$ $\quad \left[-\frac{1}{12}\right]$

27 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\right]$

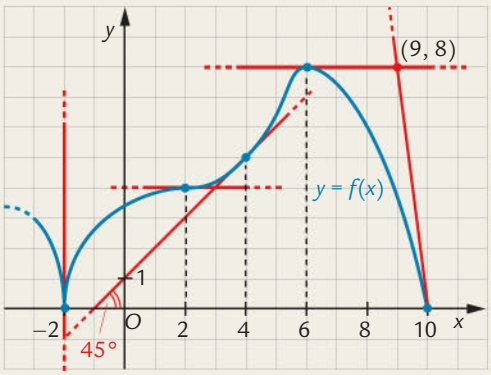
28 $f(x) = e^{x-1}$ $\quad x_0 = 0$ $\quad \left[\frac{1}{e}\right]$

29 $f(x) = \tan x$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\quad [2]$

Calcolo della derivata in un punto tramite lettura del grafico

30 ESERCIZIO SVOLTO

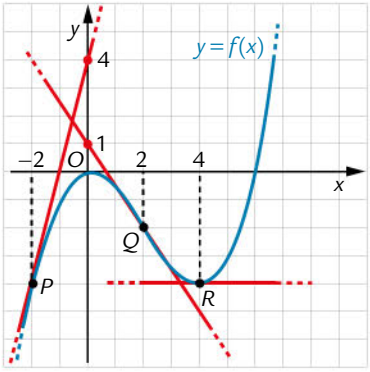
Nella figura è riportato il grafico di una funzione f e sono rappresentate le rette a esso tangenti nei punti di ascissa $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 6$ e $x = 10$. Determina, se esiste, la derivata della funzione in tali punti.



La derivata di una funzione in un punto, se esiste, è uguale al *coefficiente angolare* della retta *tangente* al suo grafico. Abbiamo che:

- in $x = -2$, la tangente è *verticale*; il coefficiente angolare di una retta verticale **non** è definito, pertanto **non** esiste la derivata della funzione in $x = -2$;
- in $x = 2$ e in $x = 6$ le tangenti sono *orizzontali*; poiché il coefficiente angolare di una retta orizzontale è zero, concludiamo che $f'(2) = 0$ e $f'(6) = 0$;
- in $x = 4$, la retta tangente forma con l'asse x un angolo di 45°, quindi ha coefficiente angolare uguale a 1; ne segue che $f'(4) = 1$;
- in $x = 10$ la retta tangente passa per il punto (9, 8); poiché il coefficiente angolare della retta passante per (9, 8) e per (10, 0) è −8, concludiamo che $f'(10) = -8$.

31 Osserva la figura, in cui sono state tracciate le rette tangenti al grafico della funzione f nei tre punti P, Q ed R.



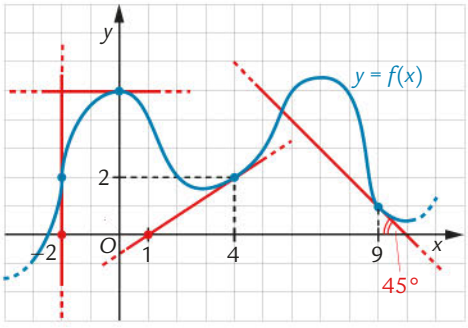
In base al significato geometrico di derivata, completa le seguenti uguaglianze:

$f'(-2) =$ .....

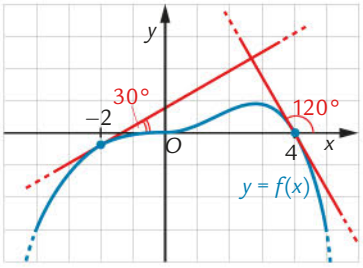
$f'(2) =$ .....

$f'(4) =$ .....

32 Nella figura è riportato il grafico di una funzione $y = f(x)$ e sono rappresentate (in rosso) le rette tangenti nei punti di ascissa $x = -2$, $x = 0$, $x = 4$, e $x = 9$. Determina, se esistono, le derivate della funzione in tali punti.



33 Nella figura è riportato il grafico di una funzione $y = f(x)$ e sono rappresentate (in rosso) le rette tangenti nei punti di ascissa $x = -2$ e $x = 4$. La tangente nell'origine è l'asse x. Determina, se esistono, le derivate della funzione in $x = -2$, in $x = 0$ e in $x = 4$.



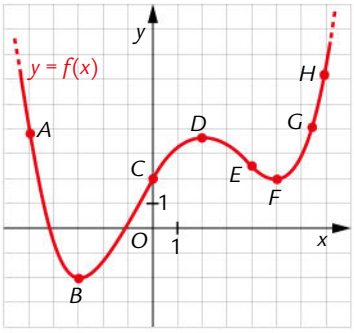
34 Considera la funzione f di cui è riportato il grafico in figura.

a. In corrispondenza delle ascisse di quali punti la derivata prima della funzione f è positiva?

b. In corrispondenza delle ascisse di quali punti la derivata prima della funzione f è nulla?

c. In corrispondenza delle ascisse di quali punti la derivata prima della funzione f è negativa?

d. Disponi in ordine crescente i valori della derivata della funzione f in corrispondenza delle ascisse dei punti A, B, C, D, E, F, G, H.



Calcolo della funzione derivata in base alla definizione

35 ESERCIZIO GUIDATO

Determina, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x)=\frac{1}{x}$.

Calcola la derivata della funzione f nel generico punto di ascissa x:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dots\dots\dots}{\frac{x(x+h)}{h}}=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{x(\dots)}\right]=\dots$$

Dunque: $f'(x)=-\frac{1}{\dots}$

Determina, in base alla definizione, la derivata di ciascuna delle seguenti funzioni.

36 $f(x)=3x+1$ $[f'(x)=3]$

37 $f(x)=2x^2$ $[f'(x)=4x]$

38 $f(x)=1-x^2$ $[f'(x)=-2x]$

39 $f(x)=\frac{2}{x}$ $\left[f'(x)=-\frac{2}{x^2}\right]$

40 $f(x)=x^2-4x+1$ $[f'(x)=2x-4]$

41 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\left[f'(x)=-\frac{2}{x^3}\right]$

42 $f(x)=\frac{1}{x-2}$ $\left[f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}\right]$

43 $f(x)=\frac{x+1}{x}$ $\left[f'(x)=-\frac{1}{x^2}\right]$

44 $f(x)=x^2-2x$ $[f'(x)=2x-2]$

45 $f(x)=x^3$ $[f'(x)=3x^2]$

46 $f(x)=\sqrt{x}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$

47 $f(x)=\sqrt{2x+1}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right]$

48 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right]$

49 Videolezione $f(x)=\ln x$ $\left[f'(x)=\frac{1}{x}\right]$

50 $f(x)=e^x$ $[f'(x)=e^x]$

51 $f(x)=\ln(2x)$ $\left[f'(x)=\frac{1}{x}\right]$

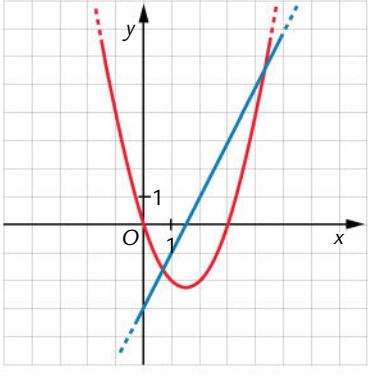
52 $f(x)=e^{2x}$ $[f'(x)=2e^{2x}]$

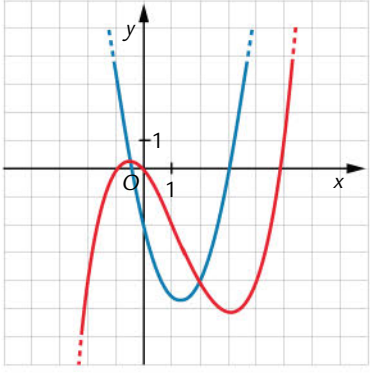
53 $f(x)=\sin x$ $[f'(x)=\cos x]$

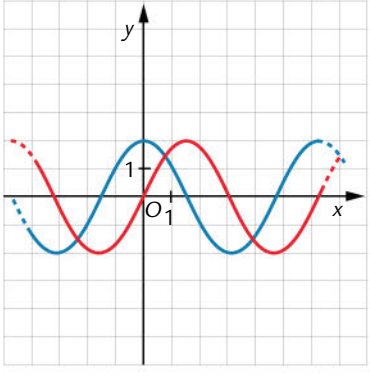
54 $f(x)=\cos 2x$ $[f'(x)=-2\sin 2x]$

Interpretazione di grafici

55 In ciascuna delle seguenti figure sono stati disegnati il grafico di una funzione e il grafico della funzione derivata. Individua quale dei due è il grafico della derivata, ricordando il suo significato geometrico.







La derivata come velocità di variazione istantanea

57 Completa la tabella seguente (la seconda riga è completata come esempio).

Espressione verbale	Variabili	In formule
Una popolazione di batteri cresce alla velocità costante di 1800 batteri all'ora.	x = numero di batteri t = tempo (in ore)	$x'(t) = 1800$ o $\frac{dx}{dt} = 1800$
Il profitto, dopo 2 mesi dall'inizio dell'attività, sta crescendo alla velocità di 2500 euro al mese.	P = profitto t = tempo (in mesi) trascorso dall'inizio dell'attività	.....
Il costo sta decrescendo alla velocità costante di 800 euro al giorno.	C = costo T = tempo (in giorni)	.....

58 Completa la tabella seguente.

Espressione verbale	Variabili	In formule
La velocità dell'auto, dopo 12 minuti dalla partenza, è di 95 km/h.	x = posizione dell'auto (in km) t = tempo (in ore)	.....
L'altezza dell'acqua di una piscina sta decrescendo alla velocità costante di 1 cm all'ora.	h = altezza dell'acqua nella piscina (in cm) t = tempo (in ore)	.....
Una pompa, dopo 10 minuti da quando è stata attivata, sta immettendo acqua in una cisterna alla velocità di 20 litri al minuto.	V = volume di acqua nella cisterna (in litri) T = tempo (in minuti) trascorso dall'inizio dell'attivazione	.....

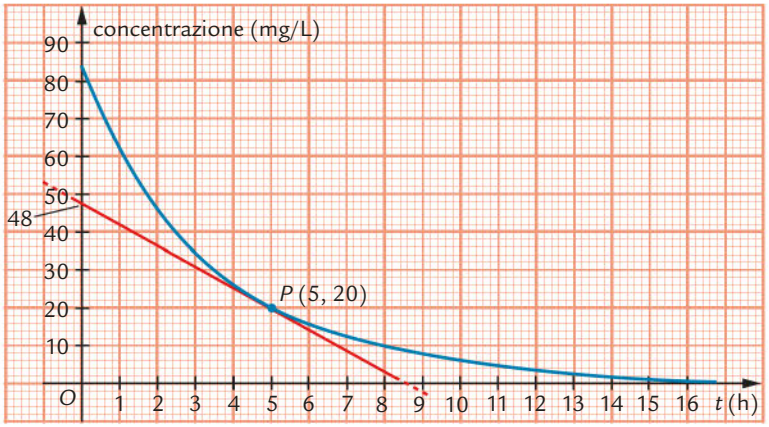
59 **Caduta libera.** Un corpo viene lasciato cadere con velocità nulla da una altezza h_0 rispetto al suolo. Supponendo trascurabile l'attrito, dopo un tempo t (in secondi) da quando è stato lasciato cadere, il corpo si trova a un'altezza espressa dalla funzione $h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$ dove $g = 9{,}8$ m/s^2. Applicando la definizione di derivata, determina la velocità del corpo dopo 2 s. [−19,6 m/s]

60 **Crescita della popolazione di una città.** La popolazione di una città cresce secondo il modello descritto dalla funzione $P(t) = 80\,000 + 500t^2$, dove P rappresenta il numero di abitanti della città e t è il tempo (in anni) trascorso dall'inizio dell'osservazione (corrispondente a $t = 0$).

a. Di quanto cresce la popolazione della città nei primi tre anni?

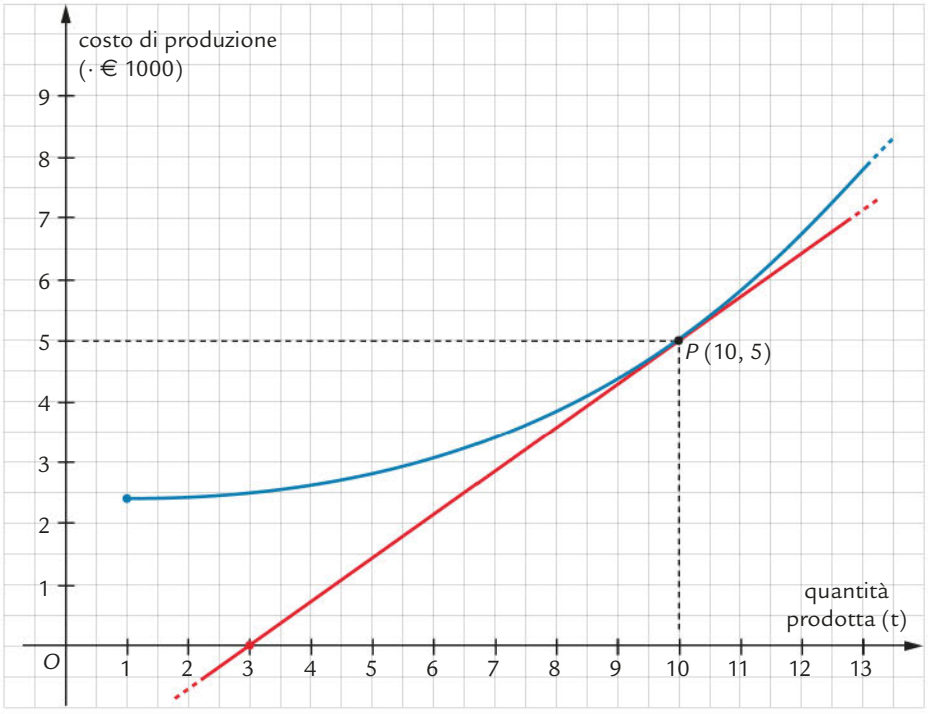
b. Applicando la definizione di derivata, determina a quale velocità sta crescendo la popolazione della città dopo tre anni dall'inizio dell'osservazione. [**a.** 4500 abitanti; **b.** 3000 abitanti/anno]

61 **Concentrazione di un farmaco nel sangue.** La funzione che rappresenta la concentrazione di un farmaco (in mg/L) nel sangue di un paziente in funzione del tempo t (in ore) trascorso dalla somministrazione è quella colorata in blu in figura. La retta tangente a tale grafico nel punto $P(5, 20)$ è quella colorata in rosso.



A quale velocità sta decrescendo la concentrazione del farmaco dopo 5 ore dalla somministrazione? [−5,6 (mg/L)/h]

62 **Costo di produzione.** Un'azienda di vernici produce ogni giorno una quantità di almeno una tonnellata di una certa vernice. La funzione che rappresenta il costo di produzione di tale vernice (in migliaia di euro) in funzione della quantità giornaliera prodotta (in tonnellate) è quella colorata in blu in figura. La retta tangente a tale grafico nel punto $P(10, 5)$ è quella colorata in rosso.



A quale velocità sta crescendo il costo di produzione rispetto alla quantità prodotta, in corrispondenza di una produzione giornaliera di 10 tonnellate? [Circa 714 euro/tonnellata]

2. Continuità e derivabilità

Teoria p. 262

Esercizi introduttivi

63 **Vero o falso?**

a. in ogni punto in cui una funzione è definita esiste la derivata V F

b. la derivata di una funzione in un punto, se esiste, è un numero reale V F

c. la derivata di una funzione in un punto non può essere zero V F

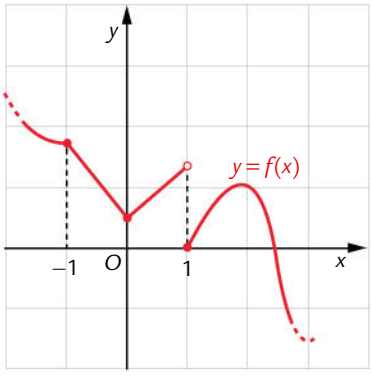
d. se una funzione è continua in un punto, certamente in quel punto è derivabile V F

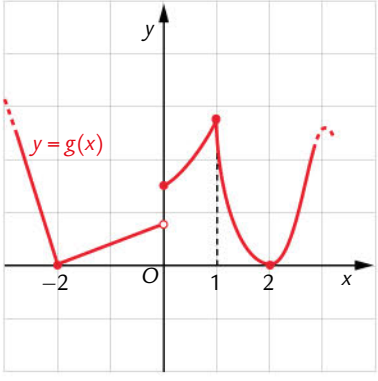
e. se una funzione è derivabile in un punto, certamente in quel punto è continua V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

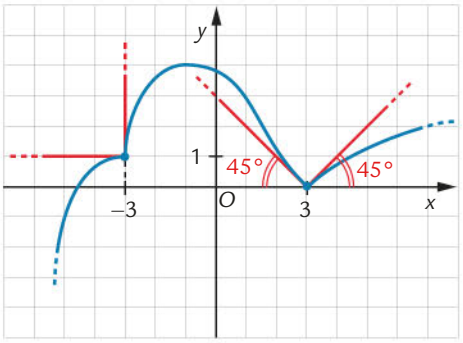
Interpretazione di grafici

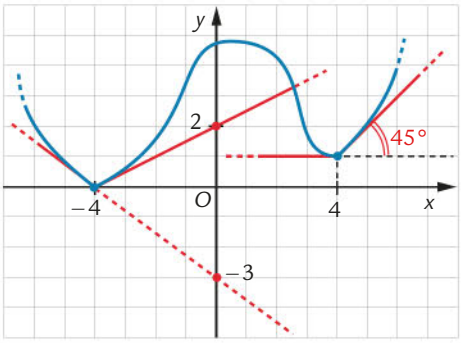
64 Osserva i seguenti grafici di funzioni e individua i punti di discontinuità e di non derivabilità.





65 Deduci dai grafici i valori delle derivate a destra e a sinistra dei punti di non derivabilità.





Determina la derivata destra e la derivata sinistra delle funzioni seguenti nel punto indicato, utilizzando la definizione.

66 $f(x)=|x-4|$ $\quad x_0=4$ $\quad [f_-'(x_0)=-1,\ f_+'(x_0)=1]$

67 $f(x)=|6-2x|$ $\quad x_0=+3$ $\quad [f_-'(x_0)=-2,\ f_+'(x_0)=2]$

68 $f(x)=|x^2-2x|$ $\quad x_0=2$ $\quad [f_-'(x_0)=-2,\ f_+'(x_0)=2]$

69 $f(x)=|9-x^2|$ $\quad x_0=3$ $\quad [f_-'(x_0)=-6,\ f_+'(x_0)=6]$

70 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & x<0\\ x^2+3 & x\geq 0\end{cases}$ $\quad x_0=0$ $\quad [f_-'(x_0)=2,\ f_+'(x_0)=0]$

71 $f(x)=\begin{cases}x^3+3x & x<0\\ x^2-2x & x\geq 0\end{cases}$ $\quad x_0=0$ $\quad [f_-'(x_0)=3,\ f_+'(x_0)=-2]$

3. Derivate delle funzioni elementari

Teoria p. 264

Esercizi introduttivi

72 **Vero o falso?**

a. la derivata di $f(x)=x^2$ è $f'(x)=2x$ V F

b. la derivata di $f(x)=5x$ è $f'(x)=5$ V F

c. la derivata di $f(x)=5$ è $f'(x)=5x$ V F

d. la derivata di $f(x)=2x$ è $f'(x)=x^2$ V F

e. la derivata di $f(x)=\frac{1}{x}$ è $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ V F

f. la derivata di $f(x)=\sqrt{x}$ è $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}$ V F

[2 affermazioni vere e 4 false]

73 Associa a ogni funzione la sua derivata.

a. $f(x)=\frac{x}{2}$	**A.** $f'(x)=2$
b. $f(x)=2$	**B.** $f'(x)=0$
c. $f(x)=2x$	**C.** $f'(x)=0{,}5$
d. $f(x)=\sin x$	**D.** $f'(x)=-\sin x$
e. $f(x)=x^2$	**E.** $f'(x)=2x$
f. $f(x)=2^x$	**F.** $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}$
g. $f(x)=\log_2 x$	**G.** $f'(x)=\cos x$
h. $f(x)=\cos x$	**H.** $f'(x)=2^x\ln 2$

74 **Caccia all'errore.** Completa la seguente tabella.

Funzione	Funzione derivata	È corretta?	Eventuale correzione
$f(x)=x^5$	$f'(x)=4x^5$	☐ Sì ☐ No	
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$	☐ Sì ☐ No	
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{2x}$	☐ Sì ☐ No	
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$	☐ Sì ☐ No	
$f(x)=\pi^3$	$f'(x)=3\pi^2$	☐ Sì ☐ No	

Calcolo delle derivate di funzioni elementari

75 ESERCIZIO GUIDATO

Determina le derivate delle seguenti funzioni:

a. $y = x^8$ **b.** $y = \frac{1}{x^6}$ **c.** $y = x\sqrt[3]{x}$ **d.** $y = 5^x$

a. Ricorda che $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$; applicando la formula con $\alpha = 8$, ottieni: $y = x^8 \Rightarrow y' = \ldots\ldots\ldots x^{\ldots\ldots}$

b. Osserva che $\frac{1}{x^6} = x^{\ldots\ldots}$ e applica la formula ricordata al punto precedente: $y = \frac{1}{x^6} = x^{\ldots\ldots} \Rightarrow y' = \ldots\ldots x^{\ldots\ldots} = -\frac{\ldots\ldots}{x^{\ldots\ldots}}$

c. Osserva che $x\sqrt[3]{x} = x^{1+\frac{1}{3}} = x^{\ldots\ldots\ldots}$, quindi: $y = x\sqrt[3]{x} = x^{\ldots\ldots\ldots} \Rightarrow y' = \ldots\ldots\ldots x^{\ldots\ldots\ldots}$

d. Ricorda che $Da^x = a^x \ln a$; applicando la formula con $a = 5$, ottieni: $y = 5^x \Rightarrow y' = \ldots\ldots\ldots$

Determina le derivate delle seguenti funzioni.

76 $y = x^6$ $[y' = 6x^5]$

77 $y = x^{10}$ $[y' = 10x^9]$

78 $y = x^{\frac{3}{4}}$ $\left[y' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}\right]$

79 $y = x^{-2}$ $[y' = -2x^{-3}]$

80 $y = \sqrt[4]{x^3}$ $\left[y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right]$

81 $y = \frac{1}{x^2}$ $\left[y' = -\frac{2}{x^3}\right]$

82 $y = \sqrt[3]{x}$ $\left[y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right]$

83 $y = \frac{1}{x^3}$ $\left[y' = -\frac{3}{x^4}\right]$

84 $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$ $\left[y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right]$

85 $y = \sqrt[5]{x^4}$ $\left[y' = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}\right]$

86 $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$ $\left[y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}\right]$

87 $y = \log_3 x$ $\left[y' = \frac{1}{x \ln 3}\right]$

88 $y = 4^x$ $[y' = 4^x \ln 4]$

89 $y = \ln x$ $\left[y' = \frac{1}{x}\right]$

90 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\left[y' = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2\right]$

91 $y = \sqrt[5]{x^3}$ $\left[y' = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\right]$

92 $y = 5^{-x}$ $\left[y' = -\left(\frac{1}{5}\right)^x \ln 5\right]$

Applicazioni

93 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ nel suo punto di ascissa 9.

- La derivata di una funzione $y = f(x)$ in x_0 rappresenta il *coefficiente angolare* della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0, quindi l'equazione della tangente è:
  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ $\quad y - y_0 = m(x - x_0)$ con $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$
- Osserviamo che $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, quindi $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. Abbiamo allora:
  $x_0 = 9$
  $f(x_0) = f(9) = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$
  $f'(x_0) = f'(9) = -\frac{1}{2} \cdot 9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot (9^{\frac{1}{2}})^{-3} = -\frac{1}{2} \cdot 3^{-3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{27} = -\frac{1}{54}$
- L'equazione della retta tangente è quindi:
  $y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{54}(x - 9) \Rightarrow y = -\frac{1}{54}x + \frac{1}{2}$

94 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = x^3$ nel suo punto di ascissa 2. $[y = 12x - 16]$

95 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \frac{1}{4}x^4$ nel suo punto di ascissa 2. $[y = 8x - 12]$

96 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = x\sqrt{x}$ nel suo punto di ascissa 4. $[y = 3x - 4]$

97 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2}$ nel suo punto di ascissa 1. $[y = -2x + 3]$

98 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ nel suo punto di ascissa -1. $\left[y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right]$

99 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ nel suo punto di ascissa 1. $\left[y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}\right]$

100 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \sin x$ nel suo punto di ascissa $x = \frac{\pi}{4}$. $\left[y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

101 **Videolezione** Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \cos x$ nel suo punto di ascissa $x = \frac{\pi}{3}$. $\left[y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right]$

102 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = 2^x$ nel suo punto di intersezione con l'asse y. $[y = x \ln 2 + 1]$

103 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \log_3 x$ nel suo punto di intersezione con l'asse x. $\left[y' = \frac{1}{\ln 3}(x - 1)\right]$

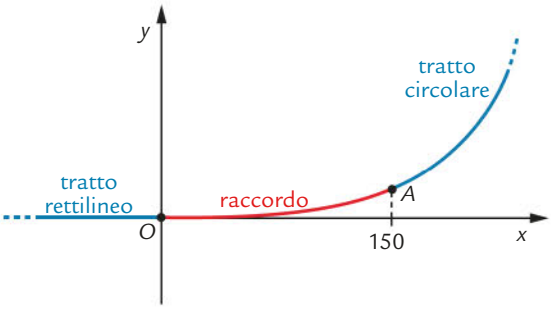
104 Verifica che le rette tangenti ai grafici delle funzioni $y = \sin x$ e $y = \cos x$ nei loro punti di ascissa $\frac{3\pi}{4}$ sono parallele.

105 Verifica che le rette tangenti ai grafici delle funzioni $y = x^3$ e $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ nei loro punti di ascissa 1 sono perpendicolari.

Realtà e modelli

106 **Legge di Ohm.** Secondo la prima legge di Ohm, l'intensità di corrente i che fluisce all'interno di un conduttore, la tensione V agli estremi del conduttore e la sua resistenza R sono legati dalla legge $i = \frac{V}{R}$. Supponi che la tensione agli estremi di un conduttore sia di 10 V; calcola il tasso di variazione della corrente rispetto alla resistenza, quando $R = 2{,}5\ \Omega$. $[-1{,}6\ \text{A}/\Omega]$

107 **Raccordo ferroviario.** Nell'ingegneria ferroviaria si evita il passaggio diretto da un tratto rettilineo a un tratto a forma di arco di circonferenza. Ciò comporterebbe infatti un brusco passaggio da un tratto avente curvatura nulla a un tratto avente curvatura assegnata, con conseguente variazione istantanea dell'accelerazione centripeta (dannosa sia per le rotaie, sia per i cerchioni, sia per il comfort a bordo). Si interpone perciò fra il tratto rettilineo e quello circolare un arco «a curvatura progressiva». La figura rappresenta un raccordo di questo tipo realizzato, come avviene di sovente, tramite un arco di curva di equazione del tipo $y = ax^3$.



L'unità di misura su entrambi gli assi è il metro e il raccordo ha una lunghezza orizzontale di 150 m. Inoltre il raggio del tratto circolare che ha un estremo nel punto A appartiene a una retta parallela alla retta di equazione $y = -8x$. Determina il valore di a. $\left[a = \frac{1}{540\,000}\right]$

108 **Matematica e chimica** L'equazione di stato dei gas perfetti, come è noto, è $pV = nRT$, dove p è la pressione del gas, V è il volume occupato, T è la temperatura assoluta del gas (espressa in kelvin), n sono le moli del gas e R è la costante universale dei gas. Il coefficiente k_T di compressibilità isoterma (cioè a temperatura costante) e il coefficiente α di espansione isobara (cioè a pressione costante) sono così definiti:

$$k_T = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} \qquad \alpha = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT}$$

Verifica, in base a queste definizioni, che per un gas perfetto risulta $k_T = \frac{1}{p}$ e $\alpha = \frac{1}{T}$.

4. Algebra delle derivate

Teoria p. 267

Esercizi introduttivi

109 **Vero o falso?**

a. la derivata della somma di due funzioni derivabili è la somma delle derivate V F

b. la derivata della differenza di due funzioni derivabili è la differenza delle derivate V F

c. la derivata della reciproca di una funzione derivabile e non nulla per ogni valore di x per cui è definita è la reciproca della derivata V F

d. la derivata del prodotto di una costante per una funzione derivabile è il prodotto della costante per la derivata della funzione V F

e. la derivata del prodotto di due funzioni derivabili è il prodotto delle derivate V F

f. la derivata del quoziente di due funzioni derivabili è il quoziente delle derivate V F

[3 affermazioni vere e 3 false]

Test

110 Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili tali che $f'(1) = 2$ e $g'(1) = -3$; quanto vale la derivata della funzione $f + g$ in $x = 1$?

A -1 B 0 C 1 D 2

111 Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili tali che $f'(1) = -3$ e $g'(1) = 2$; quanto vale la derivata della funzione $f \cdot g$ in $x = 1$?

A -4 B -5 C -6 D Le informazioni date non sono sufficienti per rispondere

112 Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili tali che $f(1) = 1$, $g(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $g'(1) = 4$; quanto vale la derivata della funzione $\frac{f}{g}$ in $x = 1$?

A 0 B $0{,}5$ C 1 D Le informazioni date non sono sufficienti per rispondere

113 **Caccia all'errore.** Nel derivare le seguenti funzioni sono stati commessi alcuni errori. Individuali e correggili.

a. $y = \sin x - \cos x \Rightarrow y' = \cos x - \sin x$

b. $y = \frac{1}{x^2 + e^x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2x + e^x}$

c. $y = x^2 \sin x \Rightarrow y' = 2x \cos x$

d. $y = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$

e. $y = \frac{\pi}{\pi + 1} \Rightarrow y' = \frac{1}{(\pi+1)^2}$ (π costante)

Calcolo delle derivate

114 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + \sqrt{x}$ **b.** $f(x) = x^3 \sin x$ **c.** $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

a. Utilizza le proprietà di linearità della derivata:

$$f'(x) = \underbrace{Dx^2 + 2 \cdot D\frac{1}{x} + D\sqrt{x}}_{\text{per la linearità della derivata}} = 2x + 2 \cdot (\ldots\ldots) + \frac{1}{\ldots\ldots} = 2x - \frac{2}{\ldots\ldots} + \frac{1}{\ldots\ldots}$$

b. Utilizza la regola di derivazione del prodotto:

$$f'(x) = \underbrace{Dx^3}_{\text{derivata del primo fattore}} \cdot \underbrace{\sin x}_{\text{secondo fattore}} + \underbrace{x^3}_{\text{primo fattore}} \cdot \underbrace{D \sin x}_{\text{derivata del secondo fattore}} = \ldots\ldots$$

c. Utilizza la regola di derivazione del quoziente:

$$f'(x)=\frac{\overbrace{\mathrm{D}(x^2+2x)}^{\text{derivata del numeratore}}\cdot\overbrace{(\ldots\ldots)}^{\text{denominatore}}-\overbrace{(x^2+2x)}^{\text{numeratore}}\cdot\overbrace{\mathrm{D}(\ldots\ldots)}^{\text{derivata del denominatore}}}{\underbrace{(\ldots\ldots)^2}_{\text{quadrato del denominatore}}}=\frac{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)-(x^2+2x)\cdot\ldots\ldots}{(\ldots\ldots)^2}=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni, utilizzando la proprietà di linearità della derivata.

115 $f(x)=x^3+1$ $[f'(x)=3x^2]$

116 $f(x)=x+x^2$ $[f'(x)=1+2x]$

117 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^3$ $\left[f'(x)=2x^3-\frac{9}{2}x^2\right]$

118 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2-5$ $[f'(x)=2x^3-2x^2-4x]$

119 $f(x)=\frac{1}{5}x^{10}-\frac{1}{3}x^6-6x-7$ $[f'(x)=2x^9-2x^5-6]$

120 $f(x)=3x-\frac{1}{x}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{x^2}+3\right]$

121 $f(x)=5x^2-\frac{1}{x^2}$ $\left[f'(x)=10x+\frac{2}{x^3}\right]$

122 $f(x)=\frac{2}{x^2}-x^3$ $\left[f'(x)=-3x^2-\frac{4}{x^3}\right]$

123 $f(x)=2\sqrt{x}+3$ $\left[f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$

124 $f(x)=4\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$ $\left[f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]$

125 $f(x)=\sin x+\cos x$ $[f'(x)=\cos x-\sin x]$

126 $f(x)=\sin x-x$ $[f'(x)=\cos x-1]$

127 $f(x)=\ln x+x$ $\left[f'(x)=\frac{1}{x}+1\right]$

128 $f(x)=x^2-2\ln x+e^x$ $\left[f'(x)=2x-\frac{2}{x}+e^x\right]$

129 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ $\left[f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}\right]$

130 $f(x)=x^3-2\ln x$ $\left[f'(x)=3x^2-\frac{2}{x}\right]$

131 $f(x)=2^x-\log_2 x$ $\left[f'(x)=2^x\ln 2-\frac{1}{x\ln 2}\right]$

132 $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ $\left[f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}\right]$

133 $f(x)=2\sin x+\cos x$ $[f'(x)=2\cos x-\sin x]$

134 $f(x)=x-2e^x-\ln x^2$ $\left[f'(x)=1-2e^x-\frac{2}{x}\right]$

135 $f(z)=\frac{1}{z}+z^4$ $\left[f'(z)=-\frac{1}{z^2}+4z^3\right]$

136 $f(t)=t+\frac{1}{t}$ $\left[f'(t)=1-\frac{1}{t^2}\right]$

137 $f(m)=km^2-\frac{k^2}{m}$ $\left[f'(m)=2km+\frac{k^2}{m^2}\right]$

138 $f(k)=km^2-\frac{k^2}{m}$ $\left[f'(k)=m^2-\frac{2k}{m}\right]$

139 $f(x)=ax-\frac{1}{a^2x^3}$ $\left[f'(x)=a+\frac{3}{a^2x^4}\right]$

---

140 **E se?** $f(x)=k^2x-\frac{1}{kx^3}$ $\left[f'(x)=k^2+\frac{3}{kx^4};\ f'(k)=2kx+\frac{1}{k^2x^3}\right]$

▶ Come cambierebbe la risposta se k fosse la variabile indipendente e x fosse una costante?

Calcola le derivate delle seguenti funzioni, utilizzando il teorema sulla derivata del prodotto.

141 $f(x)=(3x-1)(2x+5)$ $[f'(x)=12x+13]$

142 $f(x)=(3x^2-1)(2x^2+5)$ $[f'(x)=24x^3+26x]$

143 $f(x)=(x-1)(2x^2-1)$ $[f'(x)=6x^2-4x-1]$

144 $f(x)=(3x-2)(5x^2+7)$ $[f'(x)=45x^2-20x+21]$

145 $f(x)=(x^2+1)(x+1)$ $[f'(x)=3x^2+2x+1]$

146 $f(x)=(x^5-1)(x^2+3)$ $[f'(x)=7x^6+15x^4-2x]$

147 $f(x)=(x^3+2)(x^2-1)$ $[f'(x)=5x^4-3x^2+4x]$

148 $f(x)=x^2\ln x$ $[f'(x)=x(2\ln x+1)]$

149 $f(x)=e^x\sin x$ $[f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)]$

150 $f(x)=xe^x$ $[f'(x)=(x+1)e^x]$

151 $f(x)=e^x\sqrt{x}$ $\left[f'(x)=e^x\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$

152 $f(x)=x\ln x$ $[f'(x)=\ln x+1]$

153 $f(x) = x^2 e^x$ $[f'(x) = (x^2 + 2x)e^x]$

154 $f(x) = x \sin x$ $[f'(x) = x \cos x + \sin x]$

155 $f(x) = \sqrt{x}\,(1 + e^x)$ $\left[f'(x) = \frac{e^x(2x+1)+1}{2\sqrt{x}}\right]$

156 $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 3)$ $[f'(x) = e^x(x^2 + 1)]$

157 $f(x) = (x^2 + x) \ln x$ $[f'(x) = (2x + 1) \ln x + x + 1]$

158 **Videolezione** $f(x) = \frac{1}{x}(e^x + \ln x)$ $\left[f'(x) = \frac{e^x(x-1) - \ln x + 1}{x^2}\right]$

159 $f(t) = t^2 \sin t$ $[f'(t) = t(2 \sin t + t \cos t]$

160 $f(u) = (u^2 + vu)\, e^u$ $[f'(u) = (u^2 + v + vu + 2u)e^u]$

161 $f(k) = e^k(k^2 - \sqrt{k}\,)$ $\left[f'(k) = e^k\left(k^2 + 2k - \sqrt{k} - \frac{1}{2\sqrt{k}}\right)\right]$

162 $f(x) = (ax + b)(ax^2 + b^2)$ $[f'(x) = 3a^2x^2 + 2abx + ab^2]$

163 **E se?** $f(x) = (kx^2 - 1)(k^3x - 1)$

▸ Come cambierebbe la risposta se k fosse la variabile indipendente e x fosse una costante?

$[f'(x) = 3k^4x^2 - 2kx - k^3;\ f'(k) = 4k^3x^3 - x^2 - 3k^2x]$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni, utilizzando il teorema sulla derivata del quoziente.

164 $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ $\left[f'(x) = -\frac{2}{(2x+3)^2}\right]$

165 $f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$ $\left[f'(x) = \frac{2x^2+6x}{(2x+3)^2}\right]$

166 $f(x) = \frac{5}{1-x^2}$ $\left[f'(x) = \frac{10x}{(x^2-1)^2}\right]$

167 $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}$ $\left[f'(x) = -\frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\right]$

168 $f(x) = \frac{2x^2}{5-2x}$ $\left[f'(x) = \frac{20x - 4x^2}{(2x-5)^2}\right]$

169 $f(x) = \frac{x-1}{2x^2+3}$ $\left[f'(x) = -\frac{2x^2-4x-3}{(2x^2+3)^2}\right]$

170 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $\left[f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}\right]$

171 $f(x) = \frac{x}{x-2}$ $\left[f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}\right]$

172 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$ $\left[f'(x) = -\frac{10x}{(x^2-4)^2}\right]$

173 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\left[f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]$

174 $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ $\left[f'(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\right]$

175 $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ $\left[f'(x) = \frac{1 - 3\ln x}{x^4}\right]$

176 $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ $[f'(x) = x(2-x)\, e^{-x}]$

177 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$ $\left[f'(x) = \frac{3 - 2\ln x}{x^3}\right]$

178 $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ $\left[f'(x) = \frac{(2x-1)e^x}{2x\sqrt{x}}\right]$

179 $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$ $\left[f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x - 1)^2}\right]$

180 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ $\left[f'(x) = \frac{2}{x(\ln x + 1)^2}\right]$

181 $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ $\left[f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right]$

182 $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$ $\left[f'(x) = -\frac{1}{\sin x + 1}\right]$

183 $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 1}$ $\left[f'(x) = \frac{1}{1 - \cos x}\right]$

184 $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$ $\left[f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+2)^2}\right]$

185 $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ $\left[f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\right]$

186 $f(x) = \frac{x^2}{x + e^x}$ $\left[f'(x) = \frac{x^2 - xe^x(x-2)}{(x+e^x)^2}\right]$

187 $f(x) = \frac{e^x}{\ln x - 1}$ $\left[f'(x) = \frac{e^x(x \ln x - x - 1)}{x(\ln x - 1)^2}\right]$

188 $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$ $\left[f'(x) = e^x\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x}\right)\right]$

189 $f(x) = \frac{\tan x + 1}{\tan x}$ $\left[f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}\right]$

190 $f(u) = \frac{\tan u}{u}$ $\left[f'(u) = \frac{u - \sin u \cos u}{u^2 \cos^2 u}\right]$

191 $f(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ $\left[f'(t) = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}\right]$

192 $f(x) = \frac{tx+1}{tx-1}$ $\left[f'(x) = -\frac{2t}{(tx-1)^2}\right]$

193 $f(x) = \frac{a^2x^2 - 1}{ax + 2}$ $\left[f'(x) = \frac{a^3x^2 + 4a^2x + a}{(ax+2)^2}\right]$

194 $f(x) = ax^2 + \frac{ax+1}{x-a^2}$ $\left[f'(x) = 2ax - \frac{a^3+1}{(x-a^2)^2}\right]$

195 **Calcolo rapido.** Quando l'espressione analitica di una funzione si presenta sotto forma di *quoziente*, per calcolarne la derivata può essere utile, se possibile, riscriverla come *somma* o *differenza*, perché il procedimento di calcolo della derivata risulta più rapido. Per esempio, per derivare la funzione $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, invece di utilizzare la regola del quoziente può essere più utile osservare che $f(x)=x+\frac{1}{x}$, da cui segue subito che $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$.
Ragionando in modo simile a quest'ultimo esempio, calcola nel modo più rapido le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$ **b.** $f(x)=\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ **c.** $f(x)=\frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x}$

196 **Calcolo rapido.** Prima di calcolare la derivata di una funzione conviene verificare se quest'ultima è semplificabile, eventualmente ricorrendo a prodotti notevoli o sviluppi algebrici: spesso ciò consente di sveltire i conti. Osserva le funzioni che seguono e cerca di calcolarne le rispettive derivate a mente, dopo averle semplificate.

a. $f(x)=(x^4+3)(x^4-3)$ **b.** $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ **c.** $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$

Esercizi riassuntivi: l'algebra delle derivate

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

197 $f(x)=3x^3-4x^2+5x-1$ $[f'(x)=9x^2-8x+5]$

198 $f(x)=(2x^2-1)(3x+5)$ $[f'(x)=18x^2+20x-3]$

199 $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ $\left[f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}\right]$

200 $f(x)=3x^2+\frac{2}{x^2}$ $\left[f'(x)=6x-\frac{4}{x^3}\right]$

201 $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{x^2}\right]$

202 $f(x)=\frac{2}{3x^2+5}$ $\left[f'(x)=-\frac{12x}{(3x^2+5)^2}\right]$

203 $f(x)=\frac{3x-1}{2x+5}$ $\left[f'(x)=\frac{17}{(2x+5)^2}\right]$

204 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2}$ $\left[f'(x)=\frac{2}{x^3}\right]$

205 $f(x)=x^3(x-1)^2$ $[f'(x)=x^2(x-1)(5x-3)]$

206 $f(x)=\frac{2x^2}{x+4}$ $\left[f'(x)=\frac{2x^2+16x}{(x+4)^2}\right]$

207 $f(x)=\frac{x-1}{2x+3}$ $\left[f'(x)=\frac{5}{(2x+3)^2}\right]$

208 $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^3}$ $\left[f'(x)=-\frac{2x^2+3}{x^4}\right]$

209 $f(x)=\frac{3x}{x^2-1}$ $\left[f'(x)=-\frac{3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right]$

210 $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-1}$ $\left[f'(x)=-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}\right]$

211 $f(x)=x^2+\sin x+e^x$ $[f'(x)=2x+\cos x+e^x]$

212 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ $[f'(x)=3x^2-12x+11]$

213 $f(x)=\tan x+\frac{1}{\cos x}$ $\left[f'(x)=\frac{\sin x+1}{\cos^2 x}\right]$

214 $f(x)=(x-1)^2(x+1)$ $[f'(x)=3x^2-2x-1]$

215 $f(x)=\frac{x^2(x^3+1)}{x+4}$ $\left[f'(x)=\frac{x(4x^4+20x^3+x+8)}{(x+4)^2}\right]$

216 $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$ $[f'(x)=2e^x\sin x]$

217 $f(t)=\sin t+\frac{1}{\cos t}$ $\left[f'(x)=\cos t+\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right]$

218 $f(x)=\sin x-x\cos x$ $[f'(x)=x\sin x]$

219 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$ $\left[f'(x)=-\frac{1+2\ln x}{x^3}\right]$

220 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}\right]$

221 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$ $[f'(x)=x\ln x]$

222 $f(x)=x\tan x$ $\left[f'(x)=\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}\right]$

223 $f(t)=te^t-\sin t$ $[f'(t)=e^t(t+1)-\cos t]$

224 $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\right]$

225 $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{\sin x-1}\right]$

226 $f(x)=e^x(\ln x-1)$ $\left[f'(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)\right]$

227 $f(x)=x\ln x+\frac{\ln x}{x}$ $\left[f'(x)=\frac{(x^2-1)\ln x+x^2+1}{x^2}\right]$

228 $f(x)=x\,e^x+x^2$ $[f'(x)=e^x(x+1)+2x]$

229 $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$ $\left[f'(x)=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}\right]$

230 $f(x)=\frac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}+a}$ $\left[f'(x)=\frac{a}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+a)^2}\right]$

231 $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ $\left[f'(x)=\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}\right]$

232 $f(\alpha)=\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$ $[f'(\alpha)=\alpha\cos\alpha]$

233 $f(x)=\dfrac{x^2+x^3}{\sqrt{x}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{3x+5x^2}{2\sqrt{x}}\right]$

234 $f(x)=x^2\sqrt{x}\,\ln x$ $\left[f'(x)=x\sqrt{x}\left(\dfrac{5}{2}\ln x+1\right)\right]$

235 **Videolezione** $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\,\ln x-\dfrac{4}{9}x\sqrt{x}$ $\left[f'(x)=\sqrt{x}\,\ln x\right]$

236 $f(x)=x\,(\sin x)e^x$ $[f'(x)=e^x(x\cos x+x\sin x+\sin x)]$

237 $f(x)=\dfrac{x\ln x}{e^x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{1-(x-1)\ln x}{e^x}\right]$

238 $f(x)=\dfrac{xe^x}{x-1}$ $\left[f'(x)=\dfrac{e^x(x^2-x-1)}{(x-1)^2}\right]$

239 $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\right]$

Calcola le derivate seconde delle seguenti funzioni.

240 $f(x)=x^2(x^3+1)$ $[f''(x)=20x^3+2]$

241 $f(x)=x^3(2x^2-1)$ $[f''(x)=40x^3-6x]$

242 $f(x)=(x^2+1)^2$ $[f''(x)=4(3x^2+1)]$

243 $f(x)=\dfrac{x^5+x^2}{x^3}$ $\left[f''(x)=\dfrac{2(x^3+1)}{x^3}\right]$

244 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ $\left[f''(x)=-\dfrac{2}{(x+1)^3}\right]$

245 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ $\left[f''(x)=\dfrac{8}{(x-2)^3}\right]$

246 $f(x)=\dfrac{x^2+x^3}{x^4}$ $\left[f''(x)=\dfrac{2(x+3)}{x^4}\right]$

247 **Videolezione** $f(x)=e^x(x^2+2x+1)$ $[f''(x)=e^x(x^2+6x+7)]$

248 $f(x)=(\sin x-\cos x)e^x$ $[f''(x)=2\,e^x(\sin x+\cos x)]$

249 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ $\left[f''(x)=\dfrac{6\ln x-5}{x^4}\right]$

250 Verifica che la derivata della funzione $f(x)=\sin x\cos x$ è $f'(x)=\cos 2x$.

251 Verifica che la derivata della funzione $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}$ è $f'(x)=\dfrac{2}{1+\sin 2x}$.

Applicazioni

252 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^3-3x^2$ nel suo punto di ascissa $x=1$. $[y=-3x+1]$

253 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=3x-\dfrac{2}{x}$ nel suo punto di ascissa $x=2$. $\left[y=\dfrac{7}{2}x-2\right]$

254 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ nel suo punto di ascissa 4. $\left[y=\dfrac{33}{4}x-15\right]$

255 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ nel suo punto di ascissa $x=1$. $\left[y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\right]$

256 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=\tan x$ nel suo punto di ascissa $\dfrac{\pi}{4}$. $\left[y=2x-\dfrac{\pi}{2}+1\right]$

257 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y=xe^x$ nel suo punto di ascissa $x=1$. $[y=2ex-e]$

258 ESERCIZIO SVOLTO

La concentrazione (in mg/L) del principio attivo di un farmaco nel sangue di un paziente dopo un tempo t (in ore) dall'assunzione di una compressa è ben modellizzata dalla funzione $C(t) = \dfrac{t}{2(t^2+1)}$.

a. Qual è la funzione che esprime il tasso di variazione istantaneo della concentrazione del farmaco, in dipendenza da t?

b. A quale velocità sta variando la concentrazione del farmaco dopo mezz'ora dall'assunzione? E dopo 2 ore?

a. La funzione richiesta non è altro che la derivata di $C(t)$ rispetto al tempo, quindi è definita da: $C'(t) = \dfrac{1-t^2}{2(t^2+1)^2}$.

b. Per rispondere alla domanda dobbiamo calcolare il valore della derivata di $C(t)$ per $t = 0{,}5$ (corrispondente a mezz'ora) e $t = 2$ (corrispondente a due ore). Si verifica che:

$$C'(0{,}5) = \frac{1-(0{,}5)^2}{2[(0{,}5)^2+1]^2} = \frac{6}{25} = 0{,}24 \qquad C'(2) = \frac{1-2^2}{2(2^2+1)^2} = -\frac{3}{50} = -0{,}06$$

Ciò significa che, dopo mezz'ora, la concentrazione del farmaco sta *crescendo* alla velocità di 0,24 mg/L all'ora, mentre dopo 2 ore sta *decrescendo* alla velocità di 0,06 mg/L all'ora.

Realtà e modelli

259 Diffusione di una epidemia. La funzione $f(t) = 60t^2 - 2t^3$, con $0 \le t \le 30$, esprime con buona approssimazione il numero degli abitanti di una città che hanno contratto una certa malattia in funzione del tempo t (misurato in giorni) trascorso dall'inizio dell'epidemia (corrispondente a $t = 0$).

a. Calcola $f'(5)$ e $f'(25)$ e interpreta il significato di queste derivate nel contesto del problema.

b. Dopo quanto tempo dall'inizio dell'epidemia la velocità di variazione del numero di abitanti che contraggono la malattia è massima?

[**a.** 450, –750; **b.** dopo 10 giorni]

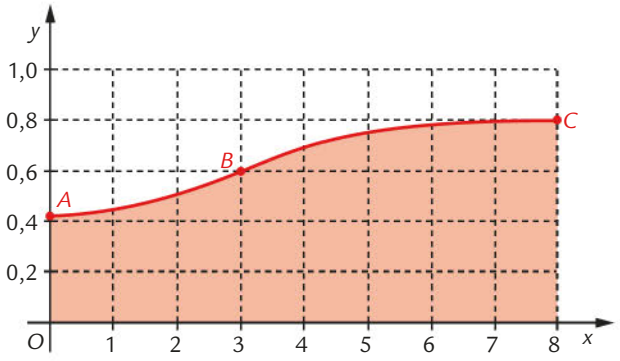
260 Costo medio. La produzione di una quantità q (misurata in kg) di un dato bene comporta un costo fisso di 1500 euro e un ulteriore costo di 10 euro per ogni kilogrammo prodotto.

a. Scrivi l'espressione analitica della funzione $C(q)$ che esprime il costo complessivo per la produzione della quantità q del bene e l'espressione analitica della funzione $\dfrac{C(q)}{q}$ che esprime il costo medio per la produzione della quantità q del bene.

b. Qual è il tasso di variazione del costo medio rispetto alla quantità prodotta, in corrispondenza di una produzione di 10 kg?

[**b.** –15 €/kg]

261 Collegamento tra due città. In una regione montagnosa, si sta progettando la realizzazione di una strada per collegare due paesi, rappresentati dai punti A e C in figura. In uno dei progetti che si stanno esaminando il profilo della strada è rappresentato dal grafico della funzione $y = \dfrac{4(e^x+10)}{5(e^x+20)}$, con $0 \le x \le 8$. La variabile y rappresenta l'altitudine corrispondente a un punto di ascissa x e l'unità di misura è il kilometro, sia sull'asse x sia sull'asse y.



a. A quale differenza di altitudine si trovano i due paesi da collegare? Esprimi la risposta in metri.

b. Il progetto della strada sarà approvato a condizione che siano soddisfatte le seguenti tre condizioni: la pendenza della strada nel punto A deve essere inferiore al 2%, la pendenza nel punto B (di ascissa 3) deve essere inferiore al 12% e la pendenza della strada in C deve essere inferiore all'1%. Ritieni che il progetto sarà approvato?

[**a.** Circa 378 m; **b.** sì]

5. Derivata della funzione composta e della funzione inversa

Teoria p. 271

Esercizi introduttivi

Test

262 La funzione $y = \sin(x^2)$ si può vedere come funzione composta $f \circ g$ delle due funzioni:

A $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x$ B $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$ C $f(x) = \sin^2 x$ e $g(x) = x$ D $f(x) = x$ e $g(x) = \sin^2 x$

263 Sia f una funzione derivabile; qual è la derivata della funzione $y = f(3x)$?

A $y' = 3f(3x)$ B $y' = f'(3x)$ C $y' = 3f'(3x)$ D $y' = 3f'(x)$

264 Sia f una funzione derivabile; qual è la derivata della funzione $y = [f(x)]^2$?

A $y' = [f'(x)]^2$ B $y' = 2f'(x)$ C $y' = 2f(x)f'(x)$ D $y' = 2f(x)$

265 Per derivare, per quali delle seguenti funzioni utilizzeresti il teorema di derivazione delle *funzioni composte*?

a. $y = x \sin x$ c. $y = \sqrt{xe^x}$ e. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ g. $y = x^2 \ln x$

b. $y = e^{\cos x}$ d. $y = \frac{x-1}{x+2}$ f. $y = \ln(2x^2+1)$ h. $y = x \ln^2 x$

---

266 Completa.

a. $D(x^4 - 2x)^3 = 3(x^4 - 2x)^{\cdots}(4x^3 - \ldots\ldots)$

b. $D\sqrt{x^2+1} = D(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{\cdots} \cdot \ldots\ldots = \frac{x}{\ldots\ldots}$

c. $D \sin(\ln x + 1) = \frac{1}{\ldots\ldots} \cos(\ldots\ldots)$

d. $De^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{\ldots\ldots} e^{\frac{1}{\cdots}}$

e. $D \ln(\sin x + 1) = \cos x \cdot \frac{1}{\ldots\ldots} = \frac{\cos x}{\ldots\ldots}$

267 **Caccia all'errore.** Nel derivare le seguenti funzioni sono stati commessi alcuni errori. Individuali e correggili.

a. $y = \cos x^2 \Rightarrow y' = 2x \sin x^2$

b. $y = \frac{1}{x^2+x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2x+1}$

c. $y = (x^5+x)^3 \Rightarrow y' = 3(x^5+x)^2$

d. $y = \ln^2(\sin x^3) \Rightarrow y' = 2(\ln \sin x^3)\cos x^3$

e. $y = \sqrt{\pi^2+1} \Rightarrow y' = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}$ (π costante)

Il calcolo delle derivate delle funzioni composte

268 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \sqrt{x^3+x^2}$ b. $f(x) = \ln \sin(x^2+1)$

a. $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^3+x^2}}}_{\text{derivata della funzione «esterna» (la radice quadrata) valutata sulla funzione «interna»}} \cdot \underbrace{D(x^3+x^2)}_{\text{derivata della funzione «interna»}} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{2\sqrt{\ldots\ldots\ldots}}$

b. $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sin(x^2+1)}}_{\text{derivata della funzione «esterna» (il logaritmo) valutata sulla funzione «interna»}} \cdot \underbrace{D[\sin(x^2+1)]}_{\text{derivata della funzione «interna»}} = \frac{1}{\sin(x^2+1)} \cdot (\ldots\ldots) \cdot \cos(\ldots\ldots)$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

269 $f(x) = (x^5 - x^3)^2$ $[f'(x) = 2(x^5 - x^3)(5x^4 - 3x^2)]$

270 $f(x) = (x^3+1)^3$ $[f'(x) = 9x^2(x^3+1)^2]$

271 $f(x) = (2x+3)^4$ $[f'(x) = 8(2x+3)^3]$

272 $f(x) = (2x^2+1)^3$ $[f'(x) = 12x(2x^2+1)^2]$

273 $f(x)=\dfrac{1}{5x+2}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{5}{(5x+2)^2}\right]$

274 $f(x)=\dfrac{3}{(2x+3)^2}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{12}{(2x+3)^3}\right]$

275 $f(x)=(3x^2-x)^2$ $[f'(x)=2\,(6x-1)\,(3x^2-x)]$

276 $f(x)=\dfrac{2}{(3x-1)^3}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{18}{(3x-1)^4}\right]$

277 $f(x)=\sqrt{1+\sin x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}\right]$

278 $f(x)=\cos \ln x$ $\left[f'(x)=-\dfrac{\sin \ln x}{x}\right]$

279 $f(x)=\sqrt[3]{x+\ln x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{x+1}{3x\sqrt[3]{(x+\ln x)^2}}\right]$

280 $f(x)=\cos x^2$ $[f'(x)=-2x\sin x^2]$

281 $f(x)=e^{2x}(e^{3x}+1)$ $[f'(x)=5e^{5x}+2e^{2x}]$

282 $f(x)=\ln(x^2+1)$ $\left[f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}\right]$

283 $f(x)=\sin^2 x$ $[f'(x)=2\sin x\cos x]$

284 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $\left[f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right]$

285 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right]$

286 $f(x)=2^{x^2-3x+1}$ $[f'(x)=(2x-3)2^{x^2-3x+1}\ln 2]$

287 $f(x)=\sin^2(3x)$ $[f'(x)=6\sin 3x\cos 3x]$

288 $f(x)=\sin^2 \ln x$ $\left[f'(x)=\dfrac{2(\sin \ln x)(\cos \ln x)}{x}\right]$

289 $f(x)=\ln \sin x^2$ $\left[f'(x)=\dfrac{2x\cos x^2}{\sin x^2}\right]$

290 $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

Metodi a confronto

291 Calcola la derivata della funzione $f(x)=(2x^3+x+1)^2$ in tre modi:

a. sviluppando il quadrato del trinomio e applicando la proprietà di linearità della derivazione;
b. applicando la regola di derivazione di un prodotto all'espressione $(2x^3+x+1)(2x^3+x+1)$;
c. applicando la regola di derivazione di una funzione composta.

Quale metodo preferisci?

292 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo la derivata della seguente funzione:

$f(x)=(x^2+1)^2(2x+1)^3$

$f'(x)=[\mathrm{D}(x^2+1)^2](2x+1)^3+(x^2+1)^2\,\mathrm{D}(2x+1)^3=$ — Regola di derivazione del prodotto

$=\underbrace{2\cdot 2x\cdot(x^2+1)}_{\mathrm{D}(x^2+1)^2}(2x+1)^3+(x^2+1)^2\cdot\underbrace{3\cdot 2\cdot(2x+1)^2}_{\mathrm{D}(2x+1)^3}=$ — Teorema di derivazione delle funzioni composte

$=2(x^2+1)(2x+1)^2\,[2x\,(2x+1)+3(x^2+1)]=$ — Raccogliendo

$=2(x^2+1)(2x+1)^2\,(7x^2+2x+3)$ — Svolgendo i calcoli dentro la parentesi quadra

Nota Osserva che, nello svolgere i calcoli, anziché sviluppare potenze e moltiplicazioni abbiamo cercato ovunque possibile di eseguire dei *raccoglimenti*. Nel calcolo delle derivate è bene seguire sempre questo accorgimento perché così si giunge a un'espressione della derivata *scomposta in fattori* (più facile da trattare, per esempio, per studiare gli zeri o il segno).

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

293 $f(x)=(x^2+1)^3(x^3-1)^2$ $[f'(x)=6x(x^2+1)^2(x^3-1)(2x^3+x-1)]$

294 $f(x)=(x^2+1)^3(2x+1)$ $[f'(x)=2(x^2+1)^2(7x^2+3x+1)]$

295 $f(x)=(3x^2+x)^2(2x-1)$ $[f'(x)=2x(3x+1)(15x^2-3x-1)]$

296 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{(x^2+1)^4}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{6x(x^2+5)}{(x^2+1)^5}\right]$

297 $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{(x+2)^3}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{2x^2-8x-3}{(x+2)^4}\right]$

298 $f(x)=(x^2+\sin x)^2$ $[f'(x)=2(x^2+\sin x)(2x+\cos x)]$

299 $f(x)=x^2\sin 2x$ $[f'(x)=2x\sin 2x+2x^2\cos 2x]$

300 $f(x)=\sin^2 x+\sin x^2$ $[f'(x)=2\sin x\cos x+2x\cos x^2]$

301 $f(x)=x^2e^{1+x^3}$ $[f'(x)=e^{1+x^3}(3x^4+2x)]$

302 $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{\ln x+1}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\ln^2 x+2\ln x}{x(\ln x+1)^2}\right]$

303 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right]$

304 $f(t)=e^{-2t}+e^{-3t}$ $[f'(t)=-2e^{-2t}-3e^{-3t}]$

305 $f(\omega)=r\omega\sin\omega t$ $[f'(\omega)=r(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)]$

306 $f(s)=\dfrac{(s^2+1)^2}{s-1}$ $\left[f'(s)=\dfrac{(s^2+1)(3s^2-4s-1)}{(s-1)^2}\right]$

307 $f(x)=xe^{-kx}$ $[f'(x)=e^{-kx}(1-kx)]$

308 $f(x)=x\sqrt{a^2-x^2}$ $\left[f'(x)=\dfrac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]$

309 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{ax+b}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{ax+2b}{2\sqrt{(ax+b)^3}}\right]$

Il calcolo delle derivate delle funzioni inverse

310 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$ **b.** $f(x)=\arctan x^2$

Ricordando le derivate delle funzioni arcoseno e arcotangente e il teorema di derivazione delle funzioni composte abbiamo che:

a. $f'(x)=\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}}_{\text{derivata della funzione «esterna» (arcoseno) valutata sulla funzione «interna» ($\sqrt{x}$)}}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{derivata della funzione «interna» cioè di $\sqrt{x}$}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

b. $f'(x)=\underbrace{\dfrac{1}{1+(x^2)^2}}_{\text{derivata della funzione «esterna» (arcotangente) valutata sulla funzione «interna» (x^2)}}\cdot\underbrace{2x}_{\text{derivata della funzione «interna» cioè di x^2}}=\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

311 $f(x)=\arcsin 2x$ $\left[f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\right]$

312 $f(x)=\arccos\ln x$ $\left[f'(x)=-\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\right]$

313 $f(x)=x\arcsin x$ $\left[f'(x)=\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

314 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\right]$

315 $f(x)=\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin x}$ $\left[f'(x)=\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)e^{\arcsin x}\right]$

316 $f(x)=\ln\arccos x$ $\left[f'(x)=-\dfrac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}\right]$

317 $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ $[f'(x) = 0]$

318 $f(t) = \sqrt{1-t^2}\ \arcsin t$ $\left[f'(t) = 1 - \frac{t \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\right]$

319 $f(u) = \sqrt{\arctan u}$ $\left[f'(u) = \frac{1}{2(u^2+1)\sqrt{\arctan u}}\right]$

320 $f(x) = \arctan \frac{kx+1}{kx-1}$ $\left[f'(x) = -\frac{k}{k^2x^2+1}\right]$

---

321 Giustifica perché la funzione $f(x) = x^3 + e^{2x}$ è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcola $g'(f(0))$, cioè $g'(1)$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

322 Giustifica perché la funzione $f(x) = x^5 + x^3$ è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcola $g'(f(1))$, cioè $g'(2)$. $\left[\frac{1}{8}\right]$

323 Giustifica perché la funzione $f(x) = x^2 + \ln x$ è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcola $g'(f(1))$, cioè $g'(1)$. $\left[\frac{1}{3}\right]$

324 Giustifica perché la funzione $f(x) = \ln x + \arctan x$ è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcola $g'(f(1))$, cioè $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. $\left[\frac{2}{3}\right]$

Metodi a confronto

325 Calcola la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ in tre modi:

a. sulla base della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale;
b. applicando la regola di derivazione per funzioni del tipo potenza;
c. sfruttando il fatto che la funzione $\sqrt{x}$ è la funzione inversa della funzione x^2, con $x \geq 0$, e applicando il teorema di derivazione delle funzioni inverse.

Esercizi riassuntivi: il calcolo delle derivate

Interpretazione di grafici

326 Siano f e g le funzioni aventi i grafici in figura. Considera le funzioni:

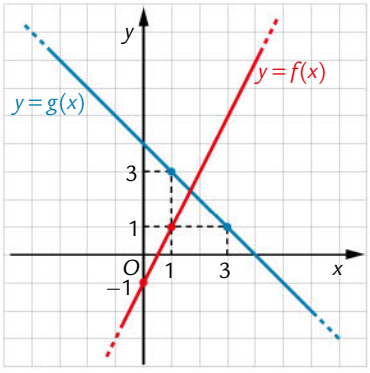
$v(x) = f(x)\,g(x)$ $\quad w(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$r(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ $\quad s(x) = \frac{1}{f(x)g(x)}$

Utilizzando le informazioni deducibili dai grafici, calcola:

a. $v'(1)$ **b.** $w'(1)$ **c.** $r'(1)$ **d.** $s'(1)$

$\left[\text{a. } v'(1) = 5;\ \text{b. } w'(1) = \frac{7}{9};\ \text{c. } r'(1) = -7;\ \text{d. } s'(1) = -\frac{5}{9}\right]$



Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

327 $f(x) = \frac{1}{4}x^{12} - x^3$ $[f'(x) = 3x^{11} - 3x^2]$

328 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ $[f'(x) = x]$

329 $f(x) = \frac{4}{x} - 5x$ $\left[f'(x) = -\frac{4}{x^2} - 5\right]$

330 $f(x) = \ln x - x^4$ $\left[f'(x) = \frac{1}{x} - 4x^3\right]$

331 $f(x) = \frac{1}{(5x-4)^2}$ $\left[f'(x) = -\frac{10}{(5x-4)^3}\right]$

332 $f(x) = \frac{x-2}{x}$ $\left[f'(x) = \frac{2}{x^2}\right]$

333 $f(x) = (2x^2 - 1)(x + 5)$ $[f'(x) = 6x^2 + 20x - 1]$

334 $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$ $\left[f'(x) = -\frac{6}{(x-4)^2}\right]$

335 $f(x) = \ln(x^4 - x^2 - 1)$ $\left[f'(x) = \frac{2x(2x^2-1)}{x^4-x^2-1}\right]$

336 $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$ $\left[f'(x) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}\right]$

337 $f(x) = 3e^{2x} - 1$ $[f'(x) = 6e^{2x}]$

338 $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+2}$ $\left[f'(x) = \frac{2x^2+8x+1}{(x+2)^2}\right]$

339 $f(x) = x^2(2x+1)^3$ $[f'(x) = 2x(2x+1)^2(5x+1)]$

340 $f(x) = x^2e^{2x-1}$ $[f'(x) = 2xe^{2x-1}(x+1)]$

341 $f(x) = (2x-1)e^{-3x}$ $[f'(x) = e^{-3x}(5-6x)]$

342 $f(x) = 2x^5 \ln x$ $[f'(x) = 10x^4 \ln x + 2x^4]$

343 $f(x) = (x^2-1)^2(x+1)^3$ $[f'(x) = (x+1)^2(x^2-1)(7x^2+4x-3)]$

344 $f(x) = (x-1)(\sqrt{x}+1)$ $\left[f'(x) = \frac{3x+2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}\right]$

345 $f(x) = \sin(\ln x)$ $\left[f'(x) = \frac{\cos \ln x}{x}\right]$

346 $f(x) = \ln \ln x$ $\left[f'(x) = \frac{1}{x \ln x}\right]$

347 $f(x) = x \ln(x^2+1)$ $\left[f'(x) = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right]$

348 $f(x) = \sqrt{\sin^3 x}$ $\left[f'(x) = \frac{3}{2}\cos x\sqrt{\sin x}\right]$

349 $f(x) = \ln^2 x - 3\ln x^2$ $\left[f'(x) = \frac{2\ln x - 6}{x}\right]$

350 $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ $\left[f'(x) = \frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}}\right]$

351 $f(x) = e^{2x} + \sqrt[3]{e^x}$ $\left[f'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\right]$

352 $f(x) = (x^2-1)\,e^{2x}$ $[f'(x) = 2e^{2x}(x^2+x-1)]$

353 $f(x) = \arctan\frac{x-1}{x+1}$ $\left[f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\right]$

354 $f(x) = \sin^3 x - \sin x^3$ $[f'(x) = 3\sin^2 x \cos x - 3x^2 \cos x^3]$

355 $f(x) = e^x \tan x$ $\left[f'(x) = e^x\left(\tan x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\right]$

356 $f(x) = \frac{(x+2)^3}{(x-1)^2}$ $\left[f'(x) = \frac{(x-7)(x+2)^2}{(x-1)^3}\right]$

357 $f(x) = \ln|\sin x|$ $[f'(x) = \cot x]$

358 $f(x) = \frac{x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2}$ $\left[f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{5}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}\right]$

359 $f(x) = \tan^2(2x+1)$ $\left[f'(x) = \frac{4\tan(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}\right]$

360 $f(x) = \ln|x^3-1|$ $\left[f'(x) = \frac{3x^2}{x^3-1}\right]$

361 $f(x) = x^4 \ln^3 x^2$ $[f'(x) = 8x^3 \ln^2|x|\,(4\ln|x|+3)]$

362 $f(x) = 2^{\sqrt{x}+\ln x}$ $\left[f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)2^{\sqrt{x}+\ln x}\ln 2\right]$

363 $f(x) = \ln(e^{2x} - x^2)$ $\left[f'(x) = \frac{2e^{2x}+2x}{e^{2x}+x^2}\right]$

364 $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$ $\left[f'(x) = \frac{x-2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

365 $f(x) = \ln(2x) + \frac{1}{2x}$ $\left[f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right]$

366 $f(x) = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x$ $[f'(x) = x^2\cos x]$

367 $f(x) = e^{\sin^2 x + \cos x}$ $[f'(x) = \sin x\,(2\cos x - 1)\,e^{\sin^2 x+\cos x}]$

368 $f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln x$ $\left[f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x}\right]$

369 $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ $\left[f'(x) = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}\right]$

370 $f(x) = (x - \ln x)(x + \ln x)$ $\left[f'(x) = 2x - \frac{2\ln x}{x}\right]$

371 $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-2x}{x+1}\right)$ $\left[f'(x) = \frac{x^2+2x-2}{x(x+1)(x-2)}\right]$

372 $f(x) = x(1+\ln|x|)^2$ $[f'(x) = \ln^2|x| + 4\ln|x| + 3]$

373 $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ $\left[f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\right]$

374 $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}+1}$ $\left[f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x(\sqrt{x}+1)}}\right]$

375 $f(x) = \ln^2 \sin x^3$ $\left[f'(x) = \frac{6x^2\cos x^3 \ln \sin x^3}{\sin x^3}\right]$

376 $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$ $\left[f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}+1)^2}\right]$

377 $f(x) = \ln\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+1)^4}}$ $\left[f'(x) = \frac{2(3-x)}{3(x^2-1)}\right]$

378 $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ $\left[f'(x) = \frac{\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x}{\cos^2 x}\right]$

379 $f(x) = x^3\sqrt{x^2-1}$ $\left[f'(x) = \frac{x^2(4x^2-3)}{\sqrt{x^2-1}}\right]$

380 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ $\left[f'(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\right]$

381 $f(x)=e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$ $\left[f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right]$

382 $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}\right]$

383 $f(x)=5^{-3+\sin^3 4x}$

$[f'(x)=12\ln 5(\sin^2 4x)(\cos 4x)5^{-3+\sin^3 4x}]$

384 $f(x)=\dfrac{x\ln x+x^2\ln^3 x}{x^2\ln x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right]$

385 $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{(e^{2x}-1)^2}$ $\left[f'(x)=\dfrac{e^{3x}(e^{2x}+3)}{(1-e^{2x})^3}\right]$

386 $f(x)=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\cos^3 x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}\right]$

387 $f(x)=\arctan(\arcsin x)$

$\left[f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin^2 x+1)}\right]$

388 $f(x)=\sin\ln(e^{2x-1}-1)$

$\left[f'(x)=\dfrac{2e^{2x-1}\cos\ln(e^{2x-1}-1)}{e^{2x-1}-1}\right]$

389 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+1)^3}$ $\left[f'(x)=\dfrac{3-x}{(x+1)^3}\right]$

390 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2}}\,\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right]$

391 $f(x)=x^2e^{2x-1}$ $[f'(x)=2(x^2+x)e^{2x-1}]$

392 $f(x)=(\sin x)\cos^2 x$ $[f'(x)=\cos x(\cos^2 x-2\sin^2 x)]$

393 $f(x)=(\sin x)e^{\cos x}$ $[f'(x)=(\cos x-\sin^2 x)e^{\cos x}]$

394 $f(x)=x\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$

$\left[f'(x)=\arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\dfrac{x}{x^2+1}\right]$

395 $f(x)=\sin\sqrt{1+\ln x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\cos\sqrt{1+\ln x}}{2x\sqrt{1+\ln x}}\right]$

396 $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{\ln x+1}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\ln^2 x+2\ln x}{x(\ln x+1)^2}\right]$

397 $f(x)=(x^2+1)(x^2+2)^2(x^2+3)$

$[f'(x)=4x(x^2+2)(2x^4+8x^2+7)]$

398 $f(x)=\dfrac{x^3(x-1)^4}{(x+2)^2}$ $\left[f'(x)=\dfrac{x^2(x-1)^3(5x^2+13x-6)}{(x+2)^3}\right]$

399 $f(x)=e^{2x}(e^x-1)^4$ $[f'(x)=2e^{2x}(e^x-1)^3(3e^x-1)]$

400 $f(x)=(x-1)(x+2)(x+1)e^{-x}$

$[f'(x)=-(x^3-x^2-5x-1)e^{-x}]$

401 $f(x)=\left(\dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$\left[f'(x)=2\left(\dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{6x\sqrt[6]{x}}\right)\right]$

402 $f(x)=x(e^{kx}+k)$ $[f'(x)=e^{kx}(kx+1x)+k]$

403 $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}-1}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{\sqrt{ax}}{2x(\sqrt{ax}-1)^2}\right]$

404 **E se?** $f(x)=\dfrac{x^2-k^2}{x+2k}$

▶ Come cambierebbe la risposta se k fosse la variabile indipendente e x fosse una costante?

$\left[f'(x)=\dfrac{x^2+4kx+k^2}{(x+2k)^2};f'(k)=\dfrac{-2(x^2+kx+k^2)}{(x+2k)^2}\right]$

405 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+a})$ $\left[f'(x)=\dfrac{x}{(x^2+a)\ln a}\right]$

406 $f(x)=\arctan(ax)+\ln(ax)$ $\left[f'(x)=\dfrac{a}{a^2x^2+1}+\dfrac{1}{x}\right]$

407 $f(x)=\ln\left|\dfrac{kx+1}{k^2x^2+1}\right|$ $\left[f'(x)=-\dfrac{k(k^2x^2+2kx-1)}{(kx+1)(k^2x^2+1)}\right]$

408 $f(x)=\sqrt{\sin(\alpha x+\beta)}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\alpha\cos(\alpha x+\beta)}{2\sqrt{\sin(\alpha x+\beta)}}\right]$

409 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2+a^2}$ $\left[f'(x)=\dfrac{x(3a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2\sqrt{x^2-a^2}}\right]$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$.

410 $f(x) = (\sin x)^x$ $[f'(x) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cot x)]$

411 $f(x) = x^{2x}$ $[f'(x) = x^{2x} (2 \ln x + 2)]$

412 $f(x) = x^{\ln x}$ $\left[f'(x) = \frac{2e^{\ln^2 x} \ln x}{x}\right]$

413 $f(x) = x^x$ $[f'(x) = x^x (\ln x + 1)]$

414 $f(x) = (x^2)^{x^2}$ $[f'(x) = (x^2)^{x^2} (2x)(\ln x^2 + 1)]$

415 $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ $\left[f'(x) = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)\right]$

416 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $\left[f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)\right]$

---

417 Data la funzione $f(x) = (x^2 + 5)^4$, calcola $f''(x)$. $[f''(x) = 8(x^2 + 5)^2(7x^2 + 5)]$

418 Data la funzione $f(x) = \sin x \cos^2 x$, calcola $f''(x)$. $[f''(x) = \sin x(2 \sin^2 x - 7 \cos^2 x)]$

419 Data la funzione $f(x) = \sin^3 x$, calcola $f'''(x)$. $[f'''(x) = \cos x(6 - 27 \sin^2 x)]$

Giustificare e argomentare

420 Verifica che le due funzioni $f(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$ e $g(x) = \ln(2x^2 + 1)$ hanno la stessa derivata. Sai dare una giustificazione di questo fatto?

421 Verifica che le due funzioni $f(x) = \arcsin x$ e $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ hanno la stessa derivata. Sai dare una giustificazione di questo fatto?

422 Determina per quali valori di k la funzione $y = e^{kx}$ soddisfa la relazione $y'' + 4y' - 5e^{kx} = 0$. $[k = -5 \vee k = 1]$

423 Determina a e b in modo che la funzione $y = ae^{2x} + be^{-2x}$ soddisfi la relazione $y'' + y' = 12e^{2x} + 3e^{-2x}$.
$\left[a = 2 \wedge b = \frac{3}{2}\right]$

424 Determina a e b in modo che la funzione $y = a \sin x + b \cos x$ soddisfi la relazione $y'' + 2y' = 2 \sin x$.
$\left[a = -\frac{2}{5} \wedge b = -\frac{4}{5}\right]$

Applicazioni

425 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $y = (1 + 2x)^4$ nel suo punto di intersezione con l'asse y.
$[y = 8x + 1]$

426 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $y = (1 - 2x)^3$ nel suo punto di ascissa 1. $[y = 5 - 6x]$

427 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \ln^3 x$ nel suo punto di ascissa e. $\left[y = \frac{3}{e}x - 2\right]$

428 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $y = e^{\sin x}$ nel suo punto di ascissa π. $[y = -x + \pi + 1]$

429 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $y = (2x)^x$ nel suo punto di ascissa 1. $[y = 2x(\ln 2 + 1) - 2 \ln 2]$

Realtà e modelli

430 **Un prodotto di successo.** Un nuovo prodotto lanciato sul mercato si rivela di grande successo e il numero N di unità vendute in funzione del tempo t (misurato in settimane) trascorso dal momento del lancio è ben modellizzato dalla funzione $N(t) = \frac{8000t^2}{(2t+1)^2}$.

a. Determina a quale velocità sta crescendo il numero di unità vendute dopo 2 settimane.

b. Calcola i limiti quando $t \to +\infty$ della funzione $N(t)$ e della sua derivata $N'(t)$. Interpreta i risultati ottenuti in relazione al contesto del problema. [**a.** 256 unità/settimana; **b.** 2000,0]

431 **Raffreddamento di un oggetto.** Un oggetto prodotto da un'azienda viene posto a raffreddare a partire dall'istante $t = 0$ in cui è stata completata la sua produzione. La temperatura dell'oggetto, per $t \geq 0$, è descritta dalla funzione $T = 180e^{-\frac{t}{2}} + 20$, dove la temperatura T è misurata in gradi Celsius e il tempo t è misurato in minuti.

a. Dopo quanto tempo da $t = 0$ la temperatura dell'oggetto è di 40 °C?

b. Dopo quanto tempo da $t = 0$ la temperatura dell'oggetto sta decrescendo alla velocità di −40 °C/min?

[**a.** Circa 4,4 min; **b.** circa 1,6 min]

Matematica e chimica

●●○ **432** Data una reazione del tipo:

$A + B \rightarrow$ prodotti

la velocità (istantanea) v di reazione risulta definita dalle relazioni:

$$v = -\frac{d[A]_t}{dt} = -\frac{d[B]_t}{dt}$$

essendo $[A]_t$ e $[B]_t$ le concentrazioni dei reagenti al tempo t e $t = 0$ l'istante iniziale. In una reazione in cui il valore iniziale delle concentrazioni è identico:

$[A]_0 = [B]_0$

risulta:

$$[A]_t = [B]_t = \left(\frac{1}{\sqrt{[A]_0}} + \frac{kt}{2}\right)^{-2}$$

essendo k la costante cinetica.

a. Verifica che $v = k[A]_t^{\frac{1}{2}}[B]_t$, e quindi che si tratta di una reazione di ordine $\frac{3}{2}$.

b. Calcola i limiti per $t \to +\infty$ delle concentrazioni dei reagenti e della velocità di reazione, interpretando i risultati nel contesto del problema.

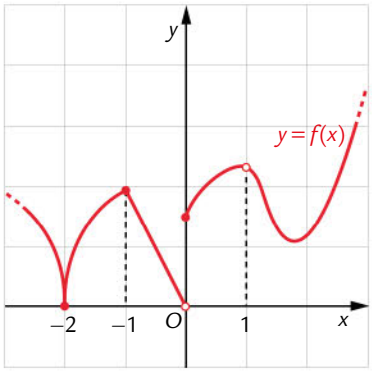
6. Classificazione e studio dei punti di non derivabilità

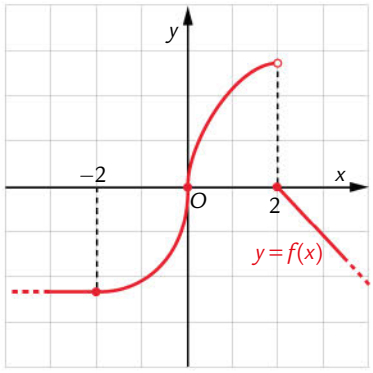
Teoria p. 276

Esercizi introduttivi

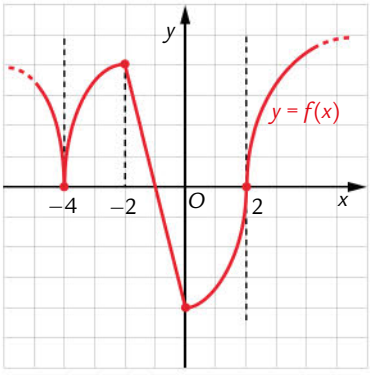
Interpretazione di grafici

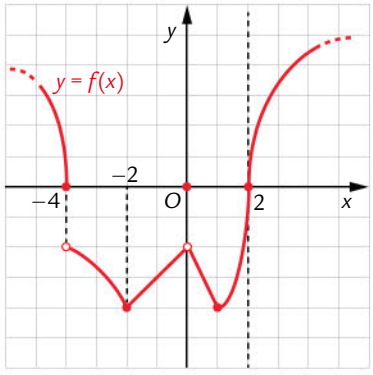
●○○ **433** Classifica gli eventuali punti di singolarità o di non derivabilità delle funzioni di cui è tracciato il grafico.





●○○ **434** Classifica gli eventuali punti di singolarità o di non derivabilità delle funzioni di cui è tracciato il grafico.





Test

435 Supponiamo che la funzione f sia continua in $x=0$ e che $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$; allora $x=0$:

A è un punto di cuspide
B è un punto angoloso
C è un punto di flesso a tangente verticale
D è un punto in cui f è derivabile

436 Supponiamo che la funzione f sia continua in $x=0$ e che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$; allora $x=0$:

A è un punto di cuspide
B è un punto angoloso
C è un punto di flesso a tangente verticale
D è un punto in cui f è derivabile

437 Supponiamo che la funzione f sia continua in $x=0$ e che $\lim_{x\to 0} f'(x) = -1$; allora $x=0$:

A è un punto di cuspide
B è un punto angoloso
C è un punto di flesso a tangente orizzontale
D è un punto in cui f è derivabile

438 Supponiamo che la funzione f sia continua in $x=0$ e che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$; allora $x=0$:

A è un punto di cuspide
B è un punto angoloso
C è un punto di flesso a tangente orizzontale
D è un punto in cui f è derivabile

Lo studio dei punti di non derivabilità di una funzione

439 **Vero o falso?**

a. la funzione $y=|x|$ presenta in $x=0$ una cuspide V F
b. la funzione $y=\sqrt{x}$ è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ V F
c. la funzione $y=\sqrt[5]{x}$ presenta in $x=0$ un punto di flesso a tangente verticale V F
d. la funzione $y=|x^3|$ presenta in $x=0$ un punto angoloso V F
e. la funzione $y=x^{\frac{2}{3}}$ presenta in $x=0$ una cuspide V F

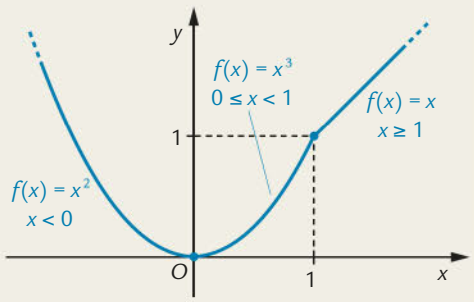
[2 affermazioni vere e 3 false]

440 **ESERCIZIO SVOLTO**

Consideriamo la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x^3 & 0\le x<1 \\ x & x\ge 1 \end{cases}$.

Tracciamo il grafico e studiamo la continuità e la derivabilità in $x=0$ e in $x=1$.

Il grafico della funzione è quello in figura.
Si può osservare che la funzione è continua sia in $x=0$ sia in $x=1$ (perché?), mentre occorre studiare la derivabilità nei punti «di raccordo» $x=0$ e $x=1$.
Il grafico suggerisce che la funzione è derivabile in $x=0$ (perché la tangente è l'asse x sia a destra sia a sinistra dell'origine), mentre **non** lo è in $x=1$ dove è evidente un punto angoloso.
Verifichiamo con i calcoli queste intuizioni; abbiamo che:



$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<0 \\ 3x^2 & 0<x<1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

Attenzione a non includere a priori negli intervalli $0<x<1$ e $x>1$ i due estremi $x=0$ e $x=1$

Poiché $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, la funzione è derivabile in $x=0$, con derivata nulla.

Poiché $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 3$ mentre $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 1$, la funzione **non** è derivabile in $x=0$, dove presenta un punto angoloso.

441 Considera la funzione $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\ge 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$.

a. Traccia il grafico della funzione.
b. Stabilisci se è continua in $x=0$.
c. Stabilisci se è derivabile in $x=0$.

442 Considera la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 0 \\ 1-x^2 & x<0 \end{cases}$.

a. Traccia il grafico della funzione.
b. Stabilisci se è continua in $x=0$.
c. Stabilisci se è derivabile in $x=0$.

443 Considera la funzione $f(x)=\begin{cases}\ln x & x\geq 1\\ 1-x^2 & x<1\end{cases}$.

a. Traccia il grafico della funzione.
b. Stabilisci se è continua in $x=1$.
c. Stabilisci se è derivabile in $x=1$.

444 Traccia il grafico della funzione:

$$y=\begin{cases}x^2+2x+1 & x<0\\ 2x+1 & 0\leq x\leq 3\\ 4 & x>3\end{cases}$$

e determina gli eventuali punti dove non è derivabile.

---

445 **E se?** Traccia il grafico della funzione $y=|\ln x|$, determinando in particolare i punti di non derivabilità.

▸ Cambierebbe la risposta, considerando la funzione $y=\ln|x|$?

Per ciascuna delle seguenti funzioni traccia il grafico, quindi determina:

a. l'insieme degli $x\in\mathbb{R}$ per cui la funzione è continua.
b. l'insieme degli $x\in\mathbb{R}$ per cui la funzione è derivabile.

446 $f(x)=\begin{cases}-2 & x<0\\ 0 & 0\leq x\leq 4\\ (x-4)^2 & 4<x\leq 6\\ 4 & x>6\end{cases}$ [a. $\mathbb{R}-\{0\}$; b. $\mathbb{R}-\{0,6\}$]

447 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}x^2 & x<-2\\ x+1 & -2\leq x\leq 0\\ e^x & x>0\end{cases}$ [a. R; b. R]

448 $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ |\sin x| & 0\leq x\leq 2\pi\\ 0 & x>2\pi\end{cases}$ [a. R; b. $\mathbb{R}-\{\pi,2\pi\}$]

449 $f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ \sqrt[3]{x} & -1\leq x\leq 1\\ 2-x & x>1\end{cases}$ [a. R; b. $\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$]

450 $f(x)=\begin{cases}-x & x\leq 0\\ \ln x & 0<x\leq 1\\ 0 & 1\leq x\leq 3\\ x^2-6x+9 & x>3\end{cases}$ [a. $\mathbb{R}-\{0\}$; b. $\mathbb{R}-\{0,1\}$]

451 $f(x)=\begin{cases}2 & x<-3\\ 0 & -3\leq x<0\\ \sqrt{x} & 0\leq x\leq 4\\ \frac{1}{x-4} & x>4\end{cases}$ [a. $\mathbb{R}-\{-3,4\}$; b. $\mathbb{R}-\{-3,0,4\}$]

---

452 Verifica che la funzione $y=|x-3|$ ha un punto angoloso per $x=3$.

453 Verifica che la funzione $y=\sqrt[3]{x+1}$ ha un punto di flesso a tangente verticale per $x=-1$.

454 Verifica che la funzione $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ ha una cuspide per $x=2$.

455 Verifica che la funzione $y=x|x-2|$ ha un punto angoloso per $x=2$.

456 **ESERCIZIO GUIDATO**

Studia la derivabilità delle seguenti funzioni:

a. $y=x\sqrt[3]{x^2-2x}$ b. $y=\begin{cases}2x+\sin x & x<0\\ \cos x & x\geq 0\end{cases}$ c. $y=|x^2+3x|$

a. Segui questi passi.

- Osserva che la funzione data è certamente derivabile per ogni x tale che $x^2-2x\neq 0$, cioè per $x\neq 0$ e $x\neq 2$.
- Calcola la derivata per $x\neq 0$ e $x\neq 2$:

$$y'=\sqrt[3]{x^2-2x}+\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

- Applica il teorema sul limite della derivata.

Poiché $\lim\limits_{x\to 0} y'=$ ....., puoi concludere che la funzione è ..... in $x=0$.

Poiché $\lim\limits_{x\to 2^-} y'=$ ..... e $\lim\limits_{x\to 2^+} y'=$ ..... la funzione presenta per $x=2$ un punto di .....

b. Osserva che la funzione data è certamente continua e derivabile per $x\neq 0$. Devi quindi esaminare il comportamento della funzione solo in $x=0$. A tale scopo, controlla anzitutto se la funzione è *continua* in $x=0$.

Poiché $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puoi immediatamente concludere che la funzione non è ..... in $x=0$, quindi nemmeno .....

c. La funzione è certamente continua e derivabile purché $x^2 + 3x \neq 0$, cioè per $x \neq -3$ e $x \neq 0$.
Inoltre risulta:

$$y = \begin{cases} x^2 + 3x & x < -3 \vee x > 0 \\ -x^2 - 3x & -3 < x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad y' = \begin{cases} 2x + 3 & x < -3 \vee x > 0 \\ -2x - 3 & -3 < x < 0 \end{cases}$$

Poiché $\lim\limits_{x \to -3^-} y' = -3$ mentre $\lim\limits_{x \to -3^+} y' =$ ..... e inoltre $\lim\limits_{x \to 0^-} y' = -3$ mentre $\lim\limits_{x \to 0^+} y' =$ ....., concludiamo che la funzione non è derivabile nei punti $x = -3$ e $x = 0$, dove presenta .....

Studia la natura degli eventuali punti di non derivabilità delle seguenti funzioni.

457 $y = x^3 |x|$ [Derivabile]

458 $y = \sqrt[5]{x^3}$ [$x = 0$: flesso a tangente verticale]

459 $y = \sqrt{x^2 - 9}$ [$x = \pm 3$: punti a tangente verticale]

460 $y = |x^2 - 2x|$ [$x = 0$, $x = 2$: punti angolosi]

461 $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ [$x = \pm 1$: flessi a tangente verticale]

462 $y = x\sqrt{|x|}$ [Derivabile]

463 $y = |e^x - 1|$ [$x = 0$: punto angoloso]

464 $y = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$ [Derivabile]

465 $y = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \sin x & x > 0 \end{cases}$ [$x = 0$: punto angoloso]

466 $y = \sqrt{x^3 - x}$ [$x = 0$, $x = \pm 1$: punti a tangente verticale]

467 $y = |2 \sin x - 1|$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: punti angolosi$\right]$

468 $y = x\sqrt[3]{x^3 - x}$ [$x = \pm 1$: flessi a tangente verticale]

469 $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ [$x = 0$: cuspide; $x = 3$: flesso a tangente verticale]

470 $y = (x^2 - 1)\sqrt{x + 1}$ [Derivabile]

471 $y = \sqrt[3]{\ln x}$ [$x = 1$: flesso a tangente verticale]

472 $y = |x^3 + 2x^2 - 4x - 8|$ [$x = 2$: punto angoloso]

473 $y = |(1 - \cos 2x) \cos x|$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi$: punti angolosi$\right]$

474 $y = x\sqrt{e^x - 1}$ [Derivabile]

475 $y = \sqrt{\ln(1 + x)}$ [$x = 0$: punto a tangente verticale]

476 $y = |x + \ln x|$ [$x = \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$: punto angoloso]

477 $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x\,|\ln x - 1|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ [$x = 0$: punto a tangente verticale; $x = e$: cuspide]

478 $y = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ [Derivabile]

Esercizi con parametri

479 Considera la funzione $f(x)=\begin{cases}\ln x+k-3 & x\geq 1\\ 2x^2-kx+k^2-8 & x<1\end{cases}$.

a. Determina per quali valori di k è continua in **R**.

b. In corrispondenza di ciascuno dei valori di k trovati, stabilisci se la funzione è anche derivabile in **R** e, in caso negativo, studia la natura dei punti di non derivabilità.

[**a.** $k=-1 \vee k=3$; **b.** per $k=-1$ è derivabile in $\mathbf{R}-\{1\}$ (presenta in $x=1$ un punto angoloso) mentre per $k=3$ è derivabile in tutto **R**]

480 Considera la funzione $f(x)=\begin{cases}x^2-kx+k-2 & x\geq 0\\ k^2-3-e^{2x} & x<0\end{cases}$.

a. Determina per quali valori di k è continua in **R**.

b. In corrispondenza di ciascuno dei valori di k trovati, stabilisci se la funzione è anche derivabile in **R** e, in caso negativo, studia la natura dei punti di non derivabilità.

[**a.** $k=-1 \vee k=2$; **b.** per $k=-1$ è derivabile in $\mathbf{R}-\{0\}$ (presenta in $x=0$ un punto angoloso) mentre per $k=2$ è derivabile in tutto **R**]

481 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo, se esistono, i valori di a e b per cui la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}a+\sqrt{3x^2+1} & x\leq 1\\ b\ln x+x & x>1\end{cases}$$

è derivabile in R.

—

- La funzione è certamente derivabile per ogni $x\neq 1$ quindi, affinché sia derivabile in **R**, è sufficiente imporre che sia derivabile in $x=1$.
- Perché la funzione sia derivabile in $x=1$, deve anzitutto essere ivi *continua*; quindi deve essere:
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}(a+\sqrt{3x^2+1})=\lim_{x\to 1^+}(b\ln x+x)\Rightarrow a+2=1\Rightarrow a=-1$$
- Supposto $a=-1$, abbiamo:
$$f(x)=\begin{cases}-1+\sqrt{3x^2+1} & x\leq 1\\ b\ln x+x & x>1\end{cases}\quad \text{e}\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} & x<1\\ \dfrac{b}{x}+1 & x>1\end{cases}$$
Affinché la funzione, oltre che continua, sia anche derivabile in $x=1$ deve essere:
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{b}{x}+1\Rightarrow \frac{3}{2}=b+1\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$
- In definitiva la funzione data è derivabile in $x=1$ se e solo se $a=-1$, $b=\dfrac{1}{2}$.

Determina, se esistono, i valori di a e b per cui le funzioni date sono derivabili nel loro dominio.

482 $f(x)=\begin{cases}x^2+e^x & x<0\\ ax+b & x\geq 0\end{cases}$ [$a=b=1$]

483 $f(x)=\begin{cases}x^3+ax & x<0\\ 2x & x\geq 0\end{cases}$ [$a=2$]

484 $f(x)=\begin{cases}x^3+2x+a & x<0\\ x^2+bx-3 & x\geq 0\end{cases}$ [$a=-3$, $b=2$]

485 $f(x)=\begin{cases}x^3+ax^2+1 & x<1\\ bx^3-2x^2+5 & x\geq 1\end{cases}$ [$a=10$, $b=9$]

486 $f(x)=\begin{cases}a\sin x+1 & x<0\\ 2\cos x+b & x\geq 0\end{cases}$ [$a=0$, $b=-1$]

487 $f(x)=\begin{cases} a\cos x+1 & x<\pi \\ 2\sin x+b & x\geq\pi \end{cases}$ [Impossibile]

488 $f(x)=\begin{cases} e^x-a & x<0 \\ bx+3 & x\geq 0 \end{cases}$ $[a=-2,\ b=1]$

489 $f(x)=\begin{cases} e^{x+a} & x\geq 0 \\ x^3+bx+1 & x<0 \end{cases}$ $[a=0,\ b=1]$

490 $f(x)=\begin{cases} a\ln x+bx & 0<x<1 \\ x^2+\dfrac{1}{x} & x\geq 1 \end{cases}$ $[a=-1,\ b=2]$

491 $f(x)=\begin{cases} a\ln^2 x+b & 0<x<1 \\ x^2+ax+4 & x\geq 1 \end{cases}$ $[a=-2,\ b=3]$

492 $f(x)=\begin{cases} ax-a & x\leq 1 \\ \ln(2x+b) & x>1 \end{cases}$ $[a=2,\ b=-1]$

493 $f(x)=\begin{cases} \ln(x^2+2x+a) & x\geq 0 \\ 2e^{bx} & x<0 \end{cases}$ $\left[a=e^2,\ b=\dfrac{1}{e^2}\right]$

494 Verifica che non esiste alcun $a\in\mathbf{R}$ per cui la funzione $f(x)=\begin{cases} (x-3)e^x & x<a \\ \dfrac{1}{2}x^2-2x & x\geq a \end{cases}$ è derivabile in $\mathbf{R}$.

495 Determina a, b e c in modo che la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} ae^x+b\sin x+c & x<0 \\ x^2+2x & x\geq 0 \end{cases}$$

sia derivabile due volte in $\mathbf{R}$. $[a=2,\ b=0,\ c=-2]$

7. Applicazioni geometriche del concetto di derivata

Teoria p. 279

La retta tangente e la retta normale

496 Determina l'equazione della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione $y=5x^3$ nel suo punto di ascissa $x=-1$. $\left[y=15x+10;\ y=-\dfrac{1}{15}x-\dfrac{76}{15}\right]$

497 Determina l'equazione della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione $y=5x^3-2x^2$ nel suo punto di ascissa $x=1$. $\left[y=11x-8;\ y=-\dfrac{1}{11}x+\dfrac{34}{11}\right]$

498 Determina l'equazione della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione $y=\dfrac{8}{x^2}$ nel suo punto di ascissa $x=2$. $\left[y=6-2x;\ y=\dfrac{1}{2}x+1\right]$

499 Determina l'equazione della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione $y=2\sqrt{x}$ nel suo punto di ascissa $x=1$. $[y=x+1;\ y=-x+3]$

500 Determina l'equazione della retta tangente al grafico di $y=x^3-3x^2-2x-1$ nel suo punto di intersezione con l'asse y. $[y=-2x-1]$

501 Determina le equazioni delle rette tangenti al grafico di $y=x^3+x^2-4x-4$ nei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani. $[y=4(x+2);\ y=-3(x+1);\ y=12(x-2);\ y=-4x-4]$

502 Determina le equazioni delle rette tangenti al grafico di $y = \frac{x^2-1}{x}$ nei suoi punti d'intersezione con l'asse x.
$[y = 2(x \pm 1)]$

503 Determina l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \sin^2 x + \sin(2x)$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$.
$[y = -2x + \pi + 1]$

504 Determina l'equazione della normale alla curva di equazione $y = x^4 - 4x^2$ nel suo punto di ascissa $x = 1$.
$\left[y = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}\right]$

505 **Videolezione** Determina i punti appartenenti al grafico della funzione $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ in cui la retta tangente è parallela alla retta di equazione $11x - y - 2 = 0$.
$[(-1, -7); (3, 5)]$

506 Determina k in modo che la tangente nel punto di ascissa $x = 1$ al grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x^2 + k}$ sia parallela alla retta di equazione $x - 6y + 3 = 0$.
$[k = -9 \vee k = 7]$

507 Data la funzione $y = e^x - kx$, determina k in modo che la retta tangente nel suo punto d'intersezione con l'asse y passi per il punto $P(1, 4)$.
$[k = -2]$

508 Determina a e b in modo che la curva di equazione $y = a \sin 2x + b \cos x + 1$ intersechi l'asse x nel punto di coordinate $(\pi, 0)$, avendo in tale punto la tangente che forma con l'asse x un angolo di 135°.
$\left[a = -\frac{1}{2}, b = 1\right]$

509 Data la funzione $y = x^3 - (k-1)x + 1$, determina k in modo che la tangente nel suo punto di ascissa 1 formi con l'asse x un angolo di ampiezza 60°.
(*Suggerimento*: devi imporre la condizione $f'(1) = \tan 60°$.)
$[k = 4 - \sqrt{3}]$

510 Determina a e b in modo che la curva di equazione $y = ae^x + be^{-x}$ passi per il punto $P(0, 2)$ e abbia tangente in P parallela alla retta di equazione $y = 3x$.
$\left[a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2}\right]$

511 **ESERCIZIO SVOLTO**

Data la funzione $y = e^{2x}$, determiniamo l'equazione:

a. della retta tangente passante per l'origine;

b. della retta tangente parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

a. Sia $P(x_0, e^{2x_0})$ un generico punto appartenente al grafico della funzione $y = e^{2x}$; l'equazione della retta tangente al grafico in P è:

$$y - \underbrace{e^{2x_0}}_{f(x_0)} = \underbrace{2e^{2x_0}}_{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad [*]$$

Affinché questa retta passi per l'origine deve essere verificata la condizione:

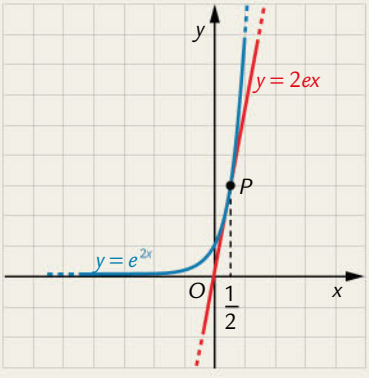
$$0 - e^{2x_0} = 2e^{2x_0}(0 - x_0)$$

Risolvendo questa equazione nell'incognita x_0 ricaviamo:

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

Sostituendo $\frac{1}{2}$ al posto di x_0 nella [*], otteniamo l'equazione della tangente passante per l'origine:

$$y - e^{2\cdot\frac{1}{2}} = 2e^{2\cdot\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = 2ex$$



Nota Il procedimento seguito consente anche di dire che il punto di contatto della tangente passante per l'origine con la curva ha ascissa $\frac{1}{2}$.

b. Affinché la retta di equazione [*] sia parallela alla retta di equazione $y = x$ il suo coefficiente angolare deve essere 1, quindi deve essere:

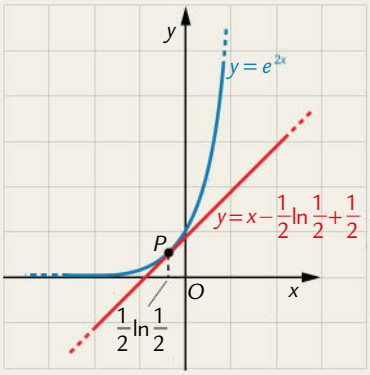
$$\underbrace{2e^{2x_0}}_{f'(x_0)} = 1 \Rightarrow e^{2x_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$$

Sostituendo questo valore di x_0 nella [*], otteniamo l'equazione della tangente richiesta:

$$y-\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)$$

Per effettuare le sostituzioni rapidamente ricorda che $e^{2x_0}=\frac{1}{2}$

ossia: $y=x-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.



Nota Il procedimento seguito consente anche di dire che il punto di contatto della tangente parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante con la curva ha ascissa $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\simeq-0{,}35$.

512 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $y=x^3-16$ passante per l'origine. $[y=12x]$

513 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $y=x^3$ passante per il punto $P(0,-16)$. $[y=12x-16]$

514 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $y=\ln x$ passante per l'origine. $\left[y=\frac{1}{e}x\right]$

515 Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico di $y=\ln^2 x-\ln x$ passanti per il punto $P(0,1)$.

$\left[y=-x+1;\ y=\frac{5}{e^3}x+1\right]$

516 Determina le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $y=x^3$, parallele alla retta di equazione $y=\frac{3}{4}x$. $\left[y=\frac{3}{4}x\pm\frac{1}{4}\right]$

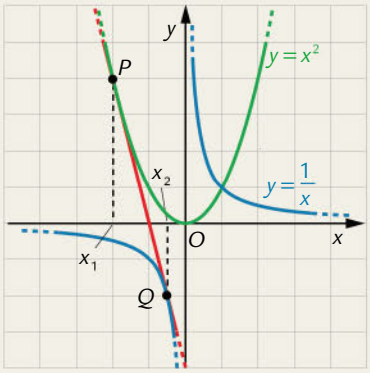
517 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y=e^{2x}$, parallela alla retta di equazione $y=4x$. $[y=4x+2-\ln 4]$

518 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo l'equazione della retta tangente sia al grafico di $y=x^2$ sia al grafico di $y=\frac{1}{x}$.

- Dal grafico delle due curve possiamo notare che la retta richiesta è tangente a $y=x^2$ in un punto P di ascissa $x_1<0$ e a $y=\frac{1}{x}$ in un punto Q di ascissa $x_2<0$.
- Scriviamo l'equazione della retta tangente in P a $y=x^2$:
  $y-x_1^2=\underbrace{2x_1}_{f'(x_1)}(x-x_1)\Rightarrow y=2x_1x-x_1^2$ [*]
- Scriviamo l'equazione della retta tangente in Q a $y=\frac{1}{x}$:
  $y-\frac{1}{x_2}=\underbrace{-\frac{1}{x_2^2}}_{f'(x_2)}(x-x_2)\Rightarrow y=-\frac{1}{x_2^2}x+\frac{2}{x_2}$ [**]
- Affinché le due rette coincidano, devono avere lo stesso coefficiente angolare e la stessa ordinata all'origine, quindi deve essere soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases}2x_1=-\frac{1}{x_2^2}\\ -x_1^2=\frac{2}{x_2}\end{cases}$$



che, risolto, fornisce come soluzione: $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Sostituendo il valore di x_1 nella [*] o il valore di x_2 nella [**] otteniamo che l'equazione della tangente richiesta è $y=-4x-4$.

519 Determina l'equazione della retta tangente sia a $y=\frac{1}{x}$ sia a $y=-2\sqrt{x}$. $\left[y=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}x-\sqrt[3]{4}\right]$

520 **Videolezione** Determina l'equazione della retta tangente sia a $y=\ln x$ sia a $y=\ln x^2$. $\left[y=\frac{4}{e}x-\ln 4\right]$

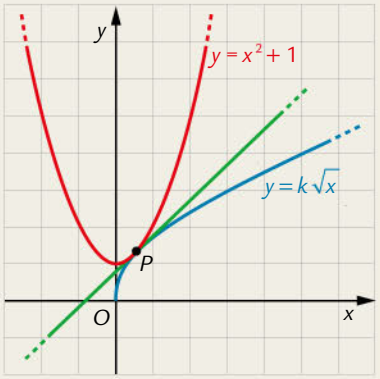
Tangenza tra due curve

521 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo k, con $k > 0$, in modo che le due curve di equazioni $y = k\sqrt{x}$ e $y = x^2 + 1$ siano tangenti.

- Indichiamo con $P(x_0, y_0)$ il punto di tangenza (incognito) tra le due curve.
- Scriviamo il sistema che si ottiene imponendo che P appartenga a entrambe le curve e che le derivate delle due funzioni in P siano uguali:

$$\begin{cases} y_0 = k\sqrt{x_0} & \leftarrow \text{Appartenenza a } y = k\sqrt{x} \\ y_0 = x_0^2 + 1 & \leftarrow \text{Appartenenza a } y = x^2 + 1 \\ \dfrac{k}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0 & \leftarrow \text{Uguaglianza delle derivate in } x_0 \end{cases}$$



- Risolvendo il sistema, troviamo $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y_0 = \frac{4}{3}$ e $k = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3}$.

  Perciò le due curve sono tangenti per $k = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3}$ e il loro punto di contatto ha coordinate $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

522 Determina k in modo che le due curve di equazioni $y = e^x$ e $y = 6 - ke^{-x}$ siano tangenti. $[k = 9]$

523 Determina k in modo che le due curve di equazioni $y = x^2$ e $y = k \ln x$ siano tangenti. $[k = 2e]$

524 Determina per quali valori di k la curva di equazione $y = ke^x$ è tangente alla parabola, avente asse parallelo all'asse y, che ha vertice in $V\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right)$ e passa per l'origine. $\left[\text{Parabola: } y = -2x^2 + 3x;\ k = -\frac{9}{e^3} \vee k = \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

525 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta di equazione $x = -2$, tangente al grafico di $y = x^3 - \ln(x + 1) - e^x$ nel suo punto d'intersezione P con l'asse y.
(*Suggerimento*: scrivi preliminarmente l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in P; il problema equivale a scrivere l'equazione della circonferenza che soddisfa le condizioni assegnate ed è tangente in P a questa retta.)
$[x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0]$

526 Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per il punto $P(0, 3)$ ed è tangente al grafico di $y = \ln(x + 3)$ nel suo punto d'intersezione con l'asse x.
(*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente.) $[x^2 + y^2 + 17x - 13y + 30 = 0]$

Esercizi riassuntivi: applicazioni geometriche delle derivate

527 Data la funzione $y = \frac{3x + 4}{2x}$, determina l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa -1.
$\left[y = -2x - \frac{5}{2}\right]$

528 Determina il valore del parametro a per cui la tangente al grafico della funzione $y = \frac{ax^2 + 3x}{2x + 1}$ nel punto di ascissa $x = 2$ risulta orizzontale.
$\left[a = -\frac{1}{4}\right]$

529 Determina le ascisse dei punti appartenenti al grafico della funzione $y = \frac{x^2 + 4x}{2x - 1}$ in cui la retta tangente ha coefficiente angolare uguale a -1.
$\left[x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right]$

530 Stabilisci se la funzione $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 8x - 20}{x - 5} & \text{se } x < 2 \\ 2\sqrt{x - 2} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ è continua e derivabile e determina le rette tangenti al suo grafico nei punti di ascisse $x = -1$ e $x = 3$. $\left[\text{Continua ma non derivabile in } x = 2,\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{4},\ y = x - 1\right]$

531 Date le parabole di equazioni $y = x^2 + 2$ e $y = -2x^2 - 3x$, trova l'ascissa dei due punti in cui le tangenti sono parallele.

$\left[x = -\frac{1}{2}\right]$

532 **Videolezione** Individua il punto in cui la retta tangente al grafico della funzione $y = \ln\left(\frac{4x}{x^2+2}\right)$ è perpendicolare alla retta di equazione $y = -3x + 2$.

$\left[\left(1, \ln\frac{4}{3}\right)\right]$

533 Data la funzione $y = \frac{2x-6}{1-3x}$, determina i punti appartenenti al suo grafico in cui la retta tangente è perpendicolare alla retta di equazione $y = x + 3$.

$\left[\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right), (-1, -2)\right]$

534 Data la parabola di equazione $y = (2 - 2k)x^2 + (3k - 2)x + k$, determina il valore del parametro k in modo che la retta tangente alla parabola nel punto di ascissa 2 sia perpendicolare alla retta che passa per i punti $A(1, 1)$ e $B(5, 3)$.

$\left[k = \frac{8}{5}\right]$

Metodi a confronto

535 Determina il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola di equazione $y = f(x) = x^2 + 3x - 3$ in $P(1, 1)$ in due modi:

a. seguendo l'usuale approccio della geometria analitica, cioè considerando il fascio proprio di rette passanti per P e imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$;

b. procedendo con il metodo della derivata illustrato in questa Unità.

536 Considera la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 25$. Determina l'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto $P(3, 4)$ in tre modi:

a. tramite il noto teorema per cui la tangente alla circonferenza per P è perpendicolare al raggio OP;

b. applicando la formula di sdoppiamento;

c. considerando l'arco di circonferenza nel primo quadrante come parte del grafico della funzione $y = \sqrt{25 - x^2}$ e procedendo con il metodo della derivata illustrato in questa Unità.

537 Determina le equazioni delle rette tangenti sia al grafico della parabola di equazione $y = -27x^2$ sia al grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2}$.

$[y = \pm 54x + 27]$

538 Determina l'angolo acuto α formato dalle rette tangenti ai grafici delle funzioni $y = x^2 + 6x - 2$ e $y = 2\ln|x - 1| - \frac{x^2+2x}{2}$ nei loro punti di ascissa -2.

$\left[\alpha = \frac{\pi}{4}\right]$

539 Determina i parametri a, b, c per cui il grafico della funzione $y = e^{\frac{ax^2+bx}{x+c}}$ ha un asintoto verticale di equazione $x = 1$, passa per il punto di coordinate $(2, e^4)$ e ha ivi tangente orizzontale.

$[a = 1, b = 0, c = -1]$

540 Determina l'angolo acuto formato dalle tangenti al grafico della funzione $y = \frac{|2x-3|}{x}$ nel suo punto angoloso.

$\left[\alpha = \arctan\frac{24}{7}\right]$

541 Date le funzioni $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = \sqrt{x+3}$:

a. scrivi l'espressione analitica della funzione $h(x) = (f \circ g)(x)$ e stabilisci se è derivabile nel suo dominio;

b. traccia il grafico probabile della funzione $h(x)$;

c. trova la retta tangente al grafico di $h(x)$ nel suo punto di ascissa -2.

$\left[h(x) = x + 3 + 3\sqrt{x+3}\text{, derivabile per } x > -3,\ y = \frac{5}{2}x + 9\right]$

542 Spiega perché tutte le tangenti al grafico della funzione $y = e^{\frac{x+3}{x}}$ hanno pendenza negativa.

543 Determina l'angolo acuto formato dalle due parabole di equazioni $y = x^2 - 3x + 4$ e $y = -x^2 + 5x + 4$ nel loro punto d'intersezione di ascissa nulla.

$\left[\alpha = \arctan\frac{4}{7}\right]$

544 Determina i punti in cui la tangente al grafico della funzione $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 1$ è parallela alla retta passante per $A(0, -3)$ e $B(1, 9)$.

$\left[\left(-2, -\frac{35}{3}\right), (6, -1)\right]$

545 Considera le due funzioni $f(x) = (x-1)(x+2)$ e $g(x) = \frac{x+2}{1-x}$.

a. Traccia i loro grafici.

b. Verifica algebricamente che i loro grafici hanno un solo punto P in comune, di cui devi determinare le coordinate.

c. Verifica che le tangenti in P ai grafici di f e g sono perpendicolari. [**b.** $(-2, 0)$]

546 Dimostra, mediante la teoria delle derivate, che il coefficiente angolare della tangente a una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ nel suo punto di ascissa x_0 è $2ax_0 + b$.

547 Determina a, b, c e d in modo che la curva di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ soddisfi le seguenti condizioni:

a. passa per l'origine e ha in tale punto per tangente la bisettrice del primo e del terzo quadrante;

b. passa per il punto di coordinate $(1, 0)$ e ha in tale punto per tangente la retta di equazione $y = x - 1$.

[$a = 2, b = -3, c = 1, d = 0$]

548 Scrivi l'equazione della funzione razionale intera di terzo grado, dispari, che interseca l'asse x nel punto di coordinate $(3, 0)$ e ha in tale punto tangente parallela alla retta di equazione $y = 6x$. $\left[y = \frac{1}{3}x^3 - 3x\right]$

549 Scrivi l'equazione della funzione razionale intera di terzo grado che soddisfa le seguenti condizioni:

a. interseca l'asse x nel punto di coordinate $(1, 0)$, avendo in questo punto tangente parallela alla retta di equazione $y = -7x$;

b. interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 3)$, avendo in questo punto tangente parallela all'asse x.

[$y = -x^3 - 2x^2 + 3$]

550 Scrivi l'equazione della funzione $y = f(x)$ razionale intera di quarto grado, pari, tale che $f'''(x) = 12x$, sapendo che è tangente all'asse x nel punto di coordinate $(2, 0)$. $\left[y = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 8\right]$

551 Determina i coefficienti della funzione $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + d$ in modo che $f'''(x) = 6x + 2$, il suo grafico intersechi l'asse y in $P(0, 2)$ e la tangente in questo punto sia parallela all'asse x. $\left[y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2\right]$

552 Scrivi l'equazione della funzione razionale intera di terzo grado il cui grafico interseca l'asse x nell'origine e nei due punti $A(-1, 0)$ e $B(3, 0)$, sapendo che l'equazione della normale a tale grafico nel punto A ha equazione $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$. $[y = x^3 - 2x^2 - 3x]$

553 Scrivi l'equazione della funzione razionale intera di terzo grado, dispari, tangente alla curva di equazione $y = 2 \ln x$ nel suo punto d'intersezione con l'asse x. $[y = x^3 - x]$

554 Determina a, b e c in modo che la curva di equazione $y = \frac{ax^2 + b}{x^2 + c}$ soddisfi le seguenti condizioni:

a. ha per asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 2$;

b. passa per il punto $P(2, 0)$ e ha in tale punto tangente parallela alla retta di equazione $y = 2x$.

[$a = 2, b = -8, c = 0$]

555 Determina a, b e c in modo che la curva di equazione $y = \frac{ax + 1}{x^2 + bx + c}$ soddisfi le seguenti condizioni:

a. ha per asintoti verticali le rette di equazione $x = -3$ e $x = 1$;

b. la tangente nel suo punto di intersezione con l'asse y è parallela alla retta di equazione $4x - 9y + 1 = 0$.

[$a = -2, b = 2, c = -3$]

556 Data la funzione $y = e^{kx}$, con $k \neq 0$, siano t e n, rispettivamente, la tangente e la normale alla curva nel suo punto d'intersezione con l'asse y. Determina k in modo che il triangolo individuato dalla retta t, dalla retta n e dall'asse x abbia area uguale a $\frac{5}{4}$. $\left[k = \pm\frac{1}{2} \vee k = \pm 2\right]$

557 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \sqrt{x^2 + 2} - 3x$ nel suo punto d'intersezione con l'asse x. $\left[y = -\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}\right]$

558 Stabilisci se esistono punti appartenenti al grafico della funzione $y = \ln(x^3 - 2x^2)$ in cui la tangente è orizzontale. [Non esistono]

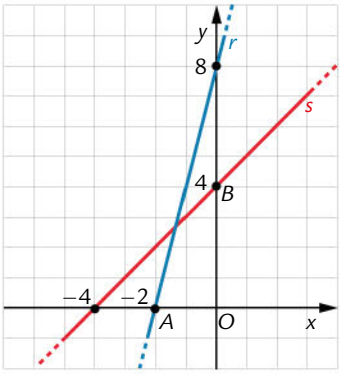
559 **Videolezione** Determina l'equazione della retta parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, tangente al grafico della funzione $y = 2\ln x + 1$. $[y = x + 2\ln 2 - 1]$

560 Determina a e b in modo che il grafico della funzione $y = e^{-ax} + b$ passi per il punto $P(0, -2)$ e abbia ivi tangente perpendicolare alla retta AB, passante per $A(3, 5)$ e $B(1, -1)$. $\left[a = \frac{1}{3},\ b = -3\right]$

561 Considera le due funzioni $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ e $g(x) = 3e^x - 2x$. La retta di equazione $x = k$ interseca il grafico di f nel punto A e il grafico di g nel punto B. Determina per quali valori di k la tangente in A al grafico di f è parallela alla tangente in B al grafico di g. $[k = 0 \vee k = \ln 2]$

562 Determina per quali valori di a la tangente alla curva di equazione $y = x^2e^{2x}$ nel punto di ascissa a passa per l'origine degli assi. $\left[a = -\frac{1}{2} \vee a = 0\right]$

563 **Interpretazione di grafici** Il grafico di una funzione di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passa per i due punti A e B e ammette come tangente in A la retta r e come tangente in B la retta s. Determina i coefficienti a, b, c, d dell'equazione.



$\left[a = \frac{1}{4},\ b = 0,\ c = 1,\ d = 4\right]$

564 Considera la funzione $y = xe^{-kx}$, con $k \in \mathbf{R}$. Determina k in modo che la retta tangente nel punto di ascissa -1 sia perpendicolare alla retta tangente nel punto di ascissa 1. $[k = \pm\sqrt{2}]$

565 Data la funzione $y = \frac{a}{\sqrt{2x + b}}$, determina a e b in modo che:

- abbia come asintoto verticale la retta di equazione $x = 2$;
- la retta tangente nel punto di ascissa 4 sia parallela alla retta di equazione $y = 3x$. $[a = -24,\ b = -4]$

566 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \le 1 \\ x^3 + cx & x > 1 \end{cases}$, trova a, b, c in modo che sia continua e derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e abbia nel punto di ascissa 2 tangente parallela alla retta di equazione $y = 5x - 1$. $[a = -4,\ b = -2,\ c = -7]$

567 Considera la funzione $y = e^{kx} - e^{-kx}$. Determina per quale valore di k la tangente al grafico della funzione nel suo punto d'intersezione con l'asse y è perpendicolare alla retta AB, passante per $A(3, -2)$ e $B(9, 0)$. $\left[k = -\frac{3}{2}\right]$

568 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \sqrt{\ln x}$ nel suo punto d'intersezione con la retta $y = 1$. $\left[y = \frac{x}{2e} + \frac{1}{2}\right]$

569 Verifica che la funzione $y = |x^3 - 2x^2|$ è derivabile per $x = 0$ mentre presenta un punto angoloso per $x = 2$. Scrivi le equazioni delle rette tangenti nel punto angoloso e determina l'ampiezza dell'angolo acuto formato da tali tangenti, approssimando il risultato a meno di un grado. $\left[y = 4x - 8,\ y = 8 - 4x,\ \arctan\frac{8}{15} \simeq 28°\right]$

570 La retta tangente al grafico di una funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa $x = 1$ ha equazione $y = 2x - 1$. Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x^3)$ nel suo punto di ascissa $x = 1$. $[y = 6x - 5]$

571 La retta tangente a $y = f(x)$ in $x = 0$ ha equazione $y = 2x - 1$. Qual è l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x) \cdot e^x$ nel suo punto di ascissa $x = 0$? $[y = x - 1]$

572 Dopo aver dimostrato che la funzione $y = f(x) = e^x + x$ è strettamente crescente, quindi invertibile, scrivi l'equazione della retta tangente alla funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ nel suo punto d'intersezione con l'asse x. $\left[y = \frac{1}{2}(x-1)\right]$

573 Dopo aver dimostrato che la funzione $y = f(x) = 2x + \ln(x+1) + 1$ è strettamente crescente, quindi invertibile, scrivi l'equazione della retta tangente alla funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ nel suo punto d'intersezione con l'asse x.

$\left[y = \frac{1}{3}(x-1)\right]$

8. Applicazioni del concetto di derivata nelle scienze e nella tecnica

Teoria p. 280

Problemi relativi al moto

574 La legge del moto di un corpo che si muove su una traiettoria rettilinea è $s = 2t^2 - t + 1$ dove t è misurata in secondi e s in metri. Determina la velocità e l'accelerazione del corpo in funzione del tempo. $[v = 4t - 1,\ a = 4]$

575 La legge del moto di un corpo che si muove su una traiettoria rettilinea è $s = t^3 + t^2 + 2t$ dove t è misurata in secondi e s in metri. Determina la velocità e l'accelerazione del corpo in funzione del tempo. $[v = 3t^2 + 2t + 2,\ a = 6t + 2]$

576 La legge del moto di un corpo che si muove su una traiettoria rettilinea è $s = \sin^2 t + \cos t + 2$ dove t è misurata in secondi e s in metri. Determina la velocità e l'accelerazione del corpo in funzione del tempo.

$[v = 2\sin t \cos t - \sin t,\ a = 2\cos 2t - \cos t]$

577 La legge del moto di un corpo che si muove su una traiettoria rettilinea è $s = t^2 - 3t + 1$, dove t è misurato in secondi ed s in metri. Calcola la velocità e l'accelerazione dopo 2 s. $[v = 1 \text{ m/s};\ a = 2 \text{ m/s}^2]$

578 La legge del moto di un corpo che si muove su una traiettoria rettilinea è:

$$s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 17t + 1$$

dove t è misurato in secondi ed s in metri. Determina in quali istanti la velocità è di 5 m/s. $[t = 3 \text{ s},\ t = 4 \text{ s}]$

579 **Videolezione** La legge del moto di un corpo che si muove su una traiettoria rettilinea è $s = t^3 - 6t^2 + 12t - 4$, dove t è misurato in secondi ed s in metri.

a. Trova la velocità e l'accelerazione all'istante t.
b. In quali istanti la velocità è di 3 m/s?
c. In quale istante l'accelerazione è nulla? [**a.** $v = 3t^2 - 12t + 12,\ a = 6t - 12$; **b.** $t = 1$ s, $t = 3$ s; **c.** 2 s]

580 La legge oraria di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato è:

$$s = 3{,}2 + 4{,}5t + 3{,}9t^2$$

per ogni $t \geq 0$, con il tempo misurato in secondi e lo spazio in metri. Determina, sia con gli strumenti dell'analisi matematica sia con le usuali leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato, la velocità e l'accelerazione del punto materiale all'istante $t = 2{,}5$ s. $[v = 24 \text{ m/s};\ a = 7{,}8 \text{ m/s}^2]$

581 La legge del moto di un corpo che si muove su una traiettoria rettilinea è $s = t^3 - 9t^2 + 24t$, dove t è misurato in secondi ed s in metri.

a. Trova la velocità e l'accelerazione all'istante t.
b. Calcola la velocità e l'accelerazione dopo 5 s.
c. In quali istanti il corpo è fermo?
d. In quali istanti si muove in avanti?
e. In quali istanti il corpo decelera?

[**a.** $v = 3t^2 - 18t + 24,\ a = 6t - 18$; **b.** 9 m/s, 12 m/s^2; **c.** $t_1 = 2$ s, $t_2 = 4$ s; **d.** $0 < t < 2 \vee t > 4$; **e.** $0 < t < 3$]

582 Se una palla viene lanciata da terra verso l'alto con una velocità di 60 m/s, la sua altezza s dopo t secondi, trascurando l'attrito, è data approssimativamente da $s = 60t - 5t^2$.

a. Qual è l'altezza massima raggiunta dalla palla?
b. Qual è la velocità della palla quando si trova a un'altezza di 160 m e sta salendo? E nella stessa posizione quando sta ricadendo? [**a.** 180 m; **b.** 20 m/s, –20 m/s]

583 La legge oraria di un punto materiale che si muove di moto armonico è $s = r\cos\omega t$ per ogni $t \geq 0$, con il tempo misurato in secondi e lo spazio in metri. Determina con gli strumenti dell'analisi matematica l'espressione della velocità istantanea e l'espressione dell'accelerazione istantanea del punto materiale. Sapendo che è $r = 50$ cm e $T = 0{,}05$ s, calcola posizione, velocità e accelerazione del punto all'istante $t = \frac{1}{8}$ s.

$\left[v = -\omega r \sin\omega t;\ a = -\omega^2 r\cos\omega t = -\omega^2 s;\ s\left(\frac{1}{8}\right) = -0{,}5 \text{ m};\ v\left(\frac{1}{8}\right) = 0 \text{ m/s};\ a\left(\frac{1}{8}\right) = 8\cdot 10^2\cdot\pi^2 \text{ m/s}^2\right]$

584 La posizione, a un dato istante, di un punto materiale in moto circolare può essere individuata da un vettore, chiamato *raggio vettore*, che ha la «coda» nel centro della circonferenza e la «punta» laddove si trova il punto materiale. Fissato sulla circonferenza un punto origine degli archi, un verso positivo di percorrenza e supponendo per semplicità che nell'istante iniziale $t = 0$ s il punto materiale si trovi nell'origine degli archi, la posizione del punto materiale, a un dato istante, è quindi individuata dall'angolo θ che il raggio vettore ha descritto nel tempo considerato.
Un punto materiale si muove di moto circolare secondo la legge $\theta(t) = -6t^2 + 36t$ con $\theta(t)$ misurato in radianti. Calcola la velocità angolare ω e l'accelerazione angolare α del punto materiale all'istante $t = 2$ s. $[\omega = 12 \text{ rad/s};\ \alpha = -12 \text{ rad/s}^2]$

585 Un corpo di massa variabile secondo la legge $m = 40 - t$, con la massa misurata in kilogrammi e il tempo in secondi, è in moto su una traiettoria rettilinea con legge oraria $s = 3t^2 + 1$, con lo spazio misurato in metri. Calcola l'intensità della forza applicata al corpo all'istante $t = 4s$. $[F = 216 \text{ N}]$

586 La legge oraria di un punto materiale che si muove su una linea retta è:

$s = 2t^3 - 12t^2 + 24t + 5$

per ogni $t \geq 0$, con il tempo misurato in secondi e lo spazio in metri. Ricava con gli strumenti dell'analisi matematica l'espressione della velocità istantanea del punto materiale. Calcola la distanza percorsa dal punto materiale quando è $v = 0$ m/s. Il punto materiale inverte in qualche istante il verso del moto?

$[v = 6(t-2)^2 \text{ m/s};\ s = 21 \text{ m}$; il punto materiale non inverte il verso del moto perché s è sempre crescente$]$

587 Un punto materiale si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con legge oraria $s = 1 + 2t + 2t^2$ per ogni $t \geq 0$, con il tempo misurato in secondi e lo spazio in metri. Calcola la velocità media v_m del punto materiale nell'intervallo $[0, 3]$ secondi. Determina quindi, con gli strumenti dell'analisi matematica, l'espressione della velocità istantanea del punto materiale e l'istante di tempo interno all'intervallo considerato per il quale la velocità media ha lo stesso valore della velocità istantanea. Calcola infine analiticamente il valore dell'accelerazione istantanea del punto materiale.

$\left[v_m = 8 \text{ m/s};\ v = 2 + 4t;\ v_m = v \text{ per } t = \frac{3}{2}s;\ a = 4 \text{ m/s}^2\right]$

Problemi sull'intensità di corrente e sulla potenza

588 La carica elettrica, in coulomb, che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo (in secondi) dalla funzione $q(t) = 2e^{3t}\sin t$. Determina l'intensità della corrente in funzione del tempo.

$[i(t) = e^{3t}(2\cos t + 6\sin t)]$

589 La carica elettrica, in coulomb, che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo (in secondi) dalla funzione $q(t) = 3e^{-t}(\sin t + \cos t)$. Determina l'intensità della corrente in funzione del tempo.

$[i(t) = -6e^{-t}\sin t]$

590 La carica, in coulomb, che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo (in secondi) dalla funzione $q(t) = t^3 - 3t^2 + 4t + 2$. Determina l'intensità della corrente dopo 1 s e dopo 2 s. [1 A; 4 A]

591 La carica, in coulomb, che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo (in secondi) dalla funzione $q(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 24t + 1$. Determina in quali istanti l'intensità di corrente è nulla. $[t = 4 \text{ s},\ t = 6 \text{ s}]$

592 La carica, in coulomb, che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo (in secondi) dalla funzione $q(t) = t^3 - 4t^2 + 6t + 4$. Determina in quali istanti l'intensità di corrente è 2 A.

$\left[\frac{2}{3}\text{s},\ 2 \text{ s}\right]$

593 Una sezione di un circuito elettrico è attraversata in un certo intervallo di tempo da una quantità di carica elettrica variabile nel tempo secondo la legge $q = 2e^t$, con la carica misurata in coulomb e il tempo in secondi. Calcola l'intensità della corrente elettrica all'istante $t = 2$ s. $[i = 2e^2 \text{ A}]$

594 La tensione (in volt) applicata a una resistenza varia in funzione del tempo t (in secondi) secondo la legge $V = 3t^2 - 5t + 6$; la resistenza (in ohm) varia in funzione del tempo secondo la legge $R = 2t + 8$. Determina la velocità di variazione della corrente dopo 10 s. [4,2 A/s]

595 L'energia E (in joule) dissipata da una resistenza varia in funzione del tempo t (in secondi) secondo la legge $E = 2(t+8)^2$. Determina dopo quanti secondi la potenza è di 40 W. [2 s]

596 La resistenza R (in ohm) di un conduttore varia nel tempo secondo la legge $R = \frac{3}{2}t^2$, dove il tempo è misurato in secondi e $0 \le t \le 600$. Nella resistenza fluisce una corrente (in ampere) che varia nel tempo secondo la legge $i = 2t^2 + 1$. Determina la velocità di variazione della potenza dopo 1 s. [63 W/s]

597 Un conduttore di resistenza $R = 3\ \Omega$ è attraversato da una carica q (in coulomb) che varia nel tempo secondo la legge $q = 3t^2 - 4t + 2$, dove il tempo t è misurato in secondi. Determina l'espressione della potenza P in funzione del tempo. Qual è la potenza dopo 2 s? [$P = 12(3t-2)^2$, 192 W]

Matematica ed elettronica

598 Considera un condensatore piano di capacità C collegato a un generatore di tensione alternata, espressa in funzione del tempo dalla legge $E = E_0 \sin(\omega t)$.

a. Determina l'espressione che esprime la corrente in funzione di t e verifica che $i = CE_0\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

b. Determina l'intensità di corrente dopo 10 s, nell'ipotesi che $C = 80\,\mu F$, $E_0 = 30$ V e $\omega = 2{,}5$ rad/s.

[**b.** Circa 5,9 mA]

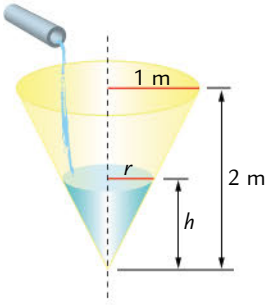
599 In un circuito RC, con $R = 10^3\ \Omega$ e $C = 10^{-3}$ F, inizialmente il condensatore contiene una carica $Q_0 = 10^{-3}$ C. A un certo istante si chiude un interruttore e il condensatore comincia a scaricarsi attraverso la resistenza. Ricordando che la legge che descrive l'andamento della carica sulle armature del condensatore è $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, calcola il valore dell'intensità di corrente dopo 2 s dalla chiusura dell'interruttore. [$i \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ A]

Problemi con due velocità correlate

600 Pompando dell'aria in un pallone sferico, il suo volume cresce alla velocità di 120 cm^3/s. Con quale velocità sta crescendo il raggio del pallone, quando il suo diametro è di 60 cm? $\left[\frac{1}{30\pi} \simeq 0{,}0106 \text{ cm/s}\right]$

601 Una scala lunga 2,5 m è appoggiata a un muro. Se la sua base scivola alla velocità di 2 m/s, con quale velocità sta scivolando la cima della scala nell'istante in cui la base si trova a 1,5 m dal muro? [−1,5 m/s]

602 In un contenitore a forma di cono «rovesciato», avente il raggio di base di 1 m e altezza di 2 m, viene introdotta dell'acqua alla velocità di 0,5 m^3/min. Calcola la velocità alla quale sta crescendo l'altezza h dell'acqua quando l'altezza è di 1 m.



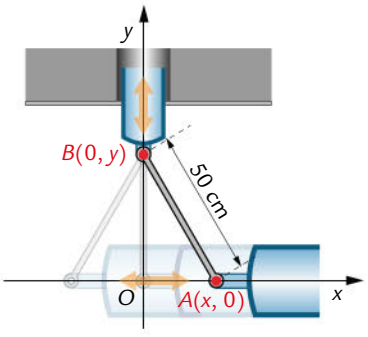
$\left[\frac{2}{\pi} \simeq 0{,}64 \text{ m/min}\right]$

603 **Matematica e fisica** Due auto, che percorrono due strade perpendicolari, si stanno dirigendo entrambe verso il punto di intersezione delle due strade. L'auto A si muove alla velocità di 80 km/h, mentre l'auto B si muove alla velocità di 100 km/h. Con quale velocità si stanno avvicinando le due auto, nell'istante in cui l'auto A si trova a 10 km e l'auto B a 20 km dal punto d'intersezione? [$-56\sqrt{5} \simeq -125{,}22$ km/h]

604 Gli estremi A e B di un braccio meccanico mobile, rispetto al sistema di riferimento in figura, hanno rispettivamente coordinate $(x, 0)$ e $(0, y)$.
Il braccio è lungo 50 cm e l'ascissa x del punto A si muove di un moto armonico, descritto dalla funzione:

$$x(t) = 30\sin\left(\frac{\pi t}{9}\right)$$

dove x è espresso in centimetri e il tempo t è misurato in secondi.



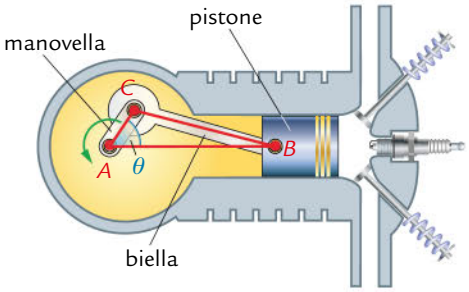
a. Determina quanto tempo impiega il braccio a compiere un ciclo completo.

b. Determina la distanza del punto B dall'origine O, quando il punto B si trova nella posizione più bassa che raggiunge durante un ciclo.

c. Determina la velocità del punto B nell'istante in cui il punto A ha coordinate (15, 0).

[**a.** 18 s; **b.** 40 cm; **c.** circa −2,85 cm/s]

605 Nel motore rappresentato in figura, il pistone è collegato a un sistema biella–manovella. È noto che BC è lungo 21 cm, AC è lungo 9 cm e la manovella ruota, in senso antiorario, con una velocità costante uguale a 50 giri al minuto.



a. Posto $\overline{AB} = x$, verifica che x e θ sono legati dalla relazione: $441 = 81 + x^2 - 18x\cos\theta$.

b. Deduci, dalla relazione al punto **a**, il valore di x quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e quando $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

c. Derivando i due membri della relazione di cui al punto **a** rispetto al tempo t (tenendo conto che sia x sia θ sono funzioni del tempo) deduci che risulta:

$$x' = \frac{9x\sin\theta}{9\cos\theta - x}\theta'$$

d. Tenendo conto di quanto ricavato al punto precedente, determina la velocità del pistone quando risulta $\theta = \frac{\pi}{2}$ e quando $\theta = \frac{2\pi}{3}$. [**b.** $6\sqrt{10}$,15; **d.** -900π cm/min $\simeq -2827{,}4$ cm/min; circa $-1883{,}6$ cm/min]

ESERCIZI

9. Il differenziale

Teoria p. 283

Scrivi il differenziale delle seguenti funzioni, relativo al punto x e all'incremento dx.

606 $y = (x^2 + x)^3$ $[dy = 3(x^2 + x)^2(2x + 1)dx]$

607 $y = \frac{1}{x^3}$ $\left[dy = -\frac{3}{x^4}dx\right]$

608 $y = \ln(2x + 1)$ $\left[dy = \frac{2dx}{2x + 1}\right]$

609 $y = e^{-x^2}$ $[dy = -2xe^{-x^2}dy]$

610 ESERCIZIO SVOLTO

Approssimiamo il numero $\sqrt{50}$ senza calcolatrice, utilizzando il concetto di differenziale.

Consideriamo la funzione $y = \sqrt{x}$; sappiamo che, quanto più Δx è piccolo, tanto migliore è l'approssimazione

$$\underbrace{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}_{\text{incremento di } y} \simeq \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{incremento di } x}, \text{ cioè } f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

Ciò suggerisce di approssimare $\sqrt{50}$ ponendo $x = 49$ e $\Delta x = 1$ (scegliamo $\Delta x = 1$, e quindi $x = 49$, perché così x risulta un quadrato perfetto):

$$\sqrt{50} = \sqrt{49 + 1} \simeq \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}} \cdot 1 = 7 + \frac{1}{14} = \frac{99}{14}$$

Puoi constatare che tale stima è corretta fino alla terza cifra decimale.

Approssima i numeri seguenti senza utilizzare la calcolatrice ma utilizzando il concetto di differenziale.

611 $\sqrt{47}$ $\left[\frac{48}{7}$ (scegliendo $\Delta x = -2)\right]$

612 $\sqrt[3]{28}$ $\left[\frac{82}{27}$ (scegliendo $\Delta x = 1)\right]$

613 $\sqrt{4{,}1235}$ [2,030875 (scegliendo $\Delta x = 0{,}1235$)]

614 $\ln(e^3 - 1)$ $\left[\frac{3e^3 - 1}{e^3}$ (scegliendo $\Delta x = -1)\right]$

615 $2{,}01^5$ [32,8 (scegliendo $\Delta x = 0{,}01$)]

616 $e^{3{,}01}$ [$1{,}01e^3$ (scegliendo $\Delta x = 0{,}01$)]

617 Quanto varia approssimativamente il volume di una sfera di raggio r quando r subisce un incremento di Δr? Scrivi la formula che fornisce un'approssimazione della variazione in corrispondenza dell'incremento Δr, quindi effettua esplicitamente il calcolo nel caso di una sfera di raggio 10 cm, il cui raggio subisce un incremento di 2 cm. [Circa 2513 cm^3]

618 **Matematica ed economia** Il costo (in euro) per la produzione della quantità q di un dato bene è espresso dalla funzione $C(q) = 8(5 + 6q\sqrt{q})$. Utilizzando il concetto di differenziale, approssima l'aumento che si registra nel costo se la quantità q venduta passa da 100 unità a 101 unità. [720 euro]

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

Test

619 La derivata della funzione $f(x) = x^2 + 4\sqrt{x}$ per $x = 4$ vale:

A 8 B 9 C 10 D non esiste

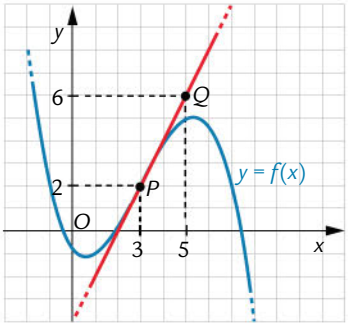
620 La derivata della funzione $f(x) = x(e^{3x} + e^{-2x})$ per $x = 0$ vale:

A 2 B 3 C 4 D non esiste

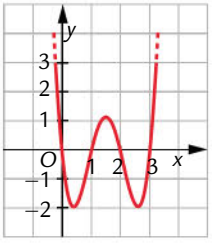
---

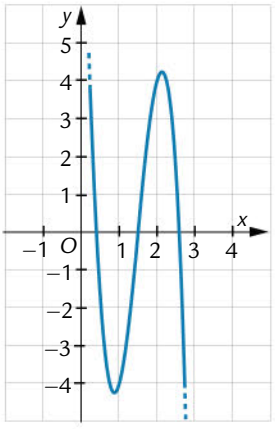
621 Sapendo che la retta PQ tracciata nella figura qui a fianco è tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ nel punto P, quanto vale $f(3) + f'(3)$?

A 2
B 3
C 4
D 5

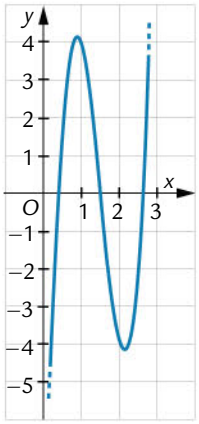


622 Data la funzione rappresentata nel grafico a lato, quale tra i seguenti potrebbe essere il grafico della sua derivata?

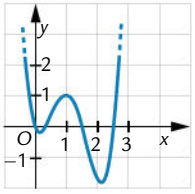




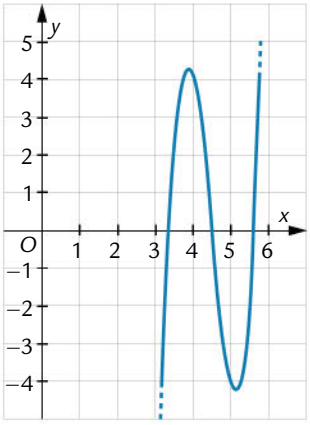
A



B



C



D

623 Qual è l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = x^3$ nel suo punto di ascissa $x = 2$?

A $y = 12x - 16$ B $y = 6x - 12$ C $y = -12x + 16$ D $y = -6x + 12$

624 Data la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 10$, che cosa possiamo dire dei punti in cui la tangente al suo grafico è parallela alla retta $y = x$?

A Sono due punti coincidenti
B Sono due punti distinti del primo quadrante
C Sono due punti distinti e giacciono uno nel primo e uno nel secondo quadrante
D Sono due punti distinti del terzo quadrante

625 Stabilito che la funzione $f(x) = x\,|x-1|$ ha un punto angoloso per $x = 1$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

A Una delle due tangenti nel punto angoloso è verticale

B Le due tangenti nel punto angoloso sono tra loro perpendicolari

C Una delle due tangenti nel punto angoloso è orizzontale

D L'angolo formato dalle due tangenti nel punto angoloso vale esattamente 60°

626 Della funzione $y = f(x)$, derivabile due volte in $\mathbf{R}$ sappiamo che $f(0) = 5$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = -2$. Definita quindi $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, quanto vale $g'(0)$?

A 0 B Non esiste C $-\dfrac{11}{25}$ D 1

Determina la derivata delle seguenti funzioni.

627 $y = x^4 - 5x^3 - 1$ $[y' = 4x^3 - 15x^2]$

628 $y = x^3(x^2 - 1)$ $[y' = 5x^4 - 3x^2]$

629 $y = \dfrac{6}{x} - 1$ $\left[y = -\dfrac{6}{x^2}\right]$

630 $y = \dfrac{x}{x-2}$ $\left[y' = -\dfrac{2}{(x-2)^2}\right]$

631 $y = \dfrac{x^2}{x+2}$ $\left[y' = \dfrac{x^2+4x}{(x+2a)^2}\right]$

632 $y = (2x^2 - 1)(x^3 - 1)$ $[y' = 10x^4 - 3x^2 - 4x]$

633 $y = \dfrac{x+2}{x^2}$ $\left[y' = -\dfrac{x+4}{x^3}\right]$

634 $y = \dfrac{1}{4}x^8 - \dfrac{1}{3}x^6 - 1$ $[y' = 2x^7 - 2x^5]$

635 $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x-1}$ $\left[y' = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{(2x-1)^2}\right]$

636 $y = \dfrac{4}{(5x-1)^2}$ $\left[y' = -\dfrac{40}{(5x-1)^3}\right]$

637 $y = \dfrac{x}{(x+2)^2}$ $\left[y' = \dfrac{2-x}{(x+2)^3}\right]$

638 $y = e^{2x^3-3x}$ $[y' = (6x^2 - 3)e^{2x^3-3x}]$

639 $y = x(e^{2x} - 1)$ $[y' = e^{2x} + 2xe^{2x} - 1]$

640 $y = x - \dfrac{1}{x^2}$ $\left[y' = 1 + \dfrac{2}{x^3}\right]$

641 $y = 3e^{-2x+1}$ $[y' = -6e^{1-2x}]$

642 $y = 3x^2e^{-x}$ $[y' = 3xe^{-x}(2 - x)]$

643 $y = x^5 - x^3 + 1$ $[y' = 5x^4 - 3x^2]$

644 $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\left[y' = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\right]$

645 $y = (x^2 - 1)^3$ $[y' = 6x(x^2 - 1)^2]$

646 $y = (x^2 - 1)e^x$ $[y' = (x^2 + 2x - 1)e^x]$

647 $y = x^2 \sin x$ $[y' = x^2 \cos x + 2x \sin x]$

648 $y = (\ln x - x)^2$ $\left[y' = 2(\ln x - x)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\right]$

649 $y = x \tan^2 x$ $\left[y' = \tan x\left(\tan x + \dfrac{2x}{\cos^2 x}\right)\right]$

650 $y = \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ $\left[y' = \dfrac{2}{x(\ln x + 1)^2}\right]$

651 $y = \dfrac{e^{-x}}{e^{2x} + 1}$ $\left[y' = -\dfrac{3e^{2x} + 1}{e^x(e^{2x} + 1)^2}\right]$

652 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\left[y' = -\dfrac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}\right]$

653 $y = 2x\sqrt{x} + x^2$ $[y' = 2x + 3\sqrt{x}]$

654 $y = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x - 1}$ $\left[y' = \dfrac{e^x(e^{2x} - 2e^x - 1)}{(e^x - 1)^2}\right]$

655 $y = \cos\sqrt{x^2 + 1}$ $\left[y' = -\dfrac{x \sin\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

656 $y = \ln \sin x$ $[y' = \cot x]$

657 $y = e^{\cos^2 x}$ $[y' = -2 \sin x \cos x\, e^{\cos^2 x}]$

658 $y = \ln|x^2 - 1|$ $\left[y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}\right]$

659 $y = x\sqrt{x^2 - 1}$ $\left[y' = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right]$

660 $y = x \ln^2 x$ $[y' = \ln^2 x + 2 \ln x]$

661 $y = \sin^2 x \cos x$ $[y' = \sin x\,(3 \cos^2 x - 1)]$

662 $y = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$ $\left[y' = \dfrac{1 - x - 2 \ln x}{x^3}\right]$

663 $y = \dfrac{\sqrt{e^x} + e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x}}$ $\left[y' = \dfrac{1}{6}e^{\frac{1}{6}x} + \dfrac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x}\right]$

664 $y = \ln|\ln^3 x|$ $\left[y' = \dfrac{3}{x \ln x}\right]$

665 $y = e^{\sqrt{x+e^x}}$ $\left[y' = \frac{(1+e^x)e^{\sqrt{x+e^x}}}{2\sqrt{x+e^x}}\right]$

666 $y = \sqrt{x}\,\sin\sqrt[3]{x}$ $\left[y' = \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[6]{x}}\right]$

667 $y = \frac{xe^{2x}}{x^2+1}$ $\left[y' = \frac{e^{2x}(2x^3 - x^2 + 2x + 1)}{(x^2+1)^2}\right]$

668 $y = \sqrt{x+\sqrt{x+1}}$ $\left[y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\right]$

669 $y = (x-k)^2\,(x^2+k^2)^3$ (k costante) $[y' = 2(x-k)(x^2+k^2)^2(4x^2 - 3kx + k^2)]$

670 $y = \frac{x}{(x^2+a^2)^2}$ (a costante) $\left[y' = \frac{a^2 - 3x^2}{(x^2+a^2)^3}\right]$

671 $y = e^{kx}\sin(kx)$ (k costante) $[y' = ke^{kx}(\sin kx + \cos kx)]$

672 $y = \arctan\frac{x+a}{x-a}$ (a costante) $\left[y' = -\frac{a}{x^2+a^2}\right]$

A mente

Determina le derivate delle seguenti funzioni.

673 $y = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^2+1}$ (π costante)

674 $y = x^3 + 3x^2 + x + 5$

675 $y = e^x + e^{2x-1}$

676 $y = \ln\sqrt{x+1}$

677 $y = \sin^2 3x + 2x^2 + \cos^2 3x - 1$

678 $y = \ln(x+1)^2 - 4x - \ln\frac{1}{x+1} - 3\ln(x+1)$

---

679 Determina la derivata seconda della funzione $f(x) = (x-1)\ln x$. $\left[f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]$

680 Determina la derivata terza della funzione $f(x) = e^{2x}\sin x$. $[f'''(x) = (2\sin x + 11\cos x)e^{2x}]$

681 Data la funzione $f(x) = \sqrt{2x-1}$, calcola $f''(2)$. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{9}\right]$

682 Data la funzione $f(x) = \ln^2 x$, calcola $f''(1)$. $[2]$

683 Data la funzione $f(x) = x^4 - x^3$, calcola $f'''(-1)$. $[-30]$

Trova l'equazione della retta tangente alla curva di cui è data l'equazione nel punto del quale è indicata l'ascissa.

684 $y = \sqrt{x} + \ln x$ $x = 1$ $\left[y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right]$

685 $y = (x^2-1)e^{-2x}$ $x = 0$ $[y = 2x - 1]$

686 $y = \frac{x^2}{x^3-1}$ $x = -1$ $\left[y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right]$

687 $y = \sin^3 x$ $x = \frac{\pi}{6}$ $\left[y = \frac{3\sqrt{3}}{8}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{8}\right]$

Trova l'equazione della retta normale alla curva di cui è data l'equazione nel punto del quale è indicata l'ascissa.

688 $y = x^2 + \ln x$ $x = 1$ $\left[y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right]$

689 $y = \frac{2\sqrt{x}}{x-3}$ $x = 4$ $\left[y = \frac{2}{7}x + \frac{20}{7}\right]$

690 $y = 2\sin x + e^{\cos x}$ $x = \frac{\pi}{2}$ $\left[y = x - \frac{\pi}{2} + 3\right]$

691 $y = x^{2x}$ $x = 1$ $\left[y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right]$

Problemi

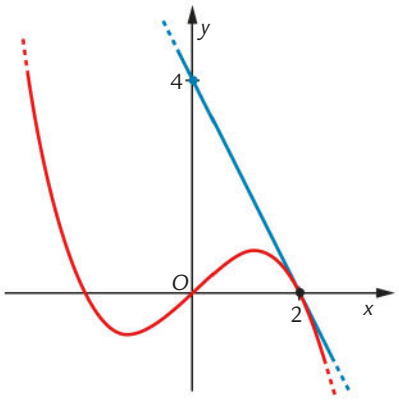
692 Determina i punti appartenenti al grafico della funzione $y = x^3 - 3x^2$ in cui la retta tangente è parallela alla retta di equazione $y = 9x$. $[(-1, -4); (3, 0)]$

693 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = 2 - \ln x$, passante per il suo punto di ascissa 1. $[y = 3 - x]$

694 Determina i punti appartenenti al grafico della funzione $y = 20x - x^5$ in cui la retta tangente è orizzontale. $[(-\sqrt{2}, -16\sqrt{2}); (\sqrt{2}, 16\sqrt{2})]$

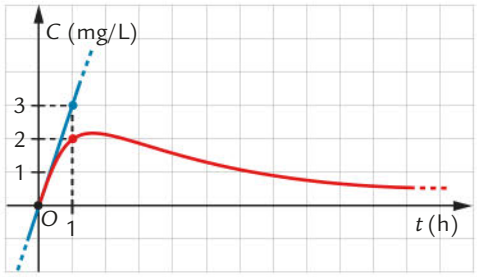
Interpretazione di grafici

695 Nella figura è rappresentato, in rosso, il grafico di una funzione di equazione del tipo $f(x) = ax^3 + bx$ e la retta tangente in uno dei suoi punti d'intersezione con l'asse x. Quali sono i valori di a e di b?



$\left[a = -\frac{1}{4},\ b = 1\right]$

696 La concentrazione di un farmaco nel sangue di un paziente (misurata in mg/L) è espressa da una funzione del tipo $C(t) = \frac{at}{t^2 + b}$, dove t è il tempo trascorso dalla somministrazione, espresso in ore, mentre a e b sono due costanti.



a. Deduci i valori di a e b, dalle informazioni che puoi leggere sul grafico (la retta blu è tangente al grafico della funzione nell'origine).

b. Stabilisci la velocità di variazione della concentrazione del farmaco nel sangue dopo 1 ora.

[**a.** $a = 6,\ b = 2$; **b.** circa 0, 67 (mg/L)/h]

697 **Giustificare e argomentare** Valerio sostiene, a ragione, che se una funzione pari (dispari) $f(x)$ è derivabile in $\mathbf{R}$, allora la sua funzione derivata $f'(x)$ è dispari (pari).

a. Fornisci qualche esempio a sostegno dell'affermazione di Valerio.

b. Successivamente, prova a dimostrarla. (*Suggerimento*: se f è pari, deriva entrambi i membri dell'identità $f(-x) = f(x)$; se f è dispari individua una analoga opportuna identità da derivare.)

698 Data la funzione $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$, verifica che è prolungabile con continuità in $x = 0$ e definisci il prolungamento continuo. Stabilisci se il prolungamento continuo di f è anche derivabile in $x = 0$.

[Il prolungamento continuo si ottiene ponendo $f(0) = 0$; è derivabile]

699 Determina a, b e c in modo che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x < 0 \\ \sin 2x & 0 \le x < \pi \\ bx + c & x \ge \pi \end{cases}$$

sia derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$. Traccia il grafico della funzione in corrispondenza dei valori di a, b e c trovati.

$[a = 2,\ b = 2,\ c = -2\pi]$

700 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x < 0 \\ ax^2 + bx + c & x \ge 0 \end{cases}$, determina a, b e c in modo che la funzione sia derivabile due volte in $\mathbf{R}$. Traccia il grafico della funzione in corrispondenza dei valori di a, b e c trovati. $\left[a = \frac{1}{2},\ b = 1,\ c = 0\right]$

701 Considera la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x^2+b}$.

a. Determina a e b in modo che abbia come asintoto verticale la retta di equazione $x=3$ e che la tangente nell'origine al grafico di f sia parallela alla retta di equazione $2x-9y+9=0$.
b. Traccia il grafico probabile della funzione $y=f(x)$ in corrispondenza dei valori di a e b trovati al punto precedente.
c. Determina le ascisse dei punti in cui la tangente al grafico di f è orizzontale.
d. Traccia il grafico della funzione $y=|f(x)|$ e determina i punti dove non è derivabile.

[**a.** $a=-2$, $b=-9$; **c.** $x=\dfrac{9\pm3\sqrt{5}}{2}$; **d.** $x=0$, $x=2$]

702 Considera la funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+a}}{x+b}$.

a. Determina a e b in modo che la retta di equazione $x=-2$ sia un asintoto della funzione e nel punto $x=2$ la tangente al grafico della funzione sia orizzontale.
b. Traccia il grafico probabile della funzione in corrispondenza dei valori di a e b trovati.
c. Determina l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto P d'intersezione con l'asse y.
d. Scrivi l'equazione della parabola tangente al grafico di f in P, avente come asse di simmetria l'asintoto verticale di f.

[**a.** $a=4$, $b=2$; **b.** asintoti: $x=-2$, $y=-1$ per $x\to-\infty$, $y=1$ per $x\to+\infty$; **c.** $y=1-\dfrac{1}{2}x$; **d.** $y=-\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$]

703 Considera la funzione $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x}+b$.

a. Sapendo che il grafico della funzione passa per il punto $A(1, 2)$ e ammette ivi come tangente la retta passante per A e parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, determina i valori di a e b.

In corrispondenza dei valori di a e b trovati, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.
b. Determina l'ascissa del punto in cui il grafico della funzione ha tangente orizzontale.
c. Determina l'equazione della parabola avente l'asse y come asse di simmetria, tangente nel punto A al grafico di f.
d. Determina i parametri h e k in modo che la funzione $g(x)$ definita come segue sia continua e derivabile in $\mathbf{R}$:

$$g(x)=\begin{cases}hx^3+kx^2 & x<1\\ f(x) & x\geq 1\end{cases}$$

[**a.** $a=1$, $b=2$; **b.** $x=e$; **c.** $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$; **d.** $h=-3$, $k=5$]

Realtà e modelli

704 **Potenza di un motore.** Un motore compie un lavoro W variabile in funzione del tempo secondo la legge $W=12t^2+4t+6$, con il lavoro misurato in joule. Calcola la potenza sviluppata dal motore all'istante $t=6$ s.

[$P=148$ W]

705 **Portata di una conduttura.** Una sezione di una conduttura è attraversata in un certo intervallo di tempo da una massa d'acqua variabile con il tempo secondo la legge $m=3t^3-27t+2$, con la massa misurata in kilogrammi. Calcola la portata all'istante $t=4$ s.

[117 kg/s]

706 **Altezza di un missile.** L'altezza (in metri) di un missile, t secondi dopo il suo lancio, è data dalla funzione:

$$h(t)=-\frac{2}{3}t^3+40t^2+180t+1 \qquad t\geq 0$$

a. Scrivi l'espressione analitica della funzione che esprime la velocità $v(t)$ del missile in funzione di t.
b. Determina la velocità del missile dopo 30 secondi e dopo 1 minuto dal lancio.
c. Quando il missile raggiunge il punto di massima altezza la sua velocità è nulla. Qual è la massima altezza raggiunta dal missile?

[**a.** $v(t)=2t^2+80t+180$; **b.** dopo 30 secondi 780 m/s; dopo 1 minuto 2220 m/s; **c.** circa 28 730 m]



707 **Pressione atmosferica.** La pressione atmosferica diminuisce all'aumentare dell'altitudine, secondo una legge espressa con buona approssimazione dalla funzione:

$$p(h) = 1013e^{-0,13h}$$

dove p è la pressione atmosferica, misurata in millibar (l'unità di misura utilizzata dai meteorologi) e h è l'altezza (misurata in kilometri) sopra la superficie terrestre (al livello del mare). In base a questo modello calcola:

a. la pressione atmosferica sulla cima del monte Cervino, che è alto 4478 m;

b. il tasso di decrescita della pressione atmosferica a un'altezza di 2 km sopra la superficie terrestre;

c. il limite della funzione $p(h)$ per $h \to +\infty$, spiegandone il significato in relazione al problema in esame.

[**a.** Circa 565,96 mb; **b.** circa −101,54 mb/km]

708 **Diffusione di un'epidemia.** La diffusione di un'epidemia è descritta dalla funzione:

$$P(t) = \frac{10000}{1+99e^{-0,25t}}$$

dove $P(t)$ è il numero di persone contagiate e t è il tempo, misurato in mesi, trascorso dall'inizio dell'epidemia ($t = 0$). In base a questo modello calcola:

a. quante persone erano contagiate all'inizio dell'epidemia;

b. a quale velocità si sta diffondendo l'epidemia dopo sei mesi e a quale dopo 1 anno (arrotonda i risultati a un numero intero);

c. il limite della funzione $P(t)$ per $t \to +\infty$, spiegandone il significato in relazione al problema in esame.

[**a.** 100; **b.** 104 casi/mese; 351 casi/mese]

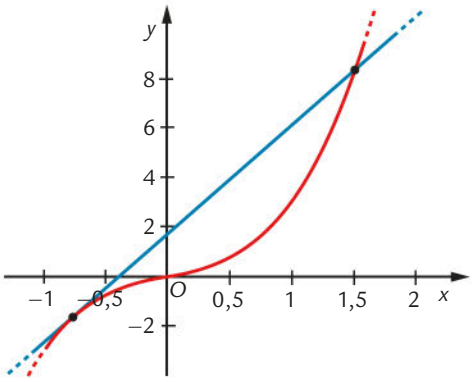
Esercizi *più*

Dalle gare

709 Il grafico della funzione $y = h(x) = x + 2x^3$ è rappresentato in figura, insieme alla retta tangente a esso nel punto di ascissa $x = -\frac{3}{4}$. Questa tangente interseca il grafico della funzione $h(x)$ in un altro punto, di ascissa $x = \frac{m}{n}$, dove m ed n sono numeri naturali coprimi. Quanto vale $2m - n$?

A 1 B 2 C 3 D 4 E 5

(Calculus Contest 2016, Columbus State University)



710 Trova il polinomio $p(x)$ tale che $xp''(x) + p(x) = x^2 + 1$.

(Calculus Contest 2009) [$p(x) = x^2 - 2x + 1$]

711 Supponi che f sia una funzione derivabile in $\mathbf{R}$, e che $g(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Se $f(1) = 3$ e $f'(1) = 4$, a che cosa è uguale $g'(1)$?

(Columbus State Calculus Tournament 2013) [2]

712 Sia $h(x) = f(g(x))$, dove $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 4x$ e $g(3) = 15$. Qual è l'espressione di $h'(x)$?

A $4x\sin(2x^2 - 3)$ B $4x\cos(2x^2 - 3)$ C $4x\sin(2x^2 + 3)$ D $4x\cos(2x^2 + 3)$ E Nessuna delle precedenti

(Mathematics Tournament, University of Georgia 2007)

713 Sia $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$. Calcola $f'(1)$.

(Harvard–MIT Mathematics Tournament 2008) [5050]

714 Supponiamo che la funzione $f(x) - f(2x)$ abbia derivata uguale a 5 in $x = 1$ e derivata uguale a 7 in $x = 2$. Qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?

(Stanford Mathematics Tournament 2004) [19]

Prova di autoverifica

ESERCIZI

La derivata

1 **Vero o falso?**

a. condizione necessaria affinché una funzione sia derivabile in x_0 è che sia continua in x_0 V F

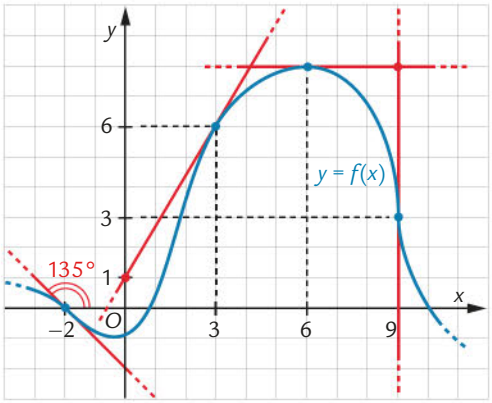
b. la derivata della funzione $f(x) = 3x^2 + 1$ è $f'(x) = 6x + 1$ V F

c. la funzione $f(x) = |x|$ presenta una cuspide per $x = 0$ V F

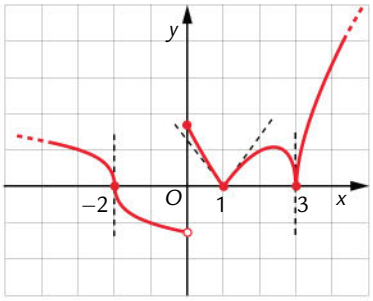
d. la derivata della differenza di due funzioni è uguale alla differenza delle rispettive derivate V F

2 Calcola, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x) = \frac{2}{x}$ nel punto $x_0 = 3$.

3 Nella figura è riportato il grafico di una funzione $y = f(x)$ e sono rappresentate (in rosso) le rette tangenti nei punti $x = -2$, $x = 3$, $x = 6$ e $x = 9$. Determina, se esistono, le derivate della funzione in tali punti.



4 Nella figura è riportato il grafico di una funzione e sono rappresentate (tratteggiate) le tangenti in alcuni punti. Individua gli eventuali punti di singolarità (precisandone il tipo) e di non derivabilità (precisando se si tratta di un punto angoloso, di una cuspide o di un flesso a tangente verticale).



Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

5 $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 1$

6 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x^2}$

7 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2}$

8 $f(x) = 2x^4 \ln x$

9 $f(x) = e^{2x} + e^{1+x^2}$

10 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ nel suo punto di ascissa 2.

11 La pressione atmosferica diminuisce all'aumentare dell'altitudine, secondo una legge espressa con buona approssimazione della funzione $p(h) = 1013e^{-0,13h}$, dove p è la pressione atmosferica, misurata in millibar (l'unità di misura utilizzata dai meteorologi) e h è l'altezza (in kilometri) sopra la superficie terrestre (al livello del mare). In base al modello espresso da questa funzione, di quanto diminuisce, in percentuale, il modulo del tasso di decrescita della pressione atmosferica passando da un'altezza di 1 km sopra la superficie terrestre a un'altezza di 2 km sopra la superficie terrestre?

12 Verifica che per nessuna coppia di numeri reali a e b la funzione $f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 0 \\ a\cos x + b\sin x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ risulta derivabile in $x = 0$.

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Totale
Punteggio massimo	0,25 · 4 = 1	1	1	0,25 · 4 = 1	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	1	1	1	10
Punteggio ottenuto													

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 573

Teoremi sulle funzioni derivabili

1. I teoremi di Fermat, di Rolle e di Lagrange

In questa Unità presenteremo alcuni importanti teoremi sulle funzioni derivabili, che ci consentiranno di trovare metodi *generali* per affrontare problemi quali la ricerca dei massimi e dei minimi, il calcolo dei limiti e lo studio del grafico di una funzione che finora eravamo in grado di risolvere solo in alcuni casi *particolari*. Per raggiungere tali obiettivi, dobbiamo preliminarmente rivedere la terminologia a proposito dei punti di massimo e minimo e dimostrare alcuni teoremi sulle funzioni derivabili.

- Approfondimenti
- Figure animate
- Con GeoGebra
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

Punti di massimo e di minimo relativi e assoluti

Per poter presentare i teoremi sulle funzioni derivabili di cui abbiamo parlato è necessario anzitutto introdurre alcune nuove definizioni.

DEFINIZIONE | Punto di massimo relativo e massimo relativo

Si dice che x_0 è un **punto di massimo relativo** (o **locale**) per una funzione f di dominio D se esiste un intorno I di x_0 tale che:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in I \cap D$$

Il valore M assunto dalla funzione in x_0, cioè $f(x_0)$, è detto **massimo relativo** della funzione (**Fig. 1**).

DEFINIZIONE | Punto di minimo relativo e minimo relativo

Si dice che x_0 è un **punto di minimo relativo** (o **locale**) per una funzione f di dominio D se esiste un intorno I di x_0 tale che:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in I \cap D$$

Il valore m assunto dalla funzione in x_0, cioè $f(x_0)$, è detto **minimo relativo** della funzione (**Fig. 2**).

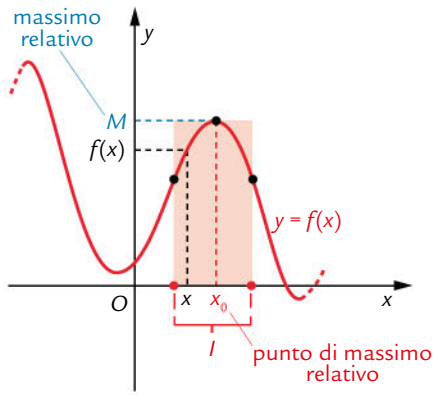


Figura 1 Definizione di *punto di massimo relativo*: per ogni x appartenente all'intervallo I (in questo esempio interamente contenuto in D), si ha $f(x) \leq M$.

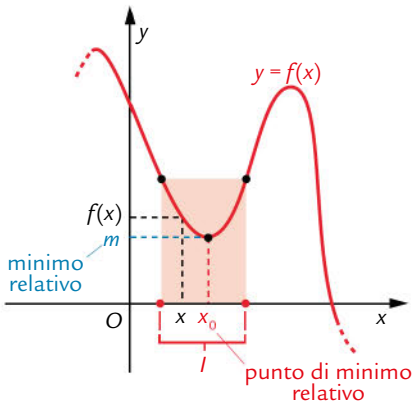


Figura 2 Definizione di *punto di minimo relativo*: per ogni x appartenente all'intervallo I (in questo esempio interamente contenuto in D), si ha $f(x) \geq m$.

I punti di massimo relativo e i punti di minimo relativo di una funzione si dicono **punti di estremo relativo**.

ATTENZIONE!

Osserva le differenze di linguaggio adottate nelle definizioni a lato.

1. Quando si parla di *punto di* minimo o massimo (relativo o assoluto) ci si riferisce a un elemento x_0 appartenente al *dominio* della funzione, quindi a un'*ascissa*.

2. Quando si parla di *minimo o massimo* (relativo o assoluto) ci si riferisce al corrispondente elemento $f(x_0)$ appartenente all'insieme *immagine* della funzione, quindi a un'*ordinata*.

3. Quando ci si riferisce al *grafico* di una funzione, a volte la locuzione «punto di minimo o massimo» **non** viene utilizzata per indicare l'ascissa x_0, ma per indicare il *punto di coordinate* $(x_0, f(x_0))$. Quando ciò accadrà, risulterà chiaro dal contesto.

I concetti di punto di massimo relativo e di punto di minimo *relativo* servono a descrivere il comportamento *locale* di una funzione (cioè il comportamento della funzione «vicino» a un punto x_0). Le nozioni di punto di massimo *assoluto* e di punto di minimo *assoluto*, che abbiamo introdotto nell'**Unità 1** e che richiamiamo qui di seguito, riguardano invece il comportamento *globale* della funzione (cioè il comportamento della funzione in tutto il suo dominio).

DEFINIZIONE | Punto di massimo assoluto e massimo assoluto

Si dice che x_0 è un **punto di massimo assoluto** (o **globale**) per una funzione f di dominio D se risulta:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in D$$

Il valore $f(x_0)$ si dice in tal caso **massimo assoluto** della funzione.

DEFINIZIONE | Punto di minimo assoluto e minimo assoluto

Si dice che x_0 è un **punto di minimo assoluto** (o **globale**) per una funzione f di dominio D se risulta:

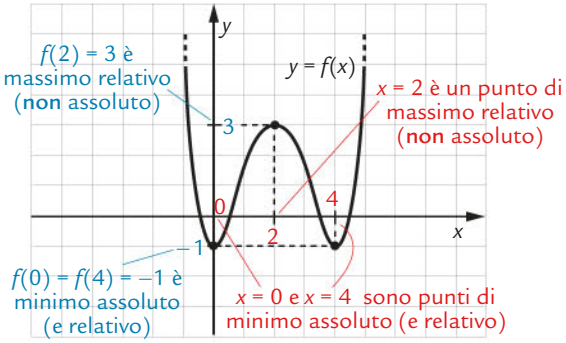
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in D$$

Il valore $f(x_0)$ si dice in tal caso **minimo assoluto** della funzione.

I punti di massimo assoluto e i punti di minimo assoluto di una funzione si dicono **punti di estremo assoluto**.

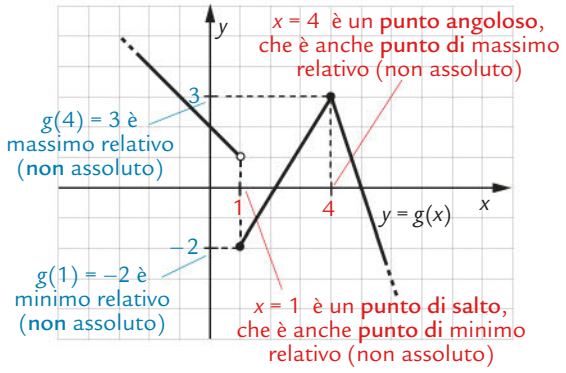
ESEMPI Punti di estremo relativo o assoluto

a. Osserva attentamente, nella seguente figura, il grafico della funzione $y = f(x)$.



Da essa puoi comprendere che un punto di estremo assoluto è anche un punto di estremo relativo, mentre non vale il viceversa.

b. Osserva attentamente, nella seguente figura, il grafico della funzione $y = g(x)$.



Da essa puoi comprendere che un punto di estremo relativo (o assoluto) può cadere in corrispondenza di un punto singolare o di un punto in cui una funzione è continua ma non derivabile.

Il teorema di Fermat

Siamo ora in grado di presentare il primo importante teorema sulle funzioni derivabili, il *teorema di Fermat*: esso costituisce il primo passo per la risoluzione del problema della ricerca dei massimi e dei minimi di una funzione.
Il contenuto del teorema di Fermat si può intuire dall'osservazione della **Fig. 3**: se f è una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ e c è un punto di *estremo relativo* diverso da a e da b in cui la funzione è derivabile, allora la tangente al grafico della funzione nel punto c *deve essere orizzontale*, quindi la *derivata deve annullarsi*.

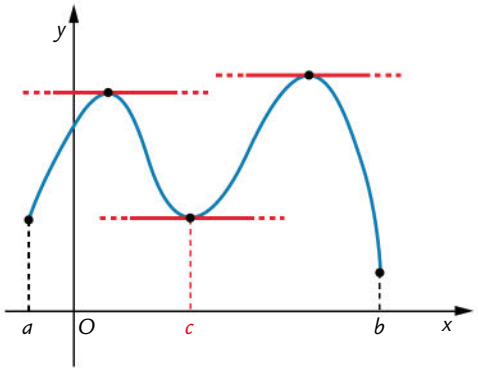


Figura 3 **Nei punti di estremo relativo *interni* all'intervallo $[a, b]$ la retta tangente al grafico della funzione è orizzontale. Osserva che ciò non vale per i punti *agli estremi* dell'intervallo $[a, b]$: per esempio, il punto b è di minimo assoluto (quindi anche relativo) ma la tangente in tale punto non è orizzontale.**

DALLA STORIA

Pierre de Fermat (1601-1665) descrisse il suo teorema per la ricerca dei punti di estremo relativo in una lettera a un collega del 1638, scrivendo: «Il metodo non fallisce mai e può essere esteso a un gran numero di questioni molto belle; per mezzo di esso abbiamo infatti trovato il centro di gravità di figure limitate da linee curve e rette, di solidi e di molte altre cose delle quali tratterò un'altra volta, se avremo tempo».

TEOREMA 1 | Teorema di Fermat

Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ e sia c un punto **interno** ad $[a, b]$, in cui f è **derivabile**. Se f ha in c un punto di **estremo relativo**, allora $f'(c) = 0$.

ATTENZIONE!

Dire che x_0 è *interno* ad $[a, b]$ significa dire che appartiene all'intervallo aperto (a, b).

Data l'importanza dei punti a derivata nulla, viene riservata loro una particolare definizione.

Con GeoGebra
Teorema di Fermat

DEFINIZIONE | Punto stazionario

Se una funzione f è derivabile in c e $f'(c) = 0$, si dice che c è un **punto stazionario** della funzione f.

È bene sottolineare che il teorema di Fermat esprime una condizione *necessaria*, ma **non** *sufficiente* perché un punto c sia di estremo relativo.

CONTROESEMPIO Il teorema di Fermat non è invertibile

La funzione $f(x) = x^3$ ha come derivata $f'(x) = 3x^2$: nel punto $x = 0$ la derivata si annulla, tuttavia il punto $x = 0$ non è di estremo relativo per f, come appare dal grafico in **Fig. 4**.

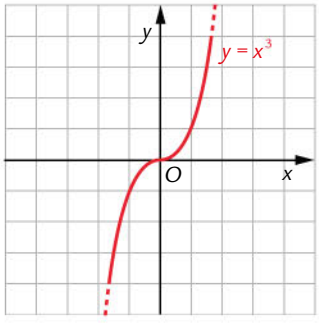


Figura 4

Il teorema di Fermat ci dice quindi «dove» cercare eventuali punti di estremo relativo, ma **non** ci assicura che i punti «candidati» a essere estremi relativi (cioè i punti stazionari) siano *effettivamente* tali, né ci fornisce criteri per stabilirlo. Vedremo criteri che consentiranno di risolvere anche questo problema nel **Paragrafo 2**; per giungere a essi è fondamentale però dimostrare prima altri due teoremi: il teorema di Rolle e il teorema di Lagrange.

Il teorema di Rolle

Facciamo riferimento alla **Fig. 5**: abbiamo tracciato il grafico di una funzione f derivabile in (a, b) che assume lo *stesso valore* agli *estremi* dell'intervallo $[a, b]$. Detti A e B i punti appartenenti al grafico di f, di ascisse rispettivamente a e b, immaginiamo di traslare la retta AB (parallela all'asse x poiché $f(a) = f(b)$) nel verso e nella direzione indicati dalla freccia: giungeremo a una posizione in cui la retta diviene *tangente* al grafico della funzione f; poiché la retta tangente è orizzontale, nel punto di tangenza la derivata deve essere nulla. Questo ragionamento intuitivo suggerisce che, nelle ipotesi considerate, deve sempre esistere un punto interno all'intervallo $[a, b]$ in cui la derivata si annulla; sussiste in effetti il seguente teorema.

Figura animata
Significato geometrico del teorema di Rolle

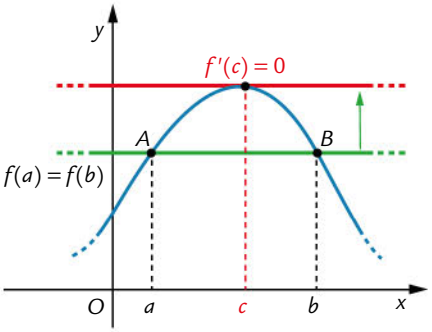


Figura 5 Illustrazione geometrica del teorema di Rolle.

Con GeoGebra
Teorema di Rolle

TEOREMA 2 | Teorema di Rolle

Sia f una funzione che soddisfa le seguenti ipotesi:

a. f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;

b. f è derivabile nell'intervallo aperto (a, b);

c. $f(a) = f(b)$.

Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ per cui $f'(c) = 0$.

DALLA STORIA

Il teorema di Rolle fu pubblicato dal matematico francese Michel Rolle (1652-1719) nel 1691, in un libro di geometria e algebra intitolato *Méthode pour résoudre les égalitéz*. Esso fu formulato da Rolle non nell'ambito del calcolo infinitesimale, ma in quello del problema della ricerca delle soluzioni di un'equazione.

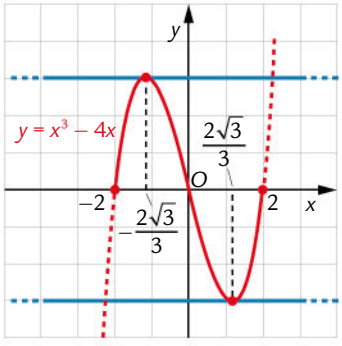
DIMOSTRAZIONE

- La funzione f è supposta continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette minimo e massimo assoluti in $[a, b]$.
- Se almeno uno dei due punti di minimo e massimo assoluti, chiamiamolo c, è *interno* all'intervallo $[a, b]$, ossia $c \in (a, b)$, allora $f'(c) = 0$ per il teorema di Fermat, quindi il teorema è dimostrato.
- Se sia il punto di minimo sia il punto di massimo assoluto della funzione coincidono con gli estremi dell'intervallo $[a, b]$ allora, essendo per ipotesi $f(a) = f(b)$, il minimo e il massimo assoluto della funzione devono coincidere: quindi f deve essere *costante* in $[a, b]$. Poiché la derivata di una funzione costante è nulla, il teorema di Rolle è soddisfatto anche in questo caso, addirittura per ogni $c \in (a, b)$.

ESEMPI Applicazioni del teorema di Rolle

Stabiliamo se è possibile applicare il teorema di Rolle alle seguenti funzioni nell'intervallo indicato e, in caso affermativo, troviamo il punto (o i punti) stazionari.

a. $y = x^3 - 4x$ in $[-2, 2]$ b. $y = |x - 1|$ in $[0, 2]$

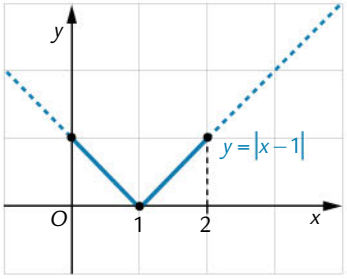


a. La funzione $y = x^3 - 4x$ è derivabile nell'intervallo $[-2, 2]$ (quindi in particolare è anche continua); inoltre, $f(-2) = f(2) = 0$. Il teorema di Rolle è dunque applicabile, e ci assicura allora l'esistenza di almeno un punto stazionario $c \in (-2, 2)$.
Per determinare i punti stazionari calcoliamo la derivata prima: $y' = 3x^2 - 4$.

Risulta: $f'(c) = 0 \iff 3c^2 - 4 = 0 \iff c = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \simeq \pm 1{,}15$

Le due soluzioni sono entrambe accettabili perché appartengono all'intervallo $(-2, 2)$. Il punto che soddisfa la tesi del teorema di Rolle in questo caso **non** è unico.

b. La funzione $y = |x - 1|$ è continua nell'intervallo indicato, $[0, 2]$, e risulta $f(0) = f(2) = 1$; tuttavia la funzione **non** è derivabile nel punto $x = 1$ dove presenta un *punto angoloso* (verificalo). Non essendo soddisfatta la seconda ipotesi del teorema di Rolle, il teorema non è applicabile, quindi **non** è assicurata l'esistenza di un punto stazionario nell'intervallo $[0, 2]$ (in effetti, come appare chiaro dalla figura, il punto stazionario non esiste).



Il teorema di Lagrange

Consideriamo ora una situazione simile a quella che abbiamo considerato per introdurre il teorema di Rolle, *lasciando cadere* però l'ipotesi che la funzione assuma lo stesso valore agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ (**Fig. 6**). Se trasliamo la retta AB nella direzione e nel verso indicati dalla freccia, giungiamo ancora a una posizione in cui la retta diviene tangente al grafico di f. Questa tangente risulta parallela ad AB, quindi nel punto di tangenza, di ascissa c, la derivata deve essere uguale al coefficiente angolare della retta AB; pertanto deve essere:

$$\underbrace{f'(c)}_{\text{coefficiente angolare della tangente}} = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{coefficiente angolare della retta } AB}$$

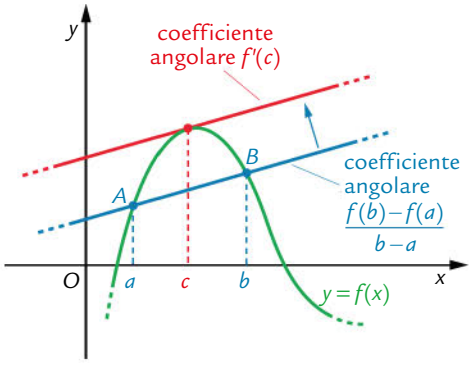


Figura 6 **Significato geometrico del teorema di Lagrange: nell'intervallo $[a, b]$ esiste almeno una retta tangente al grafico di f parallela alla retta AB.**

Figura animata
Significato geometrico del teorema di Lagrange

Questo ragionamento intuitivo suggerisce che, nelle ipotesi considerate, deve sempre esistere un punto *interno* all'intervallo $[a, b]$ in cui la derivata è uguale al coefficiente angolare della retta AB; sussiste in effetti il seguente teorema.

TEOREMA 3 | Teorema di Lagrange

Sia f una funzione che soddisfa le seguenti condizioni:

a. f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;

b. f è derivabile nell'intervallo aperto (a, b).

Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Con GeoGebra
Teorema di Lagrange

DALLA STORIA

Il teorema di Lagrange è dovuto al matematico italiano di origini francesi **Giuseppe Lagrange** (1736-1813). Lagrange fu professore di matematica alle Regie Scuole Matematiche d'Artiglieria di Torino a soli 19 anni. Successivamente prese il posto di Eulero a Berlino per poi chiudere la carriera accademica a Parigi.

DIMOSTRAZIONE

- L'idea alla base della dimostrazione è di applicare il teorema di Rolle a un'opportuna **funzione ausiliaria** g, definita come la *differenza* tra la funzione f e la funzione lineare che ha come grafico la retta passante per i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ (**Fig. 6**); quest'ultima ha equazione:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

quindi: $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ [1]

- La funzione g soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle; infatti:
  - è continua nell'intervallo $[a, b]$ in quanto differenza di funzioni continue;
  - è derivabile in (a, b) in quanto differenza di funzioni derivabili;
  - assume lo stesso valore (uguale a 0) agli estremi dell'intervallo $[a, b]$, come si può verificare direttamente calcolando $g(a)$ e $g(b)$ mediante la [1].
- In base al teorema di Rolle, esiste allora almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$; poiché:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

I punti di cui il **Teorema 3** garantisce l'esistenza vengono chiamati **punti di Lagrange**.

ESEMPI Applicazione del teorema di Lagrange

Stabiliamo se è possibile applicare il teorema di Lagrange alle seguenti funzioni nell'intervallo indicato e, in caso affermativo, troviamo il punto (o i punti) di cui il teorema garantisce l'esistenza.

a. $f(x) = x^3 - x^2$ in $[0, 2]$

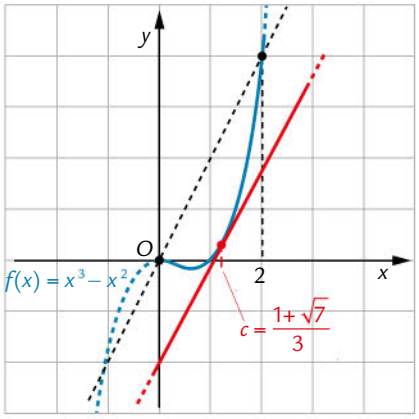
b. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ in $[-1, 1]$

a. La funzione f è polinomiale, quindi continua e derivabile in $\mathbf{R}$. In particolare, sarà certamente continua in $[0, 2]$ e derivabile in $(0, 2)$, pertanto è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione nell'intervallo $[0, 2]$.
Esisterà perciò almeno un punto $c \in (0, 2)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

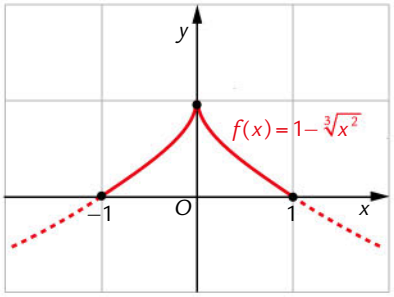
Poiché $f'(x) = 3x^2 - 2x$, $f(2) = 4$ e $f(0) = 0$, l'equazione precedente diviene la seguente, che risolviamo:

$$\underbrace{3c^2 - 2c}_{f'(c)} = \frac{4 - 0}{2 - 0} \Rightarrow 3c^2 - 2c - 2 = 0 \Rightarrow c = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \simeq -0{,}55 \vee c = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \simeq 1{,}22$$



La soluzione negativa è da scartare, poiché non appartiene all'intervallo $(0, 2)$: esiste un unico punto di Lagrange in $(0, 2)$, il punto $c = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$.

b. La funzione $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ **non** è derivabile nel punto $x = 0$ (dove presenta una cuspide), quindi **non** è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 1]$. Non è garantita l'esistenza di un punto di Lagrange. In questo esempio, tracciando il grafico della funzione e tenendo conto che un punto di Lagrange dovrebbe essere un punto stazionario (poiché $f(-1) = f(1)$), si intuisce che in effetti **non** esistono punti di Lagrange. Ciò si può dimostrare calcolando la derivata e facendo vedere che l'equazione $f'(x) = 0$ non ha soluzioni reali.



MATEMATICA E FISICA

Il teorema di Lagrange ha anche un'interpretazione fisica: se $f(t)$ rappresenta la legge oraria di una particella che si muove di moto rettilineo (cioè lo spazio percorso su una retta all'istante t), il rapporto:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

rappresenta la velocità media nell'intervallo di tempo $[a, b]$ e il teorema afferma che ci sono istanti in cui la particella ha una velocità istantanea uguale alla velocità media. Per questo motivo il teorema di Lagrange viene anche chiamato teorema del valor medio.

L'importanza fondamentale del teorema di Lagrange è legata al fatto che esso ci consente di trarre informazioni su una *funzione* a partire da proprietà della sua *derivata*. I prossimi due teoremi, corollari del teorema di Lagrange, ne sono un esempio.

TEOREMA 4 | Primo corollario del teorema di Lagrange

Sia f una funzione **derivabile** in un **intervallo** I e tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$; allora f è costante in I.

DIMOSTRAZIONE

Siano x_1, x_2 due punti qualsiasi appartenenti all'intervallo I, con $x_1 < x_2$. Poiché f è derivabile in I, allora deve essere derivabile anche in $[x_1, x_2]$, quindi possiamo applicare il teorema di Lagrange alla funzione f in $[x_1, x_2]$. Ne segue che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Poiché per ipotesi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, deve essere $f'(c) = 0$, quindi:

$$f(x_2) = f(x_1)$$

Data l'arbitrarietà di x_1, x_2 possiamo concludere che la funzione f assume lo stesso valore per ogni coppia di punti appartenenti all'intervallo I, quindi è costante in I.

ESEMPIO Applicazione del Teorema 4

La funzione $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ è derivabile in $\mathbf{R} - \{0\}$ con derivata nulla; infatti:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \text{per ogni } x \neq 0$$

Non possiamo affermare allora che f è una funzione costante in $\mathbf{R} - \{0\}$, perché $\mathbf{R} - \{0\}$ **non** è un intervallo quindi il **Teorema 4** non è applicabile; possiamo invece dire che f è costante su ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, in cui il teorema è applicabile. Per sapere quanto valgono le costanti è sufficiente calcolare il valore di f in due punti opportuni. Per esempio:

$$f(-1) = 2\arctan(-1) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad f(1) = 2\arctan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Pertanto possiamo scrivere più semplicemente: $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

TEOREMA 5 | Secondo corollario del teorema di Lagrange

Se f e g sono due funzioni **derivabili** in un **intervallo** I e tali che $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$, allora esse differiscono per una costante $c \in \mathbf{R}$, cioè:

$$f(x) = g(x) + c \text{ per ogni } x \in I$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione $F(x) = f(x) - g(x)$. Abbiamo, per l'ipotesi, che:

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

per ogni $x \in I$. Allora, per il **Teorema 4**, la funzione F è costante in I, vale a dire $f(x) - g(x) = c$ per un opportuno $c \in \mathbf{R}$, ossia:

$$f(x) = g(x) + c$$

Esercizi p. 358

2. Funzioni crescenti e decrescenti e criteri per l'analisi dei punti stazionari

Criterio di monotonia per le funzioni derivabili

In questo paragrafo affrontiamo il seguente problema.

Con GeoGebra
Criterio di monotonia per le funzioni derivabili

◆ **PROBLEMA**
Quali legami sussistono tra le caratteristiche del grafico di una funzione e le proprietà della sua derivata prima?

Ricordando il significato geometrico di derivata di una funzione in un punto, si possono intuire i legami espressi nelle didascalie delle **Figg. 7** e **8**.

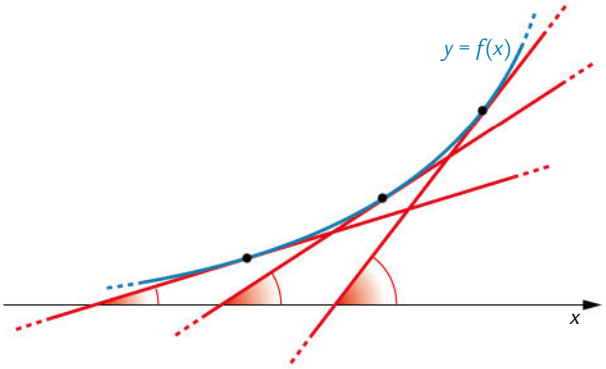


Figura 7 Se una funzione è strettamente crescente in un dato intervallo, i coefficienti angolari delle rette tangenti sono positivi (o eventualmente nulli), quindi ci aspettiamo che la **derivata** della funzione in quell'intervallo risulti **positiva** (o nulla). Viceversa, è possibile dimostrare che dalla positività della derivata prima in un intervallo si può dedurre che la funzione in quell'intervallo è strettamente crescente.

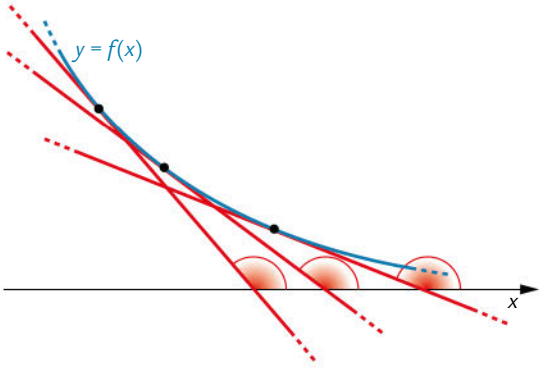


Figura 8 Se una funzione è strettamente decrescente in un dato intervallo, i coefficienti angolari delle rette tangenti sono negativi (o eventualmente nulli), quindi ci aspettiamo che la **derivata** della funzione in quell'intervallo risulti **negativa** (o nulla). Viceversa, è possibile dimostrare che dalla negatività della derivata prima in un intervallo si può dedurre che la funzione in quell'intervallo è strettamente decrescente.

Il seguente teorema precisa il legame che operativamente ci interessa di più, ossia il poter dedurre gli intervalli di monotonia dal segno della derivata prima.

ATTENZIONE!

1. Il Teorema 6 non è invertibile: per esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente nell'intervallo $(-1, 1)$ ma non è vero che $f'(x) > 0$ in questo intervallo, poiché $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$.

2. È essenziale l'ipotesi che l'insieme I sia un *intervallo*: per esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ ha derivata $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, ma non è strettamente decrescente in $\mathbf{R} - \{0\}$ (per esempio $-1 < 1$ ma non è vero che $f(-1) > f(1)$). La funzione f è invece strettamente decrescente nei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ considerati separatamente.

TEOREMA 6 | Criterio di monotonia per le funzioni derivabili

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I:

a. se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente **crescente** in I;

b. se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente **decrescente** in I.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la a (essendo la dimostrazione di b del tutto analoga).

- Siano x_1 e x_2 due punti qualsiasi appartenenti all'intervallo I, con $x_1 < x_2$. In base alla definizione di funzione strettamente crescente, dimostrare la tesi equivale a dimostrare che $f(x_1) < f(x_2)$.
- Poiché f è per ipotesi derivabile in I, sarà derivabile anche nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Possiamo allora applicare il teorema di Lagrange alla funzione f in questo intervallo e affermare che esiste un punto $c \in (x_1, x_2)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- In base alle ipotesi, $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, quindi in particolare $f'(c) > 0$; inoltre $x_2 - x_1 > 0$ poiché abbiamo supposto $x_1 < x_2$; ne segue che deve essere anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ossia $f(x_1) < f(x_2)$: f è dunque strettamente crescente.

Il **Teorema 6** è lo strumento comunemente utilizzato per individuare gli **intervalli di monotonia** di una funzione derivabile, cioè gli intervalli in cui una funzione è (strettamente) crescente o decrescente: basta calcolare la derivata prima e studiarne il segno, risolvendo la disequazione $f'(x) > 0$.

ESEMPIO Ricerca degli intervalli di monotonia di una funzione

Data la funzione $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$, determiniamo gli intervalli aperti in cui è strettamente crescente e quelli in cui è strettamente decrescente.

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = x^2 - x - 2$$

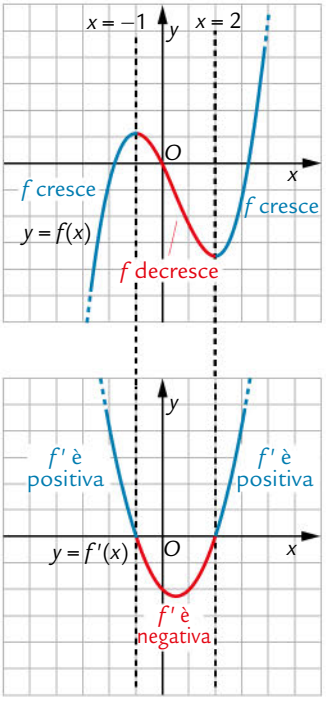
Studiamo il segno della derivata:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 2$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

Per il **Teorema 6** deduciamo così che la funzione f è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(2, +\infty)$, mentre è strettamente decrescente nell'intervallo $(-1, 2)$.

Osserva i legami tra il grafico di f' e il grafico di f: il grafico di f' è positivo, ossia al di sopra dell'asse x, negli intervalli in cui f è strettamente crescente; è invece negativo, ossia al di sotto dell'asse x, negli intervalli in cui f è strettamente decrescente.



Analisi dei punti stazionari in base alla derivata prima

Grazie al **Teorema 6** possiamo stabilire un importante criterio per la ricerca dei punti di estremo relativo di una funzione.

TEOREMA 7 | Criterio per l'analisi dei punti stazionari mediante la derivata prima

Sia f una funzione continua in un intorno I di x_0 e derivabile in I tranne al più in x_0:

a. se esistono un intorno sinistro di x_0 in cui $f' > 0$ e un intorno destro in cui $f' < 0$, allora x_0 è un punto di **massimo relativo** per f;

b. se esistono un intorno sinistro di x_0 in cui $f' < 0$ e un intorno destro in cui $f' > 0$, allora x_0 è un punto di **minimo relativo** per f.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo l'implicazione a, essendo la b del tutto analoga.

- Poiché $f' > 0$ in un intorno sinistro di x_0, chiamiamolo $I^- = (x_0 - \delta, x_0)$, per il **Teorema 6** f è strettamente crescente in I^-. Per il teorema di esistenza del limite per le funzioni monotone (**Teorema 4** dell'**Unità 2**) e la continuità di f in x_0 abbiamo allora che:

$$\sup_{x \in I^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Dunque:

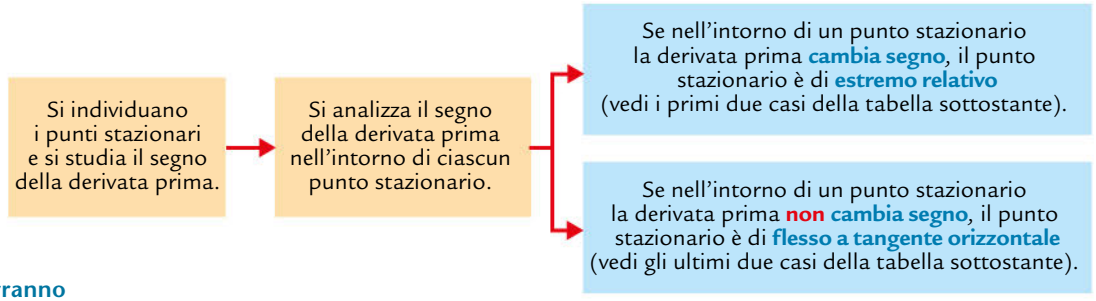
$$f(x) < f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in I^-$$

- Poiché $f' < 0$ in un intorno destro di x_0, chiamiamolo $I^+ = (x_0, x_0 + \delta')$, f è strettamente decrescente in I^+. Analogamente al caso precedente, dal teorema del limite delle funzioni monotone e dalla continuità di f in x_0 segue allora:

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in I^+$$

- Per ogni x appartenente all'intorno completo di x_0 dato da $I^- \cup \{x_0\} \cup I^+$, risulta quindi $f(x) \leq f(x_0)$, ossia x_0 è un punto di massimo relativo.

In pratica il **Teorema 7** si utilizza come test per studiare la *natura dei punti stazionari* di una funzione secondo il seguente schema.



RIMANDO

Le nozioni di punto di flesso e di flesso verranno definite rigorosamente nel Paragrafo 4.

Schema del segno della derivata prima e della monotonia di f in un intorno di un punto stazionario x_0	Natura del punto	Grafico della funzione in un intorno del punto
x_0 x f' $-$ 0 $+$ f min	Punto di minimo relativo per il Teorema 7 (punto **a**)	x_0
x_0 x f' $+$ 0 $-$ f max	Punto di massimo relativo per il Teorema 7 (punto **b**)	x_0
x_0 x f' $+$ 0 $+$ f flesso	Punto di flesso a tangente orizzontale, con funzione crescente nell'intorno del punto di flesso	x_0 x
x_0 x f' $-$ 0 $-$ f flesso	Punto di flesso a tangente orizzontale, con funzione decrescente nell'intorno del punto di flesso	x_0 x

ESEMPIO Ricerca di massimi e minimi relativi, funzione derivabile

Determiniamo gli eventuali punti di estremo relativo della funzione:

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3$$

- **Analisi preliminare**

La funzione data è derivabile nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, quindi per il teorema di Fermat i suoi eventuali punti di estremo relativo sono punti stazionari. Calcoliamo la derivata prima e determiniamo i punti in cui si annulla, poi studiamo la natura di tali punti grazie ai criteri riassunti nella tabella precedente.

- **Calcolo della derivata prima**

$$y' = x^4 - 2x^2$$

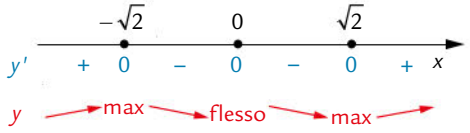
- **Ricerca dei punti stazionari**

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x^2 - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$$

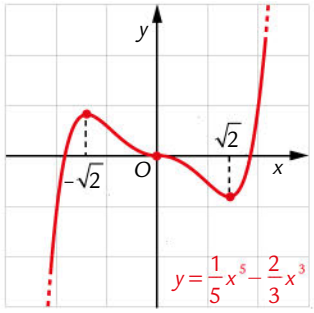
- **Studio del segno della derivata prima e analisi dei punti stazionari**

$$y' > 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 2x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x^2 - 2) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$$

Riassumiamo nel seguente schema il segno della derivata e le deduzioni che si possono trarre sulla natura dei punti $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$.



La conclusione è che la funzione presenta due punti di estremo relativo: il punto $x = -\sqrt{2}$, che è di massimo relativo, e il punto $x = \sqrt{2}$, che è di minimo relativo; il punto $x = 0$ invece non è di estremo relativo, ma un flesso a tangente orizzontale.
Il grafico probabile della funzione, arricchito con le informazioni appena trovate, è quello mostrato nella figura a lato.



Anche se il più frequente utilizzo del **Teorema 7** riguarda lo studio dei punti stazionari, è bene sottolineare che esso richiede soltanto che nel punto x_0 la funzione sia *continua*, quindi permette di individuare punti di massimo o minimo relativo anche tra i punti in cui la funzione **non** è *derivabile*.

ESEMPIO Ricerca di massimi e minimi relativi, funzione non derivabile

Ricerchiamo gli eventuali punti di estremo relativo della funzione $y = \dfrac{4|x|}{1+x^2}$.

- **Analisi preliminare**

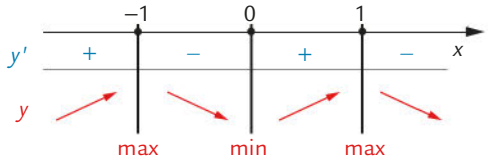
La funzione data è pari, continua in **R** e certamente derivabile per ogni $x \neq 0$. Gli eventuali punti di estremo relativo saranno punti stazionari oppure gli eventuali punti di non derivabilità; per individuarli calcoliamo la derivata prima e la studiamo.

- **Calcolo e studio della derivata prima**

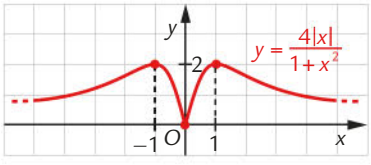
Risulta:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} & x > 0 \\ \dfrac{4(x^2-1)}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Inoltre $\lim\limits_{x\to 0^-} y' = -4$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} y' = 4$ quindi, per il teorema del limite della derivata, la funzione **non** è derivabile in $x = 0$, dove presenta un *punto angoloso*.
Riassumiamo nello schema lo studio del segno della derivata e i corrispondenti intervalli di monotonia della funzione.



I punti $x = \pm 1$ sono punti di massimo relativo; inoltre, anche se $x = 0$ è un punto dove la funzione **non** è derivabile, possiamo dedurre, in base al **Teorema 7**, che si tratta di un punto di *minimo relativo*. Dal grafico probabile della funzione appare chiaro che i tre punti di estremo relativo sono anche punti di estremo *assoluto*. L'immagine della funzione è l'intervallo [0, 2].



Il **Teorema 7** non è più valido se cade l'ipotesi di continuità in x_0 (**Figg. 9 e 10**).

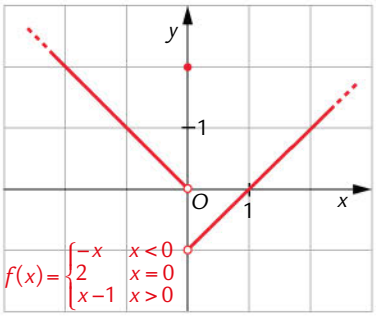


Figura 9 La funzione ha derivata negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$; tuttavia $x = 0$ non è un punto di minimo relativo, bensì di massimo relativo.

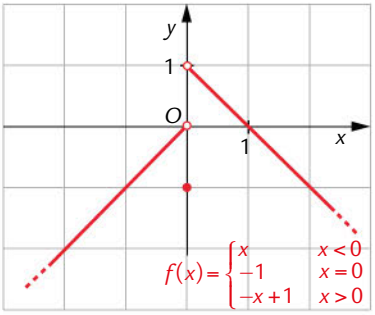


Figura 10 La funzione ha derivata positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$: tuttavia $x = 0$ non è un punto di massimo relativo bensì di minimo relativo.

Analisi dei punti stazionari in base alla derivata seconda

A volte lo studio del segno della derivata prima nell'intorno di un punto può risultare laborioso; in questi casi per l'analisi della natura di un punto stazionario può essere utile il criterio fornito dal seguente teorema, basato sul segno assunto dalla derivata seconda della funzione in tale punto, che ci limitiamo a enunciare.

TEOREMA 8 | Test dei punti stazionari mediante l'utilizzo della derivata seconda

Sia x_0 un punto stazionario di una funzione f e supponiamo che f sia derivabile due volte in x_0:

a. se $f''(x_0) > 0$, allora il punto x_0 è di minimo relativo per f;

b. se $f''(x_0) < 0$, allora il punto x_0 è di massimo relativo per f.

ATTENZIONE!

Il criterio espresso dal Teorema 8 non permette di concludere nulla se $f''(x_0) = 0$, come puoi renderti conto esaminando le funzioni $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$ e $f(x) = x^5$: in tutti e tre i casi risulta $f''(0) = 0$, ma la prima funzione presenta in $x = 0$ un minimo, la seconda un massimo e la terza un flesso a tangente orizzontale.

ESEMPIO Studio dei punti stazionari mediante l'utilizzo della derivata seconda

Data la funzione $f(x) = -x^3 + 6x^2$, determiniamo i suoi punti di estremo relativo.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x$$

e individuiamo i punti in cui la derivata si annulla:

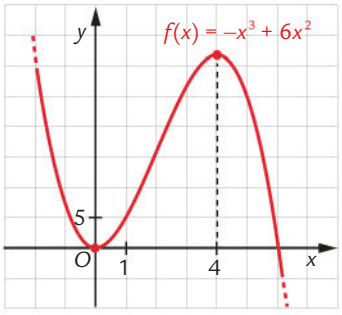
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(-x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Per stabilire la natura dei due punti stazionari trovati, utilizziamo il metodo della derivata seconda. Essendo $f''(x) = -6x + 12$, risulta:

$f''(0) = 12 > 0$ quindi $x = 0$ è un punto di minimo relativo

$f''(4) = -12 < 0$ quindi $x = 4$ è un punto di massimo relativo

La figura conferma i risultati ottenuti.



Esercizi p. 364

3. Problemi di ottimizzazione

Massimi e minimi assoluti

Nel paragrafo precedente ci siamo occupati del problema della ricerca dei punti di estremo *relativo* di una funzione; supponiamo invece ora di essere interessati alla ricerca degli eventuali punti di massimo o minimo *assoluti* di una funzione **continua** in un intervallo I. Come occorre procedere? Distinguiamo due casi.

1. L'intervallo I è chiuso e limitato

In questo caso possiamo anzitutto affermare, in base al teorema di Weierstrass, che la funzione ammette certamente massimo e minimo assoluti in I. In base al teorema di Fermat, se un punto di estremo assoluto è *interno* all'intervallo I ed è un punto in cui la funzione è *derivabile*, allora necessariamente è un punto stazionario; gli unici eventuali punti di estremo assoluto che sfuggono al teorema di Fermat (ovvero che non sono stazionari) possono quindi trovarsi agli *estremi* dell'intervallo I oppure tra i punti in cui la funzione **non** è derivabile.
Per determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato si potrà allora procedere così:

1. si individuano gli eventuali punti stazionari e di non derivabilità della funzione (detti **punti critici**) in I;
2. si confrontano i valori assunti dalla funzione nei punti critici e quelli assunti dalla funzione agli estremi dell'intervallo I e si deduce direttamente quale corrisponde al massimo assoluto della funzione e quale al minimo.

ESEMPIO Ricerca del massimo e del minimo assoluti di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato

Determiniamo il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$ nell'intervallo $I = [-1, 3]$.

- **Ricerca dei punti critici**

La derivata della funzione è data da $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x)^2}}$.

Essa si annulla per $x = \pm 1$, dove presenta dei *punti stazionari*, e non è definita per $x^3 - 3x = 0$, cioè per $x = 0$ e per $x = \pm\sqrt{3}$, dove **non** è derivabile in base al teorema del limite della derivata poiché:

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{3}} f'(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$$

Limitatamente all'intervallo $[-1, 3]$, la funzione presenta dunque i seguenti punti critici:

$x = \pm 1$ — **Punti stazionari**

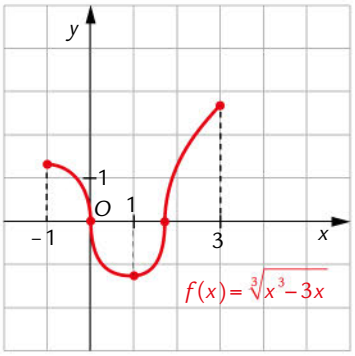
$x = 0,\ x = \sqrt{3}$ — **Punti di non derivabilità; $x = -\sqrt{3}$ non è da considerare perché non appartiene all'intervallo $[-1, 3]$**

- **Calcolo dei valori assunti agli estremi di I e nei punti critici**

Costruiamo la seguente tabella.

x	-1 estremo dell'intervallo e punto stazionario	0 punto di non derivabilità	1 punto stazionario	$\sqrt{3}$ punto di non derivabilità	3 estremo dell'intervallo
$f(x)$	$\sqrt[3]{2}$	0	$-\sqrt[3]{2}$	0	$\sqrt[3]{18}$

Da essa vediamo chiaramente che $x = 1$ è il punto di *minimo* assoluto, mentre $x = 3$ è il punto di *massimo* assoluto; il minimo assoluto vale $-\sqrt[3]{2}$ e il massimo assoluto vale $\sqrt[3]{18}$.
Le informazioni raccolte consentono di tracciare il grafico probabile della funzione nell'intervallo $[-1, 3]$.



2. L'intervallo I non è chiuso o non è limitato

Se l'intervallo I non è chiuso o non è limitato, non è detto che esistano massimo e minimo assoluti della funzione in I. Per stabilirlo, oltre allo studio degli eventuali punti critici occorre calcolare i limiti della funzione agli estremi dell'intervallo I (considerando sia gli estremi in cui la funzione è definita, sia gli eventuali estremi infiniti in cui la funzione è definita).

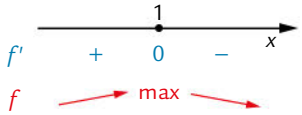
ESEMPIO Ricerca del massimo e del minimo assoluti di una funzione continua in un intervallo non chiuso o non limitato

Determiniamo, se esistono, il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x) = (x + 1)e^{-\frac{1}{2}x}$ nell'intervallo $I = [0, +\infty)$.

- **Ricerca dei punti critici**

In I la funzione è sempre derivabile con derivata data da:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x)e^{-\frac{1}{2}x}$$



La derivata si annulla per $x = 1$, che risulta pertanto l'unico punto stazionario, con $f(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} \simeq 1,2$. Dallo studio del segno è facile dedurre che $x = 1$ è un punto di massimo relativo.

- **Comportamento della funzione agli estremi dell'intervallo $I = [0, +\infty)$**

Abbiamo:

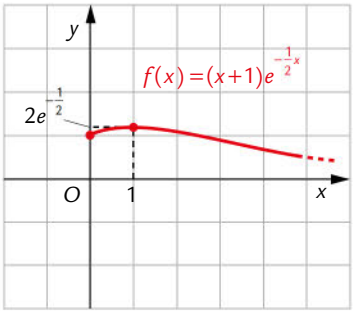
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$$ La funzione è continua da destra in 0

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{x + 1}{e^{\frac{1}{2}x}} = 0$$ Ricorda le gerarchie sugli infiniti

Riassumiamo nella seguente tabella le informazioni dedotte.

x	0 estremo dell'intervallo	1 punto di massimo	$\to +\infty$ estremo dell'intervallo
$f(x)$	1	$2e^{-\frac{1}{2}} \simeq 1,2$	$\to 0$

Ne segue che la funzione ha *massimo assoluto* uguale a $2e^{-\frac{1}{2}}$; **non** ammette invece *minimo assoluto*, ma si può dire che l'*estremo inferiore* è 0.
Le informazioni raccolte consentono di tracciare il grafico probabile della funzione nell'intervallo $[0, +\infty)$.



Problemi di massimo e di minimo

La ricerca del massimo e del minimo assoluti di una funzione continua in un intervallo trova applicazione nei cosiddetti *problemi di ottimizzazione* (o *di ottimo*), cioè in quei problemi in cui, data una grandezza espressa in funzione di una variabile indipendente, si chiede di determinare per quali valori di questa variabile la grandezza assume valore minimo o massimo.
Nella risoluzione di questo tipo di problemi seguiremo generalmente questi passi:

1. scegliamo la variabile tramite cui esprimere la grandezza di cui si cerca il minimo o il massimo;
2. individuiamo il dominio della variabile, cioè l'intervallo dove la variabile può assumere valori, in relazione al problema;
3. determiniamo la funzione che costituisce il modello del problema;
4. individuiamo il minimo o il massimo assoluti della funzione nell'intervallo individuato al secondo passo;
5. rispondiamo alla domanda posta dal problema.

PROBLEMA SVOLTO 1 ◆ Geometria analitica

Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$, determinare il suo punto P più vicino al punto $A(4, 1)$.

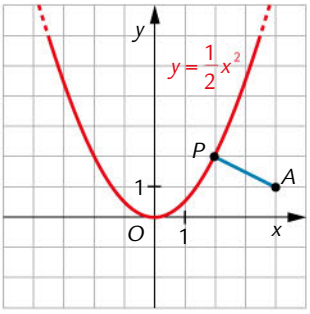


FIGURA E SCELTA DELLA VARIABILE

Consideriamo come variabile l'ascissa x del punto P. Sarà dunque $P\left(x, \frac{1}{2}x^2\right)$.

DOMINIO DELLA VARIABILE

Il punto P può variare a priori su tutta la parabola (anche se l'intuizione ci suggerisce che la minima distanza da A verrà raggiunta in corrispondenza di un punto P abbastanza «vicino» ad A). Il dominio di x è perciò **R**.

DETERMINIAMO LA FUNZIONE DA RENDERE MINIMA

Si ottiene subito che:

$$\overline{AP} = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)^2}$$

Poiché la funzione radice quadrata è strettamente crescente, il minimo di $\overline{AP}$ corrisponde al minimo del radicando. Pertanto, invece di cercare il minimo della funzione $y = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)^2}$, cerchiamo il minimo della funzione:

$$y = (x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)^2$$

con cui è più facile lavorare.

RICERCA DEL MINIMO ASSOLUTO DELLA FUNZIONE

Dobbiamo cercare il minimo assoluto della funzione in **R**, cioè nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Poiché

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

il minimo verrà raggiunto in un punto stazionario. La derivata prima della funzione f è:

$$y' = 2(x-4) + 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)x = x^3 - 8$$

L'unico punto stazionario è $x = 2$, che è quindi il punto di minimo assoluto.

RISPOSTA

Il punto della parabola data più vicino ad $A(4, 1)$ è il punto $P(2, 2)$.

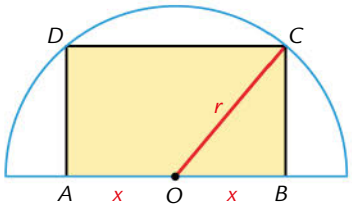
PROBLEMA SVOLTO 2 ◆ Geometria nel piano

Determinare il rettangolo di area massima inscritto in una semicirconferenza di raggio r.

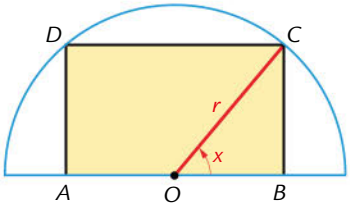
Risolviamo il problema in parallelo con due diverse scelte della variabile tramite cui esprimere l'area del rettangolo.

FIGURA E SCELTA DELLA VARIABILE

Poniamo $\overline{AB} = 2x$.

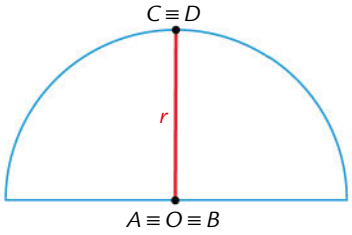


Poniamo $B\hat{O}C = x$.

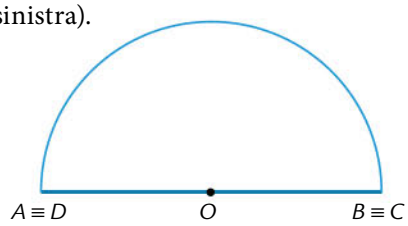


DOMINIO DELLA VARIABILE

Dovrà essere $0 \le x \le r$.
Se $x = 0$ il rettangolo degenera nel raggio perpendicolare al diametro (figura sotto a sinistra), mentre se $x = r$ il rettangolo degenera nel diametro (figura sotto a destra).



Dovrà essere $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Se $x = 0$ il rettangolo degenera nel diametro (figura sotto a destra), mentre se $x = \frac{\pi}{2}$ il rettangolo degenera nel raggio perpendicolare al diametro (figura sotto a sinistra).



DETERMINIAMO LA FUNZIONE DA RENDERE MASSIMA

Per il teorema di Pitagora abbiamo:

$$\overline{BC} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

quindi la funzione area è:

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Per i teoremi sui triangoli rettangoli abbiamo:

$$\overline{OB} = r\cos x \quad \text{e} \quad \overline{BC} = r\sin x$$

quindi la funzione area è:

$$A(x) = (2r\cos x)(r\sin x) = 2r^2 \sin x \cos x = r^2 \sin 2x$$

RICERCA DEL MASSIMO ASSOLUTO DELLA FUNZIONE

La derivata è:

$$A'(x) = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Nell'intervallo $[0, r]$, perciò, l'unico punto stazionario è:

$$x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Poiché:

$$A(0) = A(r) = 0 \quad \text{e} \quad A\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right) = r^2$$

il massimo vale r^2 e viene raggiunto per $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Si può procedere per via elementare, senza ricorrere alle derivate. Sappiamo infatti che il massimo valore assunto da $\sin 2x$ è 1 e viene raggiunto quando $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, da cui:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, perciò, il massimo, uguale a r^2, viene raggiunto per $x = \frac{\pi}{4}$.

RISPOSTA

Il rettangolo di area massima inscritto nella semicirconferenza è quello avente base di misura $r\sqrt{2}$, di area uguale a r^2.

Il rettangolo di area massima inscritto nella semicirconferenza è quello per cui $B\hat{O}C = \frac{\pi}{4}$, di area uguale a r^2.

Esercizi p. 375

4. Funzioni concave e convesse, punti di flesso

Concavità e convessità

Sappiamo che una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ha la concavità rivolta verso l'alto o verso il basso rispettivamente a seconda che $a > 0$ o $a < 0$. Introduciamo ora due definizioni, che formalizzano i concetti di «avere la concavità rivolta verso l'alto» e «avere la concavità rivolta verso il basso» per una funzione qualsiasi.

DEFINIZIONE | Funzione convessa

Una funzione f si dice **convessa** (o con la **concavità rivolta verso l'alto**) in un intervallo I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ la corda che congiunge i punti di coordinate $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è **al di sopra** del grafico di f (**Fig. 11**).

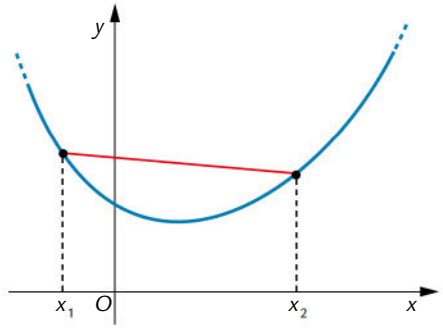


Figura 11 Funzione convessa in **R**.

ATTENZIONE!

Una corda sarà da intendere «al di sopra» del grafico di f quando tutti i suoi punti lo sono, *tranne* ovviamente i suoi estremi, che appartengono al grafico stesso.
In modo analogo sarà da intendere l'espressione «corda al di sotto del grafico di f».

DEFINIZIONE | Funzione concava

Una funzione f si dice **concava** (o con la **concavità rivolta verso il basso**) in un intervallo I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ la corda che congiunge i punti di coordinate $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è **al di sotto** del grafico di f (**Fig. 12**).

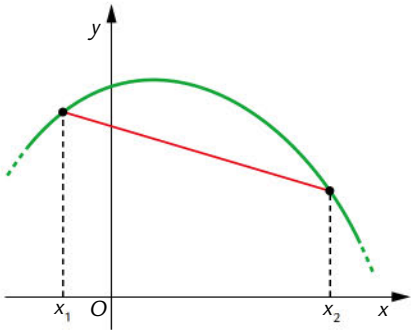


Figura 12 Funzione concava in **R**.

ESEMPI

a. La parabola di equazione $y = x^2$ è convessa in tutto R (**Fig. 13**).
b. La parabola di equazione $y = -x^2$ è concava in tutto R (**Fig. 13**).
c. La funzione $y = \sin x$ è concava per esempio nell'intervallo $[0, \pi]$; è convessa per esempio nell'intervallo $[-\pi, 0]$ (**Fig. 14**).

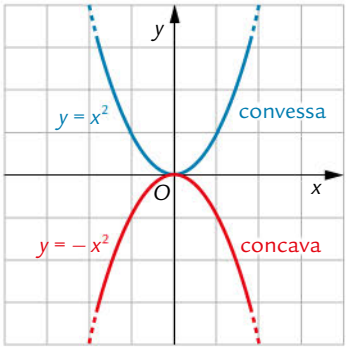


Figura 13

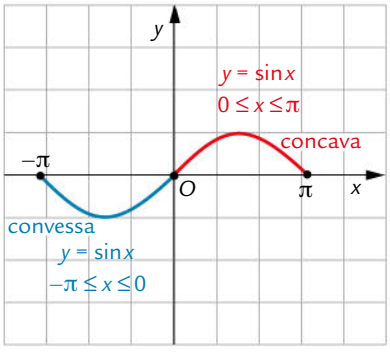


Figura 14

Legami tra convessità, concavità e derivata seconda

Siamo ora in grado di affrontare il seguente problema.

Con GeoGebra
Criterio di concavità e convessità per le funzioni derivabili due volte

◆ **PROBLEMA**
Quali legami sussistono tra le caratteristiche del grafico di una funzione e le proprietà della sua derivata seconda?

Osservando le **Figg. 15** e **16** e ricordando il significato geometrico di derivata di una funzione in un punto, si possono intuire i legami espressi nelle didascalie delle figure stesse.

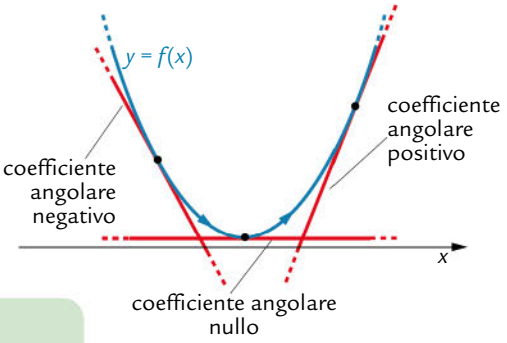


Figura animata
Criterio di convessità per funzioni derivabili due volte

Figura 15 Se una funzione è convessa in un dato intervallo, al crescere dei valori di x crescono i coefficienti angolari delle rette tangenti nel punto di ascissa x, quindi ci aspettiamo che la **derivata** della funzione in quell'intervallo risulti **crescente** e di conseguenza che la **derivata seconda** sia **positiva** (o nulla).
Viceversa, è possibile dimostrare che dalla positività della derivata seconda in un intervallo segue che la funzione in quell'intervallo è convessa.

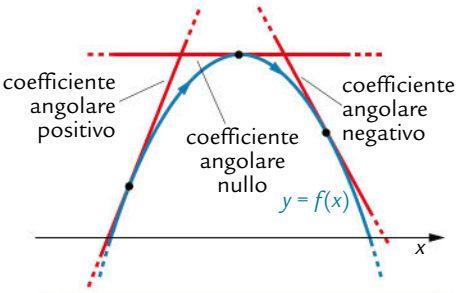


Figura animata
Criterio di concavità per funzioni derivabili due volte

Figura 16 Se una funzione è concava in un dato intervallo, al crescere dei valori di x decrescono i coefficienti angolari delle rette tangenti nel punto di ascissa x, quindi ci aspettiamo che la **derivata** della funzione in quell'intervallo risulti **decrescente** e di conseguenza che la **derivata seconda** sia **negativa** (o nulla).
Viceversa, è possibile dimostrare che dalla negatività della derivata seconda in un intervallo segue che la funzione in quell'intervallo è concava.

Il seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare, precisa il legame che operativamente ci interessa di più, ossia il poter dedurre gli intervalli di concavità e convessità dal segno della derivata seconda.

TEOREMA 9 | Criterio di concavità e convessità per le funzioni derivabili due volte

Sia f una funzione derivabile due volte in un intervallo I.

a. Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è convessa in I.
b. Se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f è concava in I.

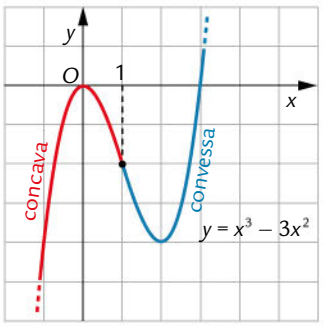


Figura 17 La funzione è concava (ha la concavità rivolta verso il basso) per $x < 1$ ed è convessa (ha la concavità rivolta verso l'alto) per $x > 1$.

ESEMPI Ricerca degli intervalli dove una funzione è convessa o concava

Determiniamo gli intervalli aperti nei quali la seguente funzione è convessa o concava:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \qquad f''(x) = 6x - 6$$

Poiché:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 6x - 6 > 0 \Rightarrow x > 1$$
$$f''(x) < 0 \Rightarrow 6x - 6 < 0 \Rightarrow x < 1$$

ne segue che la funzione f è convessa nell'intervallo $(1, +\infty)$ ed è concava nell'intervallo $(-\infty, 1)$ come puoi osservare in **Fig. 17**, dove abbiamo riportato il grafico della funzione.

Punti di flesso

Abbiamo già parlato di punti di flesso a tangente *orizzontale* e punti di flesso a tangente *verticale*. I concetti di funzione concava e convessa poc'anzi introdotti consentono di precisare la nozione di punto di flesso.

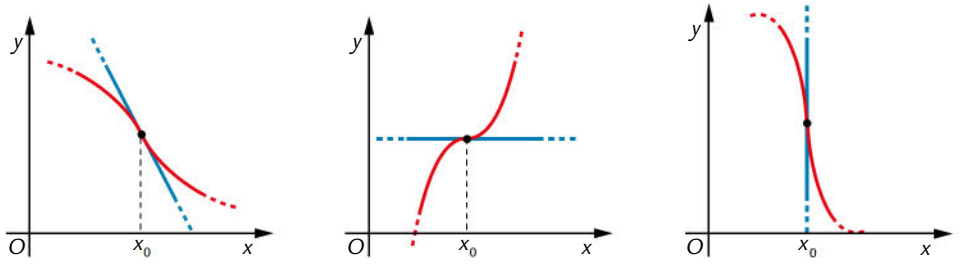
DEFINIZIONE | Punto di flesso

Data una funzione f, sia x_0 un punto in cui f è derivabile o al più f presenta tangente verticale. Il punto x_0 si dice di **flesso** se esiste un intorno destro di x_0 in cui f è convessa (concava) e un intorno sinistro di x_0 in cui f è concava (convessa).

ATTENZIONE!

Quando ci si riferisce al grafico di una funzione, a volte la locuzione «punti di flesso» non viene utilizzata per indicare x_0, ma per indicare il *punto di coordinate* $(x_0, f(x_0))$. Quando ciò accadrà, risulterà chiaro dal contesto.

In altre parole, i punti di flesso di una funzione sono quelli in cui il grafico cambia la concavità. Un punto di flesso si dice: **obliquo** se la tangente in esso non è né parallela all'asse x, né parallela all'asse y (**Fig. 18a**); **orizzontale** (o a **tangente orizzontale**) se la tangente è parallela all'asse x (**Fig. 18b**) e **verticale** (o a **tangente verticale**) se la tangente è parallela all'asse y (**Fig. 18c**).



a. Punto di flesso obliquo **b. Punto di flesso orizzontale** **c. Punto di flesso verticale**

Figura 18

Il prossimo teorema (che ci limitiamo a enunciare) afferma che (per funzioni derivabili 2 volte) i punti di flesso sono da cercare tra i punti in cui si annulla la derivata seconda.

TEOREMA 10 | Condizione necessaria per l'esistenza di un punto di flesso

Sia f una funzione definita in un intervallo I e sia x_0 un punto interno a I in cui f è derivabile due volte. Se x_0 è un punto di flesso, allora $f''(x_0) = 0$.

La condizione espressa dal **Teorema 10** è concettualmente analoga alla condizione espressa dal teorema di Fermat per i punti di estremo relativo e, come quest'ultima, è *necessaria ma non sufficiente* a garantire che x_0 sia un punto di flesso.

CONTROESEMPIO Il Teorema 10 non è invertibile

La funzione $f(x) = x^4$ è tale che $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$, quindi è immediato constatare che $f''(0) = 0$; tuttavia $x = 0$ non è un punto di flesso, bensì di minimo (**Fig. 19**).

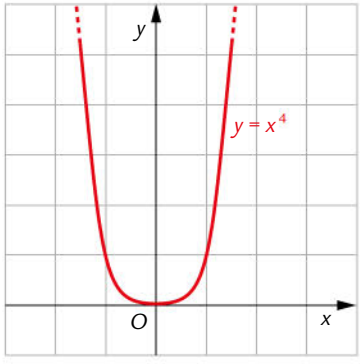


Figura 19

In pratica, i **Teoremi 9** e **10** si utilizzano secondo lo schema seguente.

Si individuano i punti in cui la derivata seconda si annulla (potenziali punti di flesso) e si studia il segno della derivata seconda.

→ Si analizza il segno della derivata seconda nell'intorno di ciascun punto in cui si annulla.

→ Se nell'intorno del punto la derivata seconda **cambia segno**, per il **Teorema 9** esistono un intorno destro (sinistro) in cui f è convessa, e un intorno sinistro (destro) in cui è concava, quindi il punto considerato è di flesso.

→ Se nell'intorno del punto la derivata **non cambia segno**, in tale intorno la funzione è concava o convessa, quindi il punto **non** è di flesso.

ESEMPIO Ricerca dei punti di flesso

Determiniamo gli eventuali punti di flesso della funzione $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^4$.

- **Analisi preliminare**

La funzione è derivabile infinite volte, quindi il criterio precedente è applicabile.

- **Calcolo delle derivate**

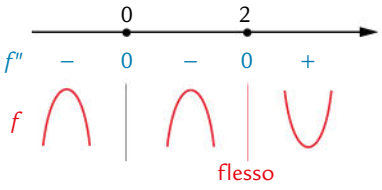
$$f'(x) = \frac{1}{20}\cdot 5x^4 - \frac{1}{6}\cdot 4x^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 - \frac{2}{3}\cdot 3x^2 = x^3 - 2x^2$$

- **Studio della derivata seconda e relative deduzioni sulla concavità**

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

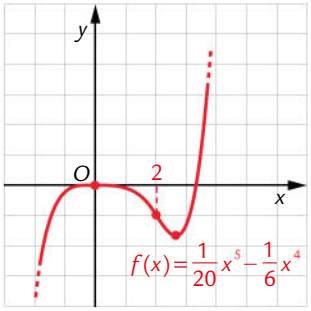
$$f''(x) > 0 \Rightarrow x^2(x-2) > 0 \Rightarrow x > 2$$



Riassumiamo nello schema a lato il segno e gli zeri di f'' e le deduzioni che si possono trarre circa la concavità.

- **Conclusione**

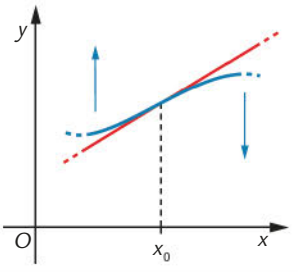
– Il punto $x = 2$ è *di flesso* perché è uno zero di f'' ed f'' cambia segno nell'intorno di questo punto.
– Invece $x = 0$, pur essendo uno zero di f'', **non** è un punto di flesso per f poiché f'' ha segno costante nell'intorno di questo punto; studiando il segno della derivata prima si può dedurre che $x = 0$ è un punto di massimo relativo.



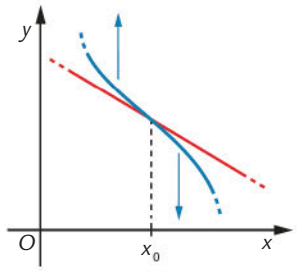
Nella figura abbiamo tracciato il grafico probabile della funzione, arricchito delle informazioni deducibili dallo studio delle derivate.

PER SAPERNE DI PIÙ **Classificazione dei punti di flesso**

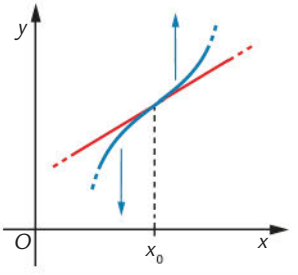
Un punto di flesso si chiama **discendente** se in un suo intorno *sinistro* la funzione è *convessa* mentre in un suo intorno *destro è concava*. Viceversa, un punto di flesso si chiama **ascendente** se in un suo intorno *sinistro* la funzione è *concava* mentre in un suo intorno destro è *convessa*. La definizione è «insidiosa»: una funzione può essere *crescente* in un intorno di un punto di flesso *discendente*, così come può essere *decrescente* in un intorno di un punto di flesso *ascendente*. Osserva le figure seguenti.



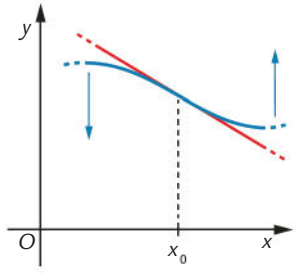
Punto di flesso **discendente** (con funzione *crescente* nell'intorno del punto di flesso)



Punto di flesso **discendente** (con funzione *decrescente* nell'intorno del punto di flesso)



Punto di flesso **ascendente** (con funzione *crescente* nell'intorno del punto di flesso)



Punto di flesso **ascendente** (con funzione *decrescente* nell'intorno del punto di flesso)

Approfondimento
Studio dei punti di estremo relativo e di flesso con il metodo delle derivate successive

Esercizi p. 392

5. Il teorema di de l'Hôpital

Vogliamo esplorare il seguente problema.

◆ **PROBLEMA**
Esiste qualche legame tra il limite per $x \to x_0$ del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ tra due funzioni f e g e il limite per $x \to x_0$ del rapporto delle loro derivate, ossia $\frac{f'(x)}{g'(x)}$?

Consideriamo il caso particolare di due funzioni f e g, tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, derivabili e con derivata continua in $x_0 \in \mathbf{R}$. In questa situazione (**Fig. 20**), i grafici delle due funzioni f e g, in prossimità di x_0, sono ben approssimati dalle rette tangenti a f e g in x_0, che hanno rispettivamente equazioni:

$y = f'(x_0)(x - x_0)$ e $y = g'(x_0)(x - x_0)$

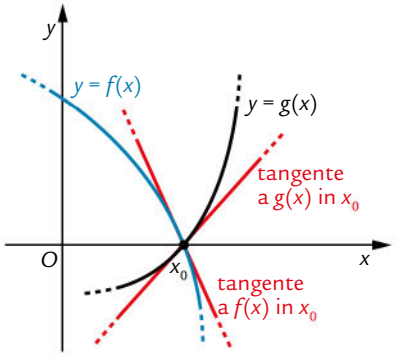


Figura 20

Pertanto è ragionevole ritenere che:

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}_{\text{si presenta nella forma indeterminata 0/0}} = \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)}}_{\text{approssimando le due funzioni con le rispettive rette tangenti}} = \underbrace{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}_{\text{per la supposta continuità delle derivate in } x_0}$$

Queste osservazioni intuitive portano a congetturare che sotto opportune condizioni il limite del rapporto di due funzioni e il limite del rapporto delle loro derivate siano uguali e a chiedersi se tale legame possa essere utile per risolvere forme indeterminate. La risposta è affermativa ed è espressa nel seguente teorema.

TEOREMA 11 | Teorema di de l'Hôpital

Siano f e g due funzioni derivabili in un intorno I di $x_0 \in \mathbf{R}$, eccetto al più x_0, e siano verificate le seguenti ipotesi:

a. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

b. $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$

c. esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e si ha: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

DALLA STORIA

Il teorema di de l'Hôpital deve il suo nome al matematico francese **Guillaume de l'Hôpital** (1661-1704), che lo pubblicò nel 1696 nel trattato *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Il risultato fu in realtà scoperto nel 1694 dal suo maestro, il matematico svizzero **Johann Bernoulli** (1667-1748).

È importante fare alcune osservazioni.

- L'ipotesi **b** del teorema di de l'Hôpital è normalmente soddisfatta in tutti i casi di cui ci occuperemo. Le ipotesi cui bisogna prestare particolare attenzione sono la **a** e la **c**:
  - l'ipotesi **a** richiede che il limite si presenti nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$;
  - l'ipotesi **c** impone che nulla si possa dire del $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ nel caso in cui non esista il limite del rapporto delle derivate.
- Il teorema continua a valere anche per i limiti destri e sinistri ($x \to x_0^-$ o $x \to x_0^+$) e per $x \to \pm\infty$.

ATTENZIONE!
Il teorema richiede di calcolare il *quoziente delle derivate*, non la derivata del quoziente.

ESEMPI Calcolo di limiti mediante il teorema di de l'Hôpital

Calcoliamo i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$

a. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Applicando il teorema di de l'Hôpital, otteniamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x^2-1}^{f(x)=x^2-1}}{\underbrace{x^3-1}_{g(x)=x^3-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{2x}^{f'(x)}}{\underbrace{3x^2}_{g'(x)}}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{3x}=\frac{2}{3}$$

b. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Applicando il teorema di de l'Hôpital, otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}$$

Il limite si presenta ancora nella forma indeterminata $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Per risolvere l'indeterminazione possiamo seguire due vie.

- Eseguiamo il cambio di variabile $e^x=t$, osservando che quando $x\to+\infty$, anche $t\to+\infty$; abbiamo allora:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t+1}=1$$

- Applichiamo nuovamente il teorema di de l'Hôpital; abbiamo allora:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

CONTROESEMPI Necessità delle ipotesi del teorema di de l'Hôpital

Verifichiamo che i seguenti limiti non possono essere calcolati mediante il teorema di de l'Hôpital:

a. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x^2-1}$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

a. Il teorema di de l'Hôpital non può essere applicato perché il limite **non** si presenta in forma indeterminata; infatti, per $x\to 1^+$ il numeratore tende a 1 e il denominatore a 0^+, quindi:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=+\infty$$

Aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito: $\dfrac{1}{0^+}\to+\infty$

Osserva che, se non ci accorgessimo che il teorema di de l'Hôpital non è applicabile perché cade l'ipotesi **a**, otterremmo un risultato **errato**; si avrebbe infatti:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$$

Applicazione indebita del teorema di de l'Hôpital!

b. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ (perché?).

Applicando il teorema di de l'Hôpital otterremmo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to+\infty}(1+\cos x)$$

ma l'ultimo limite *non esiste*! Non essendo verificata l'ipotesi **c** del teorema, **non** siamo autorizzati a concludere nulla sul limite originario; in particolare **non** siamo autorizzati ad affermare che non esiste. In effetti abbiamo che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

Applicando il teorema del confronto si dimostra che $\dfrac{\sin x}{x}\to 0$ per $x\to+\infty$

Il teorema di de l'Hôpital, come abbiamo visto, si applica alle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, tuttavia può essere utile anche per risolvere forme indeterminate di altro tipo, previe opportune manipolazioni algebriche che consentono di ricondursi alle forme $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

SUGGERIMENTO

Occorre non «affezionarsi troppo» all'utilizzo del teorema di de l'Hôpital. Quando i limiti possono essere risolti immediatamente tramite limiti notevoli o semplici sostituzioni di variabili, è bene tenere sempre presente questi procedimenti, anche perché a volte l'applicazione del teorema di de l'Hôpital può rivelarsi inconcludente (alcuni esempi sono proposti negli esercizi).

ESEMPIO Limite riconducibile all'applicazione del teorema di de l'Hôpital

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot(-\infty)$. Tuttavia, possiamo ricondurci alla forma $\frac{\infty}{\infty}$ osservando che $x\ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Abbiamo così:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Teorema di de l'Hôpital

Alcune applicazioni del teorema di de l'Hôpital

Grazie al teorema di de l'Hôpital siamo in grado di giustificare alcuni risultati che avevamo anticipato in precedenza. Per esempio, in base alle «gerarchie sugli infiniti» che abbiamo presentato nell'**Unità 2**, sappiamo che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = 0$$

Possiamo ora giustificare questi risultati. Abbiamo infatti:

Teorema di de l'Hôpital

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}}_{\text{Teorema di de l'Hôpital}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$$

Il teorema di de l'Hôpital è stato applicato 2 volte

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}}_{\text{Teorema di de l'Hôpital}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$$

Il teorema di de l'Hôpital è stato applicato 1 volta

Ragionando in modo del tutto analogo a questi esempi, mediante un'applicazione ripetuta del teorema di de l'Hôpital si può dimostrare che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = +\infty \qquad \forall a > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = 0 \qquad \forall a > 0$$

Esercizi p. 401

6. La formula di Taylor

Il polinomio di Taylor

In questo paragrafo approfondiamo il problema dell'*approssimazione locale* di una funzione. Sappiamo che, data una funzione f derivabile in x_0, il grafico della funzione in un intorno di x_0 può essere approssimato da quello della *retta tangente* nel punto x_0. Il problema che ci poniamo ora è quello di cercare funzioni che approssimino la funzione f in prossimità di x_0 con una precisione migliore rispetto alla retta tangente. L'idea è quella di «sostituire» la retta tangente con un polinomio di grado n, che abbia tutte le derivate fino all'ordine n uguali a quelle di f nel punto $x = x_0$. Si dimostra che un tale polinomio esiste sempre ed è unico, a patto che la funzione f che si vuole approssimare sia derivabile n volte in x_0.

Precisamente vale il seguente teorema.

TEOREMA 12 | Polinomio di Taylor

Data una funzione f, derivabile n volte in $x = x_0$, esiste uno e un solo polinomio $T_n(x)$ di grado minore o uguale a n, tale che:

$$T_n(x_0) = f(x_0),\ T_n'(x_0) = f'(x_0),\ \ldots\ldots,\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Questo **polinomio**, detto **di Taylor di ordine n**, è espresso dalla formula:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Un caso importante è quello in cui $x_0 = 0$. In tal caso il polinomio di Taylor viene detto **polinomio di MacLaurin** della funzione f e la sua espressione è:

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ESEMPI Polinomi di MacLaurin di funzioni notevoli

Determiniamo i polinomi di MacLaurin per le funzioni:

a. $f(x) = e^x$ b. $f(x) = \sin x$

a. Essendo $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ con $n \geq 1$, si ha $f^{(n)}(0) = 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, quindi il polinomio di MacLaurin di $f(x) = e^x$ è dato da:

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

b. Osserviamo che:

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x$$

poi il ciclo si ripete:

$$f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x,\ f^{(6)}(x) = -\sin x,\ f^{(7)}(x) = -\cos x,\ \ldots$$

In generale se ne deduce che:

$f^{(2n)}(0) = 0$ e $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$

Quindi il polinomio di MacLaurin di $f(x) = \sin x$ è dato da:

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n =$$

$$= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{-1}{7!}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Procedendo come negli ultimi due esempi si possono ricavare i polinomi di MacLaurin delle funzioni notevoli riportate in tabella.

Funzione	Polinomio di MacLaurin
$f(x) = e^x$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$
$f(x) = \sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$f(x) = \cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2k)!}$
$\ln(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
$(1 + x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n$

La formula di Taylor con resto secondo Peano

Definito il polinomio di Taylor, un problema fondamentale che si pone è quello di valutare l'*errore* che si commette quando si sostituisce $f(x)$ con $T_n(x)$; il problema è cioè quello di valutare la quantità:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

detta **resto n-esimo** (o **errore di approssimazione**). Un primo importante risultato sul resto $R_n(x)$ è espresso dal seguente teorema.

TEOREMA 13 | Resto secondo Peano

Sia f derivabile n volte in x_0 e $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n della funzione f con centro in x_0. Posto $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, il resto $R_n(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$, ossia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \qquad [2]$$

Per esprimere sinteticamente la [2] si utilizza solitamente la scrittura:

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \text{ per } x \to x_0 \qquad [3]$$

che si legge «$R_n(x)$ è *o-piccolo* di $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$».
Tenendo conto che $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ e utilizzando la [3], possiamo scrivere la cosiddetta **formula di Taylor** di f (centrata in x_0 e di ordine n) con il **resto secondo Peano**:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) \text{ per } x \to x_0 \qquad [4]$$

Questa formula, che intuitivamente costituisce una «radiografia» del comportamento della funzione f in prossimità di x_0, ha importanti conseguenze. Ci limitiamo a gettare uno sguardo sulla sua applicazione nella risoluzione delle forme di indecisione. Nel calcolo di un limite $x \to x_0$ è possibile sostituire infatti alla funzione il suo sviluppo di Taylor centrato in x_0 di un ordine conveniente. Negli esercizi ci limiteremo a considerare limiti per $x \to 0$ e quindi a utilizzare i polinomi di MacLaurin delle funzioni notevoli in tabella. Per applicare la formula di MacLaurin nel calcolo dei limiti, è utile tenere presente le seguenti considerazioni:

1. In generale la scrittura $o(x^n)$ indica una funzione che, divisa per x^n, tende a 0 per $x \to x_0$. Per esempio $o(x^3)$ indica una funzione che divisa per x^3 tende a 0 per $x \to 0$. Dunque risulta $\lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$ *per definizione* del simbolo *o*-piccolo.
2. In generale potremo dire che $\frac{o(x^n)}{x^m} \to 0$ per $x \to 0$ se $m \leq n$, mentre se $m > n$ non potremo stabilire a cosa tende il rapporto $\frac{o(x^n)}{x^m}$ per $x \to 0$.

   Per esempio, possiamo dire che $\lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^2} = 0$ poiché possiamo scrivere

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot x = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot \lim_{x \to 0} x = 0 \cdot 0 = 0.$$

Non possiamo stabilire invece a cosa tende $\frac{o(x^3)}{x^4}$ per $x \to 0$; infatti, scrivendo $\lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \infty}$ siamo condotti alla forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

ESEMPIO Calcolo di un limite con l'utilizzo della formula di MacLaurin

Calcoliamo: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Utilizziamo la formula di MacLaurin della funzione seno del terzo ordine:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -\frac{1}{6}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $\lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$ per definizione di *o*-piccolo.

ATTENZIONE!

Se nell'esempio avessimo considerato il polinomio di MacLaurin arrestato al *primo* ordine, cioè $\sin x = x + o(x)$, avremmo ottenuto $\lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^3}$. A questo punto però sappiamo solo (per definizione di *o*-piccolo) che il numeratore tende a 0 se diviso per x; nulla possiamo dedurre del suo comportamento quando viene diviso per x^3 e quindi non possiamo concludere. Lo sviluppo del seno al primo ordine non è quindi sufficiente per il calcolo del limite.

Esercizi p. 406

Teoremi sulle funzioni derivabili

Teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema di Fermat

IPOTESI

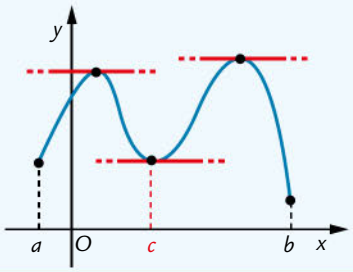
La funzione f è definita in $[a, b]$ e il punto $c \in (a, b)$ è:

- di estremo relativo
- tale che f è derivabile in c

TESI

La derivata di f in c è nulla:

$f'(c) = 0$



Teorema di Rolle

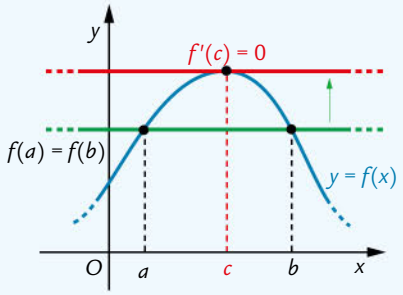
IPOTESI

La funzione f è:

- continua in $[a, b]$
- derivabile in (a, b)
- tale che $f(a) = f(b)$

TESI

Esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.



Teorema di Lagrange

IPOTESI

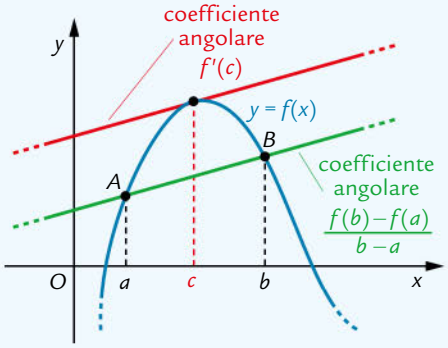
La funzione f è:

- continua in $[a, b]$
- derivabile in (a, b)

TESI

Esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Teorema di de L'Hôpital

IPOTESI

Siano f e g due funzioni derivabili in un intorno I di x_0 eccetto al più in x_0, tali che:

a. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si presenti nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$;

b. $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$;

c. esista $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

TESI

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x}{2} =$$

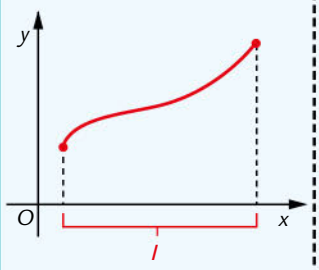
$$= \frac{3}{2}$$

Relazioni tra il grafico di $y = f(x)$ e gli zeri e il segno di $y' = f'(x)$

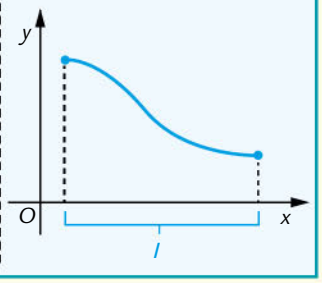
Criterio di monotonia

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I.

Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora la funzione f è strettamente crescente in I.



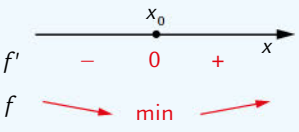
Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora la funzione f è strettamente decrescente in I.



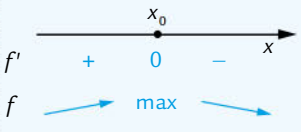
Punti di estremo relativo

Sia f una funzione derivabile in un intorno di x_0 e tale che $f'(x_0) = 0$.

Se f' cambia segno in un intorno di x_0 passando da $-$ a $+$ allora x_0 è un punto di minimo relativo.



Se f' cambia segno in un intorno di x_0 passando da $+$ a $-$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

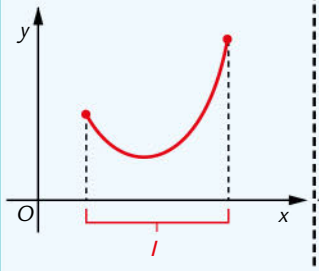


Relazioni tra il grafico di $y = f(x)$ e gli zeri e il segno di $y'' = f''(x)$

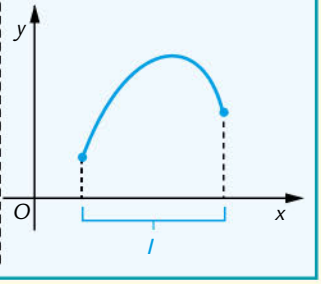
Concavità e convessità

Sia f una funzione derivabile due volte in un intervallo I.

Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora la funzione f è convessa nell'intervallo I.

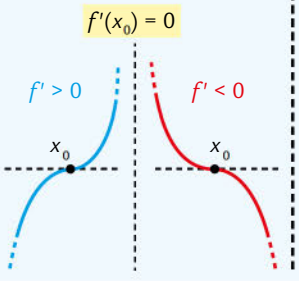


Se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora la funzione f è concava nell'intervallo I.

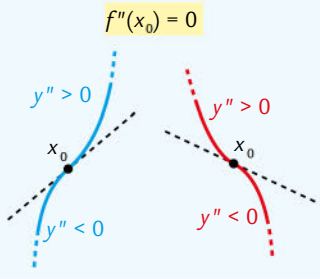


Punti di flesso

Se una funzione derivabile in un intorno di x_0 ha derivata nulla in x_0 e la derivata ha segno costante in un intorno di x_0, il punto x_0 è di flesso a tangente orizzontale per la funzione.



Se una funzione derivabile due volte in un intorno di x_0 è tale che $f''(x_0) = 0$ e la derivata seconda cambia segno in un intorno di x_0, allora il punto x_0 è di flesso per la funzione.



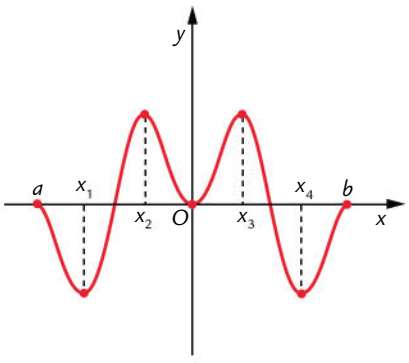
1. I teoremi di Fermat, di Rolle e di Lagrange

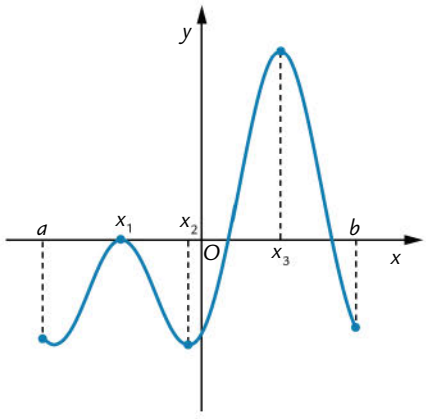
Teoria p. 331

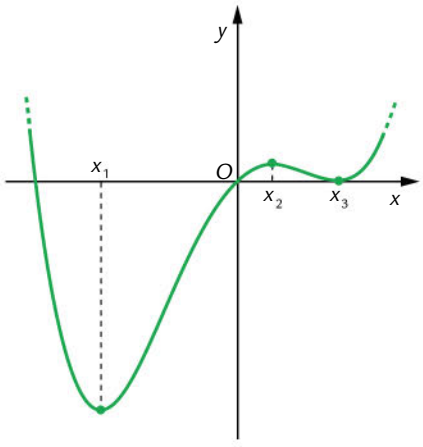
Punto di estremo relativo e assoluto

Interpretazione di grafici

1 Per ciascuna delle funzioni di cui è stato tracciato il grafico, individua i punti di minimo e massimo relativi e stabilisci quali di essi sono anche punti di minimo e massimo assoluto.



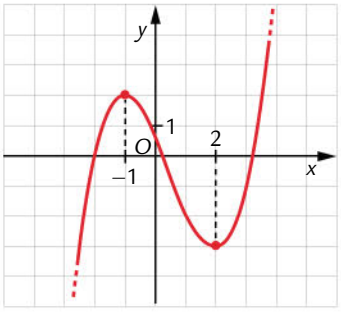


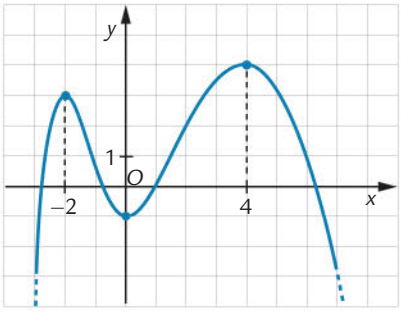


2 In ciascuno dei seguenti grafici, determina:

a. i punti di minimo e di massimo relativo;

b. il minimo e il massimo assoluto, se esistono.





3 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione che soddisfi tutte le seguenti proprietà:

- il punto $x = 0$ è di minimo assoluto e in tale punto la funzione non è derivabile;
- il punto $x = 2$ è di massimo assoluto e in tale punto la funzione è derivabile;
- il punto $x = 4$ è di minimo relativo ma non assoluto e in tale punto la funzione è derivabile.

4 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione che soddisfi tutte le seguenti proprietà:

- ha un minimo assoluto uguale a 0 nel punto $x = 0$;
- ha un massimo relativo uguale a 3 nel punto $x = -2$ e un minimo relativo uguale a 1 nel punto $x = -4$.

5 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio;

a. di una funzione pari che ammette infiniti punti di minimo assoluto e infiniti punti di massimo assoluto;

b. di una funzione dispari che ammette infiniti punti di minimo assoluto e infiniti punti di massimo assoluto.

Il teorema di Fermat

6 **Caccia all'errore.** Secondo Gianni, «condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbia in x_0 un punto di estremo relativo è che sia $f'(x_0) = 0$». Quale errore sta commettendo Gianni? Trova un controesempio e correggi la sua affermazione.

Per ciascuna delle seguenti funzioni, determina, se esistono, i punti stazionari.

7 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $\left[x = \frac{3}{2}\right]$

8 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 5$ $\left[x = \frac{2}{9}\right]$

9 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x - 1$ $[x = \pm 2]$

10 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ $\left[x = -\frac{1}{2} \vee x = 1\right]$

11 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ $[x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}]$

12 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x}$ $[\varnothing]$

13 $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$ $[x = 2 \pm \sqrt{5}]$

14 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ $[x = \pm 1]$

15 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ $\left[x = \frac{3}{2}\right]$

16 $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\left[x = \frac{1}{2}\right]$

17 $f(x) = (x - 2)^2\sqrt{x}$ $\left[x = \frac{2}{5} \vee x = 2\right]$

18 $f(x) = \ln^2 x - \ln x$ $[x = \sqrt{e}]$

19 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $[x = e]$

20 $f(x) = 4^x - 2^x$ $[x = -1]$

21 $f(x) = xe^x$ $[x = -1]$

22 **Videolezione** $f(x) = x^2e^{-2x}$ $[x = 0 \vee x = 1]$

23 $f(x) = 2\sin x - x$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

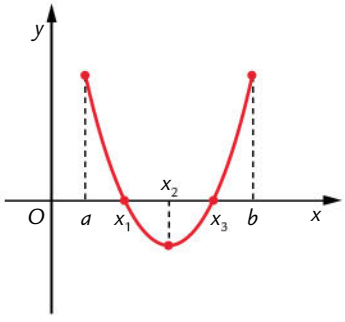
24 $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

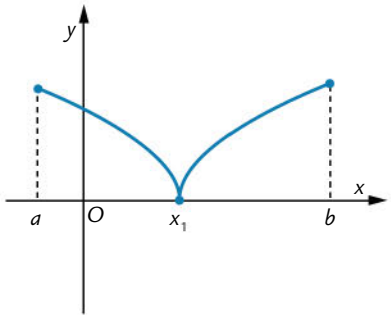
25 $f(x) = \tan x - 4x$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

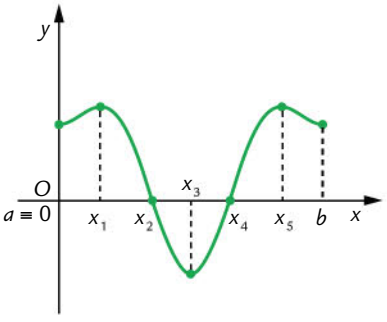
Il teorema di Rolle

Interpretazione di grafici

26 Per ciascuna delle funzioni di cui è stato tracciato il grafico, individua graficamente i punti, se esistono, che soddisfano la tesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[a, b]$.







27 **Vero o falso?**

a. il teorema di Rolle è applicabile alla funzione $f(x) = x^4$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

b. il teorema di Rolle è applicabile alla funzione $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

c. il teorema di Rolle è applicabile alla funzione $f(x) = x^3$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

d. il teorema di Rolle è applicabile alla funzione $f(x) = x^2\sqrt{|x|}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

e. il teorema di Rolle è applicabile alla funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

Stabilisci se alle seguenti funzioni è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo indicato e, in caso affermativo, determina i punti c di cui il teorema garantisce l'esistenza.

28 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ $[0, 2]$ $[c = 1]$

29 $f(x) = x^2 - 2x$ $[-1, 1]$ [Non applicabile]

30 $f(x) = x^3 - x$ $[-1, 1]$ $\left[c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

31 $f(x) = x^4 - 4x^2$ $[0, 2]$ $[c = \sqrt{2}]$

32 $f(x) = x^4 - 2x$ $[0, 2]$ [Non applicabile]

33 $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$ $[-2, 2]$ $[c = 0]$

34 $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$ $[-2, 2]$ [Non applicabile]

35 $f(x) = |x - 2|$ $[-1, 5]$ [Non applicabile]

36 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x$ $[0, 4]$ $[c = 1]$

37 $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ $[0, 2]$ $[c = 1]$

38 $f(x) = \sqrt{|x| + 2}$ $[-2, 2]$ [Non applicabile]

39 $f(x) = |x^2 - 3x|$ $[0, 3]$ $\left[c = \frac{3}{2}\right]$

40 $f(x) = \sin 2x$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left[c = \frac{\pi}{4}\right]$

41 $f(x) = \cos 2x$ $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ $\left[c = -\frac{\pi}{2}\right]$

42 $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x$ $[e^{-1}, e^3]$ $[c = e]$

43 $f(x) = \ln^2 x + 2\ln x + 1$ $[e^{-2}, 1]$ $[c = e^{-1}]$

44 $f(x) = 2^{-2x} - 5 \cdot 2^{-x} + 4$ $[-2, 0]$ $\left[c = \frac{\ln 2 - \ln 5}{\ln 2}\right]$

45 Videolezione $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ $[0, \ln 2]$ $\left[c = \ln\frac{3}{2}\right]$

46 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & x \le 0 \\ 2^x & x > 0 \end{cases}$ $[-1, 1]$ [Non applicabile]

47 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & x \le 0 \\ 2x^2 - 2x & x > 0 \end{cases}$ $[-2, 1]$ $\left[c = -1 \vee c = \frac{1}{2}\right]$

48 ESERCIZIO SVOLTO

Determina i valori dei parametri a, b e c in modo che sia applicabile il teorema di Rolle alla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 0 \\ cx + 3 & x \ge 0 \end{cases}$$ **nell'intervallo $[-1, 1]$**

- Dobbiamo imporre che siano verificate le seguenti tre condizioni:

  $f(-1) = f(1)$ — I valori agli estremi dell'intervallo devono essere uguali

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ — La funzione f è continua in $[-1, 1]$ se e solo se è continua in 0

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ — La funzione f è derivabile in $(-1, 1)$ se e solo se è derivabile in 0

- La prima condizione equivale a: $(-1)^2 + a(-1) + b = c \cdot (1) + 3 \quad \Rightarrow \quad a - b + c = -2$

  La seconda condizione equivale a: $b = 3$

  La terza condizione, tenendo conto che $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & x < 0 \\ c & x > 0 \end{cases}$, equivale a: $a = c$

- Risolvendo il sistema: $\begin{cases} a - b + c = -2 \\ b = 3 \\ a = c \end{cases}$ otteniamo che deve essere: $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$.

Determina i valori dei parametri a, b e c in modo che sia applicabile il teorema di Rolle alla funzione $f(x)$ nell'intervallo indicato.

49 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 0 \\ -x^2 + cx & x \ge 0 \end{cases}$ $[-1, 1]$ $[a = 1, b = 0, c = 1]$

50 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 1 \\ cx + 2 & x \ge 1 \end{cases}$ $[0, 2]$ $\left[a = -\frac{3}{2}, b = 3, c = \frac{1}{2}\right]$

51 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 0 \\ cx^2 + 1 & x \ge 0 \end{cases}$ $[-1, 2]$ $\left[a = 0, b = 1, c = \frac{1}{4}\right]$

Il teorema di Lagrange

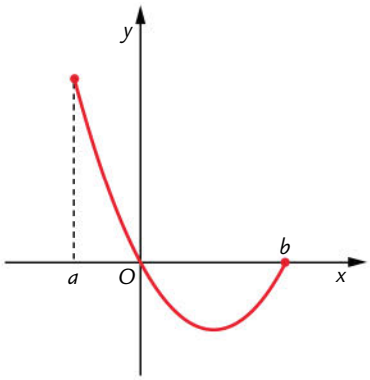
Giustificare e argomentare

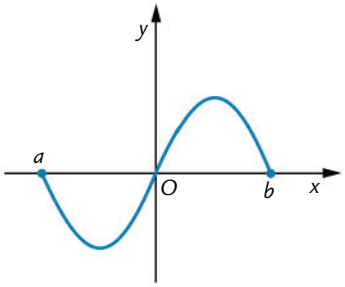
52 Spiega perché, se una funzione f è derivabile in $[a, b]$, certamente soddisfa in questo intervallo le ipotesi del teorema di Lagrange.

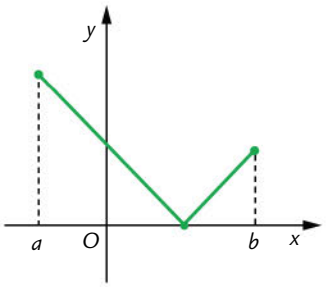
53 Se f è la funzione lineare $f(x) = mx + q$, quali punti dell'intervallo $[a, b]$ soddisfano la tesi del teorema di Lagrange?

Interpretazione di grafici

54 Per ciascuna delle funzioni di cui è stato tracciato il grafico, individua graficamente i punti, se esistono, che soddisfano la tesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[a, b]$.







55 **Vero o falso?**

a. il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

b. il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

c. il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

d. il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione $f(x) = x|x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

e. il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione $f(x) = -x^5$ nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

Stabilisci se alle seguenti funzioni è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo indicato e, in caso affermativo, determina i punti c di cui il teorema garantisce l'esistenza (cioè i punti di Lagrange).

56 $f(x) = x^2$ $[0, 4]$ $[c = 2]$

57 $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ $[-1, 1]$ $[c = 0]$

58 $f(x) = x^3 - x^2$ $[-1, 0]$ $\left[c = \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$

59 $f(x) = 3x^3 - 4x$ $[0, 2]$ $\left[c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

60 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ $[1, 4]$ [Non applicabile]

61 $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ $[0, 2]$ $[c = 2\sqrt{2} - 2]$

62 $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ $[0, 1]$ $\left[c = \frac{1}{4}\right]$

63 $f(x) = \sqrt{2x-1}$ $[0, 1]$ [Non applicabile]

64 $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$ $[-1, 0]$ $\left[c = -\frac{\sqrt{3}}{9}\right]$

65 $f(x) = \sin x$ $[\pi, 2\pi]$ $\left[c = \frac{3}{2}\pi\right]$

66 $f(x) = \tan x$ $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ $\left[c = \pm\arccos\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$

67 $f(x) = \tan(2x)$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ [Non applicabile]

68 **Videolezione** $f(x) = \ln x$ $[1, e]$ $[c = e - 1]$

69 $f(x) = \ln x^2$ $[-1, e]$ [Non applicabile]

70 $f(x) = 4^x$ $[0, 1]$ $\left[c = \frac{1}{\ln 4}\ln\left(\frac{3}{\ln 4}\right)\right]$

71 $f(x) = e^{2x-1}$ $[0, 1]$ $\left[c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2-1}{2}\right)\right]$

72 $f(x) = |x^2 - 9|$ $[-1, 2]$ $\left[c = \frac{1}{2}\right]$

Giustificare e argomentare

73 Dimostra che se $f(x) = x^2$, allora il punto c che soddisfa la tesi del teorema di Lagrange relativamente alla funzione f e all'intervallo $[a, b]$, con $a, b \in \mathbf{R}$, è la media aritmetica di a e b.

74 Dimostra che se $f(x) = \frac{1}{x}$, allora il punto c che soddisfa la tesi del teorema di Lagrange relativamente alla funzione f e all'intervallo $[a, b]$, con $a, b \in \mathbf{R}^+$, è la media geometrica di a e b.

75 Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite e derivabili in $[a, b]$. Dimostra che se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ differiscono per una costante c, cioè $f(x) = g(x) + c$ per ogni $x \in [a,b]$, allora hanno gli stessi punti di Lagrange in $[a, b]$.

76 Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite e derivabili in $[a, b]$. Dimostra che, se $f(x) = kg(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, dove k è una costante reale non nulla, allora le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno gli stessi punti di Lagrange in $[a, b]$.

77 ESERCIZIO GUIDATO

Determina i valori dei parametri a e b in modo che sia applicabile il teorema di Lagrange alla funzione:

$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & x < 1 \\ -x^2 + x + b & x \geq 1 \end{cases}$ **nell'intervallo [0, 2]**

- Devi imporre che la funzione sia continua nell'intervallo $[0, 2]$ e derivabile nell'intervallo $(0, 2)$.
- Queste condizioni sono verificate se e solo se la funzione è continua e derivabile nel punto $x = 1$.
  Devi quindi imporre le seguenti condizioni:

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x)$
- Risolvendo il sistema nelle incognite a e b che ne scaturisce, troverai che deve essere:

  $a = -3$ e $b = -1$

78 Determina i valori dei parametri a e b in modo che sia applicabile il teorema di Lagrange alla funzione:

$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & x < 1 \\ -2x^2 + 3x + b & x \geq 1 \end{cases}$ nell'intervallo $[0, 2]$ $[a = -3, b = -1]$

79 Determina i valori dei parametri a e b in modo che sia applicabile il teorema di Lagrange alla funzione:

$f(x) = \begin{cases} a \ln x + b & x < 1 \\ 2x + 3 & x \geq 1 \end{cases}$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ $[a = 2, b = 5]$

Esercizi riassuntivi: i teoremi di Rolle e Lagrange

80 Considera la funzione $y = |x^2 - 4x + 3|$.

a. Stabilisci se è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$ e nell'intervallo $[1, 3]$.

b. Stabilisci se è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[2, 4]$.

In caso affermativo, determina i punti di cui i teoremi garantiscono l'esistenza.

[**a.** È applicabile solo in $[1, 3]$, $x = 2$; **b.** non è applicabile]

81 Considera la funzione $y = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2}$.

a. Stabilisci se è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$.

b. Stabilisci se è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 4]$.

c. Stabilisci se è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[2, 6]$.

In caso affermativo, determina i punti di cui i teoremi garantiscono l'esistenza.

[**a.** Non è applicabile; **b.** è applicabile, $x = \frac{8}{3}$; **c.** non è applicabile]

82 Considera la funzione $f(x) = x^2 - 2x$.

a. Determina per quale valore di a il teorema di Rolle è applicabile alla funzione nell'intervallo $[-1, a]$, con $a > -1$. In riferimento a questo intervallo, determina il punto di cui il teorema garantisce l'esistenza.

b. Determina il massimo valore di b per cui è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[-2, b]$. In riferimento al corrispondente intervallo, determina il punto di cui il teorema garantisce l'esistenza.

[**a.** $a = 3$, $x = 1$; **b.** $b = 0$, $x = -1$]

83 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}2x^3+4x^2 & x<1\\ ax^2+b & x\geq 1\end{cases}$$

a. Determina per quali valori di a e b il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione nell'intervallo $[0, 2]$. In corrispondenza dei valori di a e b trovati, determina i punti di cui il teorema garantisce l'esistenza.
b. Determina per quale valore di k il teorema di Rolle è applicabile alla funzione nell'intervallo $[k, 0]$, con $k<0$.
c. In corrispondenza dei valori di a e b trovati al punto **a** esiste un valore di k per cui il teorema di Rolle è applicabile alla funzione nell'intervallo $[1, k]$, con $k>1$?

[**a.** $a=7, b=-1$; $x=\dfrac{-4+\sqrt{97}}{6}$; **b.** $k=-2$; **c.** no]

84 Considera la funzione $f(x)=x^3-3x+2$.
a. Stabilisci se esiste un intervallo del tipo $[-a, a]$, con $a>0$, in cui è applicabile il teorema di Rolle. In caso affermativo, determina l'intervallo e i punti di cui il teorema garantisce l'esistenza.
b. Stabilisci se il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione $y=|f(x)|$ nell'intervallo $[-3, -1]$ e nell'intervallo $[0, 2]$.

[**a.** L'intervallo $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$; i punti di cui il teorema garantisce l'esistenza sono $x=\pm 1$;
b. il teorema non è applicabile in $[-3, -1]$ perché la funzione non è derivabile per $x=-2$, mentre è applicabile in $[0, 2]$]

85 Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}+2 & x>0\\ x^3+ax+b & x\leq 0\end{cases}$$

a. Determina per quali valori di a e b il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione nell'intervallo $[-1, 1]$.

In corrispondenza dei valori di a e b trovati, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

b. Stabilisci se il teorema di Rolle è applicabile alla funzione nell'intervallo $[-1, 0]$ e in caso affermativo determina i punti di cui il teorema garantisce l'esistenza.
c. Stabilisci se il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione nell'intervallo $[0, 1]$ e in caso affermativo determina i punti di cui il teorema garantisce l'esistenza.

[**a.** $a=-1, b=3$; **b.** è applicabile, $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; **c.** è applicabile, $x=1-\ln(e-1)$]

86 **ESERCIZIO SVOLTO**

Anna parte dalla sua abitazione per raggiungere la sua casa al mare. Il viaggio è di 150 km e Anna impiega complessivamente un'ora e mezza. Dimostra che durante il viaggio il tachimetro deve avere indicato almeno una volta i 100 km/h.



- Sia $s(t)$ la legge oraria che esprime la posizione dell'auto di Anna, dove il tempo t è misurato in ore.
  Nell'intervallo di tempo $[0, 1{,}5]$ che corrisponde alla durata del viaggio, per il teorema di Lagrange, deve esistere $\overline{t}\in[0, 1{,}5]$ per cui:

$$\underbrace{s'(\overline{t})}_{\substack{\text{velocità segnata dal}\\ \text{tachimetro}\\ \text{all'istante } \overline{t}}} = \underbrace{\frac{s(1{,}5)-s(0)}{1{,}5-0}}_{\substack{\text{velocità media}\\ \text{sull'intero}\\ \text{percorso}}} \qquad [*]$$

- Poiché la velocità media tenuta durante il viaggio è $v_{\text{media}}=\dfrac{150}{1{,}5}\text{ km/h}=100\text{ km/h}$, la tesi segue immediatamente dalla **[*]**.

Realtà e modelli

87 **In autostrada.** Paolo è in viaggio in autostrada. Alle 15 il tachimetro segna una velocità di 100 km/h, mentre alle 15.30 segna una velocità di 120 km/h. Dimostra che almeno in un istante tra le 15 e le 15.30 l'accelerazione è stata di 40 km/h^2.

88 **Gara di corsa.** Alessandro e Alberto si sfidano in una gara di corsa. Partono nello stesso istante e dopo 2 minuti arrivano entrambi al traguardo, concludendo quindi la gara in pareggio. Dimostra che, durante la sfida, almeno in un istante la velocità di Alessandro deve essere stata la medesima di Alberto.

89 **Record del mondo.** Il giamaicano Usain Bolt stabilì nel 2009 il record del mondo nei 200 metri piani, percorrendo la distanza in 19,19 s. La velocità di Bolt durante la corsa è stata in qualche istante superiore a 37 km/h? Giustifica adeguatamente la risposta.

90 **Autovelox/ 1.** Due autovelox sono posti su una strada urbana a una distanza di 5 km l'uno dall'altro. Quando l'auto di Barbara passa davanti al primo autovelox, quest'ultimo rileva una velocità di 40 km/h; quando, 5 minuti dopo, l'auto passa davanti al secondo autovelox, viene misurata una velocità di 45 km/h. Il limite di velocità è quello ordinario di 50 km/h. È possibile affermare che almeno in un istante l'auto di Barbara ha superato il limite di velocità? Giustifica adeguatamente la risposta.



91 **Autovelox/ 2.** Due autovelox sono posti su un'autostrada a una distanza di 25 km. Quando l'auto di Paolo passa dal primo autovelox, quest'ultimo rileva una velocità di 120 km/h; quando, 12 minuti dopo, l'auto passa davanti al secondo autovelox, viene misurata una velocità di 125 km/h. Il limite di velocità è quello ordinario di 130 km/h. È possibile affermare che almeno in un istante l'auto di Paolo ha superato il limite di velocità? Giustifica adeguatamente la risposta.

92 **Limite di velocità.** Barbara si reca in ufficio in auto. Il percorso dalla casa di Barbara all'ufficio è di 21 km e Barbara oggi ha compiuto il tragitto in 18 minuti. Assumendo che la velocità dell'auto alla partenza e all'arrivo sia nulla, dimostra che per almeno due volte il tachimetro dell'auto di Barbara ha segnato una velocità di 65 km/h.

2. Funzioni crescenti e decrescenti e criteri per l'analisi dei punti stazionari

Teoria p. 338

Esercizi introduttivi

93 **Vero o falso?**

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I e sia x_0 un punto interno a I.

a. se $f'(x_0) = 0$, allora x_0 o è un punto di minimo relativo o è un punto di massimo relativo V F

b. se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo V F

c. se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$ con $x \neq x_0$, allora x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale V F

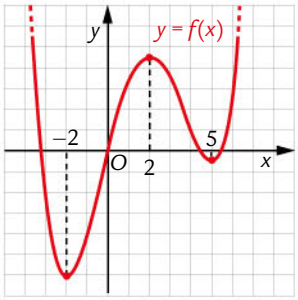
d. se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, allora necessariamente x_0 non è un punto di estremo relativo V F

e. se $f'(x_0) = 0$ ed esiste un intorno destro di x_0 in cui f' è negativa e un intorno sinistro di x_0 in cui f' è positiva, allora x_0 è un punto di massimo relativo V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

Interpretazione di grafici

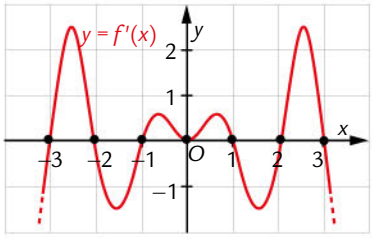
94 In figura è rappresentato il grafico di una funzione polinomiale $y = f(x)$.



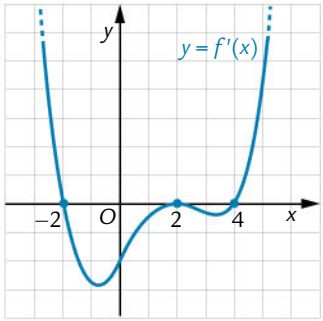
Tenendo conto delle informazioni che puoi «leggere» sul grafico, risolvi le disequazioni:

a. $f'(x) > 0$ **b.** $f'(x) < 0$

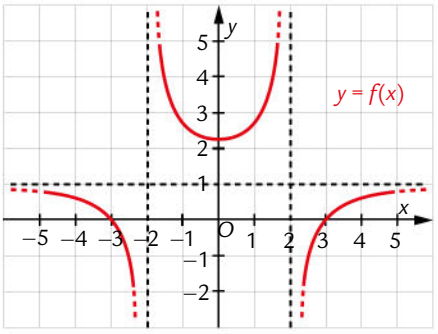
95 In figura è tracciato il grafico della *derivata prima* di una funzione $y = f(x)$. Stabilisci quali sono i punti stazionari della funzione f e se essi sono di massimo o minimo relativo o di flesso a tangente orizzontale.



96 In figura è tracciato il grafico della *derivata prima* di una funzione $y = f(x)$. Stabilisci quali sono i punti stazionari della funzione f e se essi sono di massimo o minimo relativo o di flesso orizzontale.



97 In figura è rappresentato il grafico di una funzione $y = f(x)$.



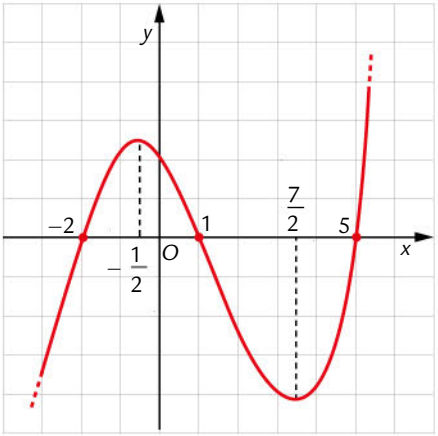
Tenendo conto delle informazioni che puoi «leggere» sul grafico, risolvi le disequazioni:

a. $f'(x) > 0$ **b.** $f'(x) < 0$

98 Considera il grafico in figura.

a. Supponendo che esso sia il grafico della funzione $y = f(x)$, determina gli intervalli in cui $y = f'(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa.

b. Supponendo che esso sia il grafico della funzione $y = f'(x)$, determina gli intervalli in cui $y = f(x)$ è crescente e quelli in cui è decrescente.



99 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione f derivabile in **R** la cui derivata sia tale che:

a. $f'(x) > 0$ per $-1 < x < 2$

b. $f'(x) < 0$ per $x < -1 \vee x > 2$

c. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

100 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione f derivabile in **R** la cui derivata sia tale che:

a. $f'(x) > 0$ per $x < -1$

b. $f'(x) < 0$ per $x > -1 \wedge x \neq 2$

c. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

Giustificare e argomentare

101 Può esistere una funzione f, derivabile in **R**, tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$? Fornisci un esempio di funzione che possiede queste proprietà oppure spiega perché non può esistere.

102 **E se?** Può esistere una funzione f, derivabile in **R**, tale che $f'(x) < 0$ in un intorno destro di 1, $f'(x) > 0$ in un intorno sinistro di 1 e $x = 1$ è un punto di minimo relativo?

▸ La risposta cambierebbe supponendo che in $x = 1$ la funzione sia continua ma non derivabile?

103 Sia $f(x)$ una funzione continua in $[-1, 1]$ e derivabile in $[-1, 1] - \{0\}$. Dimostra che se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (-1, 0)$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 1)$, allora $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

Monotonia, massimi e minimi

Determina gli intervalli dove le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti e gli eventuali punti di massimo, di minimo relativo e di flesso a tangente orizzontale. (Nelle risposte sono indicati gli intervalli aperti dove la funzione è *crescente* e le ascisse degli eventuali punti di minimo, massimo o flesso.)

104 $y = x^2 - 3x + 2$ $\left[x > \frac{3}{2}\text{; minimo per } x = \frac{3}{2}\right]$

105 $y = 2x^2 - 3x$ $\left[x > \frac{3}{4}\text{; minimo per } x = \frac{3}{4}\right]$

106 $y = -x^2 - 8x + 1$ $[x < -4\text{; massimo per } x = -4]$

107 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 6$ $\left[x < \frac{3}{4}\text{; massimo per } x = \frac{3}{4}\right]$

108 $y = x^3 - 3x$ $[x < -1 \vee x > 1\text{; massimo per } x = -1 \text{ e minimo per } x = 1]$

109 $y = 2x^3 + 9x^2$ $[x < -3 \vee x > 0\text{; massimo per } x = -3\text{, minimo per } x = 0]$

110 $y = -x^3 + 12x$ $[-2 < x < 2\text{; minimo per } x = -2\text{, massimo per } x = 2]$

111 $y = -4x^3 + 9x^2$ $\left[0 < x < \frac{3}{2}\text{; minimo per } x = 0\text{, massimo per } x = \frac{3}{2}\right]$

112 $y = \frac{4}{3}x^3 - 9x$ $\left[x < -\frac{3}{2} \vee x > \frac{3}{2}\text{; massimo per } x = -\frac{3}{2}\text{, minimo per } x = \frac{3}{2}\right]$

113 $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ $[x < 1 \vee x > 4\text{; massimo per } x = 1\text{, minimo per } x = 4]$

114 $y = x^4 - 2x^2$ $[-1 < x < 0 \vee x > 1\text{; minimi per } x = \pm 1\text{, massimo per } x = 0]$

115 $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x$ [Crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$]

116 $y = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x$ [Decrescente per ogni $x \in \mathbb{R}$]

117 $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > 1\text{; massimo per } x = -\frac{1}{2} \text{ e minimo per } x = 1\right]$

118 $y = -x^4 - 2x^2$ $[x < 0\text{, massimo per } x = 0]$

119 $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x^3$ $[x < -3 \vee x > 4\text{; massimo per } x = -3\text{, flesso per } x = 0\text{; minimo per } x = 4]$

120 $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ $[0 < x < 1 \vee x > 3\text{; minimo per } x = 0 \vee x = 3\text{, massimo per } x = 1]$

121 $y = (x-2)^3(x+1)^2$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{1}{5}\text{; massimo per } x = -1\text{, minimo per } x = \frac{1}{5}\text{, flesso per } x = 2\right]$

122 $y = (x+1)^3(x-2)^2$ $\left[x < \frac{4}{5} \vee x > 2\text{; flesso per } x = -1\text{, massimo per } x = \frac{4}{5} \text{ e minimo per } x = 2\right]$

123 $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x$ $[x < -3 \vee -1 < x < 1 \vee x > 3\text{; massimi per } x = -3 \vee x = 1\text{, minimi per } x = -1 \vee x = 3]$

124 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo gli intervalli dove la funzione $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ è crescente o decrescente e gli eventuali punti di massimo relativo, di minimo relativo e di flesso a tangente orizzontale.

—

- La funzione è definita, continua e derivabile per: $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$.
- Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x \cdot x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

- Abbiamo:

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = 2\sqrt{3}$

$y' > 0 \Leftrightarrow x^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow x < -2\sqrt{3} \vee x > 2\sqrt{3}$

Possiamo allora costruire lo schema a lato.



Da esso deduciamo che la funzione è crescente negli intervalli $(-\infty, -2\sqrt{3})$ e $(2\sqrt{3}, +\infty)$, mentre è decrescente negli intervalli $(-2\sqrt{3}, -2)$, $(-2, 2)$ e $(2, 2\sqrt{3})$. Inoltre $x = -2\sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo, $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale e $x = 2\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo.

Nota Per non commettere errori nello studio della derivata prima, occorre sempre prestare attenzione al *dominio* della funzione di partenza. Per esempio, nel caso della funzione precedente, le condizioni sul dominio hanno imposto di considerare in modo diverso i punti $x = 0$ e $x = \pm 2$:
– per $x = 0$ la derivata *non cambia segno* e la funzione *è definita*, quindi abbiamo un punto di flesso;
– anche per $x = \pm 2$ la derivata *non cambia segno*, ma non abbiamo potuto dire in questo caso di essere in presenza di punti di flesso, perché la funzione **non** *è ivi definita* (presenta degli asintoti verticali).

125 $y = 4x + \frac{1}{x}$ — $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}\text{; massimo per } x = -\frac{1}{2}\text{, minimo per } x = \frac{1}{2}\right]$

126 $y = x + \frac{9}{x}$ — $[x < -3 \vee x > 3\text{; massimo per } x = -3\text{, minimo per } x = 3]$

127 $y = 1 - \frac{2}{x} - x$ — $[-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\text{; minimo per } x = -\sqrt{2}\text{, massimo per } x = \sqrt{2}]$

128 $y = x + \frac{1}{x+1}$ — $[x < -2 \vee x > 0\text{; massimo per } x = -2\text{, minimo per } x = 0]$

129 $y = \frac{x}{x^2+9}$ — $[-3 < x < 3\text{; minimo per } x = -3\text{, massimo per } x = 3]$

130 $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ — $[x > 0\text{; minimo per } x = 0]$

131 $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$ — $[x > 0\text{, con } x \neq 1\text{; minimo per } x = 0]$

132 $y = \frac{x^2-4}{x^3}$ — $[-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}\text{, con } x \neq 0\text{; minimo per } x = -2\sqrt{3} \text{ e massimo per } x = 2\sqrt{3}]$

133 $y = \frac{x^2-2x}{x-4}$ — $[x < 4 - 2\sqrt{2} \vee x > 4 + 2\sqrt{2}\text{; minimo per } x = 4 + 2\sqrt{2} \text{ e massimo per } x = 4 - 2\sqrt{2}]$

134 **Videolezione** $y = \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$ — $[x < -4 \vee x > -1\text{; massimo per } x = -4]$

135 $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ — $[1 < x < 5\text{; minimo per } x = 1\text{, massimo per } x = 5]$

136 $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ — $[x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}\text{; massimo per } x = -\sqrt{3}\text{, flesso a tangente orizzontale per } x = 0\text{, minimo per } x = \sqrt{3}]$

137 $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ — $[x < 0 \vee 1 < x < 2\text{; minimo per } x = 1]$

138 $y = x\sqrt{4-x}$ — $\left[x < \frac{8}{3}\text{; massimo per } x = \frac{8}{3}\right]$

139 $y = (x-3)\sqrt{x}$ $[x > 1;$ minimo per $x = 1]$

140 $y = \sqrt[3]{x} - x$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{9} < x < \frac{\sqrt{3}}{9};\right.$ minimo per $x = -\frac{\sqrt{3}}{9}$, massimo per $\left.x = \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$

141 $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ [Crescente nel dominio, cioè per ogni $x \geq 0$]

142 $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$ [Crescente nel dominio, cioè per $-1 \leq x < 0 \vee x \geq 1$]

143 $y = \sqrt[3]{6x - x^3}$ $\left[-\sqrt{2} < x < \sqrt{2};\right.$ minimo per $x = -\sqrt{2}$, massimo per $\left.x = \sqrt{2}\right]$

144 $y = \sqrt[3]{2x^3 - x^2}$ $\left[x < 0 \vee x > \frac{1}{3};\right.$ minimo per $\left.x = \frac{1}{3}\right]$

145 $y = x\sqrt{9 - x^2}$ $\left[-\frac{3\sqrt{2}}{2} < x < \frac{3\sqrt{2}}{2};\right.$ minimo per $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, massimo per $\left.x = \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

146 $y = (x-2)\sqrt{x^2-1}$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{1+\sqrt{3}}{2};\right.$ minimo per $\left.x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

147 $y = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ $[x > 0;$ minimo per $x = 0]$

148 $y = \sqrt{x^2 - 2x} - 3x$ $\left[2 \leq x < \frac{3\sqrt{2}}{4} + 1;\right.$ massimo per $\left.x = \frac{3\sqrt{2}}{4} + 1\right]$

149 $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ $\left[x > -\frac{1}{2};\right.$ minimo per $\left.x = -\frac{1}{2}\right]$

150 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo gli intervalli dove la funzione $y = \ln(x^2 - 4x)$ è crescente o decrescente e gli eventuali punti di massimo relativo, di minimo relativo e di flesso a tangente orizzontale.

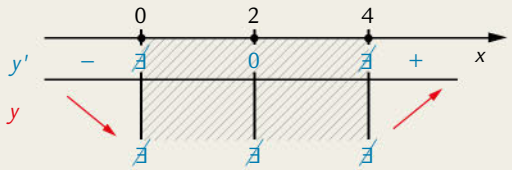
La funzione è definita e continua per $x^2 - 4x > 0$, cioè per: $x < 0 \vee x > 4$.

Calcolando la derivata prima, otteniamo: $y' = \frac{2(x-2)}{x^2-4x}$.

Nello studio del segno della derivata prima occorre prestare attenzione a tenere in considerazione il *dominio* della funzione. Il denominatore è ovviamente sempre positivo nel dominio. Il numeratore, invece, è positivo per $x > 2$, quindi, limitatamente al dominio, avremo:

$y' > 0 \Leftrightarrow x > 4$

Possiamo allora costruire il seguente schema, dove la parte tratteggiata indica l'intervallo «vietato» dal campo di esistenza della funzione.



Pertanto, la funzione è decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 4$ e non presenta punti di estremo relativo o di flesso.

151 $y = \ln(3x - x^2)$ $\left[0 < x < \frac{3}{2};\right.$ massimo per $\left.x = \frac{3}{2}\right]$

152 $y = \ln(x^2 - 4x + 3)$ $[x > 3;$ non ci sono punti di estremo relativo$]$

153 $y = x \ln x$ $[x > e^{-1};$ minimo per $x = e^{-1}]$

154 $y = \frac{\ln x}{x^2}$ $\left[0 < x < \sqrt{e};\right.$ massimo per $\left.x = \sqrt{e}\right]$

155 $y = \ln^4 x$ — $[x > 1;$ minimo per $x = 1]$

156 $y = \dfrac{x}{\ln^2 x}$ — $[0 < x < 1 \vee x > e^2;$ minimo per $x = e^2]$

157 $y = \ln^2 x$ — $[x > 1,$ minimo per $x = 1]$

158 $y = \ln^2 x - \ln x$ — $\left[x > \sqrt{e};\right.$ minimo per $\left.x = \sqrt{e}\right]$

159 $y = \ln|x^2 - 3x + 2|$ — $\left[1 < x < \dfrac{3}{2} \vee x > 2;\right.$ massimo per $\left.x = \dfrac{3}{2}\right]$

160 $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$ — $[x > 1;$ minimo per $x = 1]$

161 $y = \ln x + \dfrac{2}{x}$ — $[x > 2,$ minimo per $x = 2]$

162 $y = e^{-x^2+3x}$ — $\left[x < \dfrac{3}{2};\right.$ massimo per $\left.x = \dfrac{3}{2}\right]$

163 $y = xe^{4-x^2}$ — $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2};\right.$ minimo per $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, massimo per $\left.x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

164 $y = (x+1)e^{-2x}$ — $\left[x < -\dfrac{1}{2};\right.$ massimo per $\left.x = -\dfrac{1}{2}\right]$

165 $y = e^{-2x} + e^x$ — $\left[x > \dfrac{1}{3}\ln 2,\right.$ minimo per $\left.x = \dfrac{1}{3}\ln 2\right]$

166 $y = e^{2x} - 2e^x$ — $[x > 0,$ minimo per $x = 0]$

167 $y = e^{3x} - 6e^{2x}$ — $[x > 2\ln 2;$ minimo per $x = 2\ln 2]$

168 $y = e^{\frac{x^2-1}{x+2}}$ — $[x < -2-\sqrt{3} \vee x > -2+\sqrt{3},$ massimo per $x = -2-\sqrt{3}$, minimo per $x = -2+\sqrt{3}]$

169 **Videolezione** $y = e^{\frac{x^2}{x+2}}$ — $[x < -4 \vee x > 0;$ massimo per $x = -4,$ minimo per $x = 0]$

170 $y = e^x(x-2)$ — $[x > 1,$ minimo per $x = 1]$

171 $y = e^x(x^2-4)$ — $[x < -1-\sqrt{5} \vee x > -1+\sqrt{5},$ massimo per $x = -1-\sqrt{5}$, minimo per $x = -1+\sqrt{5}]$

172 $y = \dfrac{e^{2x}}{x}$ — $\left[x > \dfrac{1}{2};\right.$ minimo per $\left.x = \dfrac{1}{2}\right]$

173 $y = xe^{-\frac{1}{x}}$ — $[x < -1 \vee x > 0;$ massimo per $x = -1]$

174 $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$ — $[x < 1 \vee x > 4;$ massimo per $x = 1,$ minimo per $x = 4]$

175 $y = \dfrac{1}{\ln^2 x} - \dfrac{1}{\ln x}$ — $[0 < x < 1 \vee x > e^2;$ minimo per $x = e^2]$

176 $y = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x+2}$ — [Crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$]

177 $y = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ [$x < 0$, massimo per $x = 0$]

178 $y = e^{x \ln |x|}$ [$x < -e^{-1} \vee x > e^{-1}$; massimo per $x = -e^{-1}$, minimo per $x = e^{-1}$]

179 $y = \dfrac{\ln^2 x}{\ln x - 1}$ [$0 < x < 1 \vee x > e^2$, minimo per $x = e^2$, massimo per $x = 1$]

180 $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - \dfrac{2}{x} - \ln x$ [$0 < x < 1 \vee x > 2$; massimo per $x = 1$, minimo per $x = 2$]

181 $y = \sin^3 x \quad \text{in } [0, 2\pi]$

$\left[0 < x < \dfrac{\pi}{2} \vee \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\text{; massimo per } x = \dfrac{\pi}{2}\text{, flesso a tangente orizzontale per } x = \pi\text{, minimo per } x = \dfrac{3\pi}{2}\right]$

182 $y = \sin^2 x - 2 \sin x \quad \text{in } [0, 2\pi]$ $\left[\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}\text{; minimo per } x = \dfrac{\pi}{2}\text{, massimo per } x = \dfrac{3\pi}{2}\right]$

183 $y = \sin x - \sin^2 x \quad \text{in } [0, 2\pi]$

$\left[0 < x < \dfrac{\pi}{6} \vee \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{6} \vee \dfrac{3\pi}{2}\pi < x < 2\pi\text{; massimi per } x = \dfrac{\pi}{6} \vee x = \dfrac{5\pi}{6}\text{, minimi per } x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{3\pi}{2}\right]$

184 $y = 2 \sin^2 x - x$ $\left[\dfrac{\pi}{12} + k\pi < x < \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\text{; minimi per } x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi\text{, massimi per } x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\right]$

185 $y = \dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$ $\left[\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\text{;minimi per } x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$

186 $y = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

$\left[2k\pi < x < \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\text{; massimi per } x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\text{, minimi per } x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

187 $y = \arcsin(x^2 - 2x)$ [$1 < x < 1 + \sqrt{2}$; minimo per $x = 1$, dove la funzione non è derivabile (punto angoloso)]

188 $y = \arctan^2(x^2 - 1)$ [$-1 < x < 0 \vee x > 1$; minimi per $x = \pm 1$, massimo per $x = 0$]

189 $y = -\arctan x - 2 \ln(x^2 + 1) + x$ [Crescente per $x < 0 \vee x > 4$; massimo per $x = 0$, minimo per $x = 4$]

190 $y = x^x$ [$x > e^{-1}$; minimo per $x = e^{-1}$]

191 $y = x^{x^2}$ $\left[x > e^{-\frac{1}{2}}\text{; minimo per } x = e^{-\frac{1}{2}}\right]$

192 $y = x \ln |x| - \dfrac{1}{4}x^2$

[$x < \alpha \vee \beta < x < \gamma$, con $\alpha \in (-1, 0)$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \in (5, 6)$; massimo per $x = \alpha \vee x = \gamma$, minimo per $x = \beta$]

193 $y = \ln(x + \ln |x|)^2$ [$-1 < x < 0 \vee x > \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$; minimo per $x = -1$]

Realtà e modelli

194 **Clienti attesi.** Il numero di clienti attesi in un bar tra le 9 del mattino e le 19 è ben modellizzato dalla funzione:

$$f(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{27}{4}t^2 - 21t + 30 \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 10$$



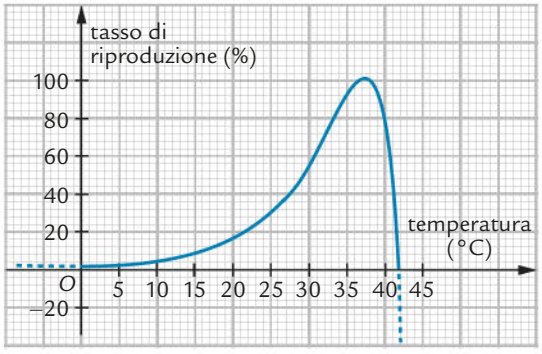
dove t è il tempo (misurato in ore) trascorso a partire dalle 9. Determina secondo questo modello:

a. in quale intervallo di tempo tra le 9 e le 19 il numero di clienti in arrivo risulta crescente;

b. in quale orario si registra il massimo numero di clienti e a quanto ammonta il numero di clienti massimo.

[**a.** Tra le 11 e le 16; **b.** alle 16, quando si attendono circa 42 clienti]

195 **Riproduzione batterica.** In figura è riportato il grafico della funzione $f(t) = (59 - 1{,}4t)e^{0{,}2t-4{,}75}$. Esso rappresenta, per $0 \le t \le 43$, il tasso di riproduzione di una certa specie di batteri, in un prefissato intervallo di tempo, in funzione della temperatura t.



Deduci dalla lettura del grafico:

a. una stima delle temperature per cui il tasso di riproduzione è maggiore o uguale al 60%;

b. una stima dell'intervallo di temperature per cui il tasso di riproduzione è crescente e una stima dell'intervallo di temperature per cui il tasso di riproduzione è decrescente;

c. una stima della temperatura per cui il tasso di riproduzione è massimo;

d. una stima della temperatura a partire dalla quale i batteri non si riproducono più.

Ritrova poi i risultati ottenuti ai punti **b**, **c** e **d** mediante il calcolo.

196 **ESERCIZIO GUIDATO**

Stabilisci se i punti stazionari della funzione $f(x) = x^5 - 5x^3$ sono punti di massimo o minimo relativi, utilizzando se possibile il metodo della derivata seconda.

- Calcola la derivata prima e la derivata seconda:
  $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(\ldots\ldots)$
  $f''(x) = 5 \cdot 4x^{\cdots} - 15 \cdot \ldots\ldots = 10x(\ldots\ldots)$
- Determina i punti stazionari:
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\ldots\ldots} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{\ldots\ldots}$
- Applica il criterio della derivata seconda:
  $f''(-\sqrt{\ldots\ldots}) = \ldots\ldots < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\ldots\ldots}$ è un punto di ……
  $f''(0) = 0 \Rightarrow$ il test della derivata seconda non consente di concludere
  $f''(\sqrt{\ldots\ldots}) = \ldots\ldots > 0 \Rightarrow x = \sqrt{\ldots\ldots}$ è un punto di ……
- Per determinare la natura del punto $x = 0$, stabilisci se la derivata prima cambia segno nell'intorno di $x = 0$; dall'analisi del segno di y' puoi concludere che $x = 0$ è un punto di ……

Stabilisci, utilizzando se possibile il metodo della derivata seconda, se i punti stazionari delle seguenti funzioni sono di massimo o minimo relativo.

197 $y = x^5 - 5x$ [Massimo per $x = -1$, minimo per $x = 1$]

198 $y = x^5 - 5x^2$ [Massimo per $x = 0$, minimo per $x = \sqrt[3]{2}$]

199 $y = x^4 - 4x^2 + 2$ [Minimi per $x = \pm\sqrt{2}$, massimo per $x = 0$]

200 $y = x^6 - 3x^3$ [Flesso per $x = 0$, minimo per $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$]

201 $y = xe^{-2x}$ [Massimo per $x = \frac{1}{2}$]

202 $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x$ [Massimi per $x = -2 \vee x = 1$; minimi per $x = -1 \vee x = 2$]

203 $y = \sin x - \frac{1}{2}\cos 2x$ [Massimi per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; minimi per $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$]

204 $y = \sin^3 x + 3\cos^2 x$ [Massimi per $x = k\pi$, minimi per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$]

205 $y = x^2 \ln x$ [Minimo per $x = e^{-\frac{1}{2}}$]

206 $y = x^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}x$ [Massimo per $x = \frac{1}{16}$]

207 $y = \ln x + \ln(9 - x^2)$ [Massimo per $x = \sqrt{3}$]

---

208 Dimostra che la funzione $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$ è invertibile.
(*Suggerimento*: è sufficiente mostrare che la funzione è strettamente monotona.)

209 Dimostra che la funzione $f(x) = x + 1 + \arctan x$ è invertibile.
(*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente.)

Esercizi con parametri su massimi, minimi, funzioni crescenti e decrescenti

210 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo a e b in modo che il grafico della funzione $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ abbia un punto di estremo relativo di coordinate $(-1, -2)$.

- Per determinare a e b servono due condizioni; possiamo imporre:
  a. che il punto $(-1, -2)$ appartenga al grafico della funzione;
  b. che $x = -1$ sia un punto stazionario per la funzione.
- Sostituendo $x = -1$ e $y = -2$ nell'equazione della funzione, la prima condizione si traduce nell'equazione:
  $-2 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 \Rightarrow a - b = -2$ [*]
- La derivata prima è $y' = 3x^2 + 2ax + b$; la condizione che $x = -1$ sia un punto stazionario, cioè $y'(-1) = 0$, si traduce nell'equazione:
  $0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b \Rightarrow 2a - b = 3$ [**]
- Risolvendo il sistema formato dalle equazioni [*] e [**]:

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$$

otteniamo che deve essere $a = 5$, $b = 7$.

211 Determina a e b in modo che il grafico della funzione $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ abbia un punto stazionario di coordinate $(1, 2)$. [$a = -3, b = 3$]

212 Determina a, b e c in modo che il grafico della funzione $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ abbia un punto di estremo relativo di coordinate $(-1, 3)$ e intersechi l'asse y in $(0, 3)$. [$a = 2, b = 1, c = 3$]

213 Determina a, b e c in modo che il grafico della funzione $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ intersechi l'asse y nel punto di coordinate $(0, 1)$, avendo in tale punto tangente parallela alla retta di equazione $y = -2x$, e presenti per $x = 2$ un punto di estremo relativo. [$a = -\frac{5}{2}, b = -2, c = 1$]

214 Determina per quale valore di k la funzione $y = \frac{x^2 + kx}{x^2 + 1}$ ha un punto stazionario per $x = 2$. In corrispondenza del valore di k trovato, stabilisci la natura del punto stazionario $x = 2$. [$k = \frac{4}{3}$, $x = 2$ è un punto di massimo]

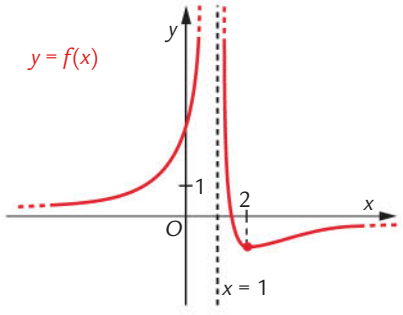
215 Determina a e b in modo che la funzione $y = \frac{x^2 + a}{x + b}$ abbia un punto di massimo relativo per $x = -1$ e un punto di minimo relativo per $x = 2$. [$a = 2, b = -\frac{1}{2}$]

216 Considera la funzione $f(x)=\frac{x^2+a}{x+b}$. Determina a e b in modo che abbia un asintoto verticale di equazione $x=-1$ e un punto di massimo relativo per $x=-2$. $[a=0, b=1]$

217 Considera la funzione $f(x)=\frac{ax^2+b}{x^2+1}$. Determina a e b in modo che abbia un asintoto orizzontale di equazione $y=2$ e il minimo assoluto della funzione sia uguale a -4. $[a=2, b=-4]$

Interpretazione di grafici

218 In figura è rappresentato il grafico di una funzione di equazione del tipo $y=\frac{a-2x}{(x+b)^2}$. Determina i valori di a e b in base alle informazioni leggibili sul grafico.



$[a=3, b=-1]$

219 **Videolezione** Considera la funzione $y=\frac{x^2+ax+b}{x}$. Determina a e b in modo che presenti un punto di estremo relativo per $x=2$ e che il suo asintoto obliquo passi per il punto di coordinate $(3, 8)$. $[a=5, b=4]$

220 Considera la funzione $y=\frac{ax^2+4x+b}{x}$. Determina a e b in modo che presenti un punto di estremo relativo per $x=4$ e che la tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x=2$ sia parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante. $\left[a=\frac{1}{3}, b=\frac{16}{3}\right]$

221 Determina il valore del parametro k in modo che la funzione $y=k\sin x-2\cos x-1$ presenti un punto di estremo relativo per $x=\frac{\pi}{3}$. $[k=-2\sqrt{3}]$

222 Data la funzione $y=axe^{bx^2}$, determina a e b in modo che il suo grafico abbia un massimo nel punto di coordinate $(1, 2)$. $\left[a=2\sqrt{e}, b=-\frac{1}{2}\right]$

223 Determina a e b sapendo che il grafico della funzione $y=a\cos 2x+4\sin x+b$ ha un minimo nel punto di coordinate $\left(-\frac{\pi}{6}, 2\right)$. $[a=-2, b=5]$

224 Data la funzione $y=a\ln^2 x+b\ln x$, determina a e b in modo che il suo grafico abbia un minimo nel punto di coordinate $(e, -2)$. $[a=2, b=-4]$

225 Data la funzione $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{a^3}{x}$, determina per quali valori di a essa ha un punto di minimo relativo di ordinata uguale a 6. $[a=\pm 2]$

226 Data la funzione $y=\frac{kx^2-4x+k+3}{x^2+1}$, verifica che per ogni $k\in\mathbf{R}$ essa ha due punti di estremo relativo. Determina per quali valori di k uno dei due punti di estremo relativo ha ordinata nulla. $[k=-4 \vee k=1]$

227 Data la funzione $y=\ln x+\frac{a}{x}$, determina per quale valore di a il minimo valore assunto dalla funzione è 3. $[a=e^2]$

228 Data la funzione $y=x^3-kx^2+3x-1$, determina per quali valori di k essa ammette punti stazionari e questi ultimi sono tutti punti di flesso. $[k=\pm 3]$

229 Determina a e b in modo che la funzione $y=e^{2x}+ae^{-x}+b$ presenti un punto di estremo relativo di coordinate $(\ln 3, 2)$. $[a=54, b=-25]$

230 Data la funzione $y = ax^3 + bx^2 + 2x - 1$, stabilisci quali condizioni devono soddisfare i parametri a e b in modo che la funzione presenti un punto di massimo relativo per $x = -1$. $\left[b = \frac{3a}{2} + 1 \text{ e } a > \frac{2}{3}\right]$

231 Considera la funzione $y = (x + k)\sqrt{x}$. Determina per quali valori di k:

a. ammette un punto stazionario;
b. ammette un punto di estremo relativo di ascissa uguale a 2;
c. ammette un punto di estremo relativo di ordinata uguale a -2. [**a.** $k \leq 0$; **b.** $k = -6$; **c.** $k = -3$]

232 Considera la funzione $y = \frac{x + a}{\sqrt{x^2 + 4}}$. Determina per quali valori di a:

a. non ammette punti di estremo relativo;
b. ammette un punto di minimo relativo;
c. ammette un punto di massimo relativo;
d. ammette un punto stazionario di ascissa $x = 8$. $\left[\text{**a.** } a = 0; \text{ **b.** } a < 0; \text{ c. } a > 0; \text{ **d.** } a = \frac{1}{2}\right]$

233 Considera la funzione $y = \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + 4}}$. Determina per quali valori di a:

a. ammette un solo punto di estremo relativo;
b. ammette un massimo relativo di ordinata 5;
c. ammette un minimo relativo nel punto di ascissa 2;
d. ammette due minimi relativi di ordinata 8. [**a.** $a \leq 8$; **b.** $a = 10$; **c.** $a = 12$; **d.** $a = 20$]

234 Determina per quale valore di a, con $a > 0$ e $a \neq 1$, il punto di massimo relativo della funzione $y = \log_a x - x$ ha ordinata nulla. $\left[a = e^{\frac{1}{e}}\right]$

235 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo per quali valori di k la funzione $y = x^3 - kx^2 + 2x - 2$ è crescente.

La funzione data soddisfa la condizione richiesta se e solo se risulta $y' \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Quest'ultima condizione, essendo $y' = 3x^2 - 2kx + 2$, è verificata quando il discriminante dell'equazione $3x^2 - 2kx + 2 = 0$ è minore o uguale a zero, cioè quando:

$k^2 - 6 \leq 0$ **Abbiamo calcolato $\frac{\Delta}{4}$, utilizzando la formula ridotta**

Ne deduciamo che deve essere $-\sqrt{6} \leq k \leq \sqrt{6}$.

236 Determina per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la funzione $y = x^3 - ax^2 + x + 1$ è crescente. $[-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}]$

237 Determina per quali valori di k la funzione $y = -\frac{1}{3}x^3 + k^2x - 3kx$ è decrescente. $[0 \leq k \leq 3]$

238 Determina per quali valori di k la funzione $y = \frac{1}{3}(k-1)x^3 - \frac{1}{2}kx^2 + kx - x$ è decrescente. $\left[k \leq \frac{2}{3}\right]$

239 Determina per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la funzione $y = e^x - ax$ è crescente. $[a \leq 0]$

240 Determina per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la funzione $y = e^{2x} - ae^x + x$ è crescente. $[a \leq 2\sqrt{2}]$

241 Sia k una costante con $|k| > 1$. Dimostra che la funzione $f(x) = kx + \cos x$ è strettamente monotona in $\mathbf{R}$. Crescente o decrescente? Distingui i casi, al variare di k.

242 Verifica che la funzione $y = x + \frac{4}{x} - k \ln|x|$ ammette sia un punto di minimo relativo sia un punto di massimo relativo per ogni $k \in \mathbf{R}$.

243 Considera la funzione $y = 3 \sin 2x - kx + 1$ e determina per quali valori di k non ammette né punti di minimo relativo, né punti di massimo relativo. $[k \leq -6 \vee k \geq 6]$

244 Determina per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la funzione $y = \frac{1}{2}(a^2 - 1)\sin 2x - (a+5)x - 1$ non ha né massimi né minimi. $[-2 \leq a \leq 3]$

3. Problemi di ottimizzazione

Teoria p. 343

Massimi e minimi assoluti

245 ESERCIZIO GUIDATO

Determina, se esistono, il minimo e il massimo assoluti delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato:

a. $y = \sqrt[3]{\cos^2 x}$ **in** $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ **b.** $y = \frac{\ln x}{x}$ **in** $(0, +\infty)$

a. Osserva che l'intervallo $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ è chiuso e limitato, quindi in base al teorema di Weierstrass è garantita l'esistenza del minimo e del massimo assoluti. Per determinarli procedi come segue:

- calcola la derivata prima e verifica che $y' = -\frac{2 \sin x}{3\sqrt[3]{\cos x}}$;
- deduci che nell'intervallo $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione ha due punti stazionari (di cui uno coincidente con un estremo dell'intervallo considerato) e non è derivabile per $x = \pm$ .....;
- confronta i valori assunti dalla funzione in corrispondenza dei punti stazionari, dei punti di non derivabilità e degli estremi dell'intervallo dato; troverai così che il minimo assoluto della funzione nell'intervallo dato vale ..... e il massimo assoluto vale .....

b. Osserva che l'intervallo $(0, +\infty)$ **non** è chiuso e limitato, quindi **non** è garantita l'esistenza del minimo e del massimo assoluto. Per stabilirlo procedi come segue:

- calcola anzitutto la derivata prima e verifica che $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$;
- deduci che nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è sempre derivabile e ammette un unico punto stazionario, $x =$ .....;
- calcola $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;
- dal confronto tra il valore assunto dalla funzione in corrispondenza del punto stazionario e i valori dei limiti, puoi concludere che nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione **non** ammette ..... assoluto (l'estremo inferiore è .....), mentre ammette massimo assoluto, uguale a e^{-1}.

Determina, se esistono, il minimo e il massimo assoluti di ciascuna funzione, nell'intervallo indicato a fianco. Se non esistono massimo o minimo assoluti, precisa estremo inferiore o estremo superiore.

246 $y = x^3 - 3x - 1$ $[-2, 0]$ $[\min = -3; \max = 1]$

247 $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ $[-3, 1]$ $\left[\min = -2; \max = 4 - 2\sqrt{5}\right]$

248 $y = x^4 - 2x^2$ $[0, 2]$ $[\min = -1; \max = 8]$

249 $y = x + \frac{1}{x}$ $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ $\left[\min = 2, \max = \frac{5}{2}\right]$

250 $y = x\sqrt{4 - x^2}$ $[0, 2]$ $[\min = 0, \max = 2]$

251 $y = x - \cos x$ $[-\pi, \pi]$ $[\min = 1 - \pi; \max = 1 + \pi]$

252 $y = \frac{\ln x}{x^2}$ $[1, 3]$ $\left[\min = 0, \max = \frac{1}{2e}\right]$

253 $y = |x^2 - 4|$ $[-3, 1]$ $[\min = 0, \max = 5]$

254 $y = \sqrt{4x - x^3}$ $[0, 2]$ $\left[\min = 0, \max = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\right]$

255 $y = 2 \sin x - x$ $[0, 2]$ $\left[\min = 2 \sin 2 - 2, \max = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right]$

256 $y = xe^{-x}$ $[0, +\infty)$ $[\min = 0, \max = e^{-1}]$

257 $y = \sin^2 x + \cos x$ $[0, \pi]$ $\left[\min = -1, \max = \frac{5}{4}\right]$

258 $y = x^2 + \frac{1}{x}$ $(0, +\infty)$ $\left[\min = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2},\ \sup = +\infty,\ \text{max non esiste}\right]$

259 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ $(-\infty, +\infty)$ $[\min = -1,\ \sup = 1,\ \text{max non esiste}]$

260 $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ $[0, 2]$ $\left[\min = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{4},\ \max = \sqrt[3]{4}\right]$

261 $y = 3 - 2\sqrt{|x+1|}$ $[-2, 0]$ $[\min = 1,\ \max = 3]$

262 $y = x^3 + 3|x|$ $[-2, 0]$ $[\min = -2,\ \max = 2]$

263 $y = x^3 - 3|x|$ $[-1, 2]$ $[\min = -4,\ \max = 2]$

264 $y = \tan x - 2x$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\min = 1 - \frac{\pi}{2},\ \sup = +\infty,\ \text{max non esiste}\right]$

265 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2}$ $[0, +\infty)$ $\left[\max = 1,\ \min = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

266 $y = (\arctan x)^2$ $[-1, +\infty)$ $\left[\min = 0,\ \sup = \frac{\pi^2}{4},\ \text{max non esiste}\right]$

Determina, se esistono, il massimo e il minimo assoluti di ciascuna funzione nel suo dominio naturale. Se non esistono massimo o minimo assoluti, precisa estremo inferiore o estremo superiore.

267 $y = \frac{2x}{1 + x^2}$ $[\min = -1,\ \max = 1]$

268 $y = \frac{x^2}{1 + x^4}$ $\left[\min = 0,\ \max = \frac{1}{2}\right]$

269 $y = xe^{-2x^2}$ $\left[\min = -\frac{1}{2\sqrt{e}},\ \max = \frac{1}{2\sqrt{e}}\right]$

270 $y = 2\sin^2 x$ $[\min = 0,\ \max = 2]$

271 $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ $\left[\inf = -1,\ \max = \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

272 $y = \ln^2 x - \ln x^2$ $[\min = -1,\ \sup = +\infty]$

273 $y = \cos 2x - \sin x$ $\left[\min = -2,\ \max = \frac{9}{8}\right]$

Problemi di massimo e di minimo numerici

274 Determina il numero reale positivo tale che la differenza tra il cubo del numero e il triplo del quadrato del numero stesso sia la minima possibile. [2]

275 Determina il numero reale positivo tale che la differenza tra il quadruplo del quadrato del numero e un terzo del cubo del numero stesso sia la massima possibile. [8]

276 Determina il numero reale positivo tale che la somma tra il numero stesso e il doppio del suo reciproco sia minima. $[\sqrt{2}]$

277 Determina il numero reale positivo tale che la somma tra il doppio del suo quadrato e il suo reciproco sia minima. $\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right]$

278 Due numeri reali non negativi hanno somma 2. Determina i due numeri in modo che sia massimo il prodotto del primo per il quadrato del secondo. $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$

279 Due numeri reali non negativi hanno somma 2. Determina i due numeri in modo che sia massimo il prodotto del primo per il cubo del secondo. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

280 Due numeri reali non negativi hanno somma 3. Determina i due numeri in modo che sia massimo il prodotto del quadrato del primo per il cubo del secondo. $\left[\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right]$

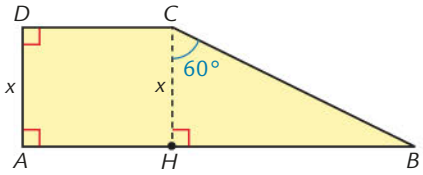
Problemi di massimo e di minimo di geometria nel piano

281 Tra i rettangoli di perimetro uguale a 100 cm, determina le misure dei lati del rettangolo di area massima.
[Il quadrato di lato 25 cm]

282 Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio avente per diametro un lato del rettangolo; il contorno della finestra misura 4 m. Determina le dimensioni del rettangolo in modo che l'area totale della finestra sia massima.
[Il diametro della finestra deve avere lunghezza $\frac{8}{\pi+4}$]

283 Tra i rettangoli di area uguale a 100 cm^2, determina le misure dei lati del rettangolo di perimetro minimo.
[Il quadrato di lato 10 cm]

284 Tra i trapezi rettangoli del tipo in figura, di area uguale a 150 cm^2, determina la misura dell'altezza del trapezio di perimetro minimo. [10 cm]



285 ESERCIZIO GUIDATO

Tra i rettangoli di area $4a^2$, trova quello di diagonale minima.

- Indica con x la misura di uno dei due lati del rettangolo; allora la misura dell'altro lato sarà $\frac{4a^2}{x}$.
- Per il teorema di Pitagora, devi quindi trovare il minimo della funzione $f(x)=\sqrt{x^2+\left(\frac{4a^2}{\ldots\ldots}\right)^2}$.

286 Tra i triangoli rettangoli di area a^2, dimostra che quello di ipotenusa minima è quello isoscele. È possibile determinare un triangolo di ipotenusa massima?
(*Suggerimento*: indica con la x la misura di un cateto e verifica che la funzione che esprime la misura dell'ipotenusa è $y=\sqrt{x^2+\frac{4a^4}{x^2}}$.)
[Il minimo per $x=a\sqrt{2}$, cui corrisponde un triangolo isoscele]

287 Verifica che, tra tutti i triangoli isosceli aventi perimetro assegnato, uguale a $2p$, quello di area massima è quello equilatero. (*Suggerimento*: indica con $2x$ la misura della base del triangolo e verifica che la funzione che esprime l'area del triangolo è $A(x)=x\sqrt{p^2-2px}$.)
[Il massimo per $x=\frac{p}{3}$]

288 Verifica che, tra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di area massima è quello equilatero.

289 Verifica che, tra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di perimetro massimo è quello equilatero.

290 Tra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, è possibile individuarne uno che abbia perimetro minimo?

291 Verifica che, tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di area massima è il quadrato.

292 Sia $ABCD$ un quadrato il cui lato misura 1 e sia P un punto sul lato AB. Considera, sul prolungamento di BC dalla parte di C, il punto Q tale che $\overline{AP}=\overline{CQ}$ e indica con R il punto in cui la retta PQ incontra il lato CD del quadrato. Determina la distanza di P da A in modo che la lunghezza del segmento RC sia massima.
(*Suggerimento*: poni $\overline{AP}=x$ e verifica che la funzione che esprime la lunghezza del segmento RC è $y=\frac{x-x^2}{1+x}$.)
[Il massimo per $x=\sqrt{2}-1$]

293 Sia ABC un triangolo isoscele di base $\overline{AB}=6a$, i cui lati obliqui misurano $3a\sqrt{5}$. Determina il punto P, sull'altezza CH del triangolo relativa ad AB, per cui la somma delle distanze di P dai tre vertici del triangolo è minima.
[$\overline{PH}=a\sqrt{3}$]

294 Considera un triangolo equilatero ABC il cui lato misura l. Fra i rettangoli inscritti nel triangolo, aventi un lato sulla base AB, determina:

a. quello di area massima;

b. quello di diagonale minima.

(*Suggerimento*: indica con x la misura del lato del rettangolo su AB.)

[L'area è massima per $x = \frac{l}{2}$; la diagonale è minima per $x = \frac{3l}{7}$]

295 **Videolezione** Sia $PQRS$ un rettangolo in cui il lato PQ misura 4 e il lato QR misura 2. Verifica che, tra i triangoli isosceli ABC circoscritti al rettangolo la cui base AB contiene PQ, quello di area minima ha l'altezza relativa ad AB congruente alla metà di AB.
(*Suggerimento*: poni $\overline{AB} = 2x$ e verifica che l'area del triangolo ABC è espressa dalla funzione $A(x) = \frac{2x^2}{x-2}$.)

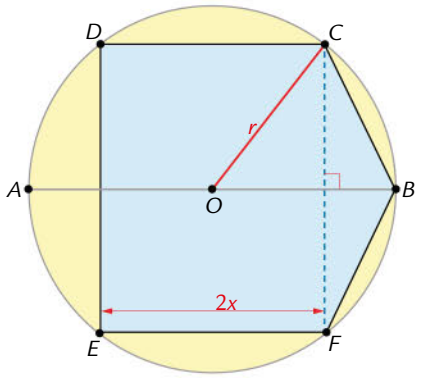
[L'area è minima per $x = 4$; si verifica che in tal caso l'altezza è la metà della base]

296 Considera una semicirconferenza di diametro AB e raggio r. Considera poi un trapezio $ABCD$ inscritto nella semicirconferenza e determina la misura della base minore in modo che l'area del trapezio sia massima.
(*Suggerimento*: poni $\overline{CD} = 2x$ e verifica che la funzione che esprime l'area del trapezio è $A(x) = (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$.)

[L'area è massima per $x = \frac{r}{2}$]

---

297 In figura, $CDEF$ è un rettangolo. Determina x in modo che l'area del pentagono $BCDEF$, inscritto nella circonferenza di diametro AB, centro O e raggio r, sia massima.



[$x = \frac{r}{12}(\sqrt{73} - 1)$]

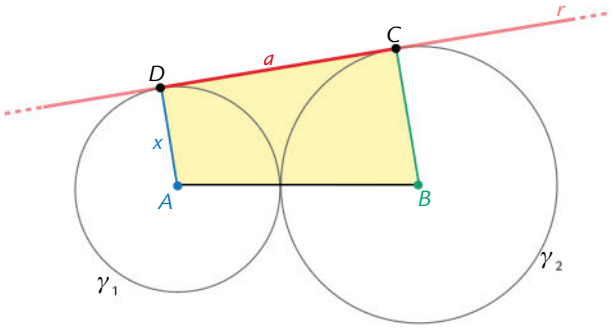
298 Determina la minima area di un triangolo isoscele circoscritto a una circonferenza di raggio r.
(*Suggerimento*: può essere utile indicare con x la distanza del centro della circonferenza dal vertice del triangolo isoscele.) [$3r^2\sqrt{3}$]

299 Considera una semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio r. Traccia una corda CE della semicirconferenza, parallela ad AB (con C più vicino a B che ad A) e indica con D il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{CE}$. Determina la misura della corda EC in modo che l'area del pentagono $ABCDE$ sia massima. (*Suggerimento*: poni $\overline{CE} = 2x$ e verifica che la funzione che esprime l'area è $A(x) = r\sqrt{r^2 - x^2} + rx$.) [Massimo per $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, nel qual caso la corda CE è il lato del quadrato inscritto nella circonferenza di centro O e raggio r]

300 Considera un quadrato $ABCD$ il cui lato misura 2 e indica con M il punto medio del lato CD. Indica con P un punto sul lato AD e con Q il punto d'intersezione con il lato AB della retta passante per P e perpendicolare alla retta PM. Determina la posizione di P in modo che la somma delle aree dei triangoli APQ e PDM sia massima.
(*Suggerimento*: poni $\overline{PA} = x$ e verifica che la funzione che esprime la somma delle aree è $y = \frac{1}{2}(2 - x)(x^2 + 1)$.)

[La somma delle aree è massima quando P coincide con il punto A o con il punto medio di AD]

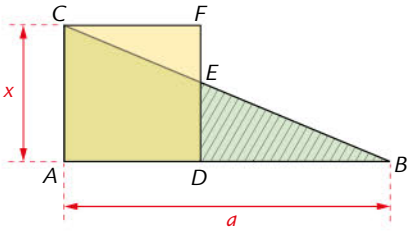
301 Le due circonferenze γ_1 e γ_2 in figura, rispettivamente di centri A e B, sono tangenti esternamente tra loro e ulteriormente tangenti alla retta r, rispettivamente in D e C. Supposto che il raggio di γ_1 sia x e che $\overline{CD} = a$, esprimi in funzione di x l'area del trapezio $ABCD$ e determina per quale valore di x tale area è minima.
(*Suggerimento*: calcola inizialmente il raggio della circonferenza γ_2, quindi verifica che la funzione che esprime l'area del trapezio è $y = \frac{a}{2}\left(x + \frac{a^2}{4x}\right)$.)



[Il minimo si ha per $x = \frac{a}{2}$]

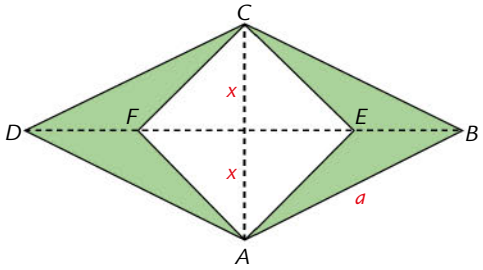
Matematica e storia

302 Durante il periodo Edo (1603-1868), il Giappone visse una fase di isolamento, nel corso della quale gli studi di matematica non furono influenzati dai contemporanei sviluppi in Occidente. In questi anni, lo sviluppo della matematica giapponese fu comunque favorito dall'abitudine di incidere su tavolette di legno, dette *sangaku*, le proprietà matematiche interessanti e le soluzioni ai problemi più impegnativi che venivano scoperte. Queste tavolette erano poi dedicate a un altare o a un tempio, e appese alle travi del soffitto. Per la maggior parte i sangaku trattano argomenti di geometria euclidea. Un problema proposto in un sangaku, che ti invitiamo a risolvere, è il seguente. «Un triangolo rettangolo ABC ha i cateti AB e AC che misurano rispettivamente a e x. Costruito il quadrato $ACFD$, nello stesso semipiano di origine AB in cui giace il triangolo, determina x in modo che sia massima l'area del triangolo DBE tratteggiato».



[Indicata con y l'area del triangolo DBE, si trova che $y = \frac{x}{2a}(a-x)^2$; il massimo si ottiene quando $x = \frac{a}{3}$]

303 Ecco un altro problema proposto in un *sangaku* (*vedi* l'esercizio precedente), che ti proponiamo di risolvere. «Un rombo $ABCD$ ha lato obliquo di misura a e diagonale minore AC di misura $2x$. Internamente al rombo viene costruito il quadrato $AECF$ avente la diagonale AC in comune con il rombo. Determina x in modo che l'area della regione colorata in verde sia massima».



[Indicata con y l'area della regione colorata, si trova che $y = 2\left(x\sqrt{a^2-x^2} - x^2\right)$; massimo per $x = \frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$]

304 Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC, in cui il cateto AB misura 6 e il cateto AC misura 8. Sia P un punto sul lato AB la cui distanza da B è uguale a x.

a. Considerato un punto Q sull'ipotenusa BC, determina la distanza di Q da B (espressa in funzione di x) in modo che l'area del triangolo PBQ sia uguale a 4.

b. Nell'ipotesi che Q sia il punto che soddisfa la condizione espressa in **a**, indica con M il punto medio del cateto AC e determina x in modo che l'area del triangolo PQM sia minima.

[**a.** $\overline{QB} = \frac{10}{x}$, **b.** l'area minima, uguale a $4\sqrt{6} - 4$, si ottiene quando $x = \sqrt{6}$]

305 Considera un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, i cui lati obliqui misurano a. Indica:

a. con H il piede dell'altezza relativa ad AB;

b. con P la proiezione di H su AC;

c. con Q la proiezione di H su BC;

Determina la misura della base AB in modo che la lunghezza di PQ sia massima.
(*Suggerimento*: poni $\overline{AB} = 2x$ e verifica che la funzione che rappresenta la lunghezza di PQ è $f(x) = \frac{2}{a^2}(a^2x - x^3)$.)

[Il massimo viene raggiunto quando $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, quindi $\overline{AB} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$]

306 Considera un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa $\overline{AB} = a$. Determina la misura x del cateto AC in modo che, tracciata la circonferenza avente centro in A e passante per C e indicato con D il suo punto d'intersezione con AB, la misura del segmento CD sia massima.

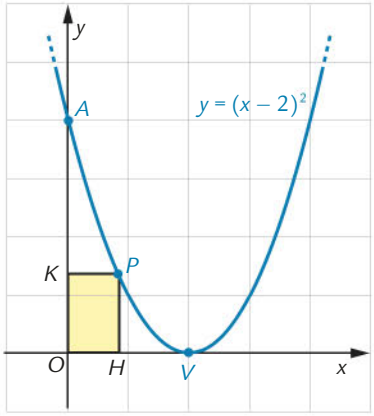
[La funzione che esprime la misura del segmento è $y = \sqrt{2x^2 - \frac{2x^3}{a}}$; massimo per $x = \frac{2}{3}a$]

Problemi di massimo e di minimo di geometria analitica

307 Determina i punti, appartenenti alla parabola di equazione $y = x^2$, che hanno distanza minima dal punto (0, 2). Qual è il valore della minima distanza?

$\left[\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, distanza minima $= \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

308 In riferimento alla figura, P è un punto sull'arco VA della parabola di equazione $y = (x-2)^2$, H è la proiezione di P sull'asse x e K è la proiezione di P sull'asse y. Determina il punto P per cui l'area del triangolo $PHOK$ è massima.

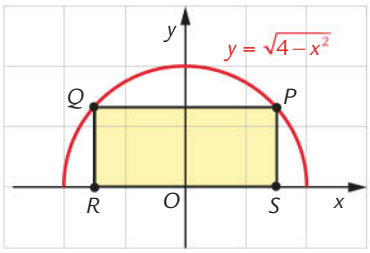


$\left[\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)\right]$

309 In riferimento alla figura, P è un punto del primo quadrante appartenente alla semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{4-x^2}$, Q è il punto della semicirconferenza che ha la stessa ordinata di P, mentre R ed S sono rispettivamente le proiezioni di Q e di P sull'asse x. Determina P in modo che:

a. sia massima l'area del rettangolo $PQRS$;

b. sia massimo il volume del cilindro ottenuto da una rotazione completa del rettangolo $PQRS$ intorno all'asse x.



$\left[\text{a. } (\sqrt{2}, \sqrt{2})\text{; b. } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\right]$

310 Tra le rette passanti per il punto $P(-6, -8)$, qual è quella che ha massima distanza dal punto $A(2, -1)$? (*Suggerimento*: scrivi l'equazione della retta passante per P e di coefficiente angolare generico m e determina m in modo che sia massima la distanza dal punto A).

$\left[m = -\frac{8}{7}\right]$

311 Considera la parabola di equazione $y = ax^2 - x + a$.

a. Verifica che la funzione che esprime la distanza del vertice della parabola dall'origine è:

$$d(a) = \sqrt{a^2 + \frac{5}{16a^2} - \frac{1}{2}}$$

b. Giustifica perché, per individuare i valori di a che corrispondono alla minima distanza del vertice dall'origine, è sufficiente determinare i punti di minimo della funzione $f(a) = a^2 + \frac{5}{16a^2} - \frac{1}{2}$. Individua quindi tali valori di a.

$\left[\text{b. } a = \pm\frac{\sqrt[4]{5}}{2}\right]$

312 Determina il punto P appartenente alla curva di equazione $y = \sqrt{x}$ avente distanza minima dal punto $A(2, 0)$.

$\left[P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right]$

313 Determina i punti appartenenti alla curva di equazione $y = \frac{2}{x^2}$ aventi minima distanza dall'origine O. Detto P uno di tali punti, verifica che la retta OP è perpendicolare alla tangente in P alla curva.

$[(\pm\sqrt{2}, 1)]$

314 Considera una generica retta passante per $P(3, 4)$, di coefficiente angolare negativo, e indica con A e B, rispettivamente, i suoi punti d'intersezione con l'asse x e con l'asse y. Determina l'equazione della retta in corrispondenza della quale è minima la somma dell'ascissa di A con l'ordinata di B.

$\left[y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 4 + 2\sqrt{3}\right]$

315 Determina il punto P appartenente alla parabola di equazione $y = x^2 + 1$ che ha distanza minima dalla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Qual è la minima distanza?

$\left[P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$; distanza minima $= \frac{3\sqrt{2}}{8}\right]$

316 Determina il punto P della curva di equazione $y = \frac{1}{7}x^7 - 4x^4 + \frac{5}{7}$, in cui la retta tangente ha coefficiente angolare minimo. $[P(2, -45)]$

317 Data la parabola di equazione $y = x^2$, traccia due rette perpendicolari, passanti per l'origine O, che intersechino la parabola rispettivamente in A e B (oltre a O). Determina tali rette in modo che sia minima l'area del triangolo AOB. $[y = \pm x]$

318 Fra i punti di ascissa positiva appartenenti all'iperbole di equazione $xy = 4$, determina il punto P avente distanza minima dalla retta r di equazione $y = -2x$. Verifica che la tangente in P all'iperbole è parallela alla retta r.
$\left[P\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)\right]$

319 Considera la funzione $y = \frac{2-x}{x+1}$ e tracciane il grafico. Sull'arco di curva contenuto nel primo quadrante, determina il punto P tale che, dette H e K rispettivamente le sue proiezioni sull'asse x e sull'asse y, il rettangolo $OHPK$ abbia area massima, essendo O l'origine degli assi. $\left[P\left(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1\right)\right]$

320 **Videolezione** Data la parabola di equazione $y = 4x - x^2$, considera il segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse x. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico, con un lato sull'asse x, determina:

a. quello di perimetro massimo;

b. quello di area massima.

[**a.** Il rettangolo che ha un lato sulla retta di equazione $y = 3$;
b. il rettangolo che ha un lato sulla retta di equazione $y = \frac{8}{3}$]

321 **Videolezione** Data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x$, determina il punto P della parabola la cui distanza dal punto $Q(2, 1)$ è minima. $\left[P\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

322 Date le parabole di equazioni $y = -x^2 + 4x + 3$ e $y = x^2 - 2x + 1$, determina una retta parallela all'asse x che le interseca entrambe, in modo che la somma delle misure delle due corde staccate sulle parabole dalla retta sia massima. $\left[y = \frac{7}{2}\right]$

323 Fra le rette passanti per il punto $P(2, 3)$ che intersecano l'asse x in un punto A di ascissa positiva e l'asse y in un punto B di ordinata positiva, determina quella per cui è minima l'area del triangolo AOB, essendo O l'origine degli assi. (*Suggerimento*: indica con m il coefficiente angolare della retta passante per P, e verifica che la funzione da rendere minima è $A(m) = -\frac{(2m-3)^2}{2m}$ con $m < 0$.) $\left[y = -\frac{3}{2}x\right]$

324 Considera la funzione definita dall'equazione $y = \frac{(k-1)x-1}{kx+1}$.

a. Determina per quali valori di k rappresenta un'iperbole.

b. Supposta verificata la condizione di cui al punto precedente, determina k in modo che la distanza del centro dell'iperbole dall'origine sia minima.

[**a.** $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{1}{2}$; **b.** $k = 2$]

325 Considera la parabola di equazione $y = 4 - x^2$ e indica con A e B (con $x_A < x_B$) i suoi punti d'intersezione con l'asse x. Determina le coordinate dei vertici C e D del trapezio isoscele $ABCD$, inscritto nel segmento parabolico di base AB, di area massima.
(*Suggerimento*: indica con x l'ascissa di C e verifica che la funzione area del trapezio è $y = (2 + x)(4 - x^2)$.)
$\left[C\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{9}\right); D\left(-\frac{2}{3}, \frac{32}{9}\right)\right]$

326 Fra le rette passanti per il punto $P(2, 4)$ che intersecano l'asse x in un punto A di ascissa positiva e l'asse y in un punto B di ordinata positiva, determina quella per cui è minima la lunghezza del segmento AB.

[Indicando con m il coefficiente angolare di una generica retta passante per P, la funzione lunghezza da rendere minima è $l(m) = \frac{2(m-2)}{m}\sqrt{m^2+1}$, con $m < 0$; $y = -x\sqrt[3]{2}$]

327 Considera la parabola γ_1 di equazione $y = x^2$ e la parabola γ_2 di equazione $y = 4x - x^2$.

a. Determina per quali valori di t la retta di equazione $y = t$ interseca sia la prima sia la seconda parabola.

b. Supposta verificata la condizione di cui al punto precedente, sia AB la corda staccata dalla retta su γ_1 e CD la corda staccata dalla retta su γ_2. Determina la retta in corrispondenza della quale $\overline{AB} + \overline{CD}$ è massima.

[**a.** $0 \le t \le 4$; **b.** $t = 2$]

328 Considera la parabola γ con asse verticale, avente vertice in $V(-2, 0)$ e passante per il punto $A(0, 4)$.

a. Scrivi l'equazione di γ.

b. Scrivi l'equazione della parabola γ', simmetrica di γ rispetto all'asse y, indicando con V' il vertice di γ'.

c. Condotta una retta $y = t$, che interseca l'arco $\overset{\frown}{AV}$ in P e l'arco $\overset{\frown}{AV'}$ in Q, indica con P' e Q', rispettivamente, le proiezioni di P e Q sull'asse x. Determina l'equazione della retta in modo che sia massima l'area del rettangolo $PQQ'P'$.

[**a.** $y = (x+2)^2$; **b.** $y = (x-2)^2$; **c.** $y = \frac{16}{9}$]

329 Considera l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ e su di essa un punto P, appartenente al primo quadrante. Traccia la tangente all'ellisse in P, che interseca l'asse x e l'asse y rispettivamente in A e B. Determina P, in modo che sia minima l'area del triangolo AOB (O è l'origine degli assi).

$\left[P\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)\right]$

330 Considera le parabole passanti per il punto di coordinate (2, 1) che hanno concavità rivolta verso il basso, asse verticale e vertice sull'asse y. Tra queste parabole, determina quella che individua con l'asse x il segmento parabolico di area minima.

$\left[y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}\right]$

331 Data la semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{4 - x^2}$, siano A e B i suoi punti d'intersezione con l'asse x (con $x_A < x_B$) e siano C e D ($x_D < x_C$) i suoi punti d'intersezione con la retta di equazione $y = t$, con $t > 0$. Determina la retta in corrispondenza della quale l'area del trapezio $ABQP$ è massima.

$[y = \sqrt{3}]$

332 Considera l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Siano A e B (con $x_A < x_B$) i vertici dell'ellisse appartenenti all'asse x. Determina i vertici del trapezio $ABCD$, inscritto nell'ellisse e appartenente al semipiano $y \ge 0$, avente area massima.

$\left[C\left(2, \sqrt{3}\right) \text{ e } D\left(-2, \sqrt{3}\right)\right]$

333 **Videolezione** Sia P un punto appartenente alla parabola di equazione $y = 4 - x^2$. Da P traccia la retta tangente alla parabola e indica con A e B i suoi punti d'intersezione con gli assi cartesiani. Determina P in modo che l'area del triangolo AOB, essendo O l'origine degli assi, sia minima. (*Suggerimento*: poni $P(t, 4 - t^2)$ e verifica che la funzione area è $A(t) = \frac{(t^2+4)^2}{4|t|}$.)

$\left[P\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)\right]$

334 Tra tutti i rettangoli inscritti nell'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ e aventi i lati paralleli agli assi cartesiani, trova quello di area massima.

$\left[\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right]$

335 Data la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, sia V il suo vertice. Considera una retta parallela alla retta OV (O è l'origine degli assi), di equazione $y = x + k$, che intersechi l'arco $\overset{\frown}{OV}$ di parabola in due punti B e C ($x_B > x_C$).

a. Verifica che l'area del trapezio $OVBC$ è espressa dalla funzione $A(k) = k(1 + \sqrt{1 - 2k})$.

b. Determina per quale valore di k l'area del trapezio $OVBC$ è massima.

[Deve essere $0 < k < \frac{1}{2}$ e il massimo viene raggiunto per $k = \frac{4}{9}$]

336 Considera la parabola di equazione $y = kx^2 - kx - 2k$.

a. Verifica che, per qualsiasi valore di k, la parabola passa per i punti $A(-1, 0)$ e $B(2, 0)$.

b. Verifica che la parabola stacca sulla bisettrice del primo e del terzo quadrante una corda la cui lunghezza è espressa dalla funzione $f(k) = \sqrt{18 + \frac{4}{k} + \frac{2}{k^2}}$.

c. Determina k in modo che la parabola stacchi sulla bisettrice considerata la corda di lunghezza minima.

[La corda di lunghezza minima corrisponde a $k = -1$, cioè alla parabola di equazione $y = -x^2 + x + 2$]

337 Data la funzione $y = \frac{4}{(x+2)^2}$, tracciane un grafico probabile. Considera quindi un punto P, di ascissa a, appartenente al grafico della funzione nel primo quadrante, e traccia da P la retta tangente al grafico della curva, indicando con A e B i suoi punti d'intersezione con l'asse x e con l'asse y.

a. Esprimi in funzione di a l'area del triangolo AOB, essendo O l'origine degli assi.

b. Determina il punto P e l'equazione della retta tangente per cui l'area del triangolo AOB è massima.

$\left[\text{b. } P\left(2, \frac{1}{4}\right); y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}\right]$

338 In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani di origine O, considera un punto A, di ascissa x, appartenente al semiasse delle ascisse positive.

a. Determina, in funzione di x, le coordinate del punto B, appartenente alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, per cui il triangolo OAB ha area uguale a 2.

b. Verifica che la misura della mediana OM del triangolo OAB è espressa dalla funzione $f(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{4}{x^2}}$.

c. Determina il valore di x per cui la mediana OM del triangolo OAB ha lunghezza minima. $[\text{c. } x = 2\sqrt[4]{2}]$

339 Considera l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1$, con $a > 0$. Sia A il suo punto d'intersezione con il semiasse delle ascisse positive e P un punto appartenente alla semiellisse di ordinate positive. Detta H la proiezione di P sull'asse x, determina:

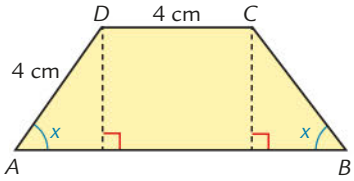
a. il punto P per cui è massimo il volume del cono generato dalla rotazione completa del triangolo APH intorno all'asse x;

b. il valore di a per cui il volume massimo del cono è $\frac{16\pi}{3}$.

$\left[\text{a. } P\left(-\frac{a}{3}, \frac{4}{3}a\sqrt{2}\right); \text{b. } a = \frac{3}{2}\right]$

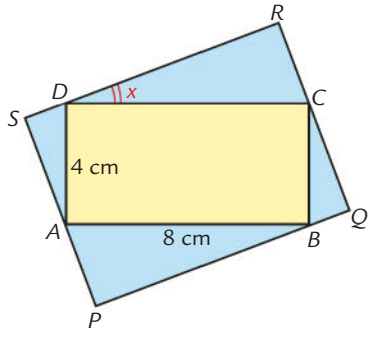
Problemi di massimo e di minimo di trigonometria

340 Considera il trapezio isoscele in figura. Per quale valore di x l'area del trapezio è massima?



$\left[x = \frac{\pi}{3}\right]$

341 In figura è rappresentato un rettangolo $PQRS$ circoscritto al rettangolo $ABCD$, in cui $AB = 8$ cm e $BC = 4$ cm. Determina il valore di x cui corrisponde il rettangolo circoscritto di area massima.



$\left[x = \frac{\pi}{4}\right]$

342 Sia $ABCD$ un trapezio isoscele, in cui i lati obliqui e la base minore misurano 1. Determina l'ampiezza degli angoli adiacenti alla base maggiore del trapezio, in modo che la sua area sia massima. Qual è il valore massimo dell'area?

$\left[\frac{\pi}{3}; \text{ area massima} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

343 Data una semicirconferenza di diametro AB e raggio 1, sia P il punto della semicirconferenza tale che $B\widehat{A}P = x$. Indica con Q il punto del diametro AB tale che $\overline{AP} = \overline{AQ}$.

a. Verifica che l'area del triangolo PAQ è data dalla funzione $A(x) = 2\sin x \cos^2 x = 2\sin x(1 - \sin^2 x)$.

b. Posto $\sin x = t$, studia la funzione ausiliaria $f(t) = 2t(1 - t^2)$ e deduci per quale valore di x l'area del triangolo PAQ è massima.

$\left[\text{b. } x = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

344 Sia $ABCD$ un quadrato il cui lato misura 1. Traccia l'arco $\overset{\frown}{AC}$ di circonferenza avente centro in D e raggio 1 e considera su tale arco un punto P tale che $A\hat{D}P = 2x$. Tracciata la tangente all'arco di circonferenza in P, indica con Q ed R, rispettivamente, i punti in cui tale tangente incontra i lati AB e BC del quadrato.

a. Verifica che la lunghezza di QR è espressa dalla funzione $y = \dfrac{\tan^2 x + 1}{\tan x + 1}$.

b. Posto $\tan x = t$, studia la funzione ausiliaria $f(t) = \dfrac{t^2+1}{t+1}$ e deduci per quale valore di x la lunghezza del segmento QR è minima.

$\left[x = \arctan(\sqrt{2} - 1) = \dfrac{\pi}{8}\right]$

345 Data una semicirconferenza di diametro AB e raggio 1, considera su di essa un punto P tale che $B\hat{A}P = 2x$ e indica con M il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{BP}$.

a. Determina per quale valore di x il perimetro del quadrilatero $ABMP$ è massimo.

b. Verifica che in corrispondenza del valore di x per cui è massimo il perimetro del quadrilatero $ABMP$ è massima anche la sua area.

[**a.** La funzione perimetro è $y = 2\cos 2x + 4\sin x + 2$;

b. la funzione area è $y = \sin 2x(1 + \cos 2x)$; sia il perimetro sia l'area sono massimi per $x = \dfrac{\pi}{6}$]

346 In una circonferenza di raggio r, considera una corda BC di lunghezza $r\sqrt{3}$. Sul minore dei due archi $\overset{\frown}{BC}$ determina un punto P in modo che sia massima:

a. la somma delle distanze di P da B e da C;

b. l'area del triangolo PBC.

(*Suggerimento*: poni $P\hat{C}B = x$.)

[In entrambi i casi si ottiene il massimo per $x = \dfrac{\pi}{6}$]

347 Nel triangolo non degenere ABC, isoscele sulla base BC, è $\overline{BC} = 2$ e $A\hat{B}C = A\hat{C}B = x$. Nel semipiano di origine BC non contenente A, costruisci il triangolo rettangolo BCD, di ipotenusa CD, in modo che $B\hat{C}D = x$. Siano R_1 ed R_2, rispettivamente, i raggi delle circonferenze circoscritte ai due triangoli ABC e BCD. Determina x in modo che la somma $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ sia massima.

$\left[\text{La funzione che esprime la somma è } y = \sin 2x + \cos x\text{; massimo per } x = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\right]$

348 È dato un settore circolare AOB, di centro O, raggio 1 e ampiezza $\dfrac{\pi}{2}$. Considera un punto P sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ tale che $A\hat{O}P = x$. Determina x in modo che, detta H la proiezione di P sul raggio OA, il trapezio $OHPB$ abbia area massima.

$\left[\text{La funzione area è } y = \dfrac{1}{2}(1 + \sin x)\cos x\text{; massimo per } x = \dfrac{\pi}{6}\right]$

349 Considera due semicirconferenze aventi come diametri i due segmenti AB e BC tra loro adiacenti, giacenti dalla stessa parte rispetto alla retta AC ed entrambe di raggio 1. Traccia due semirette aventi come origine il punto B, formanti un angolo di $\dfrac{2\pi}{3}$, che intersecano le due semicirconferenze di diametri AB e BC rispettivamente in P e in Q. Poni $A\hat{B}P = x$ e risolvi i seguenti quesiti.

a. Verifica che la lunghezza di PQ è espressa dalla funzione $y = \sqrt{4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\sin x\cos x + 4}$.

b. Giustifica perché il massimo assoluto della funzione di cui al punto **a** si ottiene per gli stessi valori di x per cui si ha il massimo assoluto della funzione $y = 4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\sin x\cos x + 4$.

c. Determina per quale valore di x il segmento PQ ha lunghezza massima.

[**c.** $x = \dfrac{\pi}{6}$]

350 Data una semicirconferenza di diametro AB e raggio r, traccia la corda AC tale che $\overline{AC} = r\sqrt{2}$. Considera, sull'arco $\overset{\frown}{AC}$, il punto P per cui $P\hat{A}C = x$ e indica con H la proiezione di P sulla tangente alla semicirconferenza in A.

a. Verifica che la funzione che esprime il valore della somma $\overline{PC} + 6\overline{PH}$ è:

$y = r(2\sin x - 6\sin 2x + 6) = 2r\sin x(1 - 6\cos x) + 6r$

b. Determina per quale valore di x la somma $\overline{PC} + 6\overline{PH}$ è minima.

[**b.** $x = \arccos\dfrac{3}{4}$]

351 Sia AB un segmento di misura uguale a 2 ed M il punto medio di AB. Traccia una semiretta di origine A che forma con la semiretta AB un angolo acuto di misura (in radianti) uguale a x e indica con P la proiezione di M sulla semiretta.

a. Verifica che la funzione che esprime la somma $\overline{AP} + \overline{PB}$ è $y = \cos x + \sqrt{4 - 3\cos^2 x}$.

b. Posto $\cos x = t$, studia la funzione ausiliaria $f(t) = t + \sqrt{4 - 3t^2}$ e deduci per quale valore di x è massima la somma $\overline{AP} + \overline{PB}$.

[**b.** $x = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$]

352 **Videolezione** Sia ABC un triangolo tale che $\overline{AB} = 2\sqrt{7}$, $\overline{BC} = 6$ e $\overline{AC} = 2$.

a. Determina l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{C}B$, applicando il teorema di Carnot.

b. Sia P il punto sul lato BC tale che $\overline{PC} = x$. Verifica che la funzione che esprime il rapporto $\frac{AP}{PC}$ è:

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x} = \sqrt{1 + \frac{4 - 2x}{x^2}}$$

c. Studia la funzione ausiliaria $y = \frac{4 - 2x}{x^2}$ e deduci per quale valore di x il rapporto $\frac{AP}{PC}$ è minimo. [c. $x = 4$]

353 Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB tale che $\overline{AB} = 2$ e $\cos A\widehat{B}C = \cos B\widehat{A}C = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Considera un punto P, sull'altezza CH relativa ad AB, tale che $P\widehat{A}H = x$. Determina x in modo che la somma $\overline{AP} + \frac{1}{2}\overline{PC}$ sia minima.

[La funzione che esprime la somma è $y = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2}\tan x + 1$; minimo per $x = \frac{\pi}{6}$]

354 Sia ABC un triangolo rettangolo, di ipotenusa $\overline{BC} = a$, in cui $A\widehat{B}C = x$. Sia A' il simmetrico di A rispetto a BC. Determina x in modo che:

a. l'area del triangolo $AA'C$ sia massima;

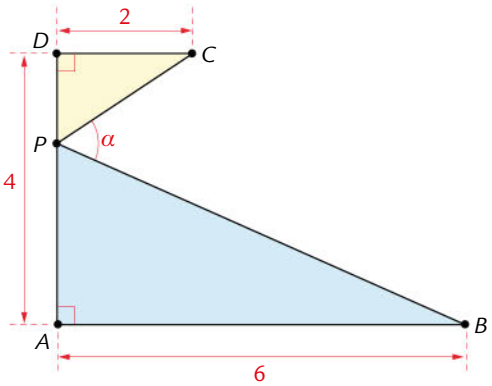
b. il volume del solido generato da una rotazione di 180° del triangolo $AA'C$ intorno alla retta BC sia massimo.

[**a.** La funzione area è $y = a^2 \sin^3 x \cos x$, massimo per $x = \frac{\pi}{3}$;
b. la funzione volume è $y = \frac{1}{3}\pi a^3 \sin^4 x \cos^2 x$, massimo per $x = \arctan\sqrt{2}$]

355 Considera i punti $A(0, 4)$ e $B(0, 2)$. Determina il punto P, appartenente al semiasse delle ascisse positive, in corrispondenza del quale è massima l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{P}B$. Qual è la misura in gradi, primi e secondi, dell'angolo $A\widehat{P}B$ di ampiezza massima?
(*Suggerimento*: sia $P(x, 0)$ con $x > 0$; esprimi in funzione di x la tangente di $A\widehat{P}B$: l'ampiezza massima di $A\widehat{P}B$ corrisponde al massimo valore della tangente.)

[$P(2\sqrt{2}, 0)$ e $A\widehat{P}B \simeq 19^\circ 28' 16''$]

356 In riferimento alla figura, determina il punto P in corrispondenza del quale l'angolo $B\widehat{P}C$ è massimo.
(*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente.)



[Ponendo $\overline{AP} = x$, il massimo si ha per $x = 6 - 2\sqrt{6}$]

357 Un prisma retto ha come basi due parallelogrammi $ABCD$ e $A'B'C'D'$ e i segmenti AA', BB', CC', DD' sono spigoli. Si sa che $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 1$, $A\widehat{B}C = x$ e che il quadrilatero $BB'D'D$ è un quadrato.

a. Verifica che il volume del prisma è dato dalla funzione $V(x) = 2\sin x\sqrt{5 + 4\cos x} = 2\sqrt{(1 - \cos^2 x)(5 + 4\cos x)}$.

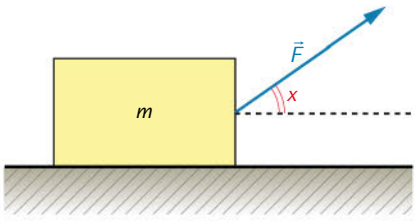
b. Posto $\cos x = t$, studia la funzione ausiliaria $f(t) = (1 - t^2)(5 + 4t)$ e deduci per quale valore di x il volume del prisma è massimo.

[**b.** $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{73} - 5}{12}\right)$]

Matematica e fisica

358 **a.** In riferimento alla figura, esprimi in funzione di x il modulo (in newton) della minima forza $\vec{F}$ necessaria per muovere una scatola di massa m (in kilogrammi), appoggiata su una superficie il cui coefficiente di attrito statico è μ.

b. Determina l'ampiezza dell'angolo x per cui è minima la forza necessaria per muovere la scatola, supponendo $\mu = 0{,}5$.



[**a.** $F(x) = \frac{\mu mg}{\cos x + \mu \sin x}$, essendo $g = 9{,}8$ m/s^2; **b.** $x = \arctan\frac{1}{2} \simeq 27^\circ$]

Problemi di massimo e minimo dalla realtà



359 **Massimo ricavo/1.** Una compagnia aerea decide di stabilire il prezzo del biglietto di un volo (per persona) nel seguente modo: 200 euro più 10 euro per ogni posto che resterà libero. L'aereo dispone di 150 posti. Quanti posti devono restare liberi perché la compagnia ottenga il massimo ricavo?
(*Suggerimento*: indica con x il numero di posti che rimangono liberi e con y il corrispondente ricavo e verifica che $y = (200 + 10x)(150 - x)$, quindi cerca il massimo di questa funzione.)
[Il massimo ricavo si ha in corrispondenza di 65 posti liberi]

360 **Massimo ricavo/2.** Il numero di piadine vendute da Mario, il titolare del chiosco «Romagna mia», dipende dal prezzo di vendita x (in euro): se il prezzo della piadina è x, il numero di piadine vendute al giorno è $\frac{200}{1+x^2}$. Stabilisci il prezzo ottimale di vendita, cioè quello che assicura a Mario il massimo ricavo giornaliero. A quanto ammonta quest'ultimo? [1 euro; ricavo massimo = 100 euro]

361 **Costi e guadagni/1.** Un'azienda fabbrica e vende una quantità di x oggetti alla settimana. In una settimana l'azienda può produrre al massimo 21 pezzi. Il costo totale derivante dalla fabbricazione di x oggetti, in euro, è espresso dalla funzione $C(x) = 2x^3 - 54x^2 + 470x + 80$. Ciascun oggetto viene venduto a 200 euro.

a. Verifica che la funzione $G(x)$ che esprime il guadagno derivante dalla vendita degli x oggetti prodotti in una settimana è $G(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$.

b. Quanti oggetti deve produrre (e vendere) l'azienda in una settimana per ottenere il massimo guadagno?
[**b.** $x = 15$]

362 **Costi e guadagni/2.** Un'azienda produce e vende una quantità di x oggetti al giorno, essendo x un numero intero compreso tra 10 e 100. Il costo giornaliero, in euro, per la produzione degli x oggetti è espresso dalla funzione:

$$C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 8x + 500$$

Il costo medio unitario di produzione di un oggetto è espresso dalla funzione $f(x) = \frac{C(x)}{x}$.
Determina l'espressione analitica di $f(x)$ e stabilisci per quale valore di x il costo medio unitario è minimo.
$\left[f(x) = \frac{1}{5}x + 8 + \frac{500}{x}\text{; minimo per } x = 50\right]$

363 **Costi e guadagni/3.** Un'azienda produce dei sacchi. Indichiamo con x il numero di centinaia di sacchi prodotti in un anno dall'azienda. Il costo di fabbricazione di x centinaia di sacchi, espresso in migliaia di euro, è ben approssimato dalla funzione:

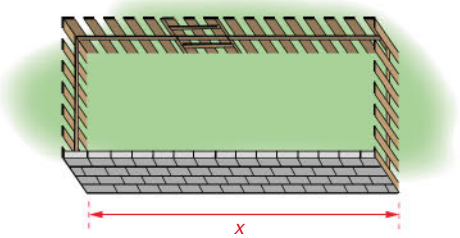
$$C(x) = 2x + e^{\frac{1}{2}x}$$

Il ricavo, in migliaia di euro, ottenuto dalla vendita di x centinaia di sacchi è espresso dalla funzione $R(x) = 10x$.

a. Determina l'espressione analitica della funzione $G(x)$ che esprime il guadagno (in migliaia di euro) derivante dalla vendita di x centinaia di sacchi.

b. Qual è il massimo guadagno che l'azienda può realizzare in un anno e in corrispondenza di quale valore di x si ottiene?
[**a.** $G(x) = 8x - e^{\frac{1}{2}x}$; **b.** la funzione assume massimo per $x = 8 \ln 2 \simeq 5{,}55$, il che corrisponde alla produzione di circa 555 sacchi e a un guadagno massimo di circa 28 631 euro]

364 **Delimitare un campo.** Si vuole delimitare un campo rettangolare di area 600 m^2. Si intendono delimitare tre lati del campo con una staccionata in legno, mentre il lato rimanente sarà delimitato da blocchi in cemento. La staccionata costa 10 euro al metro, mentre i blocchi in cemento hanno un costo di 20 euro al metro. Determina le misure dei lati del campo, in modo che il costo complessivo per la recinzione sia minimo.

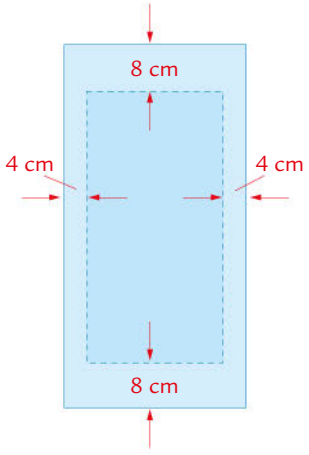


(*Suggerimento*: Indica con x la misura (in metri) del lato delimitato dai blocchi di cemento e con y il costo complessivo per delimitare il campo, e verifica che $y = 10\left(3x + \frac{1200}{x}\right)$.)
[Il costo complessivo minimo si ottiene quando $x = 20$, cioè quando i lati del campo sono lunghi 20 m e 30 m]

365 **Costruire una stanza.** Si vuole costruire una stanza a forma di parallelepipedo di volume 96 m^3, la cui base sia un quadrato. Per rifinire la stanza è necessario tappezzare la pareti laterali e costruire il pavimento. Per l'acquisto e la posa delle piastrelle del pavimento è previsto un costo di 16 euro al metro quadro; per l'acquisto e la posa della tappezzeria è previsto un costo di 18 euro al metro quadro. Quali devono essere le dimensioni della stanza affinché il costo complessivo di rifinitura (sia per pavimentare sia per tappezzare) sia il minimo possibile?
(*Suggerimento*: indica con x la misura del quadrato che rappresenta la base della stanza.) [6 m, 6 m, circa 2,7 m]

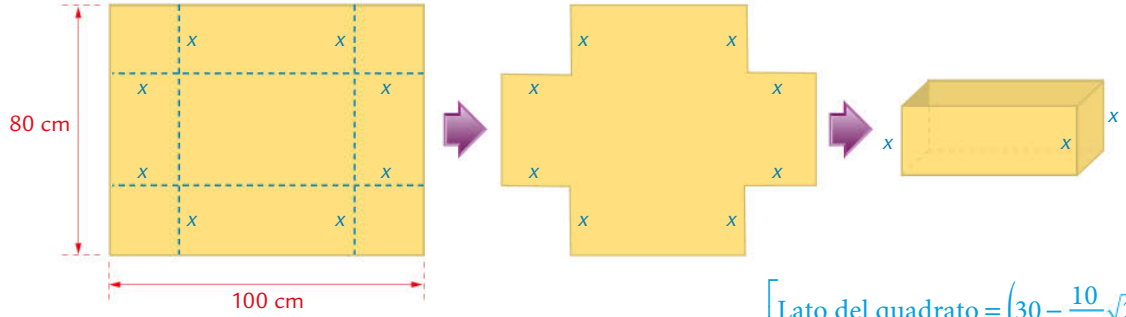
366 **Dimensioni di una scatoletta alimentare.** Una tipica scatola di latta cilindrica ha un volume fissato, pari a 54π cm^3. Quali sono le dimensioni della scatola (raggio e altezza) che minimizzano il costo del metallo necessario a produrla (ossia la superficie totale della latta)?
(*Suggerimento*: indica con r e h le misure, in centimetri, del raggio di base e dell'altezza; poiché deve essere $\pi r^2 h = 54\pi$ (volume prefissato), puoi esprimere la superficie totale $S(r)$ in funzione del solo raggio di base r e cercare il minimo di $S(r)$.) [$r = 3$ cm, $h = 6$ cm]

367 **Dimensioni di un foglio di carta.** Un foglio di carta rettangolare deve contenere un'area di stampa rettangolare di 200 cm^2, margini superiore e inferiore di 8 cm e margini laterali di 4 cm. Quali sono le dimensioni del foglio che consentono di minimizzare la quantità di carta necessaria a produrlo? (*Suggerimento*: indica con x la misura di uno dei due lati del rettangolo che rappresenta l'area di stampa.)



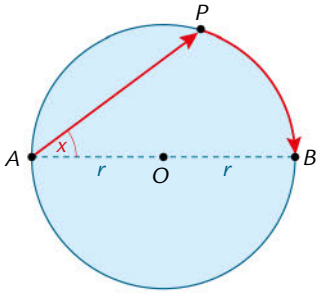
[Un foglio di dimensioni 18 cm × 36 cm]

368 **Costruzione di una scatola.** Supponiamo di avere un foglio di cartone i cui lati misurano 100 cm e 80 cm. Da questo foglio si ritagliano, agli angoli, quattro quadrati uguali e si ripiega il pezzo di cartone rimanente in modo da ottenere una scatola aperta, come indicato in figura. Quale deve essere la misura del lato dei quadrati che si sono ritagliati per ottenere la scatola di volume massimo?



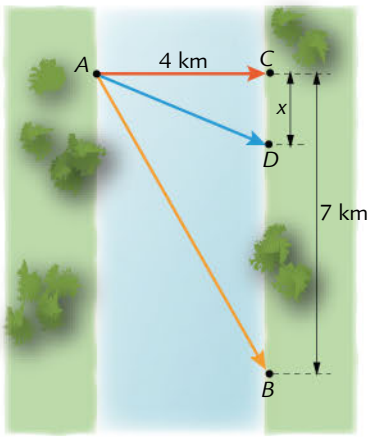
$\left[\text{Lato del quadrato} = \left(30 - \frac{10}{3}\sqrt{21}\right) \text{ cm}\right]$

369 **Attraversamento di un lago.** Un ragazzo si trova nel punto A sulla riva di un lago circolare di raggio r km, e vuole raggiungere il punto B, diametralmente opposto ad A. Egli può percorrere un primo tratto (rettilineo) in barca a remi e un secondo a piedi lungo la sponda del lago. Sia x l'angolo formato dal segmento AP percorso in barca con il diametro AB. Supponendo che il ragazzo riesca a remare a una velocità di v_1 km/h e a camminare a velocità doppia, $v_2 = 2v_1$, quale angolo minimizza il tempo del suo tragitto?



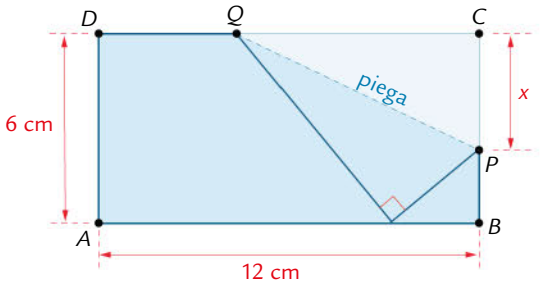
$\left[x = \frac{\pi}{2}\text{, ovvero al ragazzo conviene andare a piedi}\right]$

370 **Attraversamento di un fiume.** Un ragazzo parte con la sua barca a remi dal punto A, sulla riva di un fiume, con l'obiettivo di raggiungere il punto B, posto sulla riva opposta. Le due rive possono considerarsi approssimativamente rettilinee, parallele e distanti 4 km. Il ragazzo può raggiungere il punto C sulla riva opposta, distante 7 km da B e poi correre fino a B, oppure può raggiungere direttamente in barca il punto B, oppure può raggiungere con la barca un punto D posto tra B e C e proseguire correndo fino a B. Supponendo che il ragazzo remi a una velocità costante di 6 km/h e corra alla velocità di 8 km/h, quale tragitto deve seguire per raggiungere B nel minor tempo possibile?



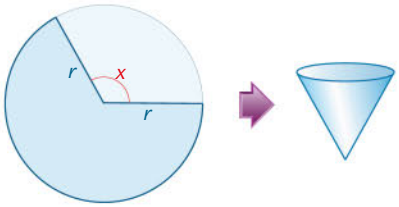
[Deve dirigersi verso il punto D, la cui distanza da C è $\frac{12\sqrt{7}}{7}$ km $\simeq 4{,}5$ km e poi proseguire correndo]

371 **Piega di un foglio/1.** Un angolo di un foglio rettangolare, di lati lunghi 12 cm e 6 cm, viene ripiegato come indicato in figura, in modo da portare il vertice C sul lato AB. Determina x in modo che la lunghezza della piega sia minima.



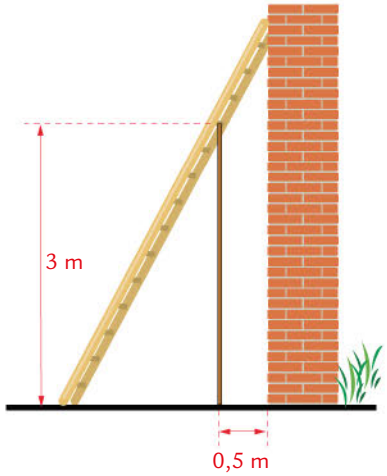
[$x = 4{,}5$ cm]

372 **Piega di un foglio/2.** Da un foglio di carta circolare, di raggio r, si ritaglia un settore di ampiezza x (in radianti). Il pezzo di carta restante viene ripiegato in modo da formare un cono retto, di cui il settore rimasto dopo il taglio costituisce lo sviluppo della superficie laterale. Determina x in modo che il cono ottenuto abbia volume massimo.



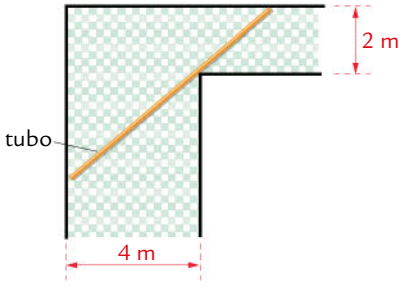
$\left[x = \frac{2\pi}{3}\left(3 - \sqrt{6}\right)\right]$

373 **Scala di minima lunghezza.** Una palizzata di 3 m di altezza è costruita parallelamente a un muro a una distanza di 0,5 m da esso. Qual è la lunghezza minima di una scala che si appoggi al muro e tocchi la palizzata?



$\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \sqrt[3]{36}\right)^3}\ \text{m}\right]$

374 **Passaggio di un tubo in un corridoio.** Un tubo di metallo viene trasportato lungo un corridoio largo 4 m; alla fine del corridoio c'è un angolo di 90° e un altro corridoio largo 2 m. Qual è la lunghezza del tubo più lungo che può essere trasportato orizzontalmente (cioè senza inclinarlo) attraverso l'angolo formato dai due corridoi? Supponi trascurabile lo spessore del tubo.

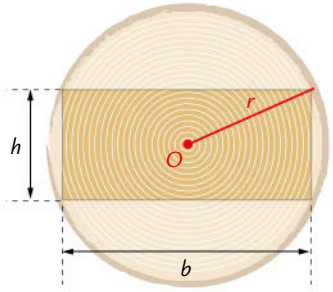


$\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(4 + \sqrt[3]{16}\right)^3}\ \text{m}\right]$

Problemi di massimo e minimo di natura tecnica

Matematica e costruzioni

●○○ **375** Da un tronco d'albero di forma cilindrica si vuole ricavare una trave a forma di parallelepipedo rettangolo. La figura rappresenta una sezione del tronco (assimilabile a un cerchio di raggio r) e della trave (un rettangolo di dimensioni b ed h).



La resistenza di una trave alla *flessione* (**Fig. a**) è espressa dal cosiddetto modulo di resistenza alla flessione, che indichiamo con W e che, per una trave a sezione rettangolare, è espresso dalla formula $W = \frac{1}{6}bh^2$, mentre la resistenza di una trave alla *compressione* (**Fig. b**) è direttamente proporzionale all'area della sezione della trave stessa.



Figura a



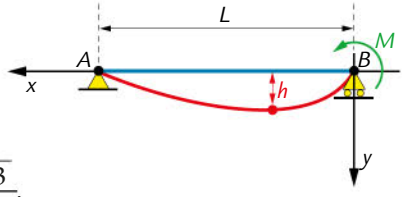
Figura b

a. Noto r (il raggio del tronco), e posto $b = x$, esprimi W in funzione di x, verificando che $W(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 4r^2x)$. Determina il valore di x per cui W è massimo e deduci quale valore deve avere il rapporto $\frac{h}{b}$ affinché la trave ottenuta abbia massima resistenza alla flessione.

b. Noto r (il raggio del tronco), e posto $b = x$, esprimi l'area della sezione in funzione di x, verificando che risulta $A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$. Determina il valore di x per cui l'area è massima e deduci quale forma deve avere la sezione della trave per garantire massima resistenza alla compressione.

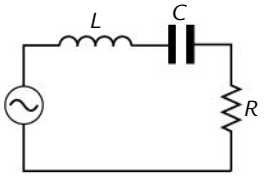
[**a.** Deve essere $\frac{h}{b} = \sqrt{2}$; **b.** la sezione deve essere quadrata]

●○○ **376** Consideriamo una trave appoggiata, di lunghezza L, soggetta a un momento M applicato nell'estremo B. Si dimostra che, rispetto al sistema di riferimento in figura, l'equazione della deformata della trave risulta $y = \frac{M}{6EI}\left(-\frac{x^3}{L} + Lx\right)$, essendo E ed I due costanti che dipendono dalle caratteristiche della trave.
Verifica che nel punto di massima inflessione l'abbassamento h è uguale a $\frac{ML^2\sqrt{3}}{27EI}$.

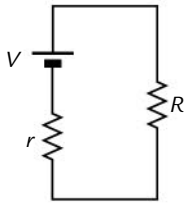


Matematica ed elettronica

●○○ **377** Consideriamo un circuito RLC, costituito da un resistore di resistenza R, una bobina di induttanza L e una condensatore di capacità C, collegati in serie.
Il modulo dell'impedenza Z di tale circuito è dato da $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, dove ω è la pulsazione della corrente alternata che attraversa il circuito. Determina il valore di ω per cui l'impedenza è minima e verifica che si tratta della pulsazione di risonanza. $\left[\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right]$



378 Una batteria che genera una *f.e.m.* V, avente resistenza interna r, è collegata a una resistenza R, come indicato in figura. Giustifica perché la potenza P dissipata nella resistenza esterna R è espressa dalla formula $P = \frac{V^2 R}{(R+r)^2}$ e determina come occorre scegliere R affinché P sia massima, nonché il massimo valore di P.



$\left[R = r, P = \frac{V^2}{4r}\right]$

379 La coppia motrice C di un motore asincrono è espressa in funzione dello scorrimento s dalla funzione:

$$C(s) = k\frac{Rs}{R^2 + X^2 s^2}$$

dove k, R e X sono costanti positive che dipendono dal motore. Determina il valore dello scorrimento cui corrisponde la massima coppia motrice e verifica che il massimo valore della coppia motrice è indipendente da R.

$\left[\text{Coppia massima} = \frac{k}{2X}, \text{ quando } s = \frac{R}{X}\right]$

Matematica ed energia

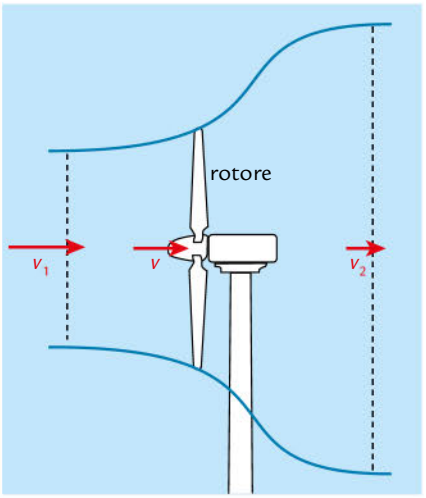
380 Nel 1919 il fisico Alfred Betz formulò la cosiddetta legge di Betz, in base alla quale la massima efficienza che può essere raggiunta da una turbina eolica (ovvero la massima frazione di energia che la turbina può estrarre dal vento) è circa del 59,3%. Ti proponiamo ora di dimostrare, in parte, questo risultato.

a. Sia v_1 la velocità del vento prima di incontrare l'ostacolo costituito dal rotore della turbina; via via che l'aria si avvicina alle pale del rotore, essa viene rallentata e incide il rotore con velocità v, cedendogli energia; sia infine v_2 la velocità di uscita dell'aria dopo l'attraversamento del rotore. La potenza P estratta dal rotore al vento è la differenza di energia cinetica nell'unità di tempo:

$$P = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

essendo m la massa del vento che attraversa il rotore nell'unità di tempo. Indicata con ρ la densità dell'aria e con A l'area del rotore, sarà anche $m = \rho A v$. Betz assunse (come si può effettivamente dimostrare) che sia $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$. In questa ipotesi, verifica che:

$$P = \frac{1}{4}\rho A(v_1 + v_2)(v_1^2 - v_2^2)$$



b. In assenza della presenza del rotore, il vento che attraversa la medesima area A avrebbe massa per unità di tempo uguale a $m = \rho A v_1$ e quindi potenza uguale a $P_0 = \frac{1}{2}\rho A v_1^3$.

c. La frazione di potenza estratta dalla turbina eolica può dunque essere espressa tramite il rapporto $R = \frac{P}{P_0}$; verifica che:

$$R = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)\left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right)$$

e quindi che il rapporto R dipende solo da v_1 e v_2.

d. Posto $\frac{v_2}{v_1} = x$, verifica che $R(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)(1 + x)$, con $0 \le x \le 1$. Determina quindi il massimo della funzione $R(x)$, verificando che esso è uguale a $\frac{16}{27}$, e deduci il limite di Betz.

Problemi di massimo e di minimo di probabilità

381 Un'urna contiene palline bianche e palline nere. La probabilità che, estraendo a caso una pallina dall'urna, questa sia bianca è uguale a p.

a. Si estraggono successivamente e con reimmissione 6 palline dall'urna; qual è la probabilità che esattamente 2 delle 6 palline estratte siano bianche?

b. In corrispondenza di quale valore di p la probabilità di cui al punto precedente è massima?

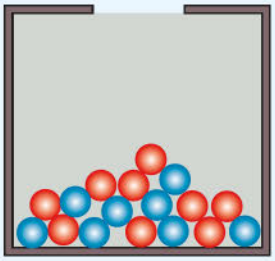
$\left[\text{a. } 15p^2(1-p)^4; \text{ b. } p = \frac{1}{3}\right]$

382 ESERCIZIO GUIDATO

Un'urna contiene n palline, con $n \geq 10$, di cui 9 sono rosse e le rimanenti sono blu. Si estraggono successivamente, senza reimmissione, 2 palline dall'urna.

a. Detta p_n la probabilità di estrarre 2 palline di colore differente, verifica che $p_n = \frac{18(n-9)}{n^2-n}$.

b. Quante palline deve contenere l'urna perché la probabilità p_n sia la massima possibile?



a. Verifica inizialmente che, detta p_n la probabilità di estrarre due palline di colore differente, risulta $p_n = f(n) = \frac{18(n-9)}{n^2-n}$.

b. Cerca inizialmente il massimo della funzione $f(n)$ studiandola come se si trattasse di una funzione reale di variabile reale. Ponendo la sua derivata uguale a 0, ottieni:

$$f'(n) = \ldots\ldots = -18\frac{n^2-18n+9}{(n^2-n)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = 9 \pm 6\sqrt{\ldots\ldots}$$

Osserva che solo la soluzione $n = 9 + 6\sqrt{\ldots\ldots} \simeq 17{,}5$ rispetta la condizione $n \geq 10$; tuttavia anche questa soluzione non è accettabile in relazione al problema, poiché **non** è un numero intero. Puoi osservare però che la probabilità massima p_n cercata deve corrispondere a uno dei due numeri naturali che approssimano, per difetto e per eccesso, il numero $9 + 6\sqrt{\ldots}$, vale a dire $n = \ldots\ldots$ e $n = \ldots\ldots$ Poiché:

$p_{17} = \ldots\ldots$ e $p_{18} = \ldots\ldots$

puoi concludere che, per ottenere la probabilità massima, occorre che l'urna contenga, oltre alle 9 palline rosse, un numero di palline blu pari a ... oppure 9.

●●○ **383** Un'urna contiene 60 palline. Di queste, n sono bianche, n sono nere e le restanti sono rosse (con $n < 30$). Si estraggono dall'urna, simultaneamente, 3 palline.

a. Detta p_n la probabilità di estrarre 3 palline di colore differente, verifica che $p_n = \frac{1}{17110}(30n^2 - n^3)$.

b. Quante palline bianche deve contenere l'urna affinché la probabilità p_n sia la massima possibile? [**b.** $n = 20$]

●●○ **384** Un dado viene lanciato n volte.

a. Qual è la probabilità che esca «6» esattamente una volta?

b. In corrispondenza di quali valori di n la probabilità che «6» esca esattamente una volta è massima?

$\left[\text{a. } \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\text{; b. la probabilità è massima, uguale a } \frac{3125}{1296}\text{, quando } n = 5 \text{ o } n = 6\right]$

Realtà e modelli

●●○ **385 Stima di una popolazione di animali.** Per stabilire il numero incognito n di animali che popolano una certa regione di montagna, un gruppo di ecologisti opera nel seguente modo: inizialmente catturano 20 animali, li marchiano e li liberano. Trascorso un tempo sufficiente perché questi animali marchiati si ridistribuiscano tra la popolazione, ne catturano 50, tramite 50 catture indipendenti l'una dall'altra, e osservano quanti di questi animali risultano marchiati: trovano che gli animali marchiati sono solo 4. Supponiamo che il numero totale di animali presenti sia rimasto invariato tra la cattura dei primi 20 animali e quella dei successivi 50 e che ogni animale, in ognuna di queste, potesse essere catturato con la stessa probabilità.



a. Determina, in funzione di n, la probabilità p_n dell'evento che si è realizzato, cioè la probabilità che tra i 50 animali della seconda cattura solo 4 risultassero marchiati.

b. Si decide di stimare il numero n, assumendo che questo sia uguale al valore di n per cui è massima la probabilità p_n dell'evento che si è realizzato. Procedendo in questo modo, da quanti animali possiamo stimare essere popolata la regione di montagna presa in esame?

$\left[\text{a. } p_n = \frac{1}{230300}\left(\frac{20}{n}\right)^4\left(1-\frac{20}{n}\right)^{46}\text{; b. } n = 250\right]$

4. Funzioni concave e convesse, punti di flesso

Teoria p. 347

Esercizi introduttivi

386 **Vero o falso?**

Sia f una funzione due volte derivabile in $\mathbf{R}$.

a. se $f''(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di flesso della funzione f V F

b. se f ha un punto di flesso in x_0, allora $f''(x_0) = 0$ V F

c. se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora f è convessa in $\mathbf{R}$ V F

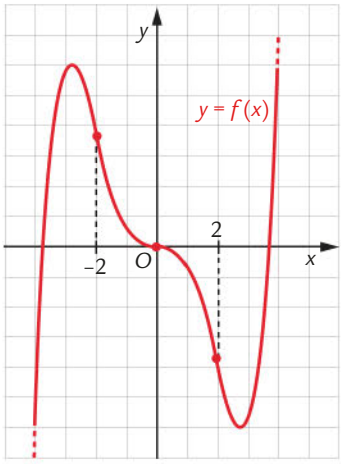
d. se f è convessa in $\mathbf{R}$, allora $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ V F

e. se f è concava in $\mathbf{R}$, allora non può avere massimo V F

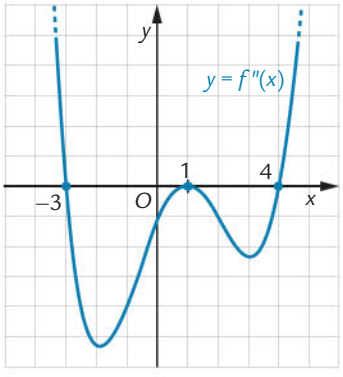
[2 affermazioni vere e 3 false]

Interpretazione di grafici

387 Nella figura è rappresentato il grafico della funzione $y = f(x)$ e sono messi in evidenza i punti di flesso del grafico della funzione. Determina le soluzioni della disequazione $f''(x) > 0$.



388 In figura è tracciato il grafico della derivata seconda $y = f''(x)$ di una funzione f. Individua gli intervalli dove la funzione f è concava, quelli dove è convessa e i punti di flesso della funzione f.

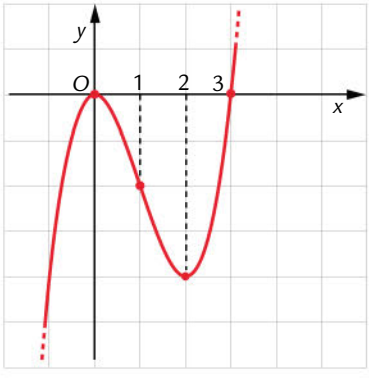


389 Considera il grafico in figura.

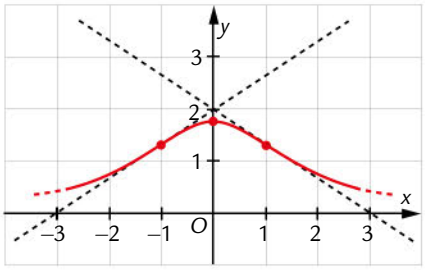
a. Supposto che esso sia il grafico della funzione $y = f(x)$, individua, se esistono, i punti di flesso della funzione f e il più ampio intervallo aperto in cui f è convessa.

b. Supposto che esso sia il grafico della funzione $y = f'(x)$, individua, se esistono, i punti di flesso della funzione f e i più ampi intervalli aperti in cui f è convessa.

c. Supposto infine che esso sia il grafico della funzione $y = f''(x)$, individua, se esistono, i punti di flesso della funzione f e il più ampio intervallo aperto in cui f è convessa.



390 Considera il grafico in figura, avente come asintoto orizzontale l'asse x.

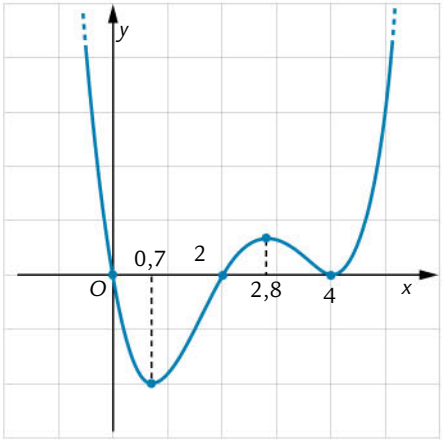


a. Supposto che esso sia il grafico della funzione $y = f(x)$, individua, se esistono, i punti di flesso della funzione f e i più ampi intervalli aperti in cui f è convessa.

b. Supposto che esso sia il grafico della funzione $y = f'(x)$, individua, se esistono, i punti di flesso della funzione f e il più ampio intervallo aperto in cui f è convessa.

c. Supposto che esso sia il grafico della funzione $y = f''(x)$, individua, se esistono, i punti di flesso della funzione f e il più ampio intervallo aperto in cui f è convessa.

391 Considera il grafico in figura.



a. Supposto che esso sia il grafico della funzione $y = f'(x)$, individua, se possibile, i punti di estremo relativo e di flesso della funzione f e i più ampi intervalli aperti in cui f è crescente, decrescente, concava o convessa.

b. Supposto che esso sia il grafico della funzione $y = f''(x)$, individua, se possibile, i punti di estremo relativo e di flesso della funzione f e i più ampi intervalli aperti in cui f è crescente, decrescente, concava o convessa.

392 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione f derivabile due volte in **R** tale che:

a. $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ **b.** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ **c.** $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2$ **d.** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

393 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione f derivabile due volte in **R** tale che:

a. $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 2$ **b.** $f''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$ **c.** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

Studio della concavità e dei punti di flesso

394 **ESERCIZIO GUIDATO**

Studia la concavità della funzione $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ e determina i punti di flesso.

- Calcola la derivata prima e verifica che $y' = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
- Calcola la derivata seconda e verifica che $y'' = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$.
- Studia il segno della derivata seconda:

  $\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} > 0 \Rightarrow x(x^2-3) > 0 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \ldots\ldots \vee x > \ldots\ldots$

  e rappresenta in uno schema i risultati trovati e le deduzioni che puoi trarre sulla concavità.
- Puoi concludere che la funzione è convessa negli intervalli ..... e ....., mentre è concava negli intervalli ..... e ..... Ci sono quindi tre punti di flesso:

  $x = \pm\sqrt{\ldots\ldots}$ e $x = 0$

Studia la concavità delle seguenti funzioni e determina i punti di flesso. (Nelle risposte sono riportati gli intervalli aperti dove la funzione è convessa e le ascisse dei punti di flesso.)

395 $y = x^3 - 3x^2$ [$x > 1$; flesso per $x = 1$]

396 $y = x^3 + 2x + 1$ [$x > 0$; flesso per $x = 0$]

397 $y = x^4 - 4x^3$ — $[x < 0 \vee x > 2;$ flessi per $x = 0 \vee x = 2]$

398 $y = 3x^5 + 5x^4 - 20x^3$ — $[-2 < x < 0 \vee x > 1;$ flessi per $x = -2 \vee x = 0 \vee x = 1]$

399 $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ — [Convessa per ogni $x \in \mathbb{R}$]

400 $y = x(x-1)^3$ — $\left[x < \frac{1}{2} \vee x > 1;$ flessi per $x = \frac{1}{2} \vee x = 1\right]$

401 $y = (x-2)^3(x+2)$ — $[x < 0 \vee x > 2;$ flessi per $x = 0 \vee x = 2]$

402 $y = \frac{x^5 - 1}{x^3}$ — $\left[x < 0 \vee x > \sqrt[5]{6}\,;\right.$ flesso per $\left.x = \sqrt[5]{6}\right]$

403 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$ — $[x > -3,$ flesso per $x = -3]$

404 $y = \frac{x^2 - 1}{x^3}$ — $\left[-\sqrt{6} < x < 0 \vee x > \sqrt{6}\,,\right.$ flessi per $\left.x = \pm\sqrt{6}\right]$

405 $y = \frac{x}{x^3 + 1}$ — $\left[x < -1 \vee x > \sqrt[3]{2}\,;\right.$ flesso per $\left.x = \sqrt[3]{2}\right]$

406 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ — $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3};\right.$ flessi per $\left.x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

407 $y = x\left(x - 2\sqrt{x}\right)$ — $\left[x > \frac{9}{16};\right.$ flesso per $\left.x = \frac{9}{16}\right]$

408 $y = \ln(x^2 + 2x + 10)$ — $[-4 < x < 2;$ flessi per $x = -4 \vee x = 2]$

409 $y = \ln(1 - x^3)$ — $\left[-\sqrt[3]{2} < x < 0;\right.$ flessi per $\left.x = -\sqrt[3]{2} \vee x = 0\right]$

410 $y = e^{-x} - 2e^{-2x}$ — $[x > 3 \ln 2;$ flesso per $x = 3 \ln 2]$

411 $y = e^{3x} - 18e^{2x}$ — $[x > 3\ln 2;$ flesso per $x = 3\ln 2]$

412 $y = \ln\frac{1}{2x^2 + 1}$ — $\left[x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2};\right.$ flessi per $\left.x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

413 $y = e^{1-2x^2}$ — $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2};\right.$ flessi per $\left.x = \pm\frac{1}{2}\right]$

414 $y = x^2(\ln x - 1)$ — $\left[x > e^{-\frac{1}{2}};\right.$ flesso per $\left.x = e^{-\frac{1}{2}}\right]$

415 $y = (x-1)e^x$ — $[x > -1;$ flesso per $x = -1]$

416 $y = e^x + x$ — [Convessa per ogni $x \in \mathbb{R}$]

417 $y = e^{\frac{1}{x}}$ — $\left[x > -\frac{1}{2},\right.$ con $\left.x \neq 0;$ flesso per $x = -\frac{1}{2}\right]$

418 $y = e^{2x} - 2e^x$ — $[x > -\ln 2;$ flesso per $x = -\ln 2]$

419 $y = x \ln x$ — [Convessa per ogni $x > 0$]

420 $y = x \ln^2 x$ — $[x > e^{-1};$ flesso per $x = e^{-1}]$

421 $y = x^2 e^x$ — $\left[x < -2 - \sqrt{2} \vee x > -2 + \sqrt{2}\,;\right.$ flessi per $\left.x = -2 \pm \sqrt{2}\right]$

422 $y = e^{-2x^2}$ — $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2};\right.$ flessi per $\left.x = \pm\frac{1}{2}\right]$

423 $y = (x^2 - 4)e^{-x}$ — $\left[x < 2 - \sqrt{6} \vee x > 2 + \sqrt{6}\,;\right.$ flessi per $\left.x = 2 \pm \sqrt{6}\right]$

424 $y = \ln^2 x$ — $[0 < x < e;$ flesso per $x = e]$

425 $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ — $\left[-1 < x < 5 - 2\sqrt{3} \vee x > 5 + 2\sqrt{3}\,;\right.$ flessi per $\left.x = 5 \pm 2\sqrt{3}\right]$

426 $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ $\left[\dfrac{1}{9}<x<1;\ \text{flesso per } x=\dfrac{1}{9}\right]$

427 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $[x<0;\ \text{flesso per } x=0]$

428 $y=\sqrt[3]{x}\,(x+2)$ $[x<0\vee x>1;\ \text{flessi per } x=0\vee x=1]$

429 $y=x\ln\left(x^2-\dfrac{1}{12}\right)$ $\left[-\dfrac{1}{2}<x<-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\vee x>\dfrac{1}{2};\ \text{flessi per } x=\pm\dfrac{1}{2}\right]$

430 $y=(x-3)\arctan x$ $\left[x>-\dfrac{1}{3};\ \text{flesso per } x=-\dfrac{1}{3}\right]$

431 $y=(1-x)\arctan x$ $[x<-1,\ \text{flesso per } x=-1]$

432 $y=\dfrac{1+\ln x}{\ln x}$ $\left[0<x<e^{-2}\vee x>1,\ \text{flesso per } x=e^{-2}\right]$

433 $y=\dfrac{\ln x}{\ln x-1}$ $[0<x<e^{-1}\vee x>e;\ \text{flesso per } x=e^{-1}]$

434 $y=e^{\frac{x}{x-2}}$ $[x>1\wedge x\neq 2;\ \text{flesso per } x=1]$

435 $y=e^{\frac{1}{2-x}}$ $\left[x<2\vee 2<x<\dfrac{5}{2},\ \text{flesso per } x=\dfrac{5}{2}\right]$

436 $y=e^x\sin x$ $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ \text{flessi per } x=\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

437 $y=\sqrt[3]{e^x-1}$ $[x<0\vee x>\ln 3;\ \text{flessi per } x=0\ \text{(a tangente verticale)}\vee x=\ln 3]$

438 $y=\dfrac{1}{6}x^3+x-x\ln x$ $[x>1;\ \text{flesso per } x=1]$

439 $y=xe^{\frac{1}{x^3}}$ $\left[x<-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\vee x>0;\ \text{flesso per } x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right]$

440 $y=\dfrac{2-x}{\sqrt{2+x^2}}$ $\left[x<-2\vee x>\dfrac{1}{2};\ \text{flessi per } x=-2\vee x=\dfrac{1}{2}\right]$

441 $y=2\sin x+\sin^2 x$ $\left[2k\pi<x<\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\vee\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi<x<2\pi+2k\pi;\ \text{flessi per } x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$

442 $y=x+\sin x$ $[\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi;\ \text{flessi per } x=k\pi]$

443 $y=-1+\cos^2 x-2\sin x$ $\left[\dfrac{\pi}{6}+2k\pi<x<\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi;\ \text{flessi per } x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$

444 $y=\ln^3 x$ $[1<x<e^2;\ \text{flessi per } x=1,\ x=e^2]$

445 $y=\tan^3 x$ $\left[k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \text{flessi per } x=k\pi\right]$

446 $y=\ln\left|\sqrt[3]{x^2}-1\right|$ $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{9}<x<0\vee 0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{9};\ \text{flessi per } x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{9}\right]$

447 $y=\sqrt[3]{(2x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}$ $\left[-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2};\ \text{flessi per } x=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}\right]$

448 $y=x^2\sqrt[3]{\ln x}$ $\left[e^{-\frac{2}{3}}<x<1\vee x>e^{\frac{1}{6}};\ \text{flessi per } x=e^{-\frac{2}{3}},\ x=1,\ x=e^{\frac{1}{6}}\right]$

449 $y=1+x+\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^4+16}+x^2\right)$ $[-2<x<2;\ \text{flessi per } x=\pm 2]$

450 $y=xe^{\frac{3}{1+\ln x}}$ $[e^{-2}<x<e^2;\ \text{flessi per } x=e^{-2},\ x=e^2]$

451 $y=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\dfrac{3}{4}x^2+x$ $[x>\alpha,\ \text{con } \alpha\in(1,2);\ \text{flesso per } x=\alpha]$

452 $y=e^x-\dfrac{1}{6}x^3-x^2$ $[x<\alpha\vee x>\beta,\ \text{con } \alpha\in(-2,-1)\ \text{e } \beta\in(1,2);\ \text{flessi per } x=\alpha,\ x=\beta]$

Per ciascuna delle seguenti funzioni, scrivi le equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso.

453 $y = x^3 - 6x^2$ [Flesso per $x = 2$, tangente: $y = -12x + 8$]

454 $y = x^4 - 6x^2$ [Flessi per $x = \pm 1$, tangenti: $y = \pm 8x + 3$]

455 $y = x^2 - \frac{1}{x}$ [Flesso per $x = 1$, tangente: $y = 3x - 3$]

456 $y = (x-2)^3(x-1)$ $\left[\text{Flessi per } x = 2 \vee x = \frac{3}{2}\text{; tangenti: } y = 0,\ y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{16}\right]$

457 $y = \frac{x}{x^2+3}$ $\left[\text{Flessi per } x = 0 \vee x = \pm 3\text{; tangenti: } y = \frac{1}{3}x,\ y = -\frac{1}{24}x - \frac{3}{8},\ y = -\frac{1}{24}x + \frac{3}{8}\right]$

458 $y = xe^{-2x}$ [Flesso per $x = 1$, tangente: $y = e^{-2}(2 - x)$]

459 **Videolezione** $y = \ln^2 x$ $\left[\text{Flesso per } x = e\text{, tangente: } y = \frac{2}{e}x - 1\right]$

460 $y = \sin^2 x,\ 0 \le x \le \pi$ $\left[\text{Flessi per } x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}\text{; tangenti: } y = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2},\ y = -x + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\right]$

461 $y = \arctan 2x$ [Flesso per $x = 0$, tangente: $y = 2x$]

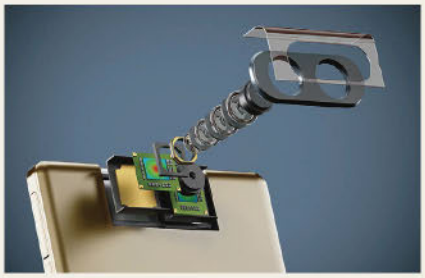
Problemi dalla realtà

462 **ESERCIZIO SVOLTO**

Il numero di componenti meccanici assemblati durante un ciclo di lavorazione di 8 ore è ben modellizzato dalla funzione:

$$N(t) = \frac{400t^2}{12 + t^2}$$

dove $N(t)$ rappresenta il numero di componenti assemblati e t è il tempo, misurato in ore, con $0 \le t \le 8$. In quale momento del ciclo di produzione la velocità con cui i componenti vengono assemblati è massima?



- La *velocità* con cui varia il numero di pezzi assemblati è espressa dalla *derivata prima* $N'(t)$ della funzione $N(t)$. Il problema equivale quindi a determinare il massimo (assoluto) della funzione $N'(t)$ nell'intervallo $[0, 8]$.
- Risulta $N'(t) = \frac{9600t}{(12+t^2)^2}$ e $N''(t) = \frac{28800(4-t^2)}{(12+t^2)^3}$.
- Il massimo di $N'(t)$ è da cercare agli estremi dell'intervallo $[0, 8]$ oppure tra i punti di questo intervallo in cui $N''(t) = 0$. Poiché l'unico punto dell'intervallo $[0, 8]$ in cui $N''(t) = 0$ è $t = 2$, è sufficiente confrontare i valori di $N'(t)$ per $t = 0$, $t = 2$ e $t = 8$; si ha:

  $N'(0) = 0$ $\quad N'(2) = 75$ e $N'(8) \simeq 13$

Pertanto la velocità con cui i componenti vengono assemblati è *massima* dopo 2 ore e risulta pari a 75 componenti/ora. Nota che $t = 2$ corrisponde al *punto di flesso* della funzione $N(t)$.

463 **Altezza dell'acqua di un fiume.** L'altezza (in metri) dell'acqua di un fiume, nelle prime 10 ore dopo che si è verificata un'intensa perturbazione, è espressa con buona approssimazione dalla funzione:

$$h(t) = \frac{10}{7 - 4t + t^2} + 2,\ \text{con } 0 \le t \le 10$$

dove t è il tempo, misurato in ore, da quando la perturbazione è iniziata.



a. Stabilisci la minima e la massima altezza raggiunte dall'acqua del fiume nelle dieci ore prese in considerazione.

b. In quale istante l'altezza dell'acqua cresce alla massima velocità? E qual è questa velocità?

c. In quale istante l'altezza dell'acqua decresce alla massima velocità? E qual è questa velocità?

[**a.** Minimo $\simeq$ 2,15 m; massimo $\simeq$ 5,33 m; **b.** 1 ora, velocità = 1,25 m/h; **c.** 3 ore , velocità = −1,25 m/h]

464 **Crescita di una popolazione.** La numerosità di una popolazione di insetti è ben modellizzata dalla funzione:

$$P(t) = \frac{8000}{1 + 40e^{-0,2t}}$$

dove $P(t)$ rappresenta il numero di insetti della popolazione e t è il tempo, misurato in mesi. Stabilisci dopo quanto tempo dall'inizio dell'osservazione ($t = 0$) la velocità di crescita della popolazione inizia a diminuire. Esprimi il risultato in mesi e giorni, arrotondato ai giorni (assumi che un mese abbia 30 giorni).



[18 mesi e 13 giorni]

465 **Crescita di un tumore.** La crescita di un tumore è ben modellizzata da una funzione del tipo:

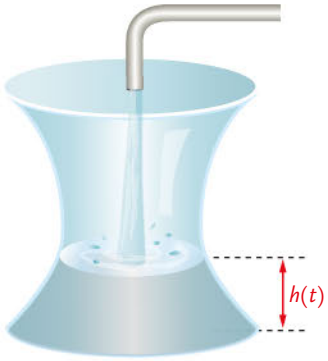
$$N(t) = e^{a(1-e^{-bt})}$$

dove $N(t)$ rappresenta il numero di cellule tumorali dopo t giorni dall'inizio dell'osservazione, mentre a e b sono due costanti positive. Determina il punto di flesso della funzione $N(t)$ e illustrane il significato in relazione alla crescita del tumore.

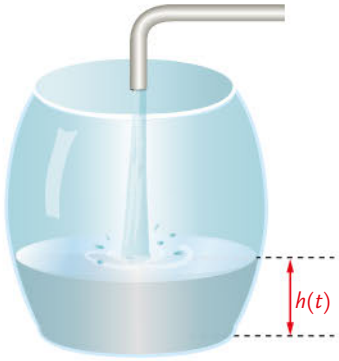
$\left[t = \frac{\ln a}{b}\right]$

---

466 **Riempimento di un recipiente/ 1.** Il recipiente che ha la forma rappresentata in figura è inizialmente vuoto; a partire dall'istante $t = 0$ nel recipiente fluisce dell'acqua, a velocità costante. Il recipiente viene riempito in 20 s. Detta $h(t)$ l'altezza dell'acqua nel recipiente all'istante t, con $0 \le t \le 20$, traccia approssimativamente un grafico qualitativo della funzione $h(t)$, mettendone in evidenza in particolare la concavità e la convessità e spiegando il significato del punto di flesso in relazione al problema.



467 **Riempimento di un recipiente/ 2.** Il recipiente che ha la forma rappresentata in figura è inizialmente vuoto; a partire dall'istante $t = 0$ nel recipiente fluisce dell'acqua, a velocità costante. Il recipiente viene riempito in 40 s. Detta $h(t)$ l'altezza dell'acqua nel recipiente all'istante t, con $0 \le t \le 40$, traccia approssimativamente un grafico qualitativo della funzione $h(t)$, mettendone in evidenza in particolare la concavità e la convessità e spiegando il significato del punto di flesso in relazione al problema.



Esercizi con parametri su punti di flesso, funzioni concave e convesse

468 **ESERCIZIO SVOLTO**

Data la funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determiniamo a, b e c in modo che il suo grafico abbia un punto di flesso di coordinate (2, 0) e la tangente nel punto di flesso sia parallela alla retta di equazione $y = x$.

—

- Per determinare a, b e c, possiamo imporre le seguenti condizioni:

  $f(2) = 0$ — Il punto di flesso deve appartenere al grafico della funzione

  $f''(2) = 0$ — Il punto di flesso deve annullare la derivata seconda

  $f'(2) = 1$ — La tangente nel punto di flesso deve avere coefficiente angolare 1

- Tenendo conto che:
  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$
  le condizioni precedenti si traducono nel seguente sistema:
  $$\begin{cases} 8a + 4b + 2c = 0 \\ 12a + 2b = 0 \\ 12a + 4b + c = 1 \end{cases}$$
  che, risolto, fornisce: $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = -2$.

469 Data la funzione $y = ax^4 + bx^2 + 1$, determina a e b in modo che il suo grafico presenti un punto di flesso di coordinate (1, 0). $\left[a = \frac{1}{5}, b = -\frac{6}{5}\right]$

470 Data la funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$, determina a, b e c in modo che il suo grafico abbia un punto di flesso di coordinate (1, 1) e la tangente nel punto di flesso sia parallela alla retta di equazione $y = 2x$. $[a = -2, b = 6, c = -4]$

471 Data la funzione $y = \frac{ax^3 + bx + c}{x}$, determina a, b e c in modo che il suo grafico abbia un punto di flesso di coordinate (1, 2) e che la tangente nel punto di flesso sia parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.
$\left[a = \frac{1}{3}, b = 2, c = -\frac{1}{3}\right]$

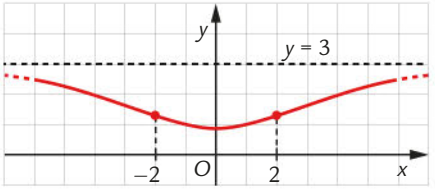
472 Considera la funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determina i coefficienti a, b, c e d in modo che essa:
a. sia dispari;
b. presenti un punto di estremo relativo per $x = -1$;
c. abbia nel punto di flesso tangente parallela alla retta di equazione $y = -6x$. $[a = 2, b = 0, c = -6, d = 0]$

473 Considera la funzione $y = \frac{hx^2 + x + k}{2x^2}$ e determina h e k in modo che abbia come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 1$ e presenti un punto di flesso in $x = -9$. $[h = 2, k = 3]$

474 Considera la funzione $y = \frac{x + a}{(x + b)^2}$ e determina a e b in modo che abbia come asintoto verticale la retta $x = -3$ e presenti un punto di flesso in $x = -6$. $[a = 4, b = 3]$

Interpretazione di grafici

475 In figura è rappresentato il grafico di una funzione, di cui sono messi in evidenza l'asintoto orizzontale e i punti di flesso. Sapendo che l'equazione della funzione è del tipo $y = \frac{ax^2 + 10}{x^2 + b}$, determina i valori di a e di b, quindi deduci qual è l'immagine della funzione.



$[a = 3, b = 12$, l'immagine è $\left[\frac{5}{6}, 3\right)]$

476 ESERCIZIO GUIDATO

Determina per quali valori di k la funzione $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}kx^3 + 2x^2$ non presenta punti di flesso.

- Calcola la derivata seconda e verifica che:
  $y'' = x^2 - 2kx + 4$
- Osserva che affinché la funzione non presenti punti di flesso il discriminante dell'equazione $x^2 - 2kx + 4 = 0$ deve essere minore o uguale a .....
  $[-2 \le k \le 2]$

477 Determina a e b sapendo che il grafico della funzione $y = a \sin^2 x + b \cos x$ ha un punto di flesso di coordinate $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$. $[a = -8, b = 16]$

478 Considera la funzione $y = \ln\left(\frac{k - x}{x + 2}\right)$. Determina il valore del parametro k per cui ha un punto di flesso in $x = 2$. $[k = 6]$

479 Data la funzione $y = e^{ax^2} + b$, determina a e b in modo che abbia un punto di flesso in $x = \frac{1}{2}$ e passi per il punto di coordinate $(0, 4)$. $[a = -2, b = 3]$

480 Data la funzione $y = x\sqrt{a - x}$, determina per quali valori di a:

a. ha un punto di estremo relativo in $x = 3$;

b. ha un punto di flesso in $x = -4$.

$\left[\text{a. } a = \frac{9}{2}\text{; b. } a = -3\right]$

481 Per quali valori di k la funzione $y = \frac{1}{x^2 - kx + 3}$ ha un punto di flesso in $x = 1$? $[k = 0 \vee k = 3]$

482 Determina i valori di a e b in modo che la funzione $y = ax^3 + bx^2 + 2x - 3$ abbia un punto di flesso a tangente orizzontale in $x = -1$. $\left[a = \frac{2}{3}, b = 2\right]$

483 Data la funzione $y = \frac{x}{x^2 + k}$, determina:

a. per quali valori di k ammette tre punti di flesso;

b. nell'ipotesi di cui al punto **a**, stabilisci per quale valore di k i tre punti di flesso appartengono alla retta di equazione $y = 2x$.

$\left[\text{a. } k > 0\text{; b. } k = \frac{1}{8}\right]$

484 **Videolezione** Determina i valori di a e b in modo che la funzione $y = a + bx^2 + e^{-x}$ abbia un punto di flesso in $x = 0$ e la tangente nel punto di flesso intersechi l'asse y nel punto di coordinate $(0, 4)$. $\left[a = 3, b = -\frac{1}{2}\right]$

485 Determina per quali valori del parametro a la funzione $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}ax^3 + \frac{3}{2}x^2$ è priva di punti di flesso. $\left[-\sqrt{3} \le a \le \sqrt{3}\right]$

486 Determina per quali valori del parametro k la funzione $y = \frac{1}{12}kx^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}kx^2$ è concava in tutto $\mathbf{R}$. $[k \le -2]$

487 Determina per quali valori del parametro k la funzione $y = \frac{1}{12}(k-3)x^4 + \frac{1}{2}k(4-k)x^2 + 1$ è convessa in tutto $\mathbf{R}$. $[3 \le k \le 4]$

488 Data la funzione $y = \frac{ax^2 + b}{(x + c)^2}$, determina il valore dei parametri a, b, c in modo che la funzione abbia un punto di minimo in $x = -\frac{2}{3}$, un punto di flesso in $x = -\frac{1}{2}$ e un asintoto orizzontale di equazione $y = 3$. $[a = 3, b = -2, c = 1]$

489 Determina i parametri a, b e c in modo che il grafico della funzione $y = ax^4 + bx^2 + c$ soddisfi tutte le seguenti condizioni:

a. passi per il punto di coordinate $(0, 3)$;

b. la retta tangente t nel punto di ascissa $x = 2$ sia parallela alla retta di equazione $y = 24x$;

c. abbia un punto di flesso in $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

$[a = 1, b = -2, c = 3]$

490 Considera la funzione:

$$y = (1 - k)\ln|x + 1| + \frac{1}{2}x^2 - x$$

Determina per quali valori di k essa:

a. non ammette punti di estremo relativo;

b. non ammette punti di flesso. $[\text{a. } k \le 0\text{; b. } k \ge 1]$

491 Considera la funzione $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4a^3}{x}$.

a. Verifica che per ogni $a \in \mathbf{R}$, con $a \neq 0$, la funzione ha un punto di flesso.

b. Determina per quali valori di a la retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di flesso passa per il punto di coordinate $(1, -3)$.

$\left[\text{a. Punto di flesso di coordinate } (2a, 0)\text{; b. } a = -\frac{1}{2} \vee a = 1\right]$

---

492 Data la funzione $y = kx^3 + x^2 + 1$, determina per quali valori di k:

a. ha un punto di flesso;

b. ha un punto di flesso di ascissa 2;

c. ha un punto di flesso di ordinata 2.

$\left[\text{a. } k \neq 0\text{; b. } k = -\frac{1}{6}\text{; c. } k = \pm\frac{\sqrt{6}}{9}\right]$

493 Considera la funzione $y = 3x^5 - 10a^2x^3$, con $a \neq 0$.

a. Verifica che ammette sempre tre punti di flesso distinti e allineati.

b. Determina per quali valori di a la retta cui appartengono i tre punti di flesso è parallela alla retta di equazione $28x + y = 0$. $[\text{a. Flessi in } (0, 0) \text{ e } (\pm a, \mp 7a^5)\text{, appartenenti alla retta di equazione } y = -7a^4x\text{; b. } a = \pm\sqrt{2}]$

494 Determina per quali valori di a la funzione $y = e^{2x} - ae^x + x^2$ è convessa in $\mathbf{R}$. $[a \le 4\sqrt{2}]$

Esercizi riassuntivi: funzioni crescenti e decrescenti, convesse e concave

495 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ è decrescente. $[0 < x < 3]$

496 Determina gli intervalli aperti in cui la funzione $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$ è convessa. $[x < -5 \vee x > 1]$

497 Determina gli intervalli aperti in cui la funzione $y = x + \frac{2}{x}$ è crescente. $[x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}]$

498 Determina gli intervalli aperti in cui la funzione $y = \frac{x}{x^2+9}$ è concava. $[x < -3\sqrt{3} \vee 0 < x < 3\sqrt{3}]$

499 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{x}{e^2}$ è crescente. $[x > -1]$

500 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2$ è concava. $[0 < x < 1]$

501 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = xe^{3x}$ è convessa. $\left[x > -\frac{2}{3}\right]$

502 Determina gli intervalli aperti in cui la funzione $y = \frac{x-2}{x^2+4}$ è decrescente. $[x < 2 - 2\sqrt{2} \vee x > 2 + 2\sqrt{2}]$

503 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ è concava. $[-2 < x < 2]$

504 Determina gli intervalli aperti in cui la funzione $y = (x^2 - 2)e^{2x}$ è crescente. $[x < -2 \vee x > 1]$

505 Determina gli intervalli aperti in cui la funzione $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 3x^2$ è convessa. $\left[x < -2 \vee x > \frac{3}{2}\right]$

506 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = x(\ln x - 1)$ è decrescente. $[0 < x < 1]$

507 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9e^{3x-1}}$ è concava. $\left[x < \frac{1}{5}\right]$

508 Determina gli intervalli aperti in cui la funzione $y = e^{x^3-12x}$ è crescente. $[x < -2 \vee x > 2]$

509 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = 5x \ln x - \frac{1}{6}x^3 - 5x$ è convessa. $[0 < x < \sqrt{5}]$

510 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = (x+1)e^x$ è decrescente e convessa. $[-3 < x < -2]$

511 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = \frac{x-3}{x^2}$ è crescente e concava. $[0 < x < 6]$

512 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2$ è decrescente e convessa. $[4 < x < 8]$

513 Determina l'intervallo aperto in cui la funzione $y = (x-2)e^{-x}$ è decrescente e concava. $[3 < x < 4]$

514 Determina gli intervalli aperti in cui la funzione $y = \frac{2-x}{x^2}$ è crescente e convessa. $[x < 0 \vee 4 < x < 6]$

Giustificare e argomentare

In ciascuno dei seguenti casi, stabilisci se esiste una funzione *f*, derivabile due volte in R, che soddisfa le condizioni indicate. Se esiste, tracciane un possibile grafico, altrimenti dai adeguata giustificazione.

515 $f(0) = 4$, $f(3) = 8$, $f'(0) = -2$, $f''(x) < 0$ per ogni $x \in [0, 3]$

516 $f(0) = 6$, $f(3) = 2$, $f'(0) = 1$, $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 3]$

517 $f(0) = 4$, $f(4) = 2$, $f'(0) = -1$, $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 4]$

518 $f(0) = 3$, $f(2) = -2$, $f'(0) = -2$, $f''(x) < 0$ per ogni $x \in [0, 2]$

5. Il teorema di de l'Hôpital

Teoria p. 351

Esercizi introduttivi

519 **Caccia all'errore.** Laura applica il teorema di de l'Hôpital nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{2x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+5}{2}=\frac{5}{2}$$

Quale errore ha commesso Laura?

520 Siano f e g due funzioni derivabili in un intorno di $+\infty$. Mostra con un controesempio che $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ può non esistere sebbene esista $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

521 Quali dei seguenti limiti possono essere calcolati con il teorema di de l'Hôpital?

a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\sin x}{x}$ **b.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$ **c.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$ **d.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{e^x-1}$

Calcolo di limiti con il teorema di de l'Hôpital

522 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+2x-3}$.

Osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, quindi possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+2x-3}=$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ e $g(x) = x^3 + 2x - 3$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{3x^2+6x}^{f'(x)}}{\underbrace{3x^2+2}_{g'(x)}}=\frac{9}{5}$$

Applicando il teorema di de L'Hôpital e calcolando il nuovo limite cui siamo giunti in base alla continuità della funzione ottenuta

Avremmo potuto calcolare il limite proposto anche per via elementare, scomponendo numeratore e denominatore tramite il teorema e la regola di Ruffini:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+4x+4)}{(x-1)(x^2+x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x+4}{x^2+x+3}=\frac{9}{5}$$

Il procedimento sarebbe stato però più laborioso, a causa delle scomposizioni da eseguire.

Calcola mediante il teorema di de l'Hôpital i seguenti limiti, che si presentano nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

523 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

524 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

525 $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$ [3]

526 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+x-12}$ $\left[\frac{6}{7}\right]$

527 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

528 $\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{x^2-16x+64}$ $[\infty]$

529 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-x-6}$ $\left[\frac{7}{5}\right]$

530 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

531 $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{2x^2-x-1}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

532 $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$ $\left[\ln\frac{2}{3}\right]$

533 $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$ $[-1]$

534 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

535 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^2+x}$ [2]

536 $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{\ln x}$ [1]

537 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x-\sqrt{2}}{4x-\pi}$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

538 $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$, con $n, m \in \mathbf{N}-\{0\}$ $\left[\frac{n}{m}\right]$

539 $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2+3x-28}$ $\left[\frac{1}{44}\right]$

540 $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\sin(x-1)}$ [1]

541 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 2x+1}$ [∞]

542 $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x}$ [6]

543 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\sin^2 x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

544 $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^x-1-x}$ [0]

545 $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x^3}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

546 $\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x}$ $[-\pi]$

547 $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-x\cos x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

548 $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x^2\sin x}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

549 $\lim_{x\to 0} \frac{3x-\sin 3x}{\sin^3 x}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

Calcola mediante il teorema di de l'Hôpital i seguenti limiti, che si presentano nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

550 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x}$ [$+\infty$]

551 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ [0]

552 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^x}{x-e^x}$ [-1]

553 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2\ln x}{1+\ln x}$ [-2]

554 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{\ln x}$ [1]

555 $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+x}{e^{-2x}}$ [0]

556 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ [$+\infty$]

557 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{x^2}$ [0]

558 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\ln^2 x}{1+\ln x}$ [$-\infty$]

559 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\ln x^2}{1+\ln x}$ [-2]

560 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$ [0]

561 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2}{x^3}$ [0]

562 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$ [$+\infty$]

563 $\lim_{x\to 5^+} \frac{\ln(x^2-25)}{\ln(x-5)}$ [1]

564 $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-2\ln x}{3x+4\ln x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

565 $\lim_{x\to 4^-} \frac{\ln(4-x)}{\ln(16-x^2)}$ [1]

566 $\lim_{x\to\pi^-} \frac{\tan x}{\pi-x}$ [-1]

567 $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\tan x}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ [$-\infty$]

568 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x)}{e^{\frac{5}{x}}}$ [0]

569 **E se?** $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\ln|x|}$

▶ Cambierebbe il risultato se il limite fosse per $x \to 0^+$?
[$-\infty$; sì: 0]

570 $\lim_{x\to 4^+} \frac{\ln(x-4)}{e^{\frac{1}{x-4}}}$ [0]

571 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti limiti, dopo averli ricondotti a forme alle quali è applicabile il teorema di de l'Hôpital:

a. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ **b.** $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)\ln x$

a. Riscrivi il limite eseguendo la sottrazione, in modo da ricondurti alla forma $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$, cui puoi applicare il teorema di de l'Hôpital. Tieni presente che per risolvere la forma indeterminata occorre applicare il teorema due volte. Il risultato è $-\frac{1}{2}$.

b. Riscrivi il limite nella forma $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$ e applica il teorema di de L'Hôpital, poi osserva che il limite cui si giunge può essere riscritto nella forma $\lim_{x\to 0^+}\left(-\sin x\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$ e concludi. Il risultato è 0.

Calcola i seguenti limiti, che si presentano nelle forme indeterminate $0\cdot\infty$ o $+\infty-\infty$, dopo averli ricondotti a forme cui è applicabile il teorema di de l'Hôpital.

572 $\lim_{x\to+\infty}(2x-\ln x)$ [$+\infty$]

573 $\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x^3}$ [0]

574 $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-3x\right)$ [$+\infty$]

575 $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\sqrt{x}\right)$ [$-\infty$]

576 $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-e^{-x}\right)$ [$-\infty$]

577 $\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x^3}$ [0]

578 $\lim_{x\to 0^+}(\sin 2x)\ln x$ [0]

579 $\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln x$ [0]

580 $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)$ [3]

581 $\lim_{x\to 0^+}(\sin x^2)\ln x$ [0]

582 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\tan x$ [-2]

583 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)$ [0]

584 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$ [∞]

585 $\lim_{x\to+\infty}x(2\arctan x-\pi)$ [-2]

586 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

587 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$ [2]

588 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

Metodi a confronto

589 Calcola il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+1)(x^2+1)}{(x^4+1)(x^3-1)}$ in due modi:

a. per via elementare;

b. applicando il teorema di de l'Hôpital.

Quale metodo preferisci? [0]

590 Calcola il limite $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3+4x-16}$ in due modi:

a. per via elementare, cioè mediante scomposizione algebrica;

b. applicando il teorema di de l'Hôpital.

Quale metodo preferisci? $\left[-\frac{1}{16}\right]$

591 Prova a calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ in due modi:

a. per via elementare;

b. applicando una o più volte il teorema di de l'Hôpital.

Perché il secondo metodo è inconcludente? [1]

592 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

- Osserva che il limite si presenta nella forma indeterminata 1^{∞}.
- Ricordando l'identità $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln[f(x)]}$, osserva che il limite dato può essere riscritto nella forma:

$$\lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{\ln x}\ln(3-2x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln x}\ln(3-2x)}$$

- Calcola $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(3-2x)}{\ln x}$ con il teorema di de l'Hôpital e concludi. Se svolgi correttamente i calcoli troverai che il risultato del limite è e^{-2}.

Calcola i seguenti limiti, che si presentano nelle forme indeterminate di tipo esponenziale, applicando il teorema di de l'Hôpital, dopo averli ricondotti a forme cui il teorema è applicabile.

593 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ [0]

594 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$ $[e^{-1}]$

595 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $\left[e^{-\frac{1}{2}}\right]$

596 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$ $[e^3]$

597 $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)^{\frac{1}{x}}$ [1]

598 $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$ $[e]$

599 $\lim\limits_{x\to \pi}(\cos x+1)^{\sin x}$ [1]

600 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x+1)^{\cot x}$ $[e]$

601 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(2\cos x+1)^{\tan x}$ $[e^2]$

602 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}$ [1]

Esercizi riassuntivi: il calcolo dei limiti

Calcola i seguenti limiti, se esistono. Utilizza, dove è appropriato, il teorema di de l'Hôpital. (Attenzione: in alcuni casi il teorema non è applicabile, oppure potrebbe essere più conveniente calcolare il limite in modo elementare.)

603 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+1}{e^{2x}+x}$ [0]

604 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{x^2}$ $[+\infty]$

605 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^3+x^2-2}$ $\left[\frac{7}{5}\right]$

606 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+4x)}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

607 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

608 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)-\sqrt{x}}{x}$ $[-\infty]$

609 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$ [0]

610 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

611 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\cos 3x}{x}$ [2]

612 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x-xe^x}{x^3}$ $[-\infty]$

613 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-e^{x^2}}{\ln(1-2x^2)}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

614 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\ln(2+x^4)}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

615 $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{2}{x}}\right)$ $[-1]$

616 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4\arctan x-2\pi}{\ln x}$ $[-\infty]$

617 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{\sin x}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

618 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{1-\cos x}$ [4]

619 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{1-\cos x}$ [2]

620 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2x^{\frac{1}{3}}}{x^2+2x-3}$ $\left[-\frac{5}{48}\right]$

621 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-e^x}{x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

622 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x}}{\ln(x+1)}$ $[\infty]$

623 $\lim_{x\to+\infty} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$ $[1]$

624 $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x^2}-1)\ln(x+1)}{x\sin(4x^2)}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

625 $\lim_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ $[0]$

626 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sin 2x\cos x}{(1-\cos x)^2}$ $[+\infty]$

627 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{3x+\cos x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

628 $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ $[+\infty]$

629 $\lim_{x\to 0^+} (e^x-1)^{\frac{1}{x}}$ $[0]$

630 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(e^x-1)\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $[4]$

631 $\lim_{x\to+\infty} x\cdot 2^{\cos x}$ $[+\infty]$

632 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(4+\sin x)}{x}$ $[0]$

633 $\lim_{x\to 1^+} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(x-1)$ $[0]$

634 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^2+x+1}}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

635 $\lim_{x\to+\infty} x\left(\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{2}{x}\right)$ $[0]$

636 $\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]$ $[-1]$

637 $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin x}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$

638 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x+e^{2x}-1)}{\cos x+2e^x-3}$ $[2]$

639 $\lim_{x\to 0^+} (e^{2x}+x)^{\frac{3}{x}}$ $[e^9]$

640 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(3x^2-x)\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{3}{x}}\right)}{6x+5}$ $[-1]$

641 $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x}-e^{-3x})\sin 2x}{x^2}$ $[10]$

642 $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x^3}-e^{x^3}}{2\sin 3x-3\sin 2x}$ $\left[-\frac{2}{5}\right]$

643 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x-x^2}{e^{-2x^2}-e^{-x^2}}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

644 $\lim_{x\to+\infty} (\tan x)e^{-x}$ [Non esiste]

645 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x+3}{x}$ $[0]$

646 $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1-\cos x}$ $[1]$

647 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x+1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ $[2]$

648 **E se?** $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{2+3^{\frac{1}{x}}}{4+3^{\frac{1}{x}}}$

▶ Cambierebbe il risultato se il limite fosse per $x\to 0^+$?

$\left[\frac{1}{2}\text{; sì: } 1\right]$

649 $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

650 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}$ $[1]$

651 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}$ $[0]$

652 **E se?** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{\ln\cos x}$

▶ Cambierebbe il risultato se il limite fosse per $x\to 0^-$?

$[+\infty\text{; no}]$

653 $\lim_{x\to 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}}$ $[e^{-1}]$

654 $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ $[e^{-2}]$

655 $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ $[\sqrt{6}]$

656 Determina k in modo che la funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x-2\sin 3x}{x^3} & x<0\\ x+3k & x\geq 0\end{cases}$ sia continua in $\mathbf{R}$. $[k=3]$

657 Determina k in modo che la funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{2x^2}}{\cos x-\cos 2x} & -1\leq x<0\\ 2k+x^2 & x\geq 0\end{cases}$ sia continua in $[-1,+\infty)$. $\left[k=-\frac{2}{3}\right]$

Giustificare e argomentare

658 Supponi che f sia una funzione derivabile in un intorno di $+\infty$ e che $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=m$, con $m\in\mathbf{R}-\{0\}$. È possibile affermare che allora la funzione f possiede asintoto obliquo per $x\to+\infty$ e che tale asintoto ha come coefficiente angolare m? In caso di risposta affermativa giustificala adeguatamente, altrimenti esibisci un controesempio.

659 Supponi che f sia una funzione derivabile in un intorno di $+\infty$ e che abbia come asintoto obliquo destro la retta di equazione $y=mx+q$. È possibile affermare che allora $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=m$? In caso di risposta affermativa giustificala adeguatamente, altrimenti esibisci un controesempio.

660 Supponi che f sia una funzione derivabile in un intorno di $+\infty$ e che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Se esiste il $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, è possibile affermare che esso coincide con il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo destro di f? In caso di risposta affermativa, giustificala adeguatamente, altrimenti esibisci un controesempio.

6. La formula di Taylor

Teoria p. 353

Scrivi il polinomio di MacLaurin di ordine 2 relativo alla funzione indicata.

661 $f(x)=e^{2x}$ $[T_2(x)=2x^2+2x+1]$

662 $f(x)=e^{-x}$ $\left[T_2(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1\right]$

663 $f(x)=\ln(x+1)$ $\left[T_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+x\right]$

664 $f(x)=\ln(2x+1)$ $[T_2(x)=-2x^2+2x]$

665 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ $\left[T_2(x)=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right]$

666 $f(x)=\dfrac{4}{x+1}$ $[T_2(x)=4x^2-4x+4]$

Scrivi il polinomio di Taylor di ordine 2, di centro x_0, relativo alla funzione indicata.

667 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $x_0=1$ $[T_2(x)=x^2-3x+3]$

668 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $x_0=1$ $[T_2(x)=3x^2-8x+6]$

669 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ $x_0=3$ $[T_2(x)=x^2-7x+13]$

670 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ $x_0=-2$ $[T_2(x)=-x^2-5x-7]$

671 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo, utilizzando le formule di MacLaurin, il limite $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x\sin x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-o(x^3)}{x^2-\frac{x^4}{3!}+o(x^4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-o(x^3)}{x^2-\frac{x^4}{3!}+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{o(x^3)}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{o(x^4)}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\left(-1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{o(x^3)}{x}\right)}{\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{o(x^4)}{x^2}\right)}=\infty$$

672 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola, utilizzando le formule di MacLaurin, il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\frac{1}{2}x-1}{\cos x-1}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\frac{1}{2}x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)-\frac{1}{2}x-1}{\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(-\frac{1}{8}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{8}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\text{.....}$$

Calcola i seguenti limiti, utilizzando le formule di MacLaurin.

673 $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\ln(1+x)}$ [−1]

674 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\ln(1+x)}$ [∞]

675 $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ [0]

676 $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+1-\cos x}{\ln(1+x)}$ [1]

677 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-\cos x}$ [0]

678 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$ [1]

679 $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+\sin x-\cos x}{x\ln(1+x)}$ [+∞]

680 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\ln(1+x)}{\sin x}$ [−1]

681 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

682 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+x}}{e^x-1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

683 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x-x^2\cos x}{x\sin x}$ [−1]

684 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}$ [4]

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

Test

685 Quale dei seguenti è un punto di massimo per la funzione $y = 3x - 2x^2$?

A $x = \frac{3}{4}$ B $x = \frac{4}{3}$ C $x = -\frac{3}{4}$ D $x = -\frac{4}{3}$

686 La funzione $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$ presenta in $x = 0$ un punto di:

A massimo relativo
B minimo relativo
C flesso
D nessuna delle altre risposte è corretta

687 La funzione $y = \sqrt{25 - x^2}$:

A ha un punto di minimo in $x = 0$
B ha un punto di massimo in $x = 0$
C non ha né punti di massimo né punti di minimo
D ha un punto di flesso in $x = 0$

688 Quale dei seguenti è un punto di flesso per la funzione $y = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$?

A $x = 0$ B $x = 1$ C $x = 2$
D La funzione non ha punti di flesso

689 In quale dei seguenti intervalli la funzione $y = xe^{-3x}$ è decrescente?

A $x > -\frac{1}{3}$ B $x < -\frac{1}{3}$ C $x > \frac{1}{3}$ D $x < \frac{1}{3}$

690 Quale dei seguenti è un punto di flesso per la funzione $y = x^4 + 6x^2$?

A $x = -1$ B $x = 0$ C $x = 1$
D La funzione non ha punti di flesso.

691 In quale dei seguenti intervalli la funzione $y = (1 + x)e^x$ risulta convessa?

A $x > -4$ B $x > -3$ C $x < -4$ D $x < -3$

692 La funzione $y = 2\ln x - x^2$:

A è strettamente crescente nel suo insieme di definizione
B è strettamente decrescente nel suo insieme di definizione
C ha un punto di massimo assoluto in $x = 1$
D ha un punto di minimo assoluto in $x = 1$

693 La funzione $y = x^2e^x$:

A ha un punto di minimo in $x = -2$ e un punto di massimo in $x = 0$
B ha un punto di massimo in $x = -2$ e un punto di minimo in $x = 0$
C ha un punto di minimo sia in $x = -2$ sia in $x = 0$
D non ha né massimi né minimi

694 La funzione $y = e^x + 2\sqrt{x}$:

A è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$
B è strettamente decrescente nel suo insieme di definizione
C è strettamente crescente nel suo insieme di definizione
D è concava per ogni $x \in \mathbf{R}$

695 Sia f una funzione derivabile due volte in $\mathbf{R}$. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

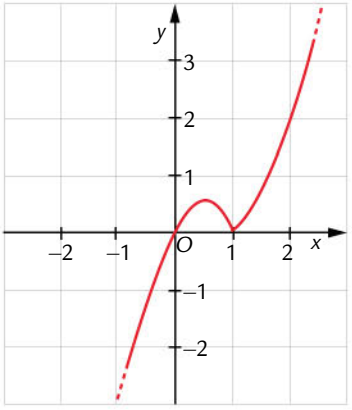
A Se la funzione è strettamente decrescente in $\mathbf{R}$, non può essere positiva in tutto $\mathbf{R}$
B Se la derivata prima è positiva in $\mathbf{R}$, la funzione è strettamente crescente in $\mathbf{R}$
C Se in un punto si annulla la derivata prima, allora quel punto può essere di flesso
D Se la derivata seconda è negativa in $\mathbf{R}$, la funzione è concava in $\mathbf{R}$

696 Considera la funzione $y = x^3 - 3x^2$ e l'intervallo $[0, 3]$; in questo intervallo:

A è applicabile alla funzione il teorema di Rolle, ma non quello di Lagrange
B è applicabile alla funzione il teorema di Lagrange, ma non quello di Rolle
C è applicabile alla funzione sia il teorema di Rolle, sia quello di Lagrange
D non è applicabile alla funzione né il teorema di Rolle, né quello di Lagrange

697 Per la funzione rappresentata in figura possiamo dire che:

A è possibile applicarle il teorema di Rolle ma non quello di Lagrange nell'intervallo $[0, 2]$
B è possibile applicarle il teorema di Lagrange ma non quello di Rolle nell'intervallo $[0, 2]$
C presenta un punto di minimo relativo in $x = 1$
D presenta un punto stazionario in $x = 1$



698 Il limite $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x-15}{x^2+x-30}$:

A non è calcolabile con il teorema di de l'Hôpital
B è calcolabile con il teorema di de l'Hôpital e, in base a tale teorema, è uguale a $\lim_{x\to 5}\frac{2x-2}{2x+1}$
C è calcolabile con il teorema di de l'Hôpital e, in base a tale teorema, è uguale a $\lim_{x\to 5}\frac{3}{(x+6)^2}$
D non si presenta in forma indeterminata

699 Il limite $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x+15}{x^2+x-30}$:

A non è calcolabile con il teorema di de l'Hôpital
B è calcolabile con il teorema di de l'Hôpital e il risultato del limite è $\frac{8}{11}$
C è calcolabile con il teorema di de l'Hôpital e il risultato del limite è $\frac{11}{8}$
D è calcolabile con il teorema di de l'Hôpital e il risultato del limite è $-\frac{8}{11}$

700 A quale delle seguenti funzioni **non** è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo [1, 5]?

A $y=|x-6|$ B $y=|x^2-4|$ C $y=|x+6|$ D $y=|x^2-36|$

701 Tra tutti i rettangoli di dato perimetro $2p$, vogliamo determinare quello che ha area massima e diagonale minima. È possibile?

A No, perché le due condizioni non sono compatibili
B No, perché non esiste un rettangolo di diagonale minima
C È possibile solo determinare il rettangolo di diagonale minima, ma non quello di area massima
D Sì, nell'insieme dei rettangoli dati quello che soddisfa entrambe le condizioni richieste è il quadrato

702 Se una funzione $y=f(x)$, definita su tutto l'insieme dei numeri reali, ammette un punto di massimo relativo in $x=c$, allora sicuramente possiamo affermare quanto segue:

A $f'(c)=0$
B esiste un intorno I del punto c tale che $\forall x\in I \Rightarrow f(x)\le f(c)$
C $f(x)$ è continua e derivabile in c
D esiste un intorno I del punto c tale che $\forall x\in I \Rightarrow f(x)<f(c)$

703 Sia $y=f(x)$ una funzione derivabile due volte in un intorno di $x=0$ con derivata seconda continua. Sapendo che $f(0)=f'(0)=0$ e che $f''(0)=10$, quanto vale $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$?

A 0 B 10 C 5 D $+\infty$

704 **Vero o falso?**

a. se una funzione è continua e derivabile nell'intervallo [2, 5], con $f(2)=2$ ed $f(5)=5$, allora deve esserci almeno un punto in cui la tangente al grafico è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante V F

b. la funzione $f(x)=\frac{x^2-4}{x+1}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-2, 2]$ V F

c. se una funzione ammette due punti stazionari agli estremi di un intervallo $[a, b]$ in cui è derivabile e $f(a)=f(b)$, deve ammettere almeno un terzo punto stazionario interno all'intervallo $[a, b]$ V F

d. se una funzione ha un punto di flesso a tangente verticale in $x=x_0$, allora $f''(x_0)=0$ V F

e. è possibile affermare che $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=+\infty$ in virtù del teorema di de l'Hôpital V F

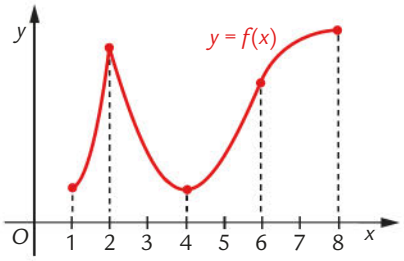
f. è possibile affermare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=1$ in virtù del teorema di de l'Hôpital V F

g. la funzione $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ è strettamente decrescente in tutto il suo dominio V F

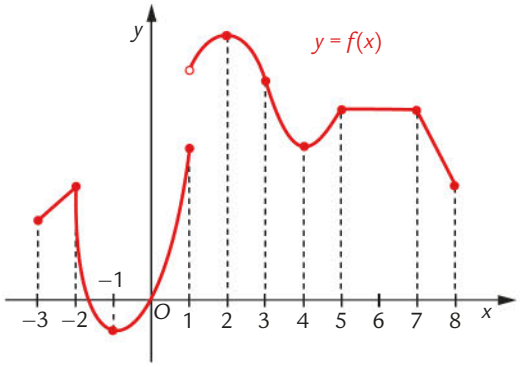
h. la funzione $f(x)=(x-1)^4$ presenta un punto di flesso a tangente orizzontale in $x=1$, poiché ivi si annullano sia la derivata prima sia la derivata seconda V F

Interpretazione di grafici

705 Nel grafico della funzione $y = f(x)$ rappresentata, avente come dominio l'intervallo $[1, 8]$, sono messi in evidenza i punti di estremo relativo e di flesso. Individua gli eventuali punti di non derivabilità e determina le soluzioni delle disequazioni $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$.



706 Nel grafico della funzione $y = f(x)$ rappresentata, avente come dominio l'intervallo $[-3, 8]$, sono messi in evidenza i punti di estremo relativo e di flesso. Individua gli eventuali punti dove la funzione non è continua o non è derivabile e determina le soluzioni delle disequazioni $f'(x) \leq 0$ e $f''(x) \leq 0$.



Determina gli intervalli dove le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti e gli eventuali punti di massimo, di minimo relativo e di flesso a tangente orizzontale di ciascuna funzione.
(Nelle risposte sono indicati gli intervalli aperti dove la funzione è crescente e gli eventuali punti di estremo relativo o di flesso a tangente orizzontale.)

707 $y = x^4 - 4x^3$ — $[x > 3$; flesso a tangente orizzontale per $x = 0$; minimo per $x = 3]$

708 $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ — $[-2 < x < 2$; massimo per $x = 2$, minimo per $x = -2]$

709 $y = (x^2 - 1)^3$ — $[x > 0$; flessi a tangente orizzontale per $x = \pm 1$; minimo per $x = 0]$

710 $y = \dfrac{x^2}{x + 3}$ — $[x < -6 \vee x > 0$; minimo per $x = 0$, massimo per $x = -6]$

711 $y = x(x-1)^2$ — $\left[x < \dfrac{1}{3} \vee x > 1\right.$; massimo per $x = \dfrac{1}{3}$, minimo per $\left.x = 1\right]$

712 $y = x^3(x-1)$ — $\left[x > \dfrac{3}{4}\right.$; flesso a tangente orizzontale per $x = 0$; minimo per $\left.x = \dfrac{3}{4}\right]$

713 $y = \ln(x^3 - 3x)$ — $[-\sqrt{3} < x < -1 \vee x > \sqrt{3}$; massimo per $x = -1]$

714 $y = \dfrac{x}{e^{3x}}$ — $\left[x < \dfrac{1}{3}\right.$; massimo per $\left.x = \dfrac{1}{3}\right]$

715 $y = \ln x - 2x$ — $\left[0 < x < \dfrac{1}{2}\right.$; massimo per $\left.x = \dfrac{1}{2}\right]$

716 $y = e^{2x} - e^x$ — $\left[x > \ln\dfrac{1}{2}\right.$; minimo per $\left.x = \ln\dfrac{1}{2}\right]$

Determina, per ciascuna delle seguenti funzioni, a, b e c in modo che la funzione soddisfi nell'intervallo I le ipotesi del teorema di Rolle; in corrispondenza dei valori di a, b e c trovati, calcola i punti di cui il teorema garantisce l'esistenza.

717 $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+1 & -1\le x<0 \\ bx+c & 0\le x\le 1 \end{cases}$ $I=[-1,1]$ $\left[a=4,\ b=2,\ c=1;\ x=-\frac{1}{4}\right]$

718 $f(x)=\begin{cases} ax^2-2x+3 & -1\le x\le 0 \\ x^2+bx+c & 0<x\le 1 \end{cases}$ $I=[-1,1]$ $\left[a=-3,\ b=-2,\ c=3;\ x=-\frac{1}{3}\right]$

719 $f(x)=\begin{cases} a\sin x+b\cos x+1 & -\pi\le x<0 \\ \sin 2x+c & 0\le x\le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ $I=\left[-\pi,\frac{3\pi}{4}\right]$ $\left[a=-2,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{3}{2};\ x=\arctan 4-\pi \vee x=\frac{\pi}{4}\right]$

Determina, per ciascuna delle seguenti funzioni, a e b in modo che la funzione soddisfi nell'intervallo indicato le ipotesi del teorema di Lagrange; in corrispondenza dei valori di a e b trovati, calcola i punti di cui il teorema garantisce l'esistenza.

720 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & -1\le x<0 \\ 2x+1 & 0\le x\le 1 \end{cases}$ $I=[-1,1]$ $\left[a=2,\ b=1;\ x=-\frac{1}{4}\right]$

721 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & x<0 \\ e^{2x} & x\ge 0 \end{cases}$ $I=[-1,2]$ $\left[a=2,\ b=1;\ x=\frac{1}{2}(4-\ln 6)\right]$

722 $f(x)=\begin{cases} 2\sin x & 0\le x\le \pi \\ ax+b & \pi<x\le 2\pi \end{cases}$ $I=[0,2\pi]$ $\left[a=-2,\ b=2\pi;\ x=\frac{2\pi}{3}\right]$

Studia la concavità delle seguenti funzioni e determina, se esistono, i punti di flesso.
(Nelle risposte sono indicati gli intervalli aperti dove la funzione è convessa e gli eventuali punti di flesso.)

723 $y=x^3+3x^2-1$ $[x>-1;$ flesso per $x=-1]$

724 $y=x^4-12x^2$ $\left[x<-\sqrt{2}\vee x>\sqrt{2};\right.$ flessi per $\left.x=\pm\sqrt{2}\right]$

725 $y=(x-2)^3$ $[x>2;$ flesso per $x=2]$

726 $y=\frac{x^2-1}{2x}$ $[x<0;$ non ci sono punti di flesso$]$

727 $y=(x^2-1)^3$ $\left[x<-1\vee -\frac{\sqrt{5}}{5}<x<\frac{\sqrt{5}}{5}\vee x>1;\right.$ flessi per $\left.x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\text{ e per }x=\pm 1\right]$

728 $y=\frac{x^3-1}{x}$ $[x<0\vee x>1;$ flesso per $x=1]$

729 $y=\ln(x^2+4)$ $[-2<x<2;$ flessi per $x=\pm 2]$

730 $y=\ln(x^3+1)$ $\left[0<x<\sqrt[3]{2};\right.$ flesso (a tangente orizzontale per $x=0$) e per $\left.x=\sqrt[3]{2}\right]$

731 $y=(x-4)e^x$ $[x>2;$ flesso per $x=2]$

732 $y=(x^2-1)e^{-x}$ $\left[x<2-\sqrt{3}\vee x>2+\sqrt{3};\right.$ flessi per $\left.x=2\pm\sqrt{3}\right]$

Calcola i seguenti limiti, applicando se possibile il teorema di de l'Hôpital.

733 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^4-16}$ $\left[\frac{7}{32}\right]$

734 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^3+x^2-2}$ $\left[\frac{7}{5}\right]$

735 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x-1}$ $[4]$

736 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2-4x+4}$ $[+\infty]$

737 $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^3+2x^2+9}$ $\left[-\dfrac{2}{5}\right]$

738 $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ $\left[\dfrac{1}{32}\right]$

739 $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+4x-5}$ $\left[\dfrac{1}{24}\right]$

740 $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-x-2}\right)$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

741 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+1}{e^{2x}+x}$ $[0]$

742 $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x^2)-\sqrt{x}}{x}$ $[-\infty]$

743 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x^3)}{\ln(2+x^4)}$ $\left[\dfrac{3}{4}\right]$

744 **E se?** $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

▶ Cambierebbe la risposta se il limite fosse per $x \to -\infty$? [1; sì: –1]

745 $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{\ln x}$ $[0]$

746 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$ $\left[\dfrac{5}{3}\right]$

747 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

748 $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{(2\sin^2 x - \tan x)}{1+\cos 4x}$ $\left[-\dfrac{1}{4}\right]$

749 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3\sqrt[4]{x+1}}{x}$ $\left[-\dfrac{7}{12}\right]$

750 $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin^2 x - 2\cos x}{1+\cos 3x}$ $[-\infty]$

751 $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\ln x\right)$ $[+\infty]$

752 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x - x\cos x}$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

753 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\log_2(x+1)}$ $[\ln 2]$

754 $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

755 $\lim_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ $[e]$

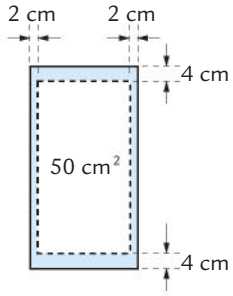
756 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$ $[1]$

757 $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $\left[e^{-\frac{1}{6}}\right]$

Problemi

Realtà e modelli

758 **Foglio di area minima.** Un foglio di carta rettangolare deve contenere un'area di stampa di 50 cm^2, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di area minima che si può utilizzare? [9 cm, 18 cm]



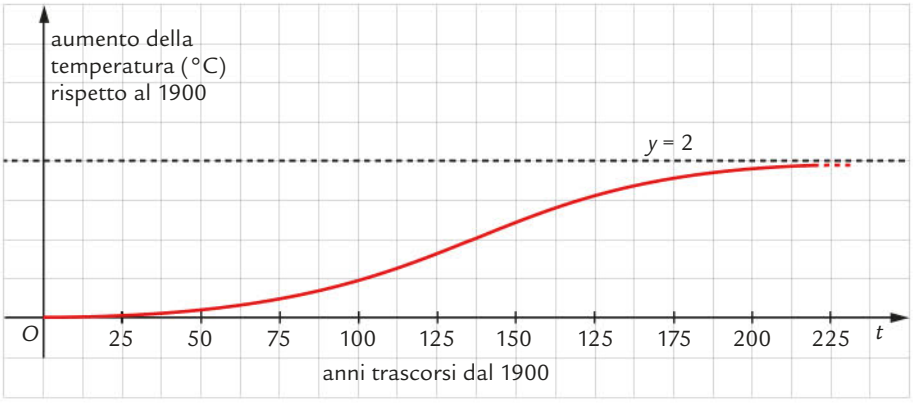
759 **La scatola più «economica».** Si vogliono costruire, con un determinato materiale, delle scatole senza coperchio, a forma di parallelepipedo rettangolo, aventi base quadrata. Se si vuole che il volume di ogni scatola sia di 256 dm^3, quali sono le dimensioni della scatola che richiedono la minima quantità di materiale?

[Lato del quadrato di base = 8 dm]

760 **Costi e utile.** Il costo, in euro, che un'azienda sostiene per la produzione di un certo bene è espresso dalla funzione $C(x) = x^2 + 60x + 400$, essendo x il numero di unità del bene prodotte in una settimana. Il limite di produzione settimanale è di 100 unità. Il bene viene rivenduto a un prezzo unitario di 120 euro. Supponendo che tutte le unità prodotte vengano vendute e ricordando che si definisce costo medio di produzione di un bene il rapporto $\frac{C(x)}{x}$ tra il costo complessivo per la produzione di x unità del bene e il numero complessivo di unità del bene prodotte, stabilisci se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando adeguatamente la risposta: «il numero di unità del bene da produrre (e vendere) in una settimana per ottenere il massimo utile corrisponde al numero di unità del bene da produrre per rendere minimo il costo medio di produzione».

761 **Accordo di Parigi.** L'accordo sul clima di Parigi, sottoscritto nel dicembre 2015 da 195 paesi, prevede un impegno a far sì che la temperatura terrestre non aumenti di più di 2 °C rispetto alla temperatura che si registrava nel 1900.

In figura è mostrato il grafico di una funzione del tipo $f(t) = \frac{1}{k + 100e^{-\frac{t}{25}}}$, che rappresenta una possibile evoluzione della temperatura terrestre in accordo con il trattato di Parigi. Sull'asse delle ascisse è rappresentato il tempo misurato in anni trascorso dal 1900 (dunque per esempio $t = 25$ corrisponde all'anno 1925); sull'asse delle ordinate è rappresentato l'aumento della temperatura terrestre (in gradi Celsius) rispetto alla temperatura del 1900.



a. Qual è il valore del parametro k che corrisponde alla funzione rappresentata?

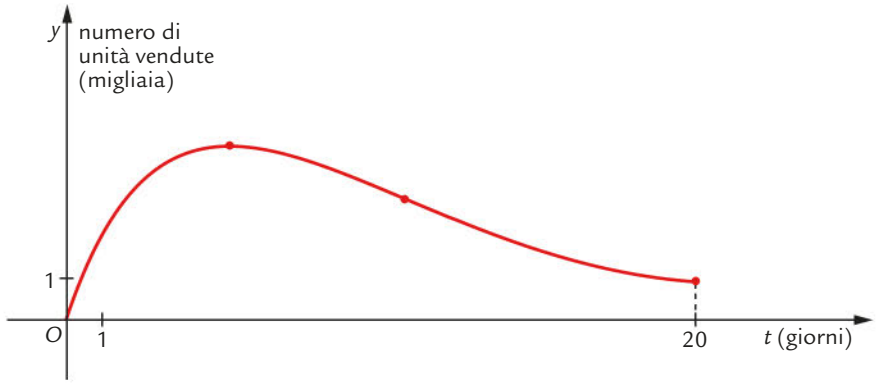
Secondo il modello corrispondente al valore di k trovato al punto **a** rispondi ai seguenti quesiti.

b. Qual è il primo anno in cui la temperatura terrestre supererà di più di un grado e mezzo la temperatura che c'era nel 1900?

c. Qual è il primo anno in cui la velocità di crescita dell'incremento di temperatura rispetto al 1900 inizia a diminuire?

[**a.** $k = \frac{1}{2}$; **b.** 2060; **c.** 2033]

●●○ **762** **Vendite attese di un nuovo prodotto.** Un'azienda si appresta a lanciare sul mercato un nuovo prodotto; il numero di unità che ci si aspetta di vendere nei primi 20 giorni è ben modellizzato dalla funzione avente il grafico in figura, dove t rappresenta il tempo, misurato in giorni, a partire dall'istante $t = 0$ in cui inizia la campagna pubblicitaria, mentre y rappresenta il numero di unità vendute, espresse in migliaia. Nel grafico della funzione sono stati messi in evidenza il punto di massimo e il punto di flesso.



a. Tra le seguenti funzioni una sola è adatta a rappresentare, per $0 \le t \le 20$, il numero di unità del prodotto che ci si aspetta di vendere nei primi 20 giorni. Individua quale, giustificando adeguatamente la risposta.

i. $f(t) = a + te^{-bt}$ con $a > 0$ e $b > 0$

ii. $f(t) = ate^{-bt}$ con $a > 0$ e $b > 0$

iii. $f(t) = bt - at^2$ con $a > 0$ e $b > 0$

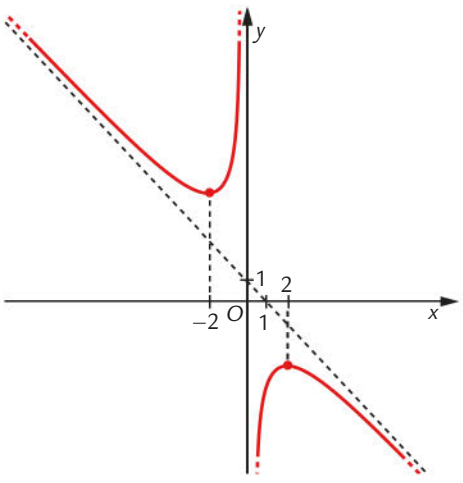
iv. $f(t) = bt + at^3$ con $a > 0$ e $b > 0$

b. Sapendo che la velocità di variazione delle vendite è di 3 unità/giorno nell'istante $t = 0$ ed è minima dopo 10 giorni, determina i valori dei parametri a e b della funzione individuata al punto precedente verificando che $a = 3$ e $b = 0{,}2$. Secondo questo modello in quale giorno si ha il massimo numero di unità vendute e a quanto ammonta tale massimo numero? [**b.** quinto giorno, circa 5518 unità]

Problemi con parametri

Interpretazione di grafici

●○○ **763** In figura è rappresentato il grafico di una funzione, di cui sono messi in evidenza l'asintoto obliquo e i punti di estremo relativo. Sapendo che l'equazione della funzione è del tipo $y = ax + b + \frac{c}{x}$, determina i valori di a, b, c, quindi deduci qual è l'immagine della funzione. [$a = -1$, $b = 1$, $c = -4$; immagine $= (-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$]



764 È data la funzione:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+ax+b}$$

dove a e b sono parametri reali.

a. Stabilisci quale relazione deve sussistere tra a e b perché la funzione data sia continua in tutto **R**.

b. Determina per quali valori di a e b la funzione ha come asintoto la retta $x=1$ e ammette un punto di estremo relativo in $x=2$.

In corrispondenza dei valori di a e b trovati al punto precedente, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

c. Determina la retta tangente al grafico della funzione nel suo punto d'intersezione con l'asse y.

d. Determina gli intervalli aperti in cui la funzione è strettamente decrescente.

e. Stabilisci se il teorema di Rolle è applicabile alla funzione $y=|f(x)|$ nei seguenti due intervalli: $[0, 4]$ e $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

[**a.** $a^2-4b<0$; **b.** $a=-4$, $b=3$; **c.** $y=\frac{4}{9}x+\frac{1}{3}$; **d.** $2<x<3 \vee x>3$; **e.** è applicabile solo nel secondo intervallo]

765 Considera la funzione $y=e^{2x}-(a+1)e^x$ e risolvi i seguenti quesiti.

a. Determina per quale valore di a il suo grafico ha un punto di estremo relativo di ascissa 0.

b. Determina per quale valore di a il suo grafico ha un punto di flesso di ordinata -3.

c. Verifica che per $a=-3$ la funzione è invertibile e scrivi l'equazione dell'inversa.

[**a.** $a=1$; **b.** $a=3$; **c.** $y=\ln(\sqrt{1+x}-1)$]

766 Considera la funzione $f(x)=a\cos^2 x+b\cos x$.

a. Determina a e b in modo che il suo grafico passi per i punti di coordinate $(0, 1)$ e $(\pi, 3)$.

b. Scrivi l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$.

c. Determina il minimo valore positivo di a tale che la funzione soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $\left[\frac{3\pi}{2}, a\right]$. In corrispondenza di tale valore di a, determina il punto c di cui il teorema garantisce l'esistenza.

d. Calcola $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(x)-2+3x^2}{x^4}$.

[**a.** $a=2$, $b=-1$; **b.** $y=x-\frac{\pi}{2}$; **c.** $a=\frac{5}{3}\pi$, $c=2\pi-\arccos\frac{1}{4}$; **d.** $\frac{5}{4}$]

Esercizi *più*

767 Per quali valori dei parametri reali a e b il limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+a\cos x}{x+b\sin x}$ risulta uguale a 0? [$a=-1$ e $b\neq -1$]

768 Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ derivabile in 0, con $f'(0)=2$. Calcola: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(4x)-f(-3x)}{x}$. Perché non è possibile utilizzare il teorema di de l'Hôpital?

(*Suggerimento*: $\frac{f(4x)-f(-3x)}{x}=\frac{f(4x)-f(0)-(f(-3x)-f(0))}{x}$) [14]

769 Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ derivabile in 0, tale che $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(4x)-f(-3x)}{x}=-7$. Quanto vale $f'(0)$? Perché non è possibile utilizzare il teorema di de l'Hôpital?
(*Suggerimento*: *vedi* l'esercizio precedente.) [-1]

770 Considera la funzione $f(x)=a^{\frac{1}{\ln\sqrt{x}}}$, con $a>0$ e $a\neq 1$. Determina per quali valori di a essa:

a. è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli in cui è definita;

b. è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli in cui è definita;

c. presenta due punti di flesso;

d. è convessa nel suo insieme di definizione. [**a.** $0<a<1$; **b.** $a>1$; **c.** $0<a<\sqrt{e}$, con $a\neq 1$; **d.** $a\geq\sqrt{e}$]

771 Sapendo che $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax+\sin bx+\sin cx}{5x+3x^3+2x^5}=4$, quanto vale $a+b+c$? [20]

Dalle gare

772 Calcola $\lim_{x\to 0}(2e^x - e^{2x})^{\frac{1}{x^2}}$.

(Calculus Competition, Youngstown University 2009) $[e^{-1}]$

773 Calcola $\lim_{x\to \pi}\frac{e^{-\pi} - e^{-x}}{\sin x}$.

(Mathematics Tournament, University of Georgia 2004) $[-e^{-\pi}]$

774 Trova $\frac{f'(1)}{f(1)}$, sapendo che $f(x)$ è un polinomio tale che $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-1} = 3$.

A 3 B $\frac{7}{2}$ C 4 D $\frac{9}{2}$

E Nessuna delle precedenti

(Mathematics Tournament, University of North Georgia 2013)

775 Quali sono le misure dei lati del rettangolo di area massima inscritto nella regione di piano limitata dalla curva di equazione $y = 8 - x^3$ e dagli assi cartesiani?

A $\sqrt[3]{2}, 6$ B $\sqrt{3}, 6$ C $\sqrt{6}, 3$ D $\sqrt[3]{2}, 3$

E Nessuna delle precedenti

(Mathematics Tournament, University of North Georgia 2013)

776 Siano a e b due numeri reali tali che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{e^{ax} - bx - 1} = \frac{1}{2}$$

Determina tutte le possibili coppie ordinate (a, b) per cui è soddisfatta tale condizione.

(Stanford Math Tournament, 2013) $[(2, 2); (-2, -2)]$

Solve math in English

777 Let $a, b \in \mathbf{R}$ with $0 < a < b$. Show that the function $f(x) = \ln x$ has exactly one Lagrange point in $[a, b]$. In particular, find the Lagrange point c of $f(x)$ in $[1, e]$.

(High school Math Contest, Texas 2009) $[-5]$

778 Let $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Given $f(2) = -3$ and $x = 2$ is a critical value, but not a relative extremum of f, find $a + b + c$.

(High school Math Contest, Texas 2009) $[-5]$

779 Find all values of b for which the line tangent to the graph of $f(x) = x^3 - \frac{11}{3}x$ at the point $(b, f(b))$ passes through the point $(3, 0)$.

(Calculus Competition, Youngstown University 2008) $\left[b = -1 \vee b = \frac{11 \pm \sqrt{33}}{4}\right]$

780 Consider the triangle formed by the x and y axes and the line tangent to $y = f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ at the point $(a, f(a))$, where $a > 0$. For what value of a is the area of this triangle smallest?

(Calculus Competition, Youngstown University 2007) $[a = 1]$

Teoremi sulle funzioni derivabili

1 **Vero o falso?**

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in (a, b).

a. i punti di massimo relativo di $f(x)$ coincidono con i punti di minimo relativo della funzione $-f(x)$ V F

b. se $f(x)$ è decrescente in $[a, b]$, non può avere punti di flesso ascendente V F

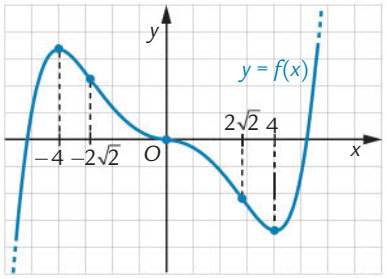
c. condizione sufficiente affinché $f(x)$ sia crescente è che sia $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ V F

d. il teorema di Lagrange è applicabile all'intervallo $[a, b]$ V F

2 Determina i punti di Lagrange della funzione $f(x) = 2x^3 - x + 1$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

3 Calcola il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x+x^2}$ applicando il teorema di de l'Hôpital.

4 Nel grafico della funzione $y = f(x)$ rappresentata, di dominio **R**, sono messi in evidenza i punti di estremo relativo e di flesso. Individua le soluzioni delle disequazioni:



a. $f'(x) < 0$;

b. $f''(x) \geq 0$.

Individua gli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni, specificando se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo, o di flesso a tangente orizzontale.

5 $y = \dfrac{x^3}{x+1}$

6 $y = \ln(x^2 - 6x + 10)$

Individua, precisandone la natura, i punti di flesso delle seguenti funzioni.

7 $y = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$

8 $y = \dfrac{x}{x^2+4}$

---

9 Un'azienda produce elettrodomestici. Il costo della produzione di x apparecchi di un dato tipo è espresso, in euro, dalla funzione:

$C(x) = x^2 + 50x + 100$ con $5 \leq x \leq 40$

Ciascun apparecchio viene venduto al prezzo di 100 euro.

a. Determina la funzione $G(x)$ che esprime, per ogni x appartenente all'intervallo $[5, 40]$, il guadagno che deriva dalla vendita di x apparecchi e determina per quale valore di x il guadagno è massimo.

b. Il costo medio di produzione di un apparecchio è espresso dalla funzione $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Stabilisci per quale valore di x il costo medio è minimo.

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Totale
Punteggio massimo	0,25 · 4 = 1	1,25	1,25	0,5 · 2 = 1	1	1	1	1	0,75 · 2 = 1,5	10
Punteggio ottenuto										

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 573

Unità 7

Tema H

Lo studio di funzione

- Con GeoGebra
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

1. Schema per lo studio del grafico di una funzione. Funzioni algebriche

Tutto il nostro corso di Matematica si è snodato intorno al concetto di *funzione*. Abbiamo introdotto varie classi di funzioni elementari (razionali, irrazionali, esponenziali, logaritmiche, goniometriche) e ci siamo via via occupati di vari aspetti che riguardano lo studio di una funzione: la determinazione del dominio, lo studio del segno e il riconoscimento di eventuali simmetrie; lo studio del comportamento di una funzione agli estremi del dominio e la ricerca degli asintoti; la ricerca degli intervalli dove una funzione cresce o decresce e degli intervalli dove è concava o convessa. È ora venuto il momento di organizzare in un quadro unitario tutto quanto abbiamo appreso.

Schema generale per lo studio del grafico di una funzione

Lo schema generale per studiare tutte le più importanti caratteristiche di una funzione e tracciarne il grafico può essere così sintetizzato.

1 Determinare il dominio

2 Riconoscere eventuali simmetrie evidenti o periodicità

Se la funzione è *pari* o *dispari*, il suo studio si può limitare all'intervallo $x \geq 0$, deducendo per simmetria il comportamento della funzione nell'intervallo $x < 0$.
Se la funzione è *periodica*, lo studio può essere limitato a un intervallo di ampiezza uguale al periodo.

OSSERVA

Parliamo di simmetrie «evidenti» perché il grafico di una funzione potrebbe avere simmetrie più riposte, rispetto per esempio a un punto diverso dall'origine o a una retta parallela all'asse *y*. Tali simmetrie non sono immediatamente individuabili dall'equazione della funzione, come invece accade per le simmetrie rispetto all'origine o all'asse *y*.

3 Determinare eventuali punti d'intersezione con gli assi e studiare il segno della funzione

Questa fase, come abbiamo già visto più volte, permette di individuare tra l'altro le regioni del piano cartesiano cui appartiene il grafico della funzione.

4 Analizzare il comportamento della funzione agli estremi del dominio e ricercare eventuali asintoti

Questa fase consiste nel calcolare i limiti della funzione per x che tende agli estremi (finiti o infiniti) del dominio. Si individuano così eventuali *asintoti* verticali e orizzontali e si studia la natura di eventuali *punti singolari*. Se il dominio di f è illimitato e non esistono asintoti orizzontali, si indaga sull'esistenza di eventuali *asintoti obliqui*.

5 Studiare la derivata prima

Questa fase consiste nel calcolare la derivata prima, determinarne gli zeri e studiarne il segno, individuando così gli intervalli dove la funzione assegnata cresce e quelli dove decresce, e gli eventuali punti di minimo e massimo relativo o di flesso a tangente orizzontale. Si studia inoltre la natura degli eventuali punti di *non derivabilità* della funzione (cuspidi, flessi a tangente verticale e punti angolosi).

6 Studiare la derivata seconda

Questa fase consiste nel calcolare la derivata seconda, determinarne gli zeri e studiarne il segno, individuando così gli intervalli dove la funzione assegnata è concava e quelli in cui è convessa e gli eventuali punti di flesso.

7 Tracciare il grafico della funzione

È importante fare alcune osservazioni.

- Lo schema che abbiamo fornito è un modello di riferimento, ma non è da considerarsi in modo eccessivamente «rigido». La determinazione del dominio, del comportamento della funzione agli estremi del dominio, la ricerca degli asintoti e lo studio della derivata prima sono, di norma, passi *obbligati*. Invece:
  - lo studio degli zeri e del segno nella fase *iniziale* dello studio di funzione può talvolta risultare troppo complesso; in questi casi si può momentaneamente soprassedere e procedere con tutte le altre fasi dello studio di funzione: sarà dall'insieme delle informazioni acquisite sulla funzione che potremo poi, *alla fine*, dedurre informazioni sul numero degli zeri e sul segno della funzione;
  - lo studio della *derivata seconda* in molti casi risulta troppo complicato per cui si soprassiede, assumendo che il numero dei punti di flesso sia il minimo compatibile con tutte le altre informazioni raccolte.
- Nel tracciare il grafico di una funzione privilegeremo gli aspetti **qualitativi** (punti di massimo e minimo, punti di flesso e asintoti) rispetto alla precisione numerica nel rappresentare fedelmente i valori assunti dalla funzione; in questo senso l'esercizio di tracciare con carta e penna il grafico di una funzione differisce da quanto si potrebbe fare con una calcolatrice grafica o con un computer, casi in cui a essere predominante è invece l'aspetto *quantitativo*, cioè il calcolo dei valori che la funzione assume in un numero cospicuo di punti.
- Nelle varie fasi dello studio del grafico di una funzione può capitare di imbattersi in equazioni *non* risolvibili algebricamente; in questi casi sarà sufficiente dare una localizzazione delle soluzioni, mediante metodi *grafici*.
- È bene tracciare il grafico *gradualmente*: ciò permette infatti di controllare la coerenza dei risultati che via via si acquisiscono e di capire quali informazioni è ancora necessario raccogliere. Per esempio, quando il calcolo lo consente (o le circostanze lo suggeriscono), al fine di tracciare il grafico con maggiore accuratezza può essere utile calcolare la pendenza della retta tangente al grafico in corrispondenza di punti caratteristici, quali per esempio punti d'intersezione del grafico con gli assi cartesiani, punti di discontinuità o punti di flesso a tangente obliqua.
- Il grafico di una funzione permette di ricavare con maggiore facilità ed evidenza informazioni di natura «globale» sulla funzione (al contrario, limiti e derivate forniscono informazioni solo «locali»). Per esempio, dal grafico è possibile riconoscere qual è l'*immagine* della funzione, stabilire se gli eventuali punti di massimo o minimo *relativo* sono anche punti di massimo o minimo *assoluto*, individuare in quali intervalli la funzione è invertibile ecc.

MODI DI DIRE

L'espressione «grafico *qualitativo*» che utilizzeremo nel seguito sarà da intendersi nel senso precisato qui a fianco.

Esempi di studio di funzioni algebriche

Mettiamo in pratica lo schema illustrato poc'anzi, applicandolo allo studio di alcune funzioni. In questo paragrafo focalizzeremo la nostra attenzione sulle funzioni *algebriche* (razionali e irrazionali), mentre nei paragrafi successivi ci occuperemo di funzioni *trascendenti* e di funzioni con *valori assoluti*.

ESEMPIO Studio di una funzione polinomiale

Studiamo la funzione $y = f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ e tracciamone il grafico.

- **Dominio**

Si tratta di una funzione algebrica *razionale intera*; è definita per ogni valore reale di x, quindi il dominio è $\mathbf{R}$, ovvero l'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

- **Simmetrie**

Osserviamo che:

$$f(-x) = f(x)$$

quindi la funzione è *pari*: il suo grafico risulterà perciò simmetrico rispetto all'asse y.

ATTENZIONE!

Come già detto, essendo la funzione pari potremmo limitare lo studio all'intervallo $x \geq 0$, e poi dedurre per simmetria il grafico per $x < 0$. In questo primo esempio preferiamo tuttavia effettuare lo studio della funzione in tutto $\mathbf{R}$. L'avere osservato che f è pari è comunque utile come *controllo* della correttezza dei risultati che via via ricaviamo.

• **Zeri e segno**

Ricerchiamo gli eventuali punti d'intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = x^4 - 4x^2 + 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^4 - 4x^2 + 5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 4t + 5 = 0 \Rightarrow \text{impossibile}$$

ponendo $x^2 = t$; $\Delta = -4 < 0$

Ricerchiamo gli eventuali punti d'intersezione con l'asse y:

$$\begin{cases} y = x^4 - 4x^2 + 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

Il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate (0, 5).

Studiamo il segno:

$$x^4 - 4x^2 + 5 > 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 5 > 0$$

ponendo $x^2 = t$

La disequazione di secondo grado in t è soddisfatta per ogni $t \in \mathbf{R}$ (poiché $\Delta < 0$), quindi anche la disequazione originaria in x lo è.
Ne segue che la funzione è *sempre positiva*, ovvero il suo grafico appartiene al semipiano «al di sopra» dell'asse x.

• **Comportamento della funzione agli estremi del dominio**

Il dominio è $(-\infty, +\infty)$, quindi **non** ci sono asintoti verticali; dobbiamo calcolare i limiti della funzione per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

È immediato verificare che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

dunque **non** ci sono asintoti orizzontali.

Si verifica che anche $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, quindi non ci sono nemmeno asintoti obliqui. Le informazioni raccolte finora sono riassunte in **Fig. 1**.

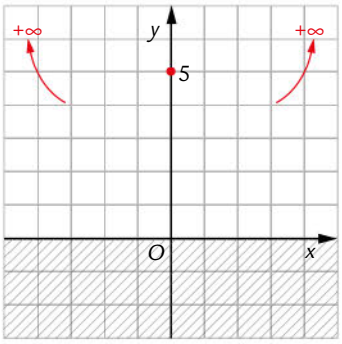


Figura 1 **Abbiamo tratteggiato, per escluderla, la regione del piano cartesiano cui non appartiene il grafico della funzione, come acquisito dallo studio del segno.**

• **Studio della derivata prima**

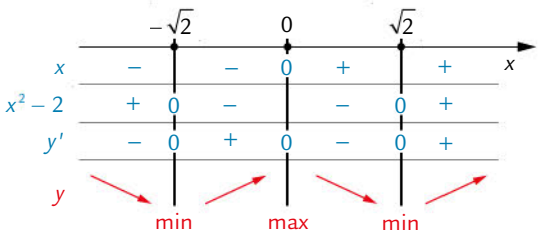
La funzione è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e risulta:

$$y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$$

Si ha:

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$$

Lo studio del segno della derivata prima è riportato qui sotto, insieme alle deduzioni che se ne possono trarre circa gli intervalli di monotonia della funzione assegnata e la natura dei punti stazionari.



Si deduce dunque che la funzione presenta punti di *minimo relativo* per $x = \pm\sqrt{2} \simeq 1{,}4$, con $f(\pm\sqrt{2}) = 1$, e un punto di *massimo relativo* per $x = 0$, con $f(0) = 5$.

- **Studio della derivata seconda**

È immediato ricavare che:

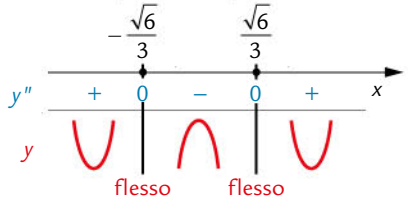
$$y'' = 12x^2 - 8 = 4(3x^2 - 2)$$

Si ha:

$$y'' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$y'' > 0 \Rightarrow x < -\frac{\sqrt{6}}{3} \vee x > \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ne segue lo schema del segno della derivata seconda riportato qui sotto, insieme alle deduzioni che se ne possono trarre circa gli intervalli in cui la funzione assegnata è concava o convessa.



La funzione assegnata ha dunque due *punti di flesso* per $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \simeq \pm 0{,}8$, con $f\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{25}{9} \simeq 2{,}8$.

- **Grafico**

Il grafico è allora quello riportato in **Fig. 2**.

Dal grafico ottenuto possiamo dedurre che i punti di minimo relativo sono anche punti di minimo assoluto, mentre il punto di massimo relativo **non** è un punto di massimo assoluto. Riconosciamo inoltre che l'immagine della funzione è l'intervallo chiuso $[1, +\infty)$.

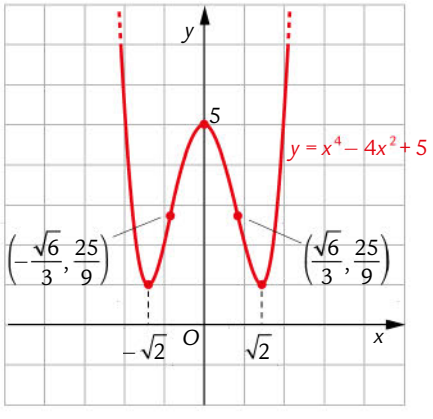


Figura 2

Osserviamo che alcune caratteristiche della funzione studiata nell'esempio precedente sono comuni a **tutte le funzioni polinomiali**: una funzione definita da un polinomio ha sempre come dominio **R**, è continua e derivabile in **R** (quindi non può possedere punti di discontinuità né punti angolosi o cuspidi o flessi a tangente verticale) e non possiede asintoti.

ESEMPIO Studio di una funzione razionale frazionaria

Studiamo la funzione $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ e tracciamone il grafico.

- **Dominio**

Si tratta di una funzione algebrica *razionale frazionaria*. La funzione è definita purché il denominatore sia diverso da zero:

$$(x-1)^2 \neq 0 \Rightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Dunque il dominio della funzione è l'insieme $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

- **Simmetrie**

Si verifica che $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, dunque la funzione non è né pari né dispari.

- **Zeri e segno**

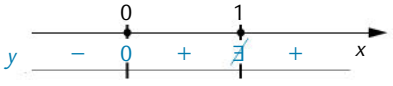
Poniamo $y = 0$ per determinare gli eventuali punti d'intersezione con l'asse x.

$$0 = \frac{x^3}{(x-1)^2} \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

L'unico punto d'intersezione con l'asse x è dunque l'origine, che coincide anche con il punto d'intersezione con l'asse y.
Per quanto riguarda il segno della funzione abbiamo:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \wedge x \neq 1 \Rightarrow x > 0 \wedge x \neq 1$$

Lo schema del segno della funzione è il seguente.



- **Comportamento della funzione agli estremi del dominio**

Essendo il dominio $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, dobbiamo calcolare i limiti della funzione per $x \to -\infty$, per $x \to 1^-$, per $x \to 1^+$ e per $x \to +\infty$. Abbiamo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \text{Infatti } \frac{1^-}{0^+} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \text{Infatti } \frac{1^+}{0^+} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Da questi limiti si deduce che la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale e che non ci sono asintoti orizzontali. Vediamo se ci sono asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \Rightarrow m = 1$$

il termine di grado massimo di questo polinomio è x^3

$$\lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{[f(x)-x]}_{\substack{f(x)-mx\\ \text{con } m=1}} = \lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]}_{\substack{\text{forma indeterminata}\\ +\infty-\infty}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{x^2-2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2 \Rightarrow q = 2$$

Concludiamo che la retta $y = x + 2$ è un asintoto obliquo (sia destro sia sinistro).
Le informazioni fin qui raccolte sul grafico della funzione sono riassunte in **Fig. 3**.

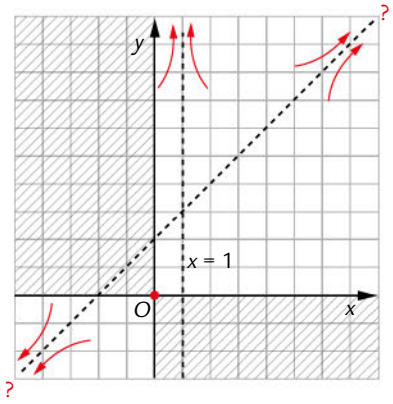


Figura 3 **Rappresentazione delle regioni di piano cui appartiene il grafico della funzione e del comportamento della funzione agli estremi del dominio. I punti interrogativi indicano che non possiamo ancora stabilire a questo stadio in quale modo la funzione si avvicina all'asintoto obliquo (se da «sopra» o da «sotto»).**

• Studio della derivata prima

Calcoliamo la derivata prima:

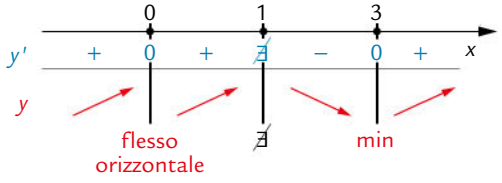
$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2-2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^2\cancel{(x-1)}[3(x-1)-2x]}{(x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

Si ha:

$$y' = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$$

$$y' > 0 \Rightarrow x < 1 \vee x > 3, \text{ con } x \neq 0$$

Ne segue lo schema del segno della derivata riportato qui sotto, insieme alle deduzioni che se ne possono trarre circa gli intervalli di monotonia e la natura dei punti stazionari della funzione assegnata.



Dunque la funzione ha un punto di *flesso a tangente orizzontale* per $x = 0$, con $f(0) = 0$ (quindi nell'origine), e un punto di *minimo relativo* per $x = 3$, con $f(3) = \frac{27}{4} = 6{,}75$.

• Studio della derivata seconda

Calcolando la derivata seconda si ottiene:

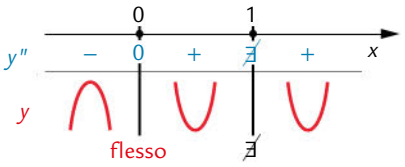
$$y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

Evidentemente:

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y'' > 0 \Rightarrow 6x > 0 \wedge x \neq 1 \Rightarrow x > 0 \wedge x \neq 1$$

Ne segue lo schema del segno della derivata seconda riportato di seguito, insieme alle deduzioni che se ne possono trarre circa gli intervalli in cui la funzione assegnata è concava o convessa. L'unico punto di flesso è quindi quello a tangente orizzontale (nell'origine), già individuato dallo studio della derivata prima.



- **Grafico**

Il grafico è allora quello di **Fig. 4**. Si può riconoscere che l'immagine della funzione è tutto **R** (di conseguenza non ci sono minimi o massimi assoluti).

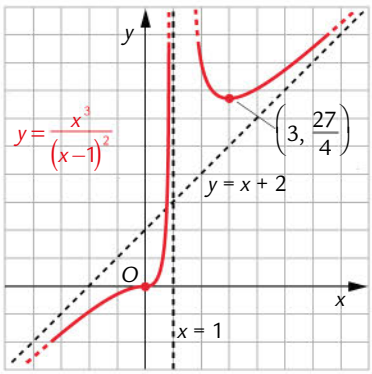


Figura 4

È utile evidenziare alcune caratteristiche comuni a **tutte le funzioni algebriche razionali frazionarie**. Una funzione definita da una frazione algebrica:

- non è definita in corrispondenza dei valori che annullano il denominatore;
- possiede degli asintoti *verticali* in corrispondenza dei valori di x che annullano il denominatore (purché non annullino anche il numeratore);
- possiede asintoti *orizzontali* se e solo se il grado del numeratore della frazione algebrica che definisce la funzione è *minore o uguale* a quello del denominatore;
- possiede asintoti *obliqui* se e solo se il grado del numeratore della frazione algebrica che definisce la funzione *supera di* 1 il grado del denominatore.

Esercizi p. 446

2. Funzioni trascendenti

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Continuiamo gli esempi di studio di funzione, dedicandoci in questo paragrafo alle funzioni *trascendenti*, con particolare attenzione alle funzioni esponenziali, logaritmiche e goniometriche.

ESEMPIO Studio di una funzione esponenziale

Studiamo la funzione $y = (x + 2)e^{-x}$ e tracciamone il grafico.

- **Dominio**

Il fattore esponenziale, e^{-x}, è definito per ogni $x \in \mathbf{R}$, quindi il dominio della funzione è **R**.

- **Simmetrie**

È facile verificare che $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, quindi la funzione non è né pari né dispari.

- **Punti d'intersezione con gli assi e segno**

Poniamo $y = 0$ per determinare gli eventuali punti d'intersezione con l'asse x:

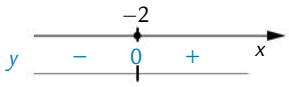
$$y = 0 \Rightarrow (x+2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \vee \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{impossibile}} \Rightarrow x = -2$$

Pertanto il grafico della funzione interseca l'asse x solo nel punto di coordinate $(-2, 0)$.
Per $x = 0$ la funzione assume il valore $y = 2e^0 = 2$, quindi il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 2)$.
Per quanto riguarda il segno abbiamo:

$$(x+2)e^{-x} > 0 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

Ricorda che e^{-x} è sempre positivo

Lo schema del segno della funzione è quello a lato.



- **Comportamento agli estremi del dominio**

Il dominio è **R**, ossia $(-\infty, +\infty)$, quindi dobbiamo calcolare i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

Abbiamo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x+2)e^{-x}}_{+\infty \cdot 0} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}}_{\text{teorema di de l'Hôpital}} = 0$$

Ne deduciamo che l'asse x è un asintoto orizzontale destro per la funzione.
Le informazioni fin qui raccolte sul grafico sono riassunte in **Fig. 5**.

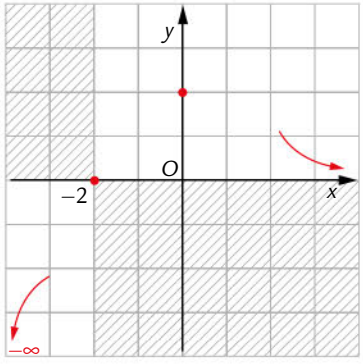


Figura 5

- **Studio della derivata prima**

Si ricava:

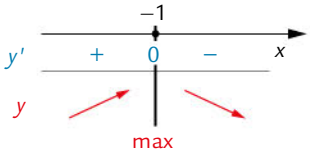
$$y' = 1 \cdot e^{-x} - (x+2)e^{-x} = e^{-x}(1 - x - 2) = -e^{-x}(1 + x)$$

Pertanto:

$$y' = 0 \Rightarrow e^{-x}(1+x) = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{impossibile}} \vee x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$y' > 0 \Rightarrow \underbrace{-e^{-x}}_{\text{sempre positivo}}(1+x) > 0 \Rightarrow 1 + x < 0 \Rightarrow x < -1$$

Riassumiamo nello schema qui sotto il segno della derivata prima.
Ne deduciamo che la funzione presenta un punto di massimo relativo per $x = -1$, con $f(-1) = e$.



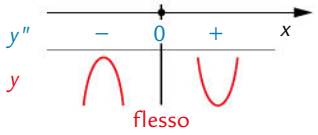
• **Studio della derivata seconda**

Si ricava che $y'' = xe^{-x}$.

Pertanto:

$$y'' = 0 \Rightarrow xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$y'' > 0 \Rightarrow xe^{-x} > 0 \Rightarrow x > 0$$

Lo schema del segno della derivata seconda è riassunto qui sotto.
La funzione presenta quindi un punto di flesso per $x = 0$.



• **Grafico**

Il grafico della funzione è quello riportato in **Fig. 6**. Deduciamo dal grafico che l'immagine della funzione è l'intervallo $(-\infty, e]$ e che il punto $(-1, e)$ è di massimo assoluto.

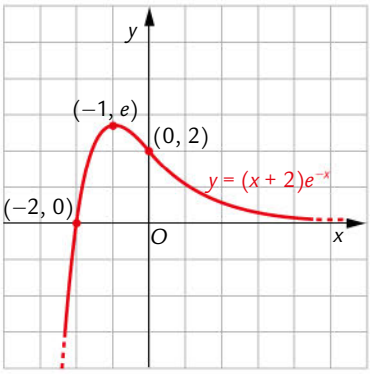


Figura 6

ESEMPIO Studio di una funzione logaritmica

Studiamo la funzione $y = x\ln^2 x$ e tracciamone il grafico.

• **Dominio**

La funzione è definita purché sia definito il logaritmo, cioè per $x > 0$; il dominio è quindi l'intervallo $(0, +\infty)$.

• **Simmetrie**

Essendo la funzione definita solo per $x > 0$, non può essere né pari né dispari.

• **Zeri e segno**

Poniamo $y = 0$ per determinare gli eventuali punti d'intersezione con l'asse x:

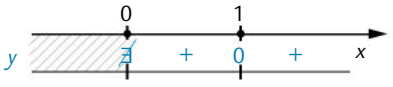
$$y = 0 \Rightarrow x\ln^2 x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Non può essere $x = 0$ perché per $x = 0$ la funzione non è definita

Non ha senso la ricerca dei punti d'intersezione con l'asse y, poiché per $x = 0$ la funzione non è definita. Per quanto riguarda il segno abbiamo:

$$x\ln^2 x > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge \ln x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \wedge x \neq 1$$

Lo schema del segno della funzione è quindi il seguente.



• **Comportamento agli estremi del dominio**

Il dominio è $(0, +\infty)$, quindi dobbiamo calcolare i limiti della funzione per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln^2 \frac{1}{t}}{t} =$$

Ponendo $\frac{1}{x} = t$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} = 0$$

Osservando che $\ln^2 \frac{1}{t} = [\ln(t^{-1})]^2 = (-\ln t)^2 = \ln^2 t$ e ricordando le «gerarchie» degli infiniti

IN UN ALTRO MODO

In alternativa puoi calcolare il $\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x$ riscrivendo la funzione come $\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$ e applicando (due volte) il teorema di de l'Hôpital.

quindi per $x = 0$ la funzione presenta un punto di singolarità eliminabile.

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln^2 x = +\infty$$

Pertanto **non** esistono asintoti orizzontali; inoltre poiché:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln^2 x = +\infty$$

non esistono nemmeno asintoti obliqui.

Le informazioni finora raccolte sono riassunte in **Fig. 7**.

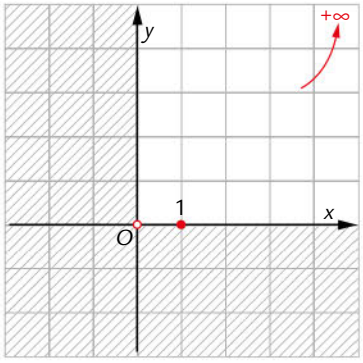


Figura 7

- **Studio della derivata prima**

La funzione data è derivabile nel suo dominio e risulta:

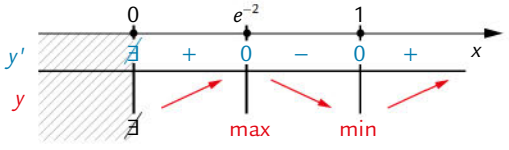
$$y' = \ln^2 x + 2\ln x$$

Pertanto:

$$y' = 0 \Rightarrow \ln^2 x + 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x(\ln x + 2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = -2 \Rightarrow x = 1 \vee x = e^{-2}$$

$$y' > 0 \Rightarrow \ln^2 x + 2\ln x > 0 \Rightarrow \ln x < -2 \vee \ln x > 0 \Rightarrow 0 < x < e^{-2} \vee x > 1$$

Si può costruire il seguente grafico, che riassume il segno di y':



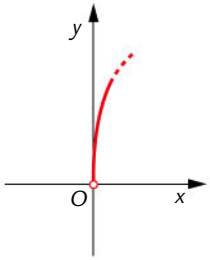
La funzione presenta dunque un punto di massimo relativo per $x = e^{-2}$, con $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$, e un punto di minimo relativo per $x = 1$, con $f(1) = 0$.

ATTENZIONE!

Poiché per $x = 0$ la funzione assegnata presenta un punto di *singolarità eliminabile*, è opportuno calcolare il limite di y' per $x \to 0^+$, in modo da stabilire con maggiore precisione il comportamento della funzione in un intorno destro di zero. Dato che:

$$\lim_{x\to0^+} (\ln^2 x + 2\ln x) = \lim_{t\to-\infty} (t^2 + 2t) = +\infty$$ **Ponendo $\ln x = t$**

possiamo affermare che il grafico della funzione si avvicina al punto $x = 0$ con tangente *verticale*.



- **Studio della derivata seconda**

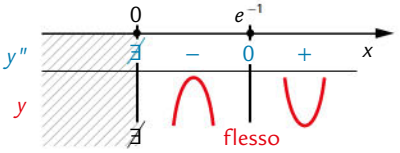
Si ricava facilmente che:

$$y'' = \frac{2(\ln x + 1)}{x}$$

Tenendo conto che deve essere $x > 0$ (perché altrimenti la funzione non è definita), abbiamo:

$$y'' = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$
$$y'' > 0 \Rightarrow \ln x + 1 > 0 \Rightarrow \ln x > -1 \Rightarrow x > e^{-1}$$

Lo schema del segno di y'' è il seguente.



La funzione presenta quindi un punto di flesso per $x = e^{-1}$, con $f(e^{-1}) = e^{-1}$.

- **Grafico**

Il grafico della funzione è dunque quello di **Fig. 8**. Dal grafico ottenuto possiamo dedurre che il punto di minimo relativo è anche punto di minimo assoluto e che l'immagine della funzione è l'intervallo $[0, +\infty)$.

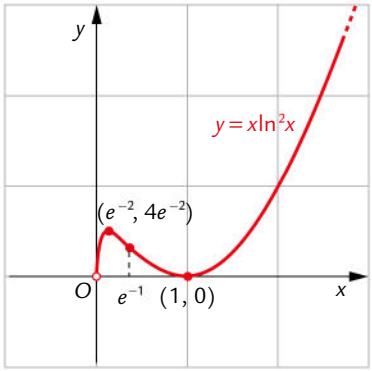


Figura 8

Funzioni goniometriche

Proponiamo infine lo studio di una funzione goniometrica, che rappresenta un esempio di funzione *periodica*.

ESEMPIO Funzione goniometrica

Studiamo la funzione $y = \sin^3 x$ e tracciamone il grafico.

- **Dominio**

La funzione seno è definita per ogni valore reale di x, quindi il dominio è **R**.

- **Periodo e simmetrie**

La funzione è periodica di periodo 2π; inoltre è dispari, perché:

$$f(-x) = \sin^3(-x) = -\sin^3 x = -f(x)$$

Possiamo allora limitarci a studiare la funzione in un intervallo di ampiezza 2π; una scelta conveniente è l'intervallo $[-\pi, \pi]$ (simmetrico rispetto all'origine), perché ci permette di sfruttare le proprietà derivanti dal fatto che la funzione è dispari: possiamo cioè restringere ulteriormente lo studio della funzione all'intervallo $[0, \pi]$ e poi completare il grafico nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ in base alla simmetria rispetto all'origine. Proseguiremo dunque lo studio in $[0, \pi]$.

- **Zeri e segno**

Ponendo $y = 0$, abbiamo:

$$y = 0 \Rightarrow \sin^3 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \underbrace{x = k\pi \Rightarrow x = 0 \vee x = \pi}_{\text{limitatamente all'intervallo } [0,\, \pi]}$$

La funzione interseca dunque l'asse x nei punti di coordinate $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$.
Poiché il segno di $\sin^3 x$ è uguale a quello di $\sin x$, deduciamo che:

$$\sin^3 x > 0 \quad \text{per ogni } x \in (0, \pi)$$

- **Comportamento agli estremi dell'intervallo $[0, \pi]$**

La funzione è continua nell'intervallo $[0, \pi]$, quindi:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = 0$$

Le informazioni fin qui raccolte, tenendo conto della simmetria della funzione rispetto all'origine, sono rappresentate in **Fig. 9**.

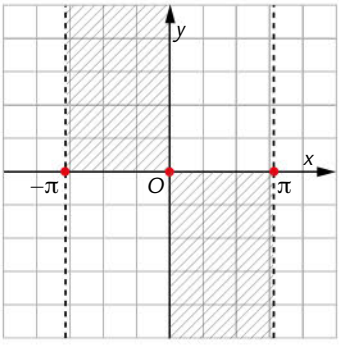


Figura 9

- **Studio della derivata prima**

La funzione è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e si ha:

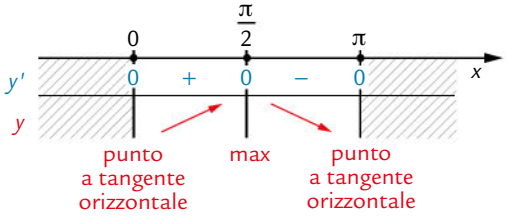
$$y' = 3\sin^2 x \cos x$$

Limitatamente all'intervallo $[0, \pi]$ risulta:

$$y' = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi$$

$$y' > 0 \Rightarrow \cos x > 0 \wedge \sin x \neq 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

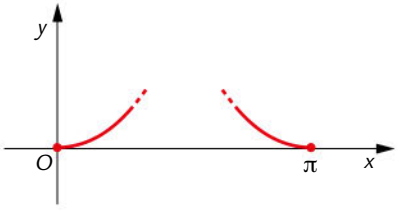
Lo schema del segno della derivata prima è quindi il seguente; ne deduciamo che $x = \frac{\pi}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

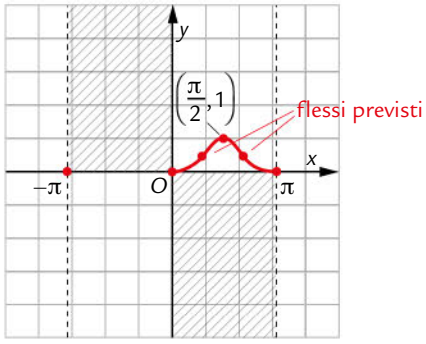


RIFLETTI

Poiché la derivata prima si annulla in corrispondenza degli estremi dell'intervallo $[0, \pi]$, possiamo dedurre che il grafico della funzione, nell'intervallo $[0, \pi]$, si avvicina a $x = 0$ e $x = \pi$ con tangente *orizzontale* (figura sotto a sinistra).

Tenendo conto di ciò e del fatto che la funzione deve avere un punto di massimo per $x = \frac{\pi}{2}$, possiamo già tracciare un grafico qualitativo abbastanza accurato della funzione nell'intervallo $[0, \pi]$ e prevedere l'esistenza di almeno un punto di *flesso* in ciascuno dei due intervalli $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (figura sotto a destra).





- **Studio della derivata seconda**

La derivata seconda è:

$$y'' = 3\sin x\,(2 - 3\sin^2 x)$$

Limitatamente all'intervallo $[0, \pi]$ abbiamo:

$$y'' = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \vee 2 - 3\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

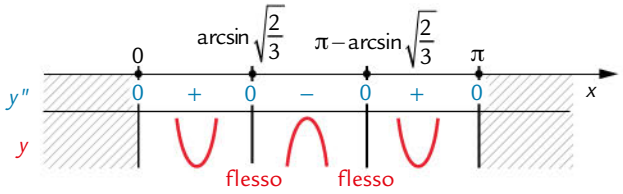
$$\Rightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \vee x = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Tenendo conto che $\sin x$ è non negativo nell'intervallo $[0, \pi]$ abbiamo che in questo intervallo:

$$y'' > 0 \Rightarrow 2 - 3\sin^2 x > 0 \wedge \sin x \neq 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}} < \sin x < \sqrt{\frac{2}{3}} \wedge \sin x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < x < \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \vee \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \pi$$

Lo schema del segno di y'' in $[0, \pi]$ è quindi il seguente.



Ritroviamo così i due punti di flesso di cui avevamo previsto l'esistenza nell'intervallo $[0, \pi]$:

$$x = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0{,}9 \quad \text{e} \quad x = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 2{,}1$$

SUGGERIMENTO

Quando il calcolo dell'ordinata di un punto di estremo relativo o di flesso è laborioso e il grafico risulta già sufficientemente preciso, a volte si può tralasciare. Per esempio, nell'esercizio che stiamo svolgendo qui a fianco, il calcolo dell'ordinata dei punti di flesso non era strettamente necessario per la realizzazione di un grafico *qualitativo*.

Si può verificare che:

$$f\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = f\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{6}}{9} \simeq 0{,}5$$

- **Grafico**

Sfruttando la simmetria della funzione rispetto all'origine possiamo infine tracciarne il grafico in tutto l'intervallo $[-\pi, \pi]$ come in **Fig. 10**. Osserva che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione presenta un punto di minimo relativo per $x = -\frac{\pi}{2}$ e un punto di flesso a tangente orizzontale per $x = 0$.

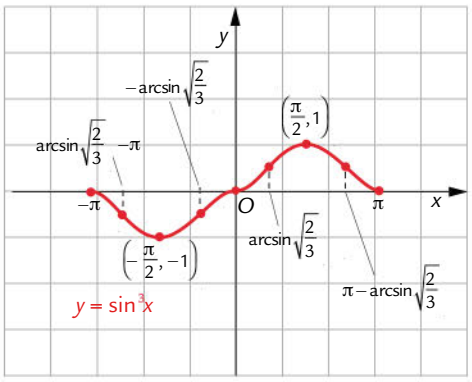


Figura 10

Esercizi p. 455

3. Funzioni con valori assoluti

Studio di funzioni con valori assoluti

Il metodo generale per studiare una funzione contenente termini *in valore assoluto* consiste nel riscrivere l'espressione analitica della funzione, in base alla definizione stessa di valore assoluto, sotto forma di funzione *definita per casi* e studiare la funzione che così scaturisce.
In alcuni casi, tuttavia, si può procedere più rapidamente:

- se la funzione è *pari* o *dispari* e solo la variabile x compare in valore assoluto, si può studiarla solo per $x \geq 0$ (ricordando che allora $|x| = x$) e poi dedurre il grafico per $x < 0$ in base alla simmetria della funzione;
- se la funzione si presenta nella forma $y = |f(x)|$, abbiamo già visto più volte che è sufficiente tracciare il grafico di $y = f(x)$ e poi simmetrizzare rispetto all'asse x le parti di quest'ultimo che risultano negative;
- se la funzione si presenta nella forma $y = \ln|f(x)|$, è inutile distinguere i vari casi provenienti dallo studio del valore assoluto di $f(x)$ poiché, come abbiamo visto nell'**Unità 5**, nel calcolo delle derivate il valore assoluto «scompare».

RICORDA

La derivata di $y = \ln|f(x)|$ è $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

È quindi opportuno analizzare preliminarmente la funzione in esame, in modo da scegliere il metodo più «economico» in termini di calcoli.

ESEMPI Scelta del metodo più rapido per studiare una funzione con valore assoluto

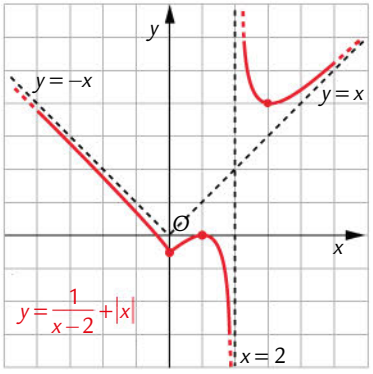
a. Per studiare la funzione $y = \frac{1}{x-2} + |x|$ occorre distinguere i due casi $x \geq 0$ e $x < 0$. In base alla definizione di valore assoluto abbiamo:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x-2} + x & x \geq 0 \\ \frac{1}{x-2} - x & x < 0 \end{cases}$$

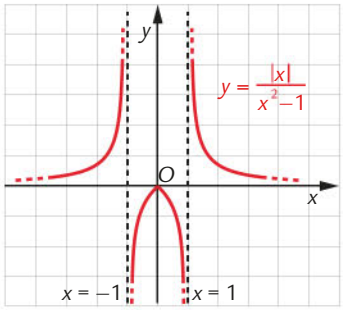
Dobbiamo quindi studiare le due funzioni:

$$y = \frac{1}{x-2} + x \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{x-2} - x$$

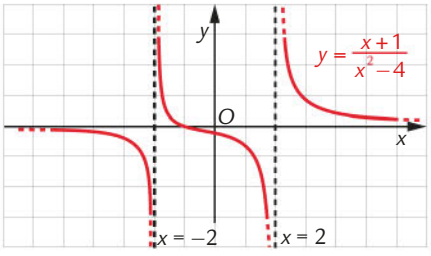
e considerare la parte del grafico della prima funzione per $x \geq 0$ e la parte del grafico della seconda per $x < 0$. Effettuando lo studio di queste due funzioni (che ti invitiamo a fare per esercizio), si giunge a concludere che il grafico della funzione data è quello in figura.

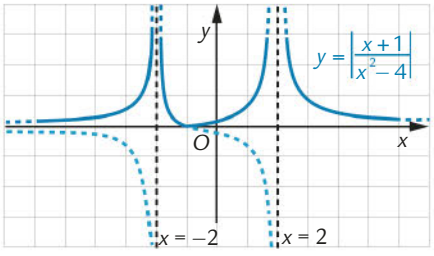


b. Per studiare il grafico della funzione $y = \frac{|x|}{x^2-1}$, una volta osservato che essa è *pari*, si può procedere così: si traccia il grafico della funzione $y = \frac{x}{x^2-1}$ per $x \geq 0$ e poi si completa il grafico per $x < 0$ con il simmetrico rispetto all'asse y di quello tracciato.



c. Per studiare il grafico della funzione $y = \left|\frac{x+1}{x^2-4}\right|$, una volta osservato che la funzione è della forma $y = |f(x)|$, si può procedere così: si traccia il grafico di $y = \frac{x+1}{x^2-4}$ e si considerano le parti del grafico con $y \geq 0$, poi si simmetrizzano rispetto all'asse y le parti del grafico in cui $y < 0$.





d. Per studiare il grafico della funzione $y = \ln|x^2 - 2x|$, in base a quanto abbiamo osservato all'inizio circa le funzioni del tipo $y = \ln|f(x)|$, non è necessario distinguere i due casi previsti dalla definizione di valore assoluto.

Esercizi p. 461

4. Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata prima

RIMANDO
Il problema inverso, cioè quello di risalire, a partire dal grafico della derivata di una funzione, a quello della funzione stessa verrà affrontato nell'Unità 2 del Volume 5.

Con GeoGebra
Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata prima

Ci occupiamo ora del problema di dedurre, a partire dal grafico di una funzione $y = f(x)$, quello della sua *derivata*. Per tracciare un grafico plausibile della funzione $y = f'(x)$ è sufficiente tenere presente che:

a. ha come **dominio** l'insieme dei valori di x per cui la funzione $y = f(x)$ è derivabile;
b. è **pari** se $y = f(x)$ è dispari, è **dispari** se $y = f(x)$ è pari (prova a dimostrarlo);
c. interseca l'asse x nei punti *stazionari* di $y = f(x)$ (cioè nei punti di massimo o minimo relativo o di flesso a tangente orizzontale di f);
d. è *positiva* (o nulla) negli intervalli in cui $y = f(x)$ è crescente e *negativa* (o nulla) negli intervalli in cui $y = f(x)$ è decrescente;
e. presenta **asintoti verticali** negli eventuali punti in cui $y = f(x)$ ha una cuspide o un flesso a tangente verticale;
f. presenta punti di **massimo o minimo relativo** in corrispondenza dei punti di *flesso* della funzione $y = f(x)$;
g. è crescente negli intervalli in cui $y = f(x)$ è convessa e decrescente negli intervalli in cui $y = f(x)$ è concava.

ESEMPIO Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata

Deduciamo dal grafico della funzione $y = f(x)$, tracciato in **Fig. 15**, il grafico della funzione $y = f'(x)$.

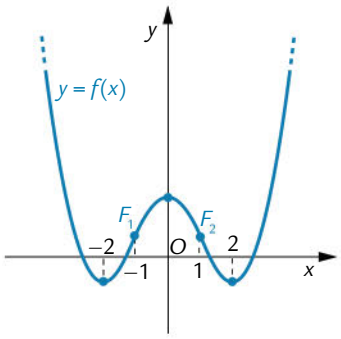


Figura 15 Grafico della funzione $y = f(x)$. I punti F_1 e F_2 sono di flesso.

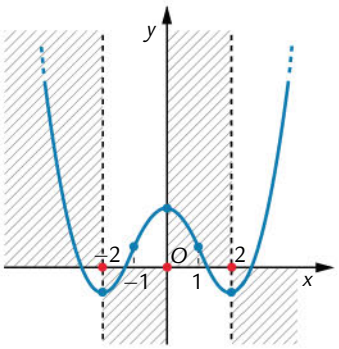


Figura 16 Escludiamo con un tratteggio le regioni di piano cui **non** appartiene il grafico di $y = f'(x)$ tenendo conto che $f'(x)$ è positiva dove $f(x)$ cresce e negativa dove decresce. Inoltre gli zeri di $y = f'(x)$ (in rosso) sono i punti di estremo relativo di $f(x)$.

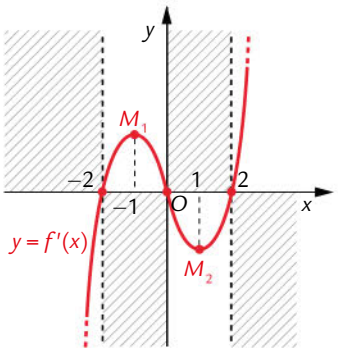
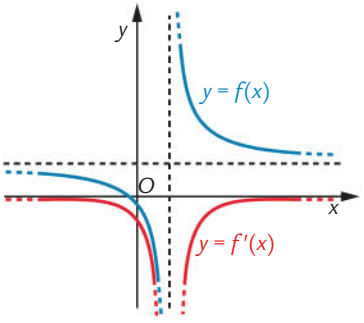


Figura 17 Tenendo conto che il grafico di $y = f'(x)$ ha punti di estremo relativo nei punti di flesso di $f(x)$, possiamo tracciare il grafico di $f'(x)$ colorato in rosso. Per ottenere una stima delle ordinate di M_1 e M_2 basta stimare i coefficienti angolari delle tangenti al grafico di f nei punti F_1 e F_2.

PER SAPERNE DI PIÙ **Asintoti e limiti della derivata prima**

È possibile dimostrare che:

- se la funzione $y = f(x)$ ammette asintoto verticale per $x = x_0$ ed esiste il limite della funzione $y = f'(x)$ per $x \to x_0$, quest'ultimo deve essere $-\infty$ o $+\infty$ (quindi, in caso di esistenza del limite, anche la funzione f' presenta un asintoto verticale dove lo presenta la funzione f);
- se la funzione $y = f(x)$ ammette asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ $(-\infty)$ ed esiste il limite della funzione $y = f'(x)$ per $x \to +\infty$ $(-\infty)$, quest'ultimo deve essere 0 (quindi, in caso di esistenza del limite, la funzione f' presenta come asintoto orizzontale l'asse x). Osserva l'esempio in figura.



Esercizi p. 463

5. Applicazioni dello studio di funzione alle equazioni

Stabilire il numero delle soluzioni di una equazione

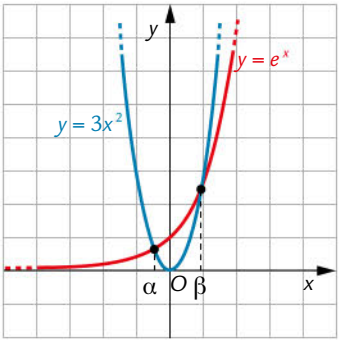
Durante il nostro corso di Matematica abbiamo imparato a risolvere molti tipi di equazioni. Abbiamo visto tuttavia che diverse equazioni non sono risolvibili algebricamente; per queste, si può generalmente individuare se esistono soluzioni e darne una localizzazione mediante metodi *grafici*. In alcuni casi può accadere però che il confronto grafico sia di difficile interpretazione e che sia necessaria un'analisi più approfondita: lo studio di funzione consente di risolvere anche questi casi, come mostriamo nel prossimo esempio.

ESEMPIO Ricerca del numero delle soluzioni di un'equazione mediante uno studio di funzione

Stabiliamo il numero delle soluzioni dell'equazione $e^x = 3x^2$.

- **Analisi preliminare**

Riconosciuto che l'equazione non è risolvibile algebricamente, per cercare di individuare se esistono soluzioni e stabilirne il numero il primo tentativo è quello di analizzare la situazione graficamente, tracciando il grafico delle funzioni $y = e^x$ e $y = 3x^2$.



Dal grafico si vede che ci sono certamente due punti d'intersezione, quindi l'equazione deve avere *almeno* due soluzioni. L'analisi grafica però non ci permette di stabilire se queste siano le sole soluzioni: le due curve potrebbero infatti intersecarsi altre volte per $x > \beta$ (in linea di principio anche per valori di x molto grandi, difficili da visualizzare). Il problema necessita quindi di un'analisi più approfondita. Un modo per risolverlo è ricorrere allo studio di un'opportuna funzione «ausiliaria».

- **Introduzione di una funzione ausiliaria**

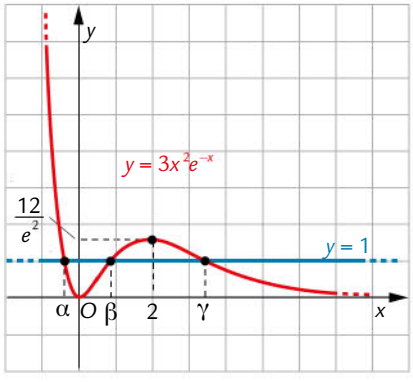
Osserviamo che l'equazione $e^x = 3x^2$ equivale, moltiplicando entrambi i membri per e^{-x} (che come sappiamo è certamente diverso da zero), all'equazione:

$$1 = 3x^2e^{-x}$$

Dunque le soluzioni dell'equazione originaria possono interpretarsi come le ascisse dei punti d'intersezione tra il grafico della retta $y = 1$ e il grafico della funzione $y = 3x^2e^{-x}$. Studiamo allora questa funzione «ausiliaria», $y = 3x^2e^{-x}$.

- **Studio della funzione ausiliaria**

Procedendo come abbiamo visto nei primi paragrafi, si giunge al seguente grafico.



Osserviamo che, ai fini della risoluzione del nostro problema, non è importante individuare i punti di flesso della funzione $y = 3x^2e^{-x}$, mentre è necessario individuare i punti di estremo relativo. Precisamente, per essere in grado di stabilire il numero dei punti d'intersezione della retta $y = 1$ con il grafico della funzione è fondamentale sapere che l'ordinata del punto di massimo relativo è $\frac{12}{e^2} \simeq 1{,}6 > 1$.

- **Conclusione**

Dal grafico vediamo che la retta $y = 1$ interseca il grafico della funzione esattamente in tre punti, le cui ascisse abbiamo indicato con α, β e γ; quindi l'equazione $e^x = 3x^2$ ha esattamente tre soluzioni:

$$\alpha \in (-1, 0), \quad \beta \in (0, 1) \quad \text{e} \quad \gamma \in (3, 4)$$

La discussione di una equazione parametrica

Un'altra applicazione dello studio di funzione alle equazioni riguarda la *discussione* delle equazioni *parametriche*. In passato abbiamo imparato a discutere equazioni e sistemi di primo e secondo grado (o a essi riconducibili), algebricamente o con metodi grafici basati sulla ricerca dei punti d'intersezione tra fasci di rette e coniche. Ora, grazie agli strumenti dell'analisi che ci consentono di tracciare il grafico di funzioni di svariati tipi, si allarga notevolmente la classe di equazioni parametriche che possiamo discutere graficamente.

ESEMPIO Discussione di un'equazione parametrica

Discutiamo, al variare del parametro reale k, l'equazione $8\ln x = kx$.

- **Analisi preliminare**

L'equazione da discutere è *trascendente* e non risolvibile algebricamente; quindi, senza i mezzi dell'analisi non saremmo in grado di risolvere né di discutere l'equazione. Analogamente all'esempio precedente, la chiave per risolvere l'esercizio è quella di interpretare le soluzioni dell'equazione come ascisse dei punti d'intersezione tra il grafico di un'opportuna funzione ausiliaria e una retta parallela all'asse x.

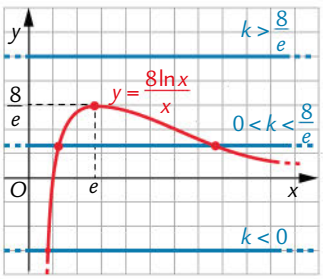
- **Funzione ausiliaria**

Per individuare la funzione ausiliaria opportuna «isoliamo» il parametro k, cioè cerchiamo di riscrivere l'equazione nella forma $f(x) = k$. In questo caso possiamo osservare che un'eventuale soluzione dell'equazione deve essere tale che $x > 0$ (per l'esistenza del logaritmo); sotto questa condizione possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione per x, ottenendo l'equazione equivalente:

$$\frac{8\ln x}{x} = k$$

Discutere l'equazione equivale quindi a discutere il numero dei punti d'intersezione tra il grafico della funzione $y = \frac{8\ln x}{x}$ e quello della retta di equazione $y = k$.

- **Studio della funzione ausiliaria**



Studiando la funzione $y = \frac{8\ln x}{x}$ otteniamo il grafico a lato.

Da esso vediamo che tra il grafico della funzione e la retta $y = k$:

- c'è un unico punto d'intersezione per $k \le 0$;
- ci sono due punti d'intersezione per $0 < k \le \frac{8}{e}$ (coincidenti per $k = \frac{8}{e}$);
- non ci sono punti d'intersezione per $k > \frac{8}{e}$.

- **Conclusione**

L'equazione originaria ha pertanto: una soluzione per $k \le 0$, due soluzioni per $0 < k \le \frac{8}{e}$ e nessuna soluzione per $k > \frac{8}{e}$.

Il metodo applicato nell'esempio precedente si può generalizzare come segue.

PROCEDIMENTO PER DISCUTERE UN'EQUAZIONE PARAMETRICA

1. Si isola il parametro (se possibile), cioè si scrive l'equazione nella forma $f(x) = k$.
2. Si studia il grafico della funzione $y = f(x)$.
3. Si discute il numero dei punti d'intersezione tra il grafico della funzione e il fascio di rette parallele all'asse x di equazione $y = k$.

Un metodo del tutto analogo può essere utilizzato per discutere un'equazione parametrica rispetto a delle *limitazioni assegnate* sull'incognita. Per esempio, se volessimo discutere l'equazione $8\ln x = kx$ rispetto alle limitazioni $1 \le x \le e$ il metodo sarebbe del tutto simile; l'unica differenza consisterebbe nel fatto che **non** dovremmo considerare tutto il grafico della funzione $y = \frac{8\ln x}{x}$, ma *soltanto l'arco* le cui ascisse appartengono all'intervallo $1 \le x \le e$.

Esercizi p. 467

6. L'approssimazione delle radici di una equazione

Approfondiamo ulteriormente lo studio delle equazioni, affrontando il problema dell'approssimazione numerica delle radici di un'equazione non risolvibile algebricamente.
Presenteremo quattro metodi di approssimazione differenti.

Il metodo di bisezione

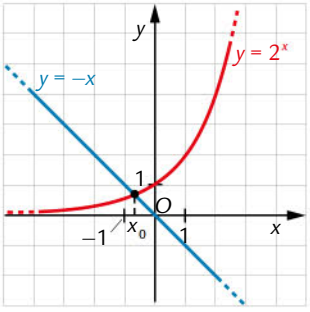
Il metodo più elementare per approssimare una radice di un'equazione è basato sul *teorema degli zeri* che abbiamo presentato nell'**Unità 4** (**Paragrafo 3**).

ESEMPIO Il metodo di bisezione

Consideriamo l'equazione $2^x + x = 0$. Dopo aver verificato graficamente che ammette una soluzione e aver trovato un intervallo cui appartiene, determiniamo una sua approssimazione con una cifra decimale esatta.

- **Interpretazione grafica dell'equazione**

L'equazione $2^x + x = 0$ equivale a $2^x = -x$, quindi le sue eventuali soluzioni sono le ascisse dei punti d'intersezione tra i grafici delle funzioni $y = 2^x$ e $y = -x$.
Dalla figura si vede che i due grafici hanno in comune un solo punto, la cui ascissa x_0 è compresa tra -1 e 0. Possiamo quindi prevedere che l'equazione data avrà una soluzione, appartenente all'intervallo $[-1, 0]$.



- **Dimostrazione dell'esistenza della soluzione**

Dimostriamo rigorosamente quanto intuito dal grafico. Consideriamo la funzione: $f(x) = 2^x + x$. Osserviamo che essa è continua e calcoliamo i valori assunti dalla funzione agli estremi dell'intervallo $[-1, 0]$:

$$f(-1) = 2^{-1} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(0) = 2^0 + 0 = 1 > 0$$

Poiché tali valori sono discordi, per il teorema degli zeri possiamo affermare che esiste $x_0 \in [-1, 0]$ tale che $f(x_0) = 0$, cioè che esiste una soluzione dell'equazione $2^x + x = 0$ appartenente all'intervallo $[-1, 0]$.
Osservando che la funzione $f(x) = 2^x + x$ è strettamente crescente (in quanto somma di due funzioni strettamente crescenti), possiamo anche affermare che la soluzione dell'equazione è unica.

- **Il metodo di bisezione**

Possiamo localizzare più accuratamente la soluzione dell'equazione ragionando come segue.

1. Consideriamo i due intervalli $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ e $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ in cui l'intervallo $[-1, 0]$ resta suddiviso dal suo punto medio.
2. Osserviamo che uno di essi deve certamente contenere la soluzione dell'equazione; per stabilire quale, calcoliamo il valore della funzione per $x = -\frac{1}{2}$. Con l'aiuto di una calcolatrice possiamo verificare che:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \simeq 0{,}21 > 0$$

3. Poiché sappiamo che $f(-1) < 0$ (lo abbiamo calcolato in precedenza) e abbiamo appena visto che $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, riconosciamo che la funzione f assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, quindi la soluzione dell'equazione appartiene a esso.

Il metodo di bisezione consiste nel ripetere questo processo finché non si giunge a un intervallo «sufficientemente piccolo» che consenta di determinare x_0 con la precisione voluta. Questo esempio chiede di determinare la soluzione con una cifra decimale esatta, quindi dobbiamo ripetere il procedimento fino a determinare un intervallo i cui estremi coincidono fino alla prima cifra decimale. I vari passi da svolgere sono schematizzati nella seguente tabella.

Intervallo	Punto medio	Valori della funzione	Conclusioni
$\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$	$-\frac{3}{4}$	$f\left(-\frac{3}{4}\right) \simeq -0{,}16$ (< 0) $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}21$ (> 0)	La soluzione appartiene all'intervallo $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right] = [-0{,}75, -0{,}5]$
$\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$	$-\frac{5}{8}$	$f\left(-\frac{5}{8}\right) \simeq 0{,}02$ (> 0) $\quad f\left(-\frac{3}{4}\right) \simeq -0{,}16$ (< 0)	La soluzione appartiene all'intervallo $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}\right] = [-0{,}75, -0{,}625]$
$\left[-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}\right]$	$-\frac{11}{16}$	$f\left(-\frac{11}{16}\right) \simeq -0{,}07$ (< 0) $\quad f\left(-\frac{5}{8}\right) \simeq 0{,}02$ (> 0)	La soluzione appartiene all'intervallo $\left[-\frac{11}{16}, -\frac{5}{8}\right] = [-0{,}6875, -0{,}625]$

Osserva che le conclusioni raggiunte all'ultimo passo ci consentono di dire che:

$$-0{,}6875 < x_0 < -0{,}625$$

quindi $x_0 \simeq -0{,}6$, con la prima cifra decimale esatta. Al penultimo passo invece potevamo affermare soltanto che $-0{,}75 < x_0 < -0{,}625$, quindi la prima cifra decimale era ancora incerta fra 6 e 7.

Se indichiamo con $[a_n, b_n]$ l'intervallo ottenuto dopo avere applicato il metodo di bisezione n volte, con c_n il punto medio dell'intervallo e con α la radice che vogliamo approssimare, si ha che:

$$\underbrace{|c_n - \alpha|}_{\text{la distanza di } c_n \text{ da } \alpha} \underbrace{\leq}_{\text{è minore o uguale}} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2^n}\right)}_{\text{alla metà dell'ampiezza dell'intervallo } [a_n, b_n]} \Rightarrow |c_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Per stabilire il numero n di iterazioni sufficienti a ottenere un'approssimazione della radice con un errore minore o uguale a un prefissato numero ε, basta quindi risolvere rispetto a n la disequazione:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

Come puoi notare dall'esempio precedente, il metodo di bisezione converge alla soluzione piuttosto «lentamente»; i metodi che presenteremo nei prossimi paragrafi hanno invece il pregio di convergere alla soluzione «più rapidamente».

Il metodo delle tangenti (o di Newton)

Consideriamo l'equazione $f(x) = 0$ e supponiamo di aver accertato che tale equazione ammette nell'intervallo $[a, b]$ un'unica soluzione, diciamola α. Spieghiamo intuitivamente l'idea alla base del metodo di Newton con riferimento alla **Fig. 18**.

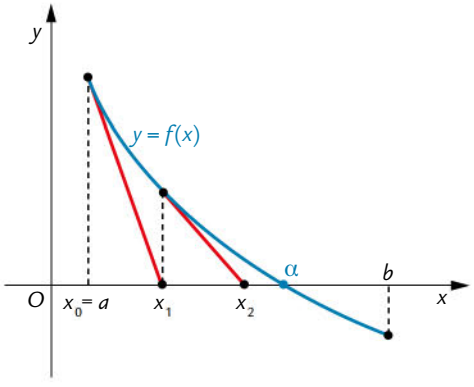


Figura 18

L'idea è di costruire una successione $x_0, x_1, ..., x_n$ che sia convergente ad α.
Partiamo da $x_0 = a$ e tracciamo la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ in x_0; sappiamo che tale retta ha equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad [1]$$

Definiamo il secondo termine della successione che vogliamo costruire, x_1, come l'ascissa del punto d'intersezione della retta tangente con l'asse x; nel punto x_1 sarà:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \qquad [2]$$

Risolvendo la [2] rispetto a x_1 (nell'ipotesi $f'(x_0) \neq 0$), otteniamo:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ripetendo il procedimento con x_1 al posto di $x_0 = a$, conduciamo la retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_1 e indichiamo con x_2 l'ascissa del suo punto d'intersezione con l'asse x; sarà:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Iterando n volte il procedimento si costruisce la successione $x_0, x_1, ..., x_n$ che può quindi essere definita per ricorrenza dalla relazione:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases} \qquad [3]$$

Con GeoGebra
Il metodo di Newton

È intuitivo che, nelle condizioni della **Fig. 18**, la successione x_n tende (per difetto) alla radice α dell'equazione quando $n \to +\infty$. Non sempre tuttavia ciò accade, come mostrato in **Fig. 19**.

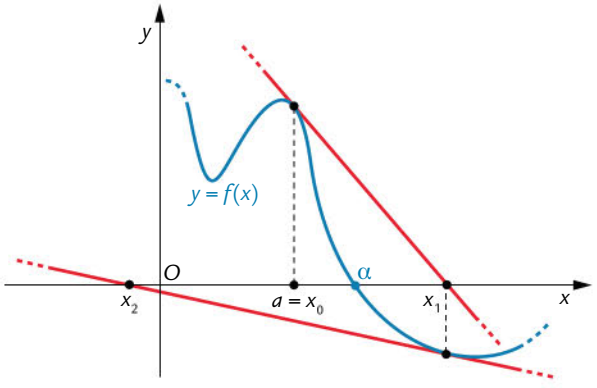


Figura 19 La successione definita per ricorrenza dalla [3], con punto iniziale a, nel caso rappresentato non converge ad α; come puoi vedere, infatti, sia x_1 sia x_2 sono approssimazioni di α peggiori di a.

È importante allora stabilire delle condizioni che garantiscano la convergenza della successione [3] alla soluzione dell'equazione che vogliamo determinare; tali condizioni sono espresse dal seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

TEOREMA 1 | Convergenza del metodo delle tangenti

Sia f una funzione che soddisfa le seguenti proprietà:

a. f è derivabile due volte nell'intervallo $[a, b]$, con derivate continue;
b. f' ed f'' sono non nulle e di segno costante in $[a, b]$;
c. $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione $\alpha \in [a, b]$ e inoltre:

- se $f(a) \cdot f''(a) > 0$, la successione definita dalla [3] con $x_0 = a$ converge ad α;
- in caso contrario risulta $f(b) \cdot f''(b) > 0$ e converge ad α la successione definita dalla [3] con $x_0 = b$.

È importante fare alcune osservazioni.

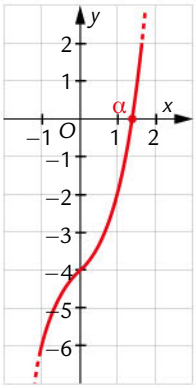
- Le ipotesi **a**, **b** e **c** insieme garantiscono sia l'esistenza sia l'unicità della soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Infatti, l'*unicità* segue dalla monotonia di f assicurata da **b** (precisamente, dal fatto che f' ha segno costante in $[a, b]$); l'*esistenza* segue dal teorema degli zeri, applicabile in forza delle ipotesi **c** e **a** (la derivabilità di una funzione, infatti, implica la sua continuità).
- Come regola pratica, si può osservare che come primo termine della successione approssimante bisogna assumere l'estremo dell'intervallo $[a, b]$ in cui la funzione f assume valore *concorde* con quello di f''.

ESEMPIO Approssimazione delle soluzioni di un'equazione con il metodo di Newton

Dimostriamo che l'equazione $x^3 + x - 4 = 0$ ha una sola soluzione e determiniamone un'approssimazione con il metodo di Newton.

- **Localizziamo la soluzione e individuiamo un intervallo che soddisfi le ipotesi del Teorema 1**

Con un breve studio della funzione $f(x) = x^3 + x - 4$ si arriva a tracciarne il grafico, che risulta quello nella figura qui proposta. Esso permette di intuire che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione, appartenente all'intervallo $[1, 2]$.



Possiamo applicare il metodo di Newton a partire da questo intervallo, perché sono soddisfatte tutte le ipotesi richieste dal **Teorema 1**; infatti:

- la funzione f è polinomiale, quindi soddisfa l'ipotesi **a** del **Teorema 1**;
- poiché $f'(x) = 3x^2 + 1$ ed $f''(x) = 6x$, le due funzioni f' ed f'' risultano chiaramente positive nell'intervallo $[1, 2]$, quindi è soddisfatta l'ipotesi **b**;
- risulta $f(1) \cdot f(2) = -2 \cdot 6 = -12 < 0$, quindi è soddisfatta anche l'ipotesi **c**.

Il fatto che siano soddisfatte le ipotesi **a** e **b** del teorema *dimostra* tra l'altro l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione nell'intervallo $[1, 2]$ (esistenza e unicità che dal grafico avevamo solo potuto *intuire*).

- **Determiniamo la successione che approssima la soluzione**

Dobbiamo individuare anzitutto quale dei due estremi dell'intervallo $[1, 2]$ va assunto come primo elemento della successione; poiché $f(1) \cdot f''(1) = -2 \cdot 6 = -12 < 0$, dobbiamo assumere $x_0 = 2$. La successione sarà quindi definita ricorsivamente come segue:

$$x_0 = 2,\ x_n = x_{n-1} - \frac{\overbrace{x_{n-1}^3 + x_{n-1} - 4}^{f(x_{n-1})}}{\underbrace{3x_{n-1}^2 + 1}_{f'(x_{n-1})}} \qquad f'(x) = 3x^2 + 1,\ \text{quindi } f'(x_{n-1}) = 3x_{n-1}^2 + 1$$

- **Determiniamo alcune approssimazioni**

Con l'aiuto di un calcolatore si ottiene:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + x_0 - 4}{3x_0^2 + 1} = 2 - \frac{2^3 + 2 - 4}{3 \cdot 2^2 + 1} = \frac{20}{13} = 1{,}538461538...$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + x_1 - 4}{3x_1^2 + 1} = 1{,}392819014...$$

Iterando il procedimento si ha:

$$x_3 = 1{,}378916766... \qquad x_4 = 1{,}378796709... \qquad x_5 = 1{,}378796700...$$

Dopo cinque iterazioni le prime *otto* cifre dopo la virgola si stabilizzano, quindi possiamo dire che la soluzione α, con otto cifre decimali esatte, è $\alpha = 1{,}37879670$.

PER SAPERNE DI PIÙ

Nell'esempio qui a fianco si è ottenuto un «buon» risultato (otto cifre decimali esatte) dopo solo cinque iterazioni. Ciò mostra che il metodo di Newton converge rapidamente alla soluzione: addirittura si potrebbe dimostrare che se la successione [3] parte da un punto «sufficientemente vicino» ad α, l'errore $|x_n - \alpha|$ decresce, al crescere di n, con velocità più che esponenziale!

Il metodo delle secanti (o di Lagrange)

Un metodo alternativo a quello di Newton per approssimare una radice di un'equazione è il cosiddetto **metodo delle secanti**. Similmente al metodo di Newton, esso si basa sulla costruzione di una successione che converge alla radice cercata. Per spiegare il principio su cui si basa il metodo, facciamo riferimento alla **Fig. 20**. Vogliamo approssimare la radice $\alpha \in [a, b]$. Poniamo come primo termine della successione approssimante $x_0 = a$; dopodiché definiamo come termine successivo della successione, x_1, l'ascissa del punto d'intersezione con l'asse x della retta AB (essendo A e B i punti del grafico della funzione di ascisse rispettivamente a e b).

La retta AB ha equazione:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ossia, avendo posto $x_0 = a$:

$$y - f(x_0) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0)$$

Ponendo $y = 0$, otteniamo l'equazione:

$$-f(x_0) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0)$$

che, risolta rispetto a x, fornisce il valore di x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} f(x_0)$$

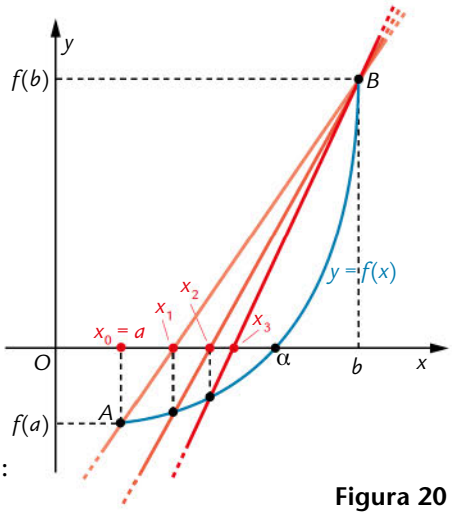


Figura 20

Ora ripetiamo lo stesso ragionamento a partire dall'intervallo $[x_1, b]$ anziché dall'intervallo $[a, b] = [x_0, b]$. Conduciamo la retta secante passante per i punti del grafico della funzione di ascisse x_1 e b e indichiamo con x_2 l'ascissa del punto d'intersezione di tale secante con l'asse x; sarà:

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} f(x_1)$$

Iterando n volte il procedimento si costruisce la successione definita dalla relazione:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}) \qquad [4]$$

Similmente a quanto già visto nel metodo di Newton, non sempre la successione x_n definita dalla [4] converge ad α per $n \to +\infty$; per esempio, ciò non accade nel caso in **Fig. 21**.

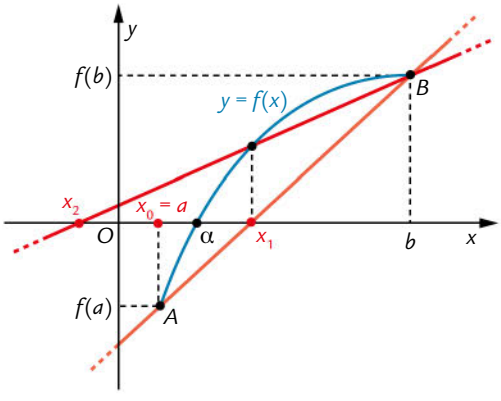


Figura 21 Il metodo delle secanti con il punto iniziale $x_0 = a$ non converge alla soluzione.

Il teorema seguente esprime delle condizioni sufficienti per la convergenza.

TEOREMA 2 | Convergenza del metodo delle secanti

Sia f una funzione che soddisfi le seguenti proprietà:

a. f è derivabile due volte nell'intervallo $[a, b]$, con derivate continue;

b. f' ed f'' sono non nulle e di segno costante in $[a, b]$;

c. $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione $\alpha \in [a, b]$ e inoltre:

- se $f(a) \cdot f''(a) < 0$, la successione definita dalla [4] con $x_0 = a$ converge ad α;
- in caso contrario, risulta $f(b) \cdot f''(b) < 0$ e converge ad α la successione in cui $x_0 = b$, definita da una relazione analoga alla [4] in cui b è sostituito con a.

OSSERVA

Nota l'analogia tra gli enunciati dei due Teoremi 1 e 2, in particolare tra le ipotesi di applicabilità dei due metodi delle tangenti e delle secanti.

Come regola pratica, si può osservare che come primo termine della successione approssimante bisogna assumere l'estremo dell'intervallo $[a, b]$ in cui la funzione f assume valore *discorde* da quello di f''.

ESEMPIO Applicazione del metodo delle secanti

Determiniamo un'approssimazione dell'equazione $x^3 + x - 4 = 0$, applicando il metodo delle secanti.

- **Verifichiamo le ipotesi**

Nell'esempio precedente abbiamo già dedotto che sono soddisfatte tutte le ipotesi per potere applicare il **Teorema 2** nell'intervallo $[1, 2]$.

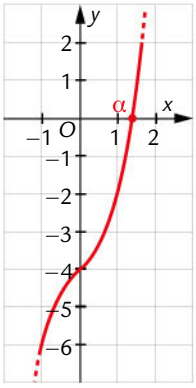
- **Determiniamo la successione approssimante**

Poiché:

$$f(1) = -2,\ f(2) = 6 \text{ e } f''(x) = 6x > 0 \text{ per ogni } x \in [1, 2]$$

dobbiamo scegliere come primo termine della successione $x_0 = 1$ (così che sia soddisfatta la condizione $f(1) \cdot f''(1) < 0$). La successione approssimante è dunque:

$$x_0 = 1 \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{2 - x_{n-1}}{f(2) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$$



ossia:

$$x_0 = 1 \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{2 - x_{n-1}}{6 - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$$

- **Determiniamo alcune approssimazioni**

Abbiamo che:

$$x_1 = x_0 - \frac{2 - x_0}{6 - f(x_0)} f(x_0) = 1 - \frac{2 - 1}{6 - \underbrace{(-2)}_{f(1)}} \underbrace{(-2)}_{f(1)} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Procedendo nelle iterazioni si trova:

$$x_2 = 1{,}337931034... \qquad x_3 = 1{,}366147290...$$
$$x_4 = 1{,}374912292... \qquad x_5 = 1{,}377606815...$$

Dopo cinque iterazioni le prime due cifre dopo la virgola appaiono essersi stabilizzate, quindi possiamo ritenere che la soluzione α, con due cifre decimali esatte, è $\alpha = 1{,}37...$

Come puoi osservare nell'ultimo esempio, la convergenza del metodo delle secanti è più lenta rispetto al metodo di Newton. Il metodo delle secanti offre tuttavia un importante vantaggio: non richiede il calcolo della derivata in corrispondenza dei termini della successione approssimante (il che, spesso, è oneroso dal punto di vista computazionale e induce a preferire quest'ultimo procedimento).

Il metodo del punto unito

Un ulteriore metodo per l'approssimazione delle radici di un'equazione è il cosiddetto metodo del punto unito (o del punto fisso). Esso riguarda la risoluzione di equazioni della forma:

$$x = g(x) \qquad \text{con } g(x) \text{ funzione } \textit{continua} \qquad [5]$$

Ciò non costituisce una limitazione significativa, in quanto qualunque equazione può essere ricondotta con semplici manipolazioni algebriche a una del tipo [5].

ESEMPI

1. L'equazione $xe - x = 1$, moltiplicando entrambi i membri per ex, equivale all'equazione:
$$x = e^x$$
2. L'equazione $e^x = \ln x$, si può trasformare come segue:
$$e^x = \ln x \iff \underbrace{e^x + x = \ln x + x}_{\text{aggiungendo } x \text{ a entrambi i membri dell'equazione}} \iff \underbrace{x = \ln x + x - e^x}_{\text{portando } e^x \text{ al secondo membro}}$$
Abbiamo così riscritto l'equazione iniziale nella forma $x = g(x)$, dove $g(x) = \ln x + x - ex$.
3. In generale, procedendo in modo simile all'esempio precedente, ogni equazione della forma $A(x) = B(x)$ si può sempre trasformare come segue:
$$A(x) = B(x) \iff \underbrace{A(x) + x = B(x) + x}_{\text{aggiungendo } x \text{ a entrambi i membri dell'equazione}} \iff \underbrace{x = B(x) + x - A(x)}_{\text{portando } A(x) \text{ al secondo membro}}$$
e quindi si può riscrivere nella forma $x = g(x)$, dove $g(x) = B(x) + x - A(x)$.

L'idea su cui si basa il metodo del punto unito è osservare che, detta x_0 una stima iniziale della soluzione dell'equazione [5] che vogliamo approssimare, la successione di valore iniziale x_0 definita ricorsivamente da:

$$x_n = g(x_{n-1})$$

se converge, converge proprio a una soluzione dell'equazione. Infatti, se la successione x_n converge a un numero, diciamo l, allora anche la successione x_{n-1} converge allo stesso numero l; di conseguenza, in forza della continuità di $g(x)$, risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} g(x_{n-1}) \underbrace{=}_{\text{per la continuità della funzione } g} g\left(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1}\right)$$

da cui:

$$l = g(l)$$

e dunque l è effettivamente una soluzione dell'equazione [5].

L'interpretazione geometrica del metodo del punto unito è illustrato in un caso particolare in **Fig. 22**.

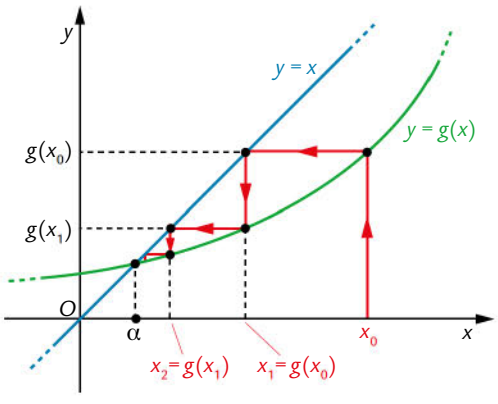


Figura 22 La successione x_n converge a α in maniera monotòna (*decrescente,* nella situazione in figura): a evidenziarlo è il cosiddetto «diagramma a scala» in rosso.

Anche nell'applicazione del metodo del punto unito, similmente a quanto già visto per il metodo di Newton e per quello delle secanti, occorre prestare attenzione al fatto che non sempre la successione x_n risulta convergente: per esempio, non lo è nel caso illustrato in **Fig. 23**.

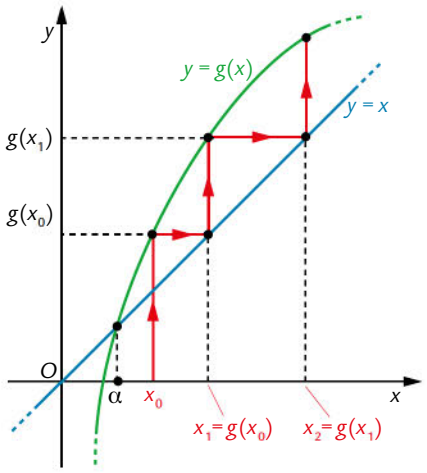


Figura 23 **La successione x_n è monotòna (osserva ancora il relativo «diagramma a scala»), ma i suoi termini si *allontanano* da α.**

È quindi necessario individuare delle condizioni che garantiscano la convergenza. Il teorema seguente esprime una di queste condizioni.

TEOREMA 3 | Condizione sufficiente per la convergenza del metodo del punto unito

Sia data un'equazione della forma $x = g(x)$ e sia α una sua soluzione, appartenente all'intervallo limitato $[a, b]$. Se la funzione g è derivabile con derivata continua in $[a, b]$ e risulta $|g'(x)| < 1$ per ogni $x \in [a, b]$, allora la successione $x_n = g(x_{n-1})$ converge ad α, essendo x_0 l'estremo dell'intervallo $[a, b]$ più vicino ad α.

ESEMPIO Applicazione del metodo del punto unito

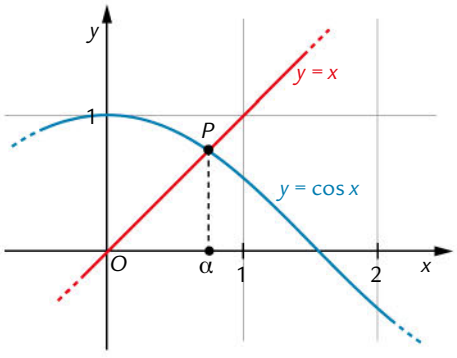
Determiniamo un'approssimazione dell'equazione $x - \cos x = 0$, applicando il metodo del punto unito.

- **Riscriviamo l'equazione nella forma $x = g(x)$ e verifichiamo le ipotesi**

L'equazione data equivale a $x = \cos x$. Tenendo conto (come appare dal grafico) che l'equazione ammette una unica radice appartenente all'intervallo $[0, 1]$, cerchiamo di applicare il metodo del punto unito con $g(x) = \cos x$ nell'intervallo $[0, 1]$. La funzione g è derivabile con derivata continua in $[0, 1]$ e risulta:

$$|g'(x)| = |-\sin x| = |\sin x| < \sin 1 < 1 \text{ per ogni } x \in [0, 1]$$

quindi sono soddisfatte le ipotesi del **Teorema 3**.



- **Determiniamo la successione approssimante**

Scegliamo come primo termine della successione $x_0 = 1$ (che dal grafico appare essere l'estremo dell'intervallo [0, 1] più vicino alla radice); la successione sarà così definita:

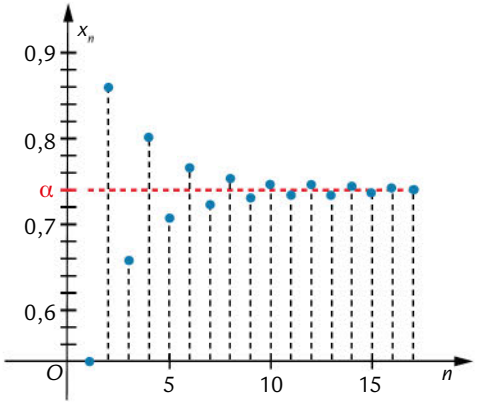
$$x_0 = 1 \qquad x_n = \cos(x_{n-1})$$

- **Determiniamo alcune approssimazioni**

I primi otto termini della successione successivi a x_0, arrotondati alla sesta cifra decimale, risultano:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	0,540302	0,857553	0,654290	0,793480	0,701369	0,763960	0,722102	0,750418

Come puoi osservare dopo 8 iterazioni, la seconda cifra decimale è ancora incerta ed è possibile ritenere soltanto che $\alpha = 0{,}7\ldots$ Si può verificare che la seconda cifra decimale si stabilizza a partire dalla quattordicesima iterazione e si trova che $\alpha = 0{,}73\ldots$ La convergenza è piuttosto lenta a causa del particolare tipo di successione che non converge ad α né per difetto né per eccesso, ma «oscillando» intorno al valore limite.



La figura sottostante aiuta a capire meglio il motivo per cui si genera questa situazione, che è legato alla pendenza del grafico in corrispondenza di α, in particolare dal fatto che risulta $f'(\alpha) < 0$.

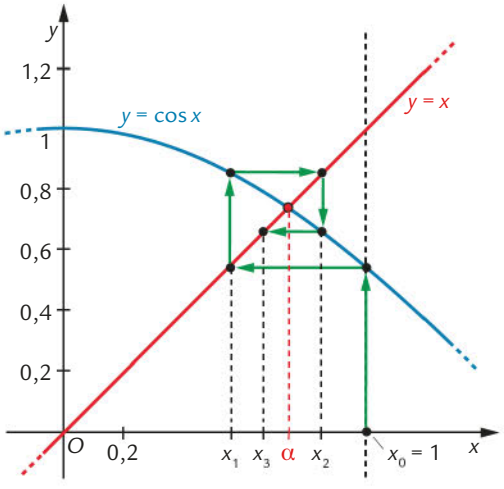


Figura 24 **Diversamente dal diagramma «a scala» osservato in Fig. 22, tipico della convergenza monotòna, puoi osservare ora un esempio di diagramma «a ragnatela» caratteristico della convergenza non monotòna. Come puoi intuire dalle figure, è il *segno* di $f'(\alpha)$ che spiega i due diversi tipi di convergenza.**

Esercizi p. 469

Lo studio di funzione

Schema generale per lo studio di funzione

1. Si determina il dominio.

2. Si stabilisce se la funzione presenta particolari simmetrie o se è periodica.

3. Si studiano gli eventuali punti d'intersezione del grafico della funzione con l'asse x, e il suo segno.

4. Si studia il comportamento della funzione agli estremi del dominio.

5. Si calcola e si studia la derivata prima, individuando gli eventuali punti di massimo e minimo relativo o di flesso a tangente orizzontale e gli eventuali punti di non derivabilità.

6. Si studia la derivata seconda, individuando gli eventuali punti di flesso.

7. Si traccia il grafico della funzione.

ESEMPIO

Studio della funzione $y = \dfrac{3x}{(x-1)^2}$

1. Il dominio è $\mathbf{R} - \{1\}$

2. Non ci sono simmetrie

3. La funzione interseca l'asse x nell'origine ed è positiva per $x > 0$

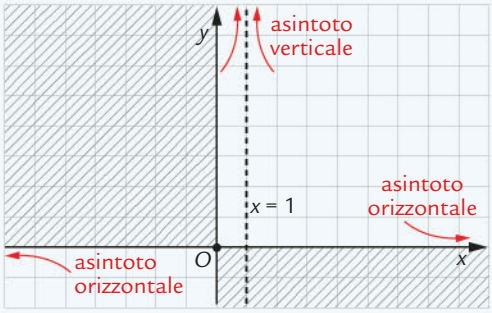
4. Risulta:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

$y=0$ è asintoto orizzontale

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

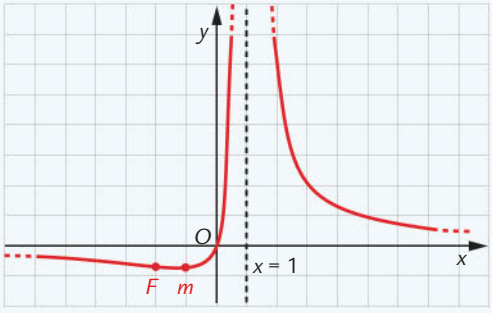
$x=1$ è asintoto verticale



5. Si trova che $y' = -\dfrac{3(x+1)}{(x-1)^3}$. Dallo studio della derivata prima si trova un punto di minimo relativo per $x = -1$

6. Si trova che $y'' = \dfrac{6(x+2)}{(x-1)^4}$. Dallo studio della derivata seconda si trova un punto di flesso per $x = -2$

7. Il grafico completo è quello a fianco



Interpretazione grafica di un'equazione

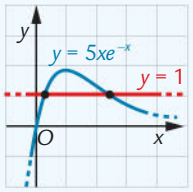
Il grafico di una funzione $y = f(x)$ permette di interpretare graficamente una equazione e stabilirne il numero di soluzioni, anche quando non è risolvibile algebricamente.

ESEMPIO

L'equazione

$5xe^{-x} = 1$

ammette due soluzioni distinte.



Metodi per approssimare una radice di una equazione

Metodo di bisezione

Consiste nel trovare intervalli di ampiezza via via dimezzata che contengono una data soluzione di un'equazione del tipo $f(x) = 0$, applicando il teorema degli zeri.

ESEMPIO

L'equazione $2^x + x = 0$ ammette una soluzione in $(-1, 0)$ perché

$$f(-1) = 2^{-1} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \qquad f(0) = 2^0 + 0 = 1 > 0$$

Considerando il punto medio di $[-1, 0]$, cioè $-0{,}5$, si ha che $f(-0{,}5) \simeq 0{,}21 > 0$ dunque la soluzione deve appartenere all'intervallo $[-1, -0{,}5]$ e così via.

Metodo delle tangenti e metodo delle secanti

Sia f una funzione che soddisfa le seguenti proprietà:

a. f è derivabile due volte nell'intervallo $[a, b]$, con derivate continue;

b. f' e f'' sono non nulle e di segno costante in $[a, b]$;

c. $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione $\alpha \in [a, b]$ e inoltre:

se $f(a) \cdot f''(a) > 0$

converge ad α la successione:

Metodo delle tangenti

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases}$$

altrimenti converge ad α la stessa successione in cui $x_0 = b$

se $f(a) \cdot f''(a) < 0$

converge ad α la successione:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} \end{cases}$$

Metodo delle secanti

altrimenti converge ad α la stessa successione in cui sono scambiati a e b.

Metodo del punto unito

IPOTESI

$\begin{cases} \alpha \in [a, b] \text{ è una soluzione dell'equazione } x = g(x) \\ g(x) \text{ è derivabile con derivata } g'(x) \text{ continua in } [a, b] \text{ tale che } |g'(x)| < 1 \end{cases}$

TESI

La successione $x_n = g(x_{n-1})$, avente come punto iniziale x_0 l'estremo dell'intervallo $[a, b]$ più vicino ad α, converge ad α.

1. Schema per lo studio del grafico di una funzione. Funzioni algebriche

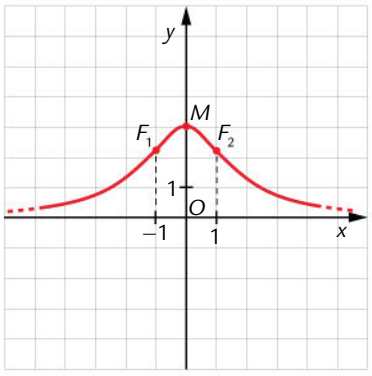
Teoria p. 418

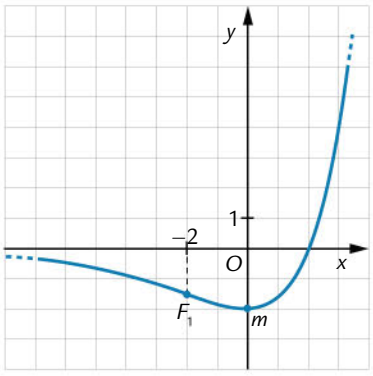
Esercizi introduttivi

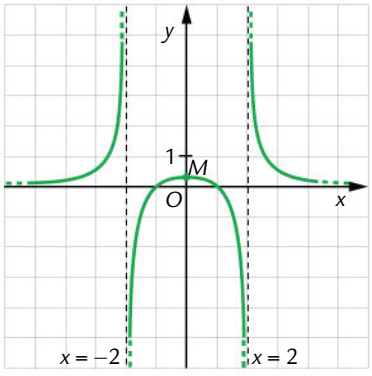
Interpretazione di grafici

1 Per ciascuna delle funzioni di cui è rappresentato il grafico individua:

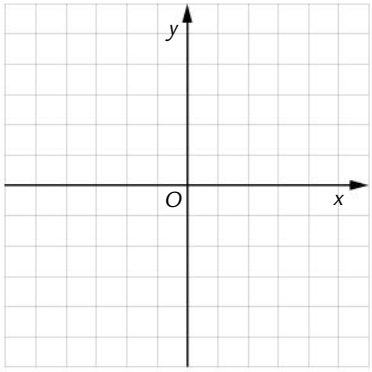
a. il dominio;
b. i punti di intersezione con gli assi;
c. gli intervalli dove la funzione è positiva e quelli in cui è negativa;
d. le equazioni degli asintoti;
e. i punti di massimo e di minimo (specificando se assoluti);
f. i punti di flesso;
g. l'immagine.



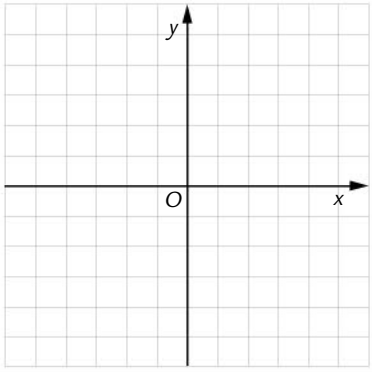




2 Utilizzando le informazioni schematizzate nella prima colonna della tabella, individua i punti di massimo, di minimo e di flesso della funzione corrispondente e tracciane un grafico qualitativo.

Dominio: **R**	Ascissa del punto di massimo relativo: $x =$ ..... Ascissa del punto di minimo relativo: $x =$ ..... Ascissa del punto di flesso: $x =$ ..... Grafico: 
Intersezioni con l'asse x: $(\pm 1, 0)$ e $(3, 0)$	
Intersezione con l'asse y: $(0, 2)$	
Intervalli dove la funzione è positiva: $-1 < x < 1 \vee x > 3$	
Intervalli dove la funzione è negativa: $x < -1 \vee 1 < x < 3$	
Asintoti: nessuno	
Intervalli dove la funzione è crescente: $x < 0 \vee x > 2$	
Intervallo dove la funzione è decrescente: $0 < x < 2$	
Intervallo dove la funzione è convessa: $x > \frac{3}{2}$	
Intervallo dove la funzione è concava: $x < \frac{3}{2}$	

3 Utilizzando le informazioni schematizzate nella prima colonna della tabella, individua i punti di massimo, di minimo e di flesso della funzione corrispondente e tracciane un grafico qualitativo.

Dominio: $\mathbf{R} - \{0\}$	Ascissa del punto di massimo relativo: $x =$ ..... Ascissa del punto di minimo relativo: $x =$ ..... Ascissa del punto di flesso: $x =$ ..... Grafico: 
Intersezione con gli assi cartesiani: (1, 0)	
Intervallo dove la funzione è positiva: $x > 1$	
Intervalli dove la funzione è negativa: $x < 0 \vee 0 < x < 1$	
Asintoti: l'asse x (sia a destra sia a sinistra) e l'asse y	
Intervallo dove la funzione è crescente: $0 < x < 2$	
Intervalli dove la funzione è decrescente: $x < 0 \vee x > 2$	
Intervallo dove la funzione è convessa: $x > 3$	
Intervalli dove la funzione è concava: $x < 0 \vee 0 < x < 3$	

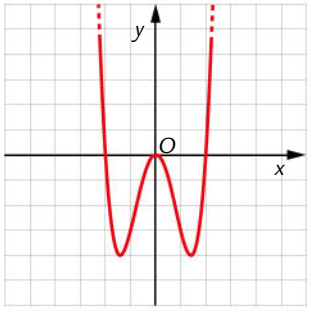
Studio di funzioni polinomiali

Interpretazione di grafici

Test

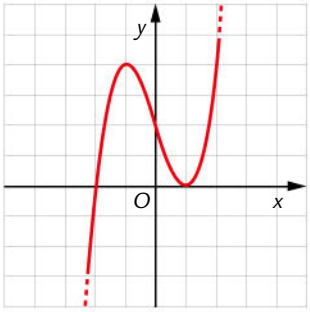
4 Il grafico qui sotto è quello della funzione:

A $y = x^4 - 4x^2$
B $y = -x^4 + 4x^2$
C $y = x^3 - 4x^2$
D $y = -x^3 + 4x^2$



5 Il grafico qui sotto è quello della funzione:

A $y = -x^3 + 3x + 2$
B $y = x^3 - 3x - 2$
C $y = -x^3 + 3x - 2$
D $y = x^3 - 3x + 2$



6 ESERCIZIO GUIDATO

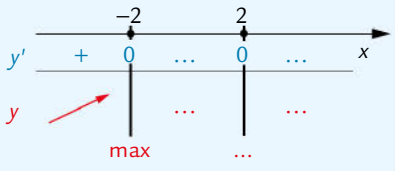
Studia la funzione $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ e tracciane il grafico.

- Il dominio della funzione è tutto $\mathbf{R}$. Essendo la funzione polinomiale, sappiamo che è priva di asintoti. Risulta inoltre: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ..... e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ..... Puoi controllare che la funzione è dispari.
- Studia gli zeri e il segno della funzione:

  $y = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x^3 - 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm$ .....

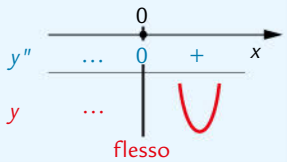
  In particolare la funzione interseca l'asse x nei punti di coordinate (0, 0) e (± ....., 0).
- Verifica che $y' = x^2 - 4$. Studia gli zeri e il segno di y' e completa lo schema a lato:

  $y' = 0 \Rightarrow x = \pm$ ..... $y' > 0 \Rightarrow x <$ ..... $\vee x >$ .....



- Verifica che $y'' = 2x$. Studia gli zeri e il segno di y'' e completa lo schema a lato:

  $y'' = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad$ $y'' > 0 \Rightarrow x >$ .....



- Traccia il grafico della funzione.

Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico.

7 $y = x^3 - 3x$ $[D = \mathbf{R}$; max $(-1, 2)$; min $(1, -2)$; flesso $(0, 0)]$

8 $y = x^3 - 3x^2$ $[D = \mathbf{R}$; max $(0, 0)$; min $(2, -4)$; flesso $(1, -2)]$

9 $y = x^2(x - 3)$ $[D = \mathbf{R}$; max $(0, 0)$; min $(2, -4)$; flesso $(1, -2)]$

10 $y = x^5 - 5x$ $[D = \mathbf{R}$; max $(-1, 4)$, min $(1, -4)$; flesso $(0, 0)]$

11 $y = 2x^4 - 4x^3$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; min } \left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{8}\right)\text{, flessi: } (0,0) \text{ (a tangente orizzontale) e } (1, -2)\right]$

12 $y = x^4 - 4x$ $[D = \mathbf{R}$; min $(1, -3)]$

13 $y = 3x^5 - 5x^3$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; max } (-1,\ 2)\text{; min } (1,\ -2)\text{; flessi: } (0,\ 0) \text{ (a tangente orizzontale) e } \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{7\sqrt{2}}{8}\right)\right]$

14 $y = \frac{1}{8}(x + 4)(x - 2)^2$ $[D = \mathbf{R}$; max $(-2, 4)$; min $(2, 0)$; flesso $(0, 2)]$

15 $y = (2x - 1)(4 - x^2)$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; min } (-1, -9)\text{; max } \left(\frac{4}{3}, \frac{100}{27}\right)\text{; flesso } \left(\frac{1}{6}, -\frac{143}{54}\right)\right]$

16 $y = x(x - 2)^3$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; min}\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)\text{; flessi: } (2, 0) \text{ (a tangente orizzontale) e } (1, -1)\right]$

17 $y = x^3 - 3x + 2$ $[D = \mathbf{R}$; max $(-1, 4)$; min $(1, 0)$; flesso $(0, 2)]$

18 $y = \frac{1}{3}(x^4 - 4x^3)$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; min}(3, -9)\text{; flessi: } (0,0) \text{ e } \left(2, -\frac{16}{3}\right)\right]$

19 $y = x^4 - 2x^2$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; max } (0,0)\text{; minimi: } (-1,-1) \text{ e } (1,-1)\text{; flessi: } \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)\right]$

20 $y = x^4 - 2x^3$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; min}\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)\text{; flessi: } (0, 0) \text{ e } (1,\ -1)\right]$

21 $y = x^2(x - 2)^2$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; max } (1, 1)\text{; min } (0, 0) \text{ e } (2, 0)\text{; flessi per } x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}\right]$

22 $y = 3x^5 - 5x^3$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; max } (-1,\ 2)\text{, min } (1,\ -2)\text{; flessi: } (0,\ 0) \text{ (a tangente orizzontale) e } \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{7}{8}\sqrt{2}\right)\right]$

23 $y = x^2(x - 2)^3$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; max } (0, 0)\text{; min per } x = \frac{4}{5}\text{; flessi: } (2, 0) \text{ e per } x = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}\right]$

24 $y = (1 - x^2)^3$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; max } (0, 1)\text{; flessi: } (\pm 1,\ 0) \text{ e } \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{64}{125}\right)\right]$

25 $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; min } (-1, 0)\text{; flessi: } (0, 1) \text{ e } \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)\right]$

26 $y = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; flesso } \left(\frac{1}{6}, -\frac{37}{54}\right)\right]$

27 $y = -x^4 + 8x^2 - 9$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; min } (0, -9)\text{; max } (-2, 7) \text{ e } (2, 7)\text{; flessi} \left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{9}\right)\right]$

28 $y = x^3 + x^2 + x + 1$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; flesso } \left(-\frac{1}{3}, \frac{20}{27}\right)\right]$

29 $y = 16x^4 - 8x^2 + 2$ $\left[D = \mathbf{R}\text{; min } \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \text{ e } \left(\frac{1}{2}, 1\right)\text{; max } (0, 2)\text{, flessi } \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{13}{9}\right)\right]$

30 $y = (x+2)^2(x-1)^2$ $\left[D = \mathbf{R}; \text{ min } (-2, 0) \text{ e } (1, 0); \text{ max } \left(-\frac{1}{2}, \frac{81}{16}\right); \text{ flessi per } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right]$

31 $y = x^4 - 5x^2 + 4$ $\left[D = \mathbf{R}; \text{ max } (0, 4); \text{ min } \left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{9}{4}\right); \text{ flessi: } \left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{19}{36}\right)\right]$

32 $y = (x-1)^2(x+1)^3$ $\left[D = \mathbf{R}; \text{ min } (1, 0); \text{massimo per } x = \frac{1}{5}; \text{ flessi per } x = -1 \text{ (a tangente orizzontale) e } x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}\right]$

33 $y = x^4 - 3x^3 + 4x$ $\left[D = \mathbf{R}; \text{ minimi per } x = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \text{ e } x = 2, \text{ massimo per } x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}; \text{ flessi: } (0, 0) \text{ e } \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{16}\right)\right]$

34 ESERCIZIO GUIDATO

Studia la funzione $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x$ e tracciane il grafico.

- Determina il dominio, gli zeri e il segno della funzione. Per determinare gli zeri scomponi il polinomio che definisce la funzione, dopo aver osservato che si annulla per $x = -2$.
- Verifica che $y' = x^3 - 3x - 1$; l'equazione $x^3 - 3x - 1 = 0$ non ha soluzioni razionali (verificalo), quindi lo studio del segno e degli zeri di y' va effettuato graficamente; puoi confrontare per esempio il grafico di $y = x^3$ e quello di $y = 3x + 1$. Troverai che la funzione ha due punti di minimo e un punto di massimo.
- Calcola e studia y''. Troverai che la funzione ha due punti di flesso per $x = \pm 1$.
- Traccia il grafico della funzione, specificando se i punti di estremo relativo sono anche punti di estremo assoluto e individua l'immagine della funzione.

Realtà e modelli

35 **Cioccolato fondente.** Il temperaggio del cioccolato è un processo che viene svolto quando il cioccolato dev'essere utilizzato per esempio per ricoprire torte o cioccolatini, al fine di renderlo brillante, lucente e privo di venature e patina bianca. La funzione

$$T(t) = \frac{2}{15}t^3 - 3t^2 + \frac{88}{5}t + 18, \text{ con } 0 \le t \le 13$$ [*]

esprime la temperatura (in gradi centigradi) del cioccolato fondente durante un procedimento di temperaggio in funzione del tempo t (in minuti) trascorso dall'inizio del processo (che avviene in $t = 0$). Traccia un grafico qualitativo della funzione, quindi, in base alle informazioni leggibili sul grafico, rispondi ai seguenti quesiti.

a. Il temperaggio prevede tre fasi: una iniziale in cui il cioccolato viene riscaldato, una intermedia di raffreddamento e una finale in cui viene di nuovo riscaldato. Individua gli intervalli di tempo che corrispondono a ciascuna delle tre fasi nel caso descritto dalla funzione [*].

b. Affinché il procedimento di temperaggio avvenga correttamente, nella prima fase la massima temperatura raggiunta dal cioccolato deve essere compresa tra i 44 °C e i 56 °C, nella seconda fase la minima temperatura raggiunta dal cioccolato deve essere compresa tra i 26 °C e i 28 °C, mentre nella terza fase la massima temperatura raggiunta dal cioccolato deve essere compresa tra i 31 °C e i 33 °C. Nel caso in esame, il procedimento di temperaggio è avvenuto correttamente?

c. In quanti istanti, durante la fase di temperaggio, la temperatura del cioccolato è stata di 30 °C?



[**a.** $0 < t < 4,\ 4 < t < 11,\ 11 < t < 13$; **b.** sì; **c.** in tre istanti]

36 **Inventa tu.** Traccia il grafico e scrivi l'espressione analitica di una funzione polinomiale di terzo grado, dispari, che abbia un punto di massimo relativo per $x = -2$ e un punto di minimo relativo per $x = 2$.

37 **Inventa tu.** Traccia il grafico e scrivi l'espressione analitica di una funzione polinomiale di quarto grado, pari, che abbia un punto di massimo relativo per $x = 0$ e due punti di minimo relativo per $x = \pm 2$.

Studio di funzioni razionali frazionarie

Interpretazione di grafici

Test

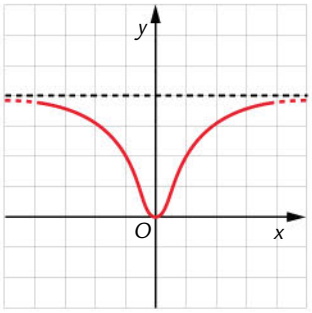
38 Il grafico qui sotto è quello della funzione:

A $y = \dfrac{4}{x^2+1}$

B $y = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$

C $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$

D $y = \dfrac{4x^2}{x^2-1}$



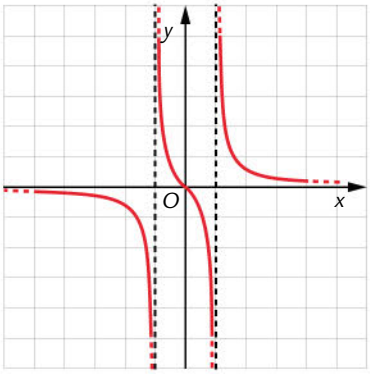
39 Il grafico qui sotto è quello della funzione:

A $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

B $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

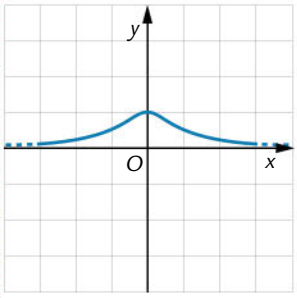
C $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

D $y = \dfrac{1-x^2}{x}$

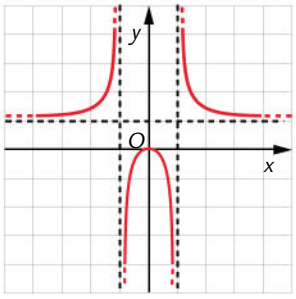


40 **Associazione.** Associa a ciascuna delle seguenti equazioni il grafico corrispondente, tra quelli mostrati più sotto.

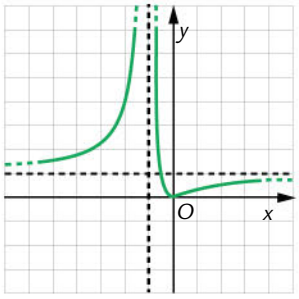
a. $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ **b.** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **c.** $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ **d.** $y = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$



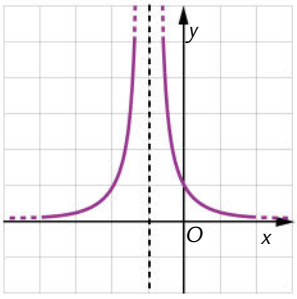
A.



B.



C.



D.

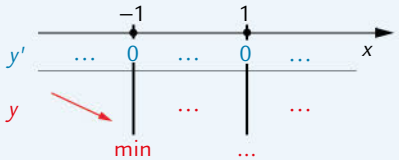
41 **ESERCIZIO GUIDATO**

Studia la funzione $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$ e tracciane il grafico.

- La funzione è definita purché $x^2 + 1 \neq 0$. Questa condizione è sempre verificata perché ....., quindi il dominio della funzione è tutto **R**.
  Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la funzione ammette come asintoto orizzontale la retta di equazione $y =$ .....

- Studia gli zeri e il segno della funzione:
  $y = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x =$ ..... $y > 0 \Rightarrow 4x > 0 \Rightarrow x >$ .....
  In particolare, la funzione interseca l'asse x nell'origine.

- Verifica che $y' = \dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. Ora studia gli zeri e il segno di y'.
  $y' = 0 \Rightarrow 4(1-x^2) = 0 \Rightarrow x \pm$ ..... $y' > 0 \Rightarrow$ ..... $< x <$ .....
  Completa lo schema seguente sul segno della derivata prima e sulle relative deduzioni circa il crescere e il decrescere della funzione.

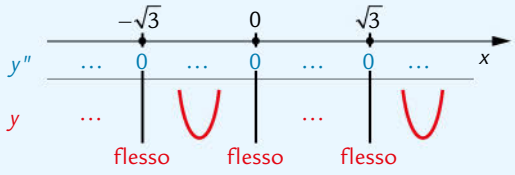


- Verifica che $y'' = \dfrac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$. Ora studia gli zeri e il segno di y''.

  $y'' = 0 \Rightarrow 8x(x^2-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm\,\ldots\ldots$

  $y'' > 0 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \ldots\ldots \vee x > \ldots\ldots$

  Completa lo schema seguente sul segno della derivata seconda e sulle relative deduzioni circa la concavità della funzione.



- Traccia il grafico della funzione. Stabilisci se i punti di estremo relativo sono anche punti di estremo assoluto e individua l'immagine della funzione.

Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico.

42 $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0, 4\};\ \text{asintoti: } x = 0,\ x = 4,\ y = 0;\ \max\left(2, -\frac{1}{4}\right)\right]$

43 $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ $\left[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y = 0;\ \max\,(0, 1);\ \text{flessi: } \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)\right]$

44 $y = \dfrac{x-2}{x^2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } y = 0,\ x = 0;\ \max\left(4, \frac{1}{8}\right), \text{flesso}\left(6, \frac{1}{9}\right)\right]$

45 $y = \dfrac{1}{x} + 4x$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 4x;\ \max\left(-\frac{1}{2}, -4\right), \min\left(\frac{1}{2}, 4\right)\right]$

46 $y = \dfrac{6x-3}{x^2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 0;\ \max\,(1, 3), \text{flesso}\left(\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right)\right]$

47 $y = \dfrac{x^2+9}{x}$ $[D = \mathbf{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = x;\ \max\ (-3, -6), \min\ (3, 6)]$

48 $y = \dfrac{2+x^2}{x^2-9}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{\pm 3\};\ \text{asintoti: } y = 1,\ x = \pm 3;\ \max\left(0, -\frac{2}{9}\right)\right]$

49 $y = \dfrac{2-x}{x^3}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 0;\ \min\left(3, -\frac{1}{27}\right), \text{flesso}\left(4, -\frac{1}{32}\right)\right]$

50 $y = \dfrac{x^2-4}{3x^2+1}$ $\left[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y = \frac{1}{3};\ \min\,(0, -4),\ \text{flessi}\left(\pm\frac{1}{3}, -\frac{35}{12}\right)\right]$

51 $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ $\left[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y = 1;\ \min\,(0, -1),\ \text{flessi}\ \left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)\right]$

52 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+3}$ $\left[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y = 1;\ \min\left(0, -\frac{1}{3}\right);\ \text{flessi: } (\pm\,1, 0)\right]$

53 $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ $[D = \mathbf{R} - \{2\};\ \text{asintoti: } x = 2,\ y = x + 2;\ \max\,(0, 0), \min\,(4, 8)]$

54 $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ $[D = \mathbf{R} - \{\pm 1\};\ \text{asintoti: } x = \pm 1,\ y = 1;\ \max\,(0, 0)]$

55 $y = \dfrac{x^4+x^2-2}{x^4}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 1;\ \max\left(\pm 2, \frac{9}{8}\right), \text{flessi: } \left(\pm\sqrt{\frac{20}{3}}, \frac{221}{200}\right)\right]$

56 $y = \dfrac{x^2-1}{x^3}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = 0;\ \min\left(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right), \max\left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right);\ \text{flessi: } \left(\pm\sqrt{6}, \pm\frac{5\sqrt{6}}{36}\right)\right]$

57 $y = \dfrac{x^3-4}{x^2}$ $[D = \mathbf{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } x = 0,\ y = x;\ \max\,(-2, -3)]$

58 $y = \dfrac{2x-5}{x^2-4}$ (Tralascia lo studio di y'' ma precisa il minimo numero di flessi compatibile con le caratteristiche del grafico.)

$\left[D = \mathbf{R} - \{\pm 2\}$; asintoti: $x = \pm 2$, $y = 0$; min $(1, 1)$, max $\left(4, \frac{1}{4}\right)$; deve esserci almeno un punto di flesso$\right]$

59 $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$ $\left[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = x$; flessi: $(0, 0)$ e $\left(\pm 3, \pm\frac{9}{4}\right)\right]$

60 $y = \dfrac{x^3}{2x-1}$ $\left[D = \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; asintoti: $x = \frac{1}{2}$; min $\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{32}\right)$, flesso $(0, 0)\right]$

61 $y = \dfrac{4x^2-1}{(x+2)^2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{-2\}$; asintoti: $x = -2$, $y = 4$; min $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{4}{15}\right)$, flesso $\left(\frac{13}{16}, \frac{28}{135}\right)\right]$

62 $y = \dfrac{(x-4)^2}{(x-2)(x-3)}$ (Tralascia lo studio di y'', ma precisa il minimo numero di flessi compatibile con le caratteristiche del grafico.)

$\left[D = \mathbf{R} - \{2, 3\}$; asintoti: $y = 1, x = 2, x = 3$; max $\left(\frac{8}{3}, -8\right)$, min $(4, 0)$; un flesso$\right]$

63 $y = \dfrac{1}{x^3-3x}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0, \pm\sqrt{3}\}$; asintoti: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$, $y = 0$; min $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, max $\left(1, -\frac{1}{2}\right)\right]$

64 $y = \dfrac{x^3}{x^3-8}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{2\}$; asintoti: $x = 2$, $y = 1$; flessi: $(0, 0)$ e $\left(-\sqrt[3]{4}, \frac{1}{3}\right)\right]$

65 $y = x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ $\left[D = \mathbf{R} - \{1\}$; asintoti: $x = 1$, $y = x + \frac{1}{2}$; min $(3, 5)$; flesso $\left(-2, -\frac{35}{18}\right)\right]$

66 $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{-1\}$; asintoti: $x = -1$, $y = x - 2$, max $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$; flesso $(0, 0)\right]$

67 $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ $[D = \mathbf{R} - \{\pm 2\}$; asintoti: $x = \pm 2$, $y = x$; max $(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$, min $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$; flesso $(0, 0)]$

68 $y = \dfrac{4x^3}{x^4+1}$ (Tralascia lo studio di y'' ma precisa il minimo numero di flessi compatibile con le caratteristiche del grafico.)

$[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$; max $(\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{27})$, min $(-\sqrt[4]{3}, -\sqrt[4]{27})$; devono esserci almeno cinque punti di flesso di cui uno nell'origine, a tangente orizzontale$]$

69 $y = \dfrac{4x(x-1)^2}{(2x-3)^2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$; asintoti: $x = \frac{3}{2}$, $y = x + 1$; max $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, min: $(1, 0)$, $\left(3, \frac{16}{3}\right)$; flesso $\left(\frac{6}{7}, \frac{8}{189}\right)\right]$

Matematica ed economia

70 **Domanda di un bene**. Si stima che la domanda giornaliera d di un certo bene dipenda dal prezzo unitario p di vendita secondo la funzione:

$$d(p) = \frac{1500}{p^2+50}, \text{ con } p \geq 0$$

Determina l'espressione analitica della funzione $R(p)$ che esprime il ricavo giornaliero derivante dalla produzione e vendita del bene in esame, in funzione del prezzo p. Traccia il grafico della funzione $R(p)$ e rispondi ai seguenti quesiti.

a. A quale prezzo corrisponde il massimo *ricavo*? A quanto ammonta il massimo *utile* giornaliero, se i costi corrispondono al 60% del ricavo? Arrotonda i risultati a un numero intero.

b. Cambierebbero le risposte al punto **a**, nel caso che il prezzo unitario p possa essere al massimo di 5 euro?

[**a.** Prezzo = 7 euro; massimo utile = 42 euro; **b.** sì: prezzo = 5 euro, massimo utile = 40 euro]

71 **Inventa tu**. Traccia il grafico e scrivi l'espressione analitica di una funzione razionale frazionaria dispari che abbia come asintoti verticali le rette di equazioni $x = \pm 1$ e come asintoto orizzontale l'asse x.

72 **Inventa tu.** Traccia il grafico e scrivi l'espressione analitica di una funzione razionale frazionaria pari che abbia come asintoti verticali le rette di equazioni $x = \pm 2$ e come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = -1$.

Matematica e chimica

73 **Potenziale di Lennard-Jones.** La funzione potenziale di Lennard-Jones è una delle più note e utilizzate per descrivere l'interazione interatomica (intermolecolare); essa è così definita:

$$V(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right] \qquad [*]$$

dove V è il potenziale tra due atomi (molecole), r è la distanza tra i due atomi (molecole), ε è la profondità della buca di potenziale e σ è il diametro della sfera che approssima l'atomo (la molecola) in un modello a sfera rigida. Traccia un grafico qualitativo della funzione [*], supponendo ε e σ costanti positive e tralasciando lo studio della derivata seconda. Che cosa rappresentano ε e σ per il grafico della funzione?

Studio di funzioni irrazionali

Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico.

74 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $[D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; asintoti: $x = \pm 1$, $y = 0]$

75 $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$ (Tralascia lo studio di y''.) $[D = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$; asintoti: $x = -2$ (sinistro), $y = 1]$

76 $y = x\sqrt{x-2}$ $\left[D = [2, +\infty)$; punto a tangente verticale: $x = 2$; flesso $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{9}\sqrt{6}\right)\right]$

77 $y = \sqrt{3x - x^2}$ (Tralascia lo studio di y''.) $\left[D = [0, 3]$; max $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$; punti a tangente verticale: $x = 0$ e $x = 3\right]$

78 $y = \sqrt{x^2+4}$ $[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = \pm x$; min $(0, 2)]$

79 $y = x - 2\sqrt{x}$ $[D = [0, +\infty)$; min $(1, -1)$; punto a tangente verticale per $x = 0]$

80 $y = x\sqrt{4 - x^2}$ $[D = [-2, 2]$; max $(\sqrt{2}, 2)$; min $(-\sqrt{2}, -2)$; punti a tangente verticale: $x = \pm 2$; flesso $(0, 0)]$

81 $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ $\left[D = [0, 4) \cup (4, +\infty)$; asintoti: $x = 4$, $y = 1$; punto a tangente verticale per $x = 0$; flesso $\left(\frac{4}{9}, -\frac{5}{4}\right)\right]$

82 $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$ $\left[[D = (2, +\infty)$; asintoti: $x = 2$; min $(3, 2)$; flesso $\left(5, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

83 **Videolezione** $y = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

$\left[D = [-3, 0) \cup (0, 3]$; asintoti: $x = 0$; punti a tangente verticale: $x = \pm 3$; flessi: $\left(\pm\sqrt{6}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

84 $y = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ $[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 1$ (destro) e $y = -1$ (sinistro); flesso $(0, 0)]$

85 $y = \dfrac{6-x}{\sqrt{4+x^2}}$ $\left[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = -1$ (destro), $y = 1$ (sinistro); max $\left(-\frac{2}{3}, \sqrt{10}\right)$; flessi: $\left(-2, 2\sqrt{2}\right), \left(1, \sqrt{5}\right)\right]$

86 $y = \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1$ $[D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$; asintoti: $y = 0$ (destro) e $y = -2x + 2$ (sinistro)]

87 $y = x^2\sqrt[3]{2-x}$ (Tralascia lo studio di y'' ma precisa il minimo numero di flessi compatibile con le caratteristiche del grafico.)

$[D = \mathbf{R}$; non ci sono asintoti; min $(0, 0)$; max $\left(\frac{12}{7}, \simeq 1{,}9\right)$; flesso a tangente verticale $(2, 0)$; deve esserci almeno un altro punto di flesso]

88 $y = x\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$ $[D = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$; asintoti: $x = -2$, $y = x - 1$; max $\left(-3, -3\sqrt{3}\right)]$

89 $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$

[$D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = x - 1$; min $\left(2, -\sqrt[3]{4}\right)$; cuspide in (0, 0); flesso (a tangente verticale) in (3, 0)]

90 $y = \sqrt[3]{3x - x^3}$

[$D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = -x$; min $\left(-1, -\sqrt[3]{2}\right)$; max $\left(1, \sqrt[3]{2}\right)$; flessi (a tangente verticale) in (0, 0) e $(\pm\sqrt{3}, 0)$]

91 $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(3+x)^5}{x^2}}$

$\left[D = \mathbf{R} - \{0\}\text{; asintoti: } x = 0,\ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}\text{; min}\left(2, \frac{5}{6}\sqrt[3]{50}\right)\text{; flesso } (-3, 0)\right]$

92 $y = \frac{(x-2)^2}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$

(Tralascia lo studio di y'' ma precisa il minimo numero di flessi compatibile con le caratteristiche del grafico.)

$\left[D = \mathbf{R}\text{; asintoti: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{4}\text{ (sinistro), } y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}\text{(destro); min}\left(-2, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)\text{ e min } (2, 0);\ \text{max}\left(-\frac{3}{2}, \frac{7\sqrt{7}}{4}\right)\text{; ci devono essere almeno due punti di flesso}\right]$

Collegamenti Funzioni irrazionali e coniche

Le seguenti funzioni irrazionali rappresentano parti di coniche. Tracciane inizialmente il grafico con i metodi imparati nel Volume 3. Ritrova quindi i risultati applicando i metodi dell'analisi.

93 $y = 1 - 2\sqrt{x + 3}$

94 $y = -\sqrt{4x - x^2}$

95 $y = \sqrt{x^2 - 4}$

96 $y = -\sqrt{x^2 - 2x}$

97 $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

98 $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

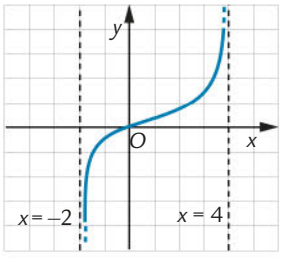
Traccia il grafico e determina l'espressione analitica di una funzione algebrica che possieda le proprietà indicate.

99 Ha come dominio l'intervallo (−2, 2), passa per l'origine e inoltre $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.

100 Ha come dominio $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, è sempre negativa o nulla per ogni valore di x appartenente al dominio e ha come asintoti la retta $y = -x$ per $x \to -\infty$ e la retta $y = x$ per $x \to +\infty$.

Interpretazione di grafici

101 In figura è riportato il grafico di una funzione di equazione del tipo $y = \frac{x}{\sqrt{ax + b - x^2}}$.

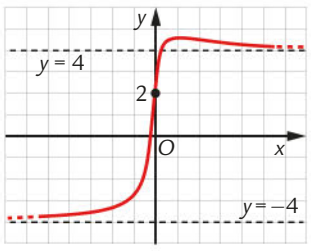


Determina i valori di a e di b, quindi scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nell'origine.

$\left[a = 2,\ b = 8;\ y = \frac{\sqrt{2}}{4}x\right]$

102 In figura è riportato il grafico di una funzione di equazione del tipo $y = \frac{ax + b}{\sqrt{4x^2 + 1}}$. Determina i valori di a e di b, quindi individua l'immagine della funzione.

$\left[a = 8,\ b = 2;\ \text{immagine} = \left(-4, 2\sqrt{5}\right)\right]$



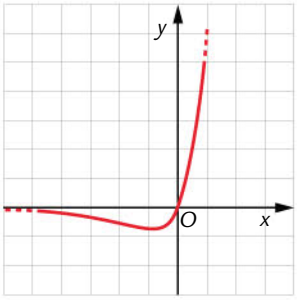
2. Funzioni trascendenti

Teoria p. 424

Esercizi introduttivi

Test

103 Il grafico mostrato a fianco è quello della funzione:



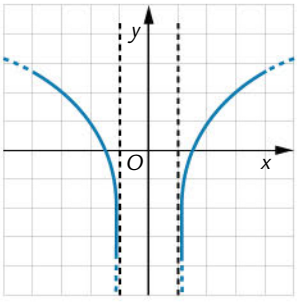
A $y = 2x \ln x$

B $y = 2xe^x$

C $y = x \ln x^2$

D $y = 2xe^{-x}$

104 Il grafico mostrato a fianco è quello della funzione:



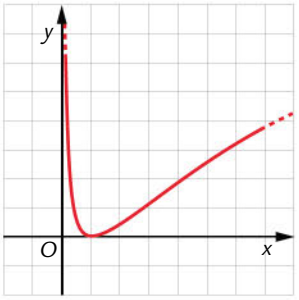
A $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

B $y = \ln(x^2 - 1)$

C $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$

D $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 1}$

105 Il grafico mostrato a fianco è quello della funzione:



A $y = e^{x^2}$

B $y = \ln^2 x$

C $y = \dfrac{1}{\ln^2 x}$

D $y = \ln x^2$

106 **Vero o falso?**

a. la funzione $y = xe^x$ non ammette asintoti né verticali né orizzontali V F

b. la funzione $y = x^4 \ln x$ ammette come asintoto verticale l'asse y V F

c. la funzione $y = \ln(x^2 - 4)$ incontra l'asse x nei punti di coordinate $(\pm 2, 0)$ V F

d. le funzioni di equazione $y = e^{f(x)}$ non intersecano l'asse x in alcun punto e sono sempre positive V F

e. le funzioni di equazione $y = \ln f(x)$ non sono mai definite in $\mathbf{R}$ V F

f. le funzioni di equazione $y = x^n e^{-x}$ con $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, non ammettono asintoti obliqui V F

g. la funzione $y = 2^{-x^2}$ è limitata V F

h. la funzione $y = 3^{x^2}$ è limitata V F

i. la funzione $y = \sin^4 x$ è limitata V F

[4 affermazioni vere e 5 false]

Studio di funzioni esponenziali

Studia le seguenti funzioni esponenziali e tracciane i grafici.

107 $y = e^{-x^2}$ $\left[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y = 0;\ \max(0,1);\ \text{flessi}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$

108 $y = e^{2x-x^2}$ $\left[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y = 0;\ \max(1, e);\ \text{flessi per } x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

109 $y = e^{x^3-3x}$ (Tralascia lo studio di y''.) $[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y = 0 \text{ (sinistro)};\ \max(-1, e^2),\ \min(1, e^{-2})]$

110 $y = xe^{1-x}$ $[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y = 0 \text{ (destro)};\ \max(1, 1),\ \text{flesso } (2, 2e^{-1})]$

111 $y = (2 - x)e^x$ $[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$ (sinistro); max $(1, e)$, flesso $(0, 2)]$

112 $y = (x + 1)e^{-x}$ $[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$ (destro); max $(0, 1)$, flesso $(1, 2e^{-1})]$

113 $y = (2x - 1)e^{-x^2}$ (Tralascia lo studio di y''.) $\left[D = \mathbf{R}$; asintoto: $y = 0$; $\min\left(-\frac{1}{2}, -2e^{-\frac{1}{4}}\right)$, $\max(1, e^{-1})\right]$

114 $y = xe^{-x}$ $[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$ (destro); max $(1, e^{-1})$; flesso $(2, 2e^{-2})]$

115 $y = (x + 1)e^x$ $[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$ (sinistro); min $(-2, -e^{-2})$; flesso $(-3, -2e^{-3})]$

116 $y = (x - 1)e^{2-x}$ $\left[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$ (destro); max $(2, 1)$; flesso $(3, 2e^{-1})\right]$

117 $y = e^{3x} - 3e^x$ $\left[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$ (sinistro); min $(0, -2)$; flesso $\left(-\frac{1}{2}\ln 3, -\frac{8}{9}\sqrt{3}\right)\right]$

118 $y = e^{-2x} - 2e^{-x}$ $\left[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$ (destro); min $(0, -1)$; flesso $\left(\ln 2, -\frac{3}{4}\right)\right]$

119 $y = (x^2 - 3)e^x$ $[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$ (sinistro); max $(-3, 6e^{-3})$, min $(1, -2e)$; flessi per $x = -2 \pm \sqrt{5}]$

120 $y = e^{-x} + x$ $[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = x$ (destro); min $(0, 1)]$

121 $y = x - e^{\frac{1}{2}x}$ $[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = x$ (sinistro); max $(\ln 4, \ln 4 - 2)]$

122 $y = xe^{-2x^2}$ $\left[D = \mathbf{R}$; asintoti: $y = 0$; $\min\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$; $\max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$; flessi: $(0, 0)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)\right]$

123 $y = \frac{e^{-x}}{x^2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\}$; asintoti: $y = 0$ (destro); $\min\left(-2, \frac{e^2}{4}\right)\right]$

124 $y = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$ $[D = \mathbf{R} - \{0\}$; asintoti: $x = 0$, $y = 1$ (destro) e $y = 2$ (sinistro)]

125 $y = \frac{1 - e^{-x}}{e^{-x} - 2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{-\ln 2\}$; asintoti: $x = -\ln 2$, $y = -\frac{1}{2}$ (destro), $y = -1$ (sinistro)$\right]$

126 $y = \frac{e^x}{x - 1}$ $[D = \mathbf{R} - \{1\}$; asintoti: $x = 1$, $y = 0$ (sinistro); min $(2, e^2)]$

127 $y = e^{\frac{1}{x}}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\}$; asintoti: $x = 0$ (destro), $y = 1$; flesso $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)\right]$

128 $y = xe^{-\frac{1}{x}}$ $[D = \mathbf{R} - \{0\}$; asintoti: $x = 0$ (sinistro), $y = x - 1$; max $(-1, -e)]$

129 $y = (x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\}$; asintoti: $x = 0$ (destro), $y = x$; flesso $(-1, -2e^{-1})\right]$

130 **ESERCIZIO GUIDATO**

Studia la funzione $y = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ e tracciane il grafico. (Tralascia lo studio di y'' ma precisa il minimo numero di punti di flesso compatibile con le caratteristiche del grafico.)

- Determina il dominio.
- Calcola i limiti agli estremi del dominio, prestando attenzione a calcolare separatamente i due limiti da destra e da sinistra per $x \to -1$ e per $x \to 1$. Troverai infatti che $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali, ma soltanto *da destra*.
- Calcola e studia la derivata prima.
- Calcola i limiti di y' per $x \to -1^-$ e per $x \to 1^-$ e, tenendo conto dei risultati ottenuti, prevedi l'esistenza di almeno un punto di flesso.
- Traccia il grafico della funzione, specificandone l'immagine.

131 $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{2\}$; asintoti: $x = 2$ (destro); $y = 1$; flesso $\left(\frac{3}{2}, e^{-2}\right)\right]$

132 $y = e^{\frac{2-x}{x}}$ $[D = \mathbf{R} - \{0\}$; asintoti: $x = 0$ (destro); $y = e^{-1}$; flesso $(-1, e^{-3})]$

133 $y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$ (Tralascia lo studio di y'' ma prevedi il minimo numero di flessi compatibile con le informazioni raccolte.)

$[D = \mathbf{R} - \{1\}$; asintoti: $x = 1$ (destro), $y = 0$ (sinistro); max $(0, 1)$, min $(2, e^4)$; calcolando $\lim_{x \to 1^-} y'$ si deduce che devono esserci almeno due punti di flesso$]$

134 $y = e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{1-x}$

$[D = (-\infty, 1]$; asintoti: $y = 0$ (sinistro); punto a tangente verticale: $x = 1$; max $(0, 1)$; flesso per $x = -\sqrt{2}$ $]$

135 $y = (1-x)e^{\frac{x}{x+1}}$

$\left[D = \mathbf{R} - \{-1\}$; asintoti: $x = -1$ (sinistro), $y = e(2-x)$; max $(0, 1)$; min $(-3, 4e^{\frac{3}{2}})$; flesso $\left(-\frac{3}{5}, \frac{8}{5}e^{-\frac{3}{2}}\right)\right]$

136 $y = (x-3)e^{\frac{x-1}{x-2}}$ $[D = \mathbf{R} - \{2\}$; asintoti: $x = 2$ (destro), $y = e(x-2)$; flesso $(1, -2)]$

Realtà e modelli

137 **Concentrazione di un farmaco nel sangue.**



Un farmaco viene somministrato a un paziente per via orale.
Nelle prime sei ore a partire dall'istante $t = 0$ in cui il farmaco viene somministrato, la concentrazione (in mg/L) del farmaco nel sangue del paziente è ben modellizzata da una funzione del tipo:

$f(t) = ate^{-bt}$ con $0 \le t \le 6$

dove $a > 0$, $b > 0$ e t è il tempo (misurato in ore).

a. Determina i valori di a e b, sapendo che la massima concentrazione del farmaco nel sangue del paziente, uguale a 6 mg/L, viene raggiunta dopo esattamente 2 ore dall'assunzione.

b. Verificato che, in corrispondenza dei valori di a e b individuati al punto precedente, l'espressione analitica della funzione f è $f(t) = 3te^{1-\frac{1}{2}t}$, traccia il grafico della funzione f e quello della sua derivata f' in tutto il loro dominio naturale, mettendo in evidenza il tratto relativo al problema (cioè quello per $0 \le t \le 6$). Specifica in particolare in quale istante dell'intervallo $0 \le t \le 6$ la velocità con cui varia la concentrazione del farmaco nel sangue del paziente risulta minima.

$\left[\textbf{a.}\ a = 3e, b = \frac{1}{2}; \textbf{b.}\ t = 4\right]$

138 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio di una funzione esponenziale che abbia tutte le seguenti caratteristiche:

a. è definita in $\mathbf{R} - \{2\}$;

b. ha come asintoto orizzontale $y = 1$ e come asintoto verticale sinistro, ma non destro, $x = 2$.

139 **Inventa tu.** Traccia il grafico e determina l'espressione analitica di una funzione esponenziale che sia definita in $\mathbf{R}$, sia negativa per ogni $x \in \mathbf{R}$ e abbia come asintoto, sia a destra sia a sinistra, l'asse x.

Studio di funzioni logaritmiche

Studia le seguenti funzioni logaritmiche e tracciane i grafici.

140 $y = \ln(x^2 - 2x)$ $[D = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; asintoti: $x = 0$ (sinistro), $x = 2$ (destro)$]$

141 $y = \ln(9 - x^2)$ $[D = (-3, 3)$; asintoti: $x = \pm 3$, max $(0, \ln 9)]$

142 $y = \ln(x^3 - 3x)$ (Tralascia lo studio di y''.)

$\left[D = \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$; asintoti: $x = -\sqrt{3}$ (destro), $x = 0$ (sinistro), $x = \sqrt{3}$ (destro); max $(-1, \ln 2)\right]$

143 $y = \ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$ $[D = (0, 2)$; asintoti: $x = 0$ (destro), $x = 2$ (sinistro); flesso $(1, 0)]$

144 $y = \frac{1}{\ln x}$ $[D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$; asintoti: $x = 1$, $y = 0$ (destro); punto di singolarità eliminabile per $x = 0$; flesso $\left(e^{-2}, -\frac{1}{2}\right)]$

145 $y = \dfrac{x}{\ln x}$ $\left[D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$; asintoti: $x = 1$; punto di singolarità eliminabile per $x = 0$; min (e, e), flesso $\left(e^2, \dfrac{e^2}{2}\right)\right]$

146 $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $\left[D = (0, +\infty)$; asintoti: $x = 0$ (destro); $y = 0$; max (e, e^{-1}); flesso $\left(e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)\right]$

147 $y = \ln^2 x$ $[D = (0, +\infty)$; asintoti: $x = 0$; min $(1, 0)$; flesso $(e, 1)]$

148 $y = x^3 \ln x$ $\left[D = (0, +\infty)$; $x = 0$: singolarità eliminabile; min $\left(e^{-\frac{1}{3}}, -\dfrac{e^{-1}}{3}\right)$; flesso $\left(e^{-\frac{5}{6}}, -\dfrac{5e^{-\frac{5}{2}}}{6}\right)\right]$

149 $y = \dfrac{x}{\ln^2 x}$ $\left[D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$; $x = 0$: singolarità eliminabile; asintoti: $x = 1$; min $\left(e^2, \dfrac{e^2}{4}\right)$; flesso $\left(e^3, \dfrac{e^3}{9}\right)\right]$

150 $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ $\left[D = (0, +\infty)$; asintoti: $x = 0$, $y = 0$ (destro); max $\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e}\right)$; flesso $\left(\sqrt[6]{e^5}, \dfrac{5}{6\sqrt[3]{e^5}}\right)\right]$

151 $y = \ln \dfrac{x+2}{x^2}$ $[D = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$; asintoti: $x = -2$, $x = 0$; flesso per $x = 2\sqrt{2} - 4]$

152 $y = \ln\left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}\right)$ $[D = (0, +\infty)$; asintoto: $x = 0$ (destro); min $(1, 2 \ln 2$; flesso $(1 + \sqrt{2}, \ln(2 + 2\sqrt{2}))]$

153 $y = \ln(x^3 - 2x)^2$ (Tralascia lo studio di y''.) $\left[D = \mathbf{R} - \{0, \pm\sqrt{2}\}$; asintoti: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$; max $\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \ln\dfrac{32}{27}\right)\right]$

154 $y = x \ln^2 x$ $[D = (0, +\infty)$; $x = 0$: singolarità eliminabile; max $(e^{-2}, 4e^{-2})$; min $(1, 0)$; flesso $(e^{-1}, e^{-1})]$

155 $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ $[D = (0, +\infty)$; asintoti: $x = 0$ (destro), $y = 0$ (destro); min $(1, 0)$, max $(e^2, 4e^{-2})$; flessi per $x = e^{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}]$

156 $y = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$ $[D = (0, e) \cup (e, +\infty)$; asintoti: $x = e$, $y = 1$; $x = 0$: punto di singolarità eliminabile; flesso $\left(e^{-1}, \dfrac{1}{2}\right)]$

157 $y = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ $[D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$; $x = 0$: punto di singolarità eliminabile; asintoti: $x = 1$, $y = 0$; max $\left(e^2, \dfrac{1}{4}\right)$; flessi per $x = e^{\pm\sqrt{6}}]$

158 **ESERCIZIO GUIDATO**

Studia la funzione $y = \dfrac{\ln^2 x + 1}{\ln x}$ e tracciane il grafico.

- Osserva che la funzione è definita per $x > 0$ e $\ln x \neq 0$ e deduci il dominio della funzione.
- Calcola i limiti della funzione agli estremi del dominio e deduci che ci sono due asintoti verticali.
- Calcola e studia la derivata prima, verificando che la funzione presenta un massimo nel punto di coordinate $(e^{-1}, -2)$ e un minimo nel punto di coordinate $(e, 2)$.
- Calcola la derivata seconda e verifica che $y'' = -\dfrac{\ln^3 x - \ln x - 2}{x^2 \ln^3 x}$. Lo studio degli zeri va effettuato graficamente.
  Poni $\ln x = t$ e studia graficamente l'equazione $t^3 - t - 2 = 0$, tracciando i grafici di $y = t^3$ e di $y = t + 2$. Troverai che l'equazione ammette una soluzione con $1 < t < 2$, quindi l'equazione originaria in x ammetterà una soluzione con $e^1 < x < e^2$. Deduci l'esistenza di un punto di flesso α con $\alpha \in (e, e^2)$.
- Traccia il grafico della funzione, individuandone l'immagine.

159 $y = x\sqrt[3]{\ln x}$ [$D = (0, +\infty)$; $x = 0$: singolarità eliminabile; minimo per $x = e^{-\frac{1}{3}}$; flessi per $x = 1$ (a tangente verticale) e per $x = e^{\frac{2}{3}}$]

160 $y = 1 - e^{x \ln x^2}$ (Tralascia lo studio di y'', supponendo che il numero dei punti di flesso sia il minimo compatibile con tutte le altre caratteristiche del grafico.)
[$D = \mathbf{R} - \{0\}$; $x = 0$: singolarità eliminabile; asintoti: $y = 1$ (sinistro); minimo per $x = -e^{-1}$, massimo per $x = e^{-1}$; c'è un punto di flesso nell'intervallo $(-\infty, 0)$ (la concavità cambia anche per $x = 0$, che però non è un punto di flesso perché ivi la funzione non è definita)]

Matematica ed economia

161 **Prezzo di un'azione.** La funzione:

$$p(t) = \begin{cases} 5 & t = 0 \\ 4t^2[3 - 2\ln(2t)] + 5 & 0 < t \le 2 \end{cases}$$



rappresenta con buona approssimazione l'andamento del prezzo $p(t)$ (in euro) dell'azione di una società nei primi due anni da quando è stata quotata in borsa. La variabile t rappresenta il tempo, misurato in anni, trascorso dalla prima quotazione in borsa. Traccia un grafico qualitativo della funzione, quindi, in base alle informazioni leggibili sul grafico, rispondi ai seguenti quesiti.

a. È vero che nei primi tre mesi il prezzo dell'azione è salito di più del 20% del suo valore iniziale?

b. Quale è stato il range di oscillazione del prezzo dell'azione nei primi due anni di quotazione?

c. Quante volte, nei primi due anni di quotazione in borsa, il prezzo dell'azione è stato di 6 euro? Quante volte è stato di 10 euro?
[**a.** Sì; **b.** fra 5 euro e 12,39 euro; **c.** 1 volta, 2 volte]

162 **Inventa tu.** Traccia il grafico e determina l'espressione analitica di una funzione logaritmica che abbia le seguenti caratteristiche:

a. ha come asintoti verticali l'asse y e le rette di equazioni $x = \pm 1$;

b. ha asintoto orizzontale.

163 **Inventa tu.** Traccia il grafico e determina l'espressione analitica di una funzione logaritmica che sia definita in $\mathbf{R} - \{\pm 2\}$, sia pari, abbia come asintoti verticali le rette di equazioni $x = \pm 2$ e sia priva di asintoti orizzontali.

Studio di funzioni goniometriche

Studia le seguenti funzioni goniometriche e tracciane i grafici.

164 $y = \sin^2 x + \cos x$ in $[0, 2\pi]$ [Min: $(0, 1)$, $(\pi, -1)$, $(2\pi, 1)$; max: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5}{4}\right)$; flessi per $x = \arccos\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ e per $x = 2\pi - \arccos\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$]

165 **Videolezione** $y = \frac{1}{2}\sin^2 x - \cos x$ in $[0, 2\pi]$
[Min: $(0, -1)$, $(2\pi, -1)$; max $(\pi, 1)$; flessi per $x = \frac{\pi}{3}$ e per $x = \frac{5\pi}{3}$]

166 $y = \cos^2 x - 2\sin x$ in $[0, 2\pi]$ [Min: $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$; max $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$; flessi: $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$]

167 $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ in $[-\pi, \pi]$ (Tralascia lo studio di y''.) [Asintoti: $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\frac{3}{4}\pi$; min $(0, 1)$; max: $(\pm\pi, -1)$; vi sono almeno due punti di flesso]

168 $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - 1}$ in $[0, 2\pi]$ (Tralascia lo studio di y''.) [Asintoti: $x = \frac{\pi}{2}$; max $(\pi, 1)$]

169 $y = x + 2\cos x$ in $[0, 2\pi]$ $\left[\text{Max}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right), \text{min}\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right), \text{flessi: } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right]$

170 ESERCIZIO GUIDATO

Studia la funzione $y = \sin x \cos^3 x$ in $[0, \pi]$ e tracciane il grafico.

- Calcola la derivata prima e verifica che può scriversi nella forma $y' = \cos^2 x\,(1 - 4\sin^2 x)$.
  Dallo studio della derivata prima deduci che nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione ha un massimo nel punto $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ e un minimo nel punto $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$.
- Calcola la derivata seconda e verifica che può scriversi nella forma $y'' = 2\sin x \cos x\,(3 - 8\cos^2 x)$.
  Dallo studio della derivata seconda deduci che nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione ha tre punti di flesso, precisamente per $x = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$ e per $x = \frac{\pi}{2}$.
- Traccia il grafico della funzione, specificandone l'immagine.

171 $y = \cos x \sin^3 x$ in $[0, \pi]$ $\left[\text{Max: } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right), (\pi, 0); \text{min: } (0,0), \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right);\right.$ $\left.\text{flessi per } x = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{5}{8}}\right) \text{ e per } x = \frac{\pi}{2}\right]$

172 $y = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x$ in $[0, 2\pi]$ $\left[\text{Asintoti: } x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}; \text{min: } \left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right), (\pi, -3), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right);\right.$ $\text{max: } \left(\frac{3\pi}{4}, -2\sqrt{2}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, -2\sqrt{2}\right), (0, 3), (2\pi, 3); \text{ci sono quattro punti di flesso,}$ $\left.\text{di ascisse } x = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{4}}\right) \text{ e } x = 2\pi - \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{4}}\right)\right]$

173 $y = \tan x - 2x$ in $[0, 2\pi]$ $\left[\text{Asintoti: } x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}; \text{min: } \left(\frac{\pi}{4}, 1 - \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 1 - \frac{5\pi}{2}\right);\right.$ $\left.\text{max: } \left(\frac{3\pi}{4}, -1 - \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, -1 - \frac{7\pi}{2}\right); \text{flesso } (\pi, -2\pi)\right]$

174 $y = \frac{4\cos^2 x}{1 - 2\cos x}$ in $[0, 2\pi]$ $\left[\text{Asintoti: } x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}; \text{min: } \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right);\right.$ $\left.\text{max: } (0, -4), \left(\pi, \frac{4}{3}\right), (2\pi, -4); \text{flessi: } \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)\right]$

175 $y = x \sin x$ in $[-\pi, \pi]$ $\left[\text{La derivata prima e la derivata seconda vanno studiate graficamente;}\right.$ $\left.\text{min } (0, 0), \text{max per } x = \pm\alpha \text{ con } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); \text{flessi per } x = \pm\beta \text{ con } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right]$

176 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio di una funzione goniometrica che abbia le seguenti caratteristiche:
a. ha periodo 2π;
b. ha come asintoti verticali le rette di equazioni $x = \pi + 2k\pi$.

177 **Inventa tu.** Fornisci l'esempio di una funzione goniometrica di periodo π che abbia come asintoti verticali le rette di equazione $x = k\frac{\pi}{2}$.

3. Funzioni con valori assoluti

Teoria p. 430

Esercizi introduttivi

Test

178 La funzione $y = x^4 - x\,|x|$ è:

A pari B dispari C né pari né dispari

179 La funzione $y = \dfrac{x\,|x|}{x^4+1}$ è:

A pari B dispari C né pari né dispari

180 La funzione $y = |\sin x| + \cos x$ è:

A pari B dispari C né pari né dispari

181 **Vero o falso?**

a. il grafico della funzione $y = |x|\sqrt{x^2+1}$ è costituito dal grafico di $y = x\sqrt{x^2+1}$ per $x \geq 0$ e dal suo simmetrico rispetto all'asse y V F

b. il grafico della funzione $y = \dfrac{x}{|x^2-1|}$ è costituito dal grafico di $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ per $x \geq 0$ e dal suo simmetrico rispetto all'origine V F

c. il grafico della funzione $y = |x^3 + x|$ è costituito dal grafico di $y = x^3 + x$ per $y \geq 0$ e dal suo simmetrico rispetto all'asse x per $y < 0$ V F

d. il grafico della funzione $y = x^2\,|x-2|$ è costituito dal grafico di $y = x^2(x-2)$ per $x \geq 2$ e dal simmetrico del grafico di $y = x^2(x-2)$ rispetto all'asse x per $x < 2$ V F

e. la derivata della funzione $y = \ln|x| + \ln|x-1|$ è una funzione nella cui equazione sono presenti termini in valore assoluto V F

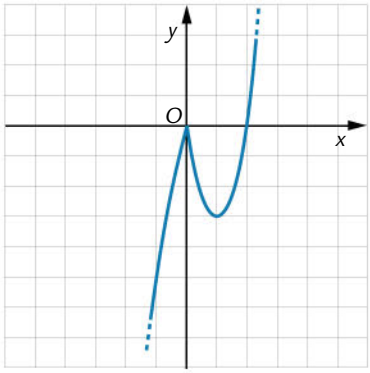
f. una funzione di equazione $y = |f(x)|$ presenta sempre almeno un punto angoloso V F

[2 affermazioni vere e 4 false]

Interpretazione di grafici

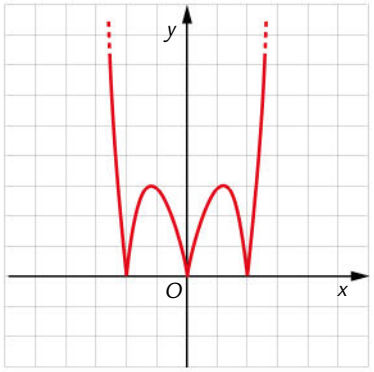
182 Il grafico di funzione mostrato in figura è quello di:

A $y = |x^3 - 4x|$
B $y = x^3 - 4\,|x|$
C $y = |x|^3 - 4\,|x|$
D $y = |x|^3 - 4x$



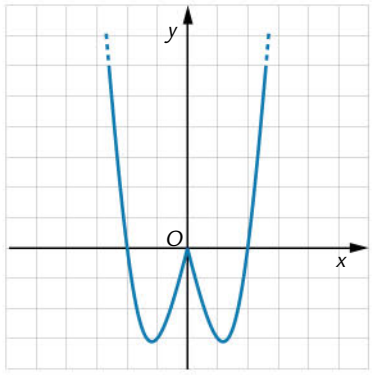
183 Il grafico di funzione mostrato in figura è quello di:

A $y = |x^3 - 4x|$
B $y = x^3 - 4\,|x|$
C $y = |x|^3 - 4\,|x|$
D $y = |x|^3 - 4x$



184 Il grafico di funzione mostrato in figura è quello di:

A $y = |x^3 - 4x|$
B $y = x^3 - 4\,|x|$
C $y = |x|^3 - 4\,|x|$
D $y = |x|^3 - 4x$



Studio di funzioni con valori assoluti

185 ESERCIZIO GUIDATO

Studia la funzione $y = |x^3 - 4x|$.

- Traccia il grafico della funzione $y = x^3 - 4x$.
- Il grafico di $y = |x^3 - 4x|$ è costituito dalle parti del grafico della funzione tracciato per $y > 0$ e dalle simmetriche rispetto all'asse x delle parti in cui $y < 0$.
- Troverai che la funzione $y = |x^3 - 4x|$ ha punti angolosi di coordinate (0, 0) e (± 2, 0) e punti di massimo di ascisse $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

186 ESERCIZIO GUIDATO

Studia la funzione $y = \frac{x^2}{|x-2|}$.

- In base alla definizione di valore assoluto: $y = \begin{cases} \frac{x^2}{x-2} & x > 2 \\ \frac{x^2}{2-x} & x < 2 \end{cases}$
- Osserva che il grafico di $y = \frac{x^2}{2-x}$ è il simmetrico rispetto all'asse x del grafico di $y = \frac{x^2}{x-2}$.
- Se tracci correttamente il grafico di $y = \frac{x^2}{|x-2|}$, troverai che esso ha come asintoti le rette di equazioni $x = 2$, $y = x + 2$ (a destra) e $y = -x - 2$ (a sinistra) e due punti di minimo di coordinate (0, 0) e (4, 8).

Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico.

187 $y = |x|^3 - 3x^2$ [$D = \mathbf{R}$; funzione pari; min $(\pm 2, -4)$, max $(0, 0)$]

188 $y = \left|\frac{x^2-1}{x}\right|$ [$D = \mathbf{R} - \{0\}$; funzione pari; asintoti: $x = 0$, $y = x$ (destro) e $y = -x$ (sinistro); punti angolosi, che sono anche di minimo, per $x = \pm 1$]

189 $y = |x^4 - 4x^2|$ $\left[D = \mathbf{R}$, min $(0, 0)$; punti angolosi $(\pm 2, 0)$; max $(\pm\sqrt{2}, 4)$; flessi: $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{20}{9}\right)\right]$

190 $y = |e^{3x} - e^x|$ $\left[D = \mathbf{R}$, asintoto: $y = 0$ (sinistro); punto angoloso $(0, 0)$; max $\left(-\frac{1}{2}\ln 3, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$; flesso $\left(-\ln 3, \frac{8}{27}\right)\right]$

191 $y = x^3 - 3|x|$ [$D = \mathbf{R}$; punto angoloso $(0, 0)$; min $(1, -2)$]

192 $f(x) = \frac{x}{|x^2 - 4|}$ [Funzione dispari; $D = \mathbf{R} - \{\pm 2\}$; asintoti: $x = \pm 2$ e $y = 0$; flesso $(0, 0)$]

193 $y = x\,|\ln x|$ [$D = (0, +\infty)$, $x = 0$: singolarità eliminabile; max (e^{-1}, e^{-1}); punto angoloso $(1, 0)$]

194 $y = |\ln^2 x - 1|$ [Asintoto: $x = 0$; max $(1, 1)$; punti angolosi: $(e^{-1}, 0)$ ed $(e, 0)$]

195 $y = |2x - 1|\, e^{-x^2}$ (Tralascia lo studio di y''.) $\left[$Asintoto: $y = 0$; max $\left(-\frac{1}{2}, 2e^{-\frac{1}{4}}\right)$ e $(1, e^{-1})$; punto angoloso $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; il grafico presenta almeno due punti di flesso$\right]$

196 $y = \ln\left|\frac{x-1}{x-5}\right|$ [$D = \mathbf{R} - \{1, 5\}$; asintoti: $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$; flesso $(3, 0)$]

197 $y = \sqrt{\left|\frac{x-2}{x}\right|}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\}$; asintoto: $y = 1$; cuspide in $(2, 0)$; flesso $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

198 $y = \ln|x| + \frac{1}{x}$ $\left[D = \mathbb{R} - \{0\};\ \text{min } (1, 1);\ \text{flesso } \left(2, \ln 2 + \frac{1}{2}\right)\right]$

199 $y = \sin^2|x| + \cos x \ \text{ in } [-\pi, \pi]$

$\left[\text{Funzione pari; min } (0, 1);\ \text{max } \left(\pm\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right) \text{e } (\pm\pi, -1);\ \text{flessi per } x = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8} \text{ e } x = \pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]$

200 $y = \ln|\sqrt[3]{x^2} - 1|$ $\left[D = \mathbb{R} - \{\pm 1\};\ \text{asintoti: } x = \pm 1;\ \text{cuspide } (0, 0);\ \text{flessi: } \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{9}, -\ln\frac{3}{2}\right)\right]$

201 $y = \sqrt{|x|}\, e^{-x}$ $\left[D = \mathbb{R};\ \text{asintoto: } y = 0 \text{ (destro)};\ \text{max } \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right);\ \text{cuspide in } (0, 0);\ \text{flessi per } x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}\right]$

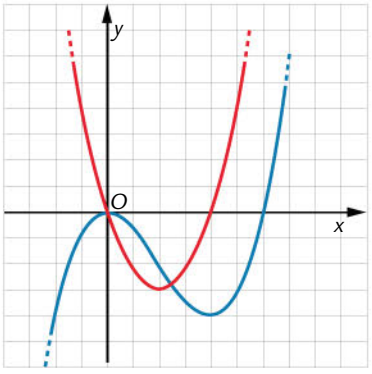
202 $y = |x - 2|\, e^{-\frac{1}{x}}$ $\left[D = \mathbb{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } x = 0 \text{ (sinistro)}, y = x - 3 \text{ (destro)}, y = -x + 3 \text{ (sinistro)};\ \text{min } \left(-2, 4e^{\frac{1}{2}}\right);\ \text{max } (1, e^{-1});\ \text{flesso } \left(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)\right]$

4. Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata prima

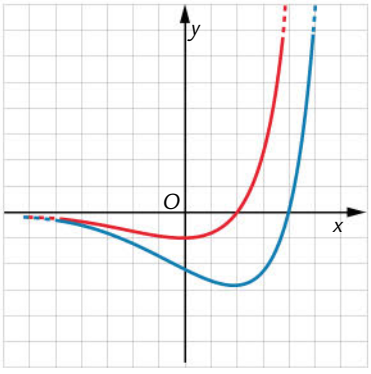
Teoria p. 432

Esercizi introduttivi

203 In ciascuna delle seguenti figure sono rappresentati il grafico di una funzione f e il grafico della sua derivata f'. Individua qual è il grafico di f e qual è il grafico di f', giustificando la risposta.



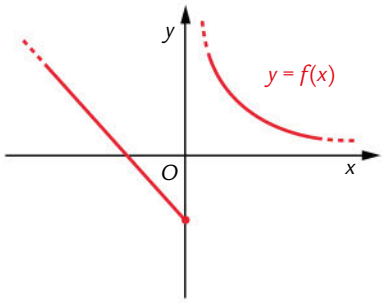
a



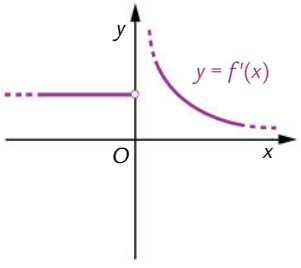
b

Test

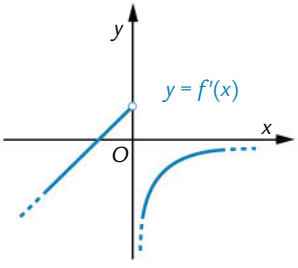
204 Nella figura a lato è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$.



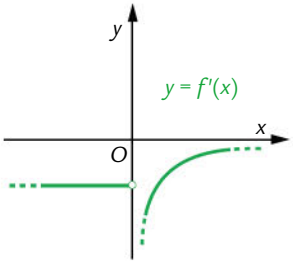
Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = f'(x)$?



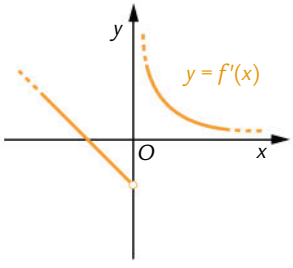
A



B

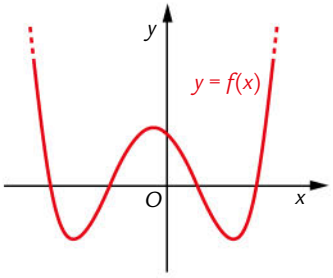


C

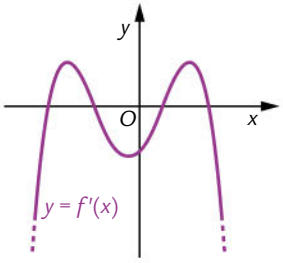


D

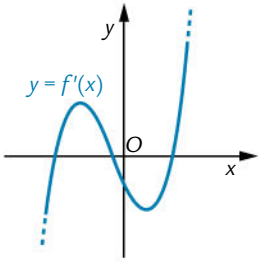
205 Nella figura a lato è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$.



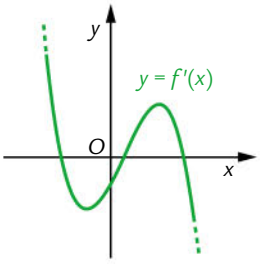
Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = f'(x)$?



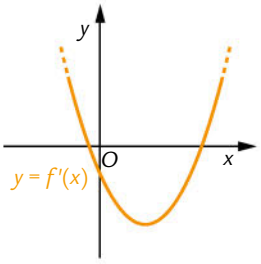
A



B

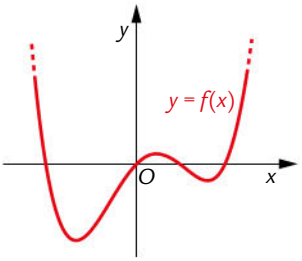


C

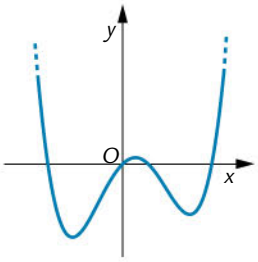


D

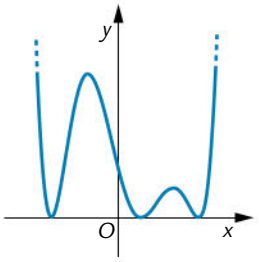
206 Nella figura a lato è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$.



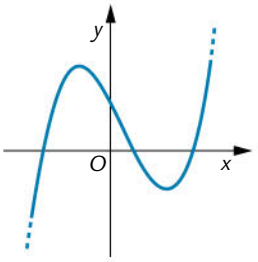
Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = f'(x)$?



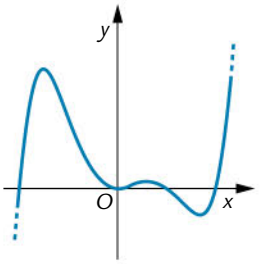
A



B

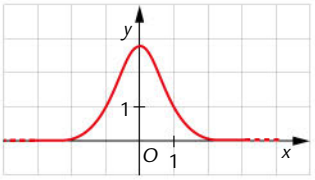


C

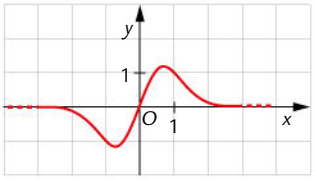


D

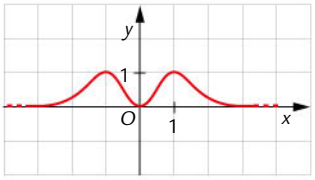
207 **Associazione.** Nelle figure seguenti sono riportati i grafici di quattro funzioni (in rosso) e delle loro derivate (in blu). Associa al grafico di ogni funzione in rosso quello della sua derivata.



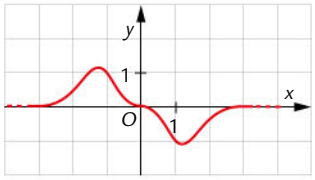
a.



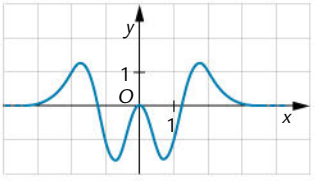
b.



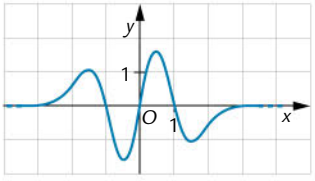
c.



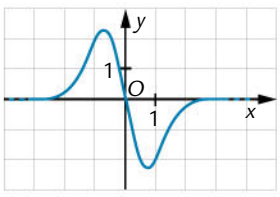
d.



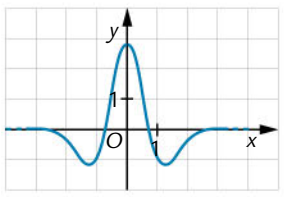
A.



B.

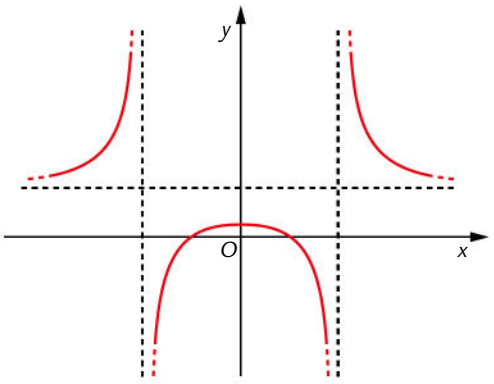


C.

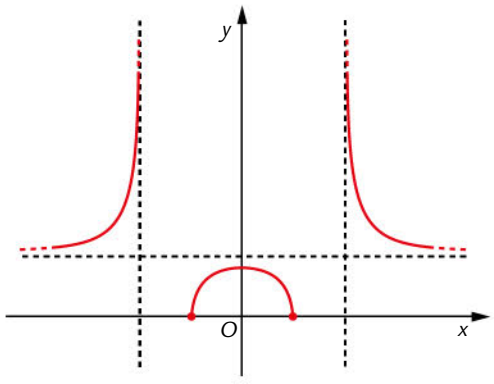


D.

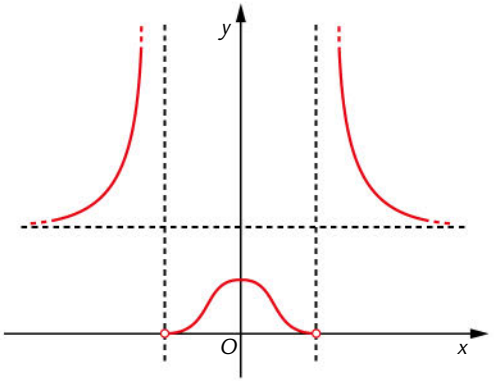
208 **Associazione.** Nelle seguenti figure sono riportati i grafici di quattro funzioni (in rosso) e delle loro derivate (in blu). Associa al grafico di ogni funzione quello della sua derivata.



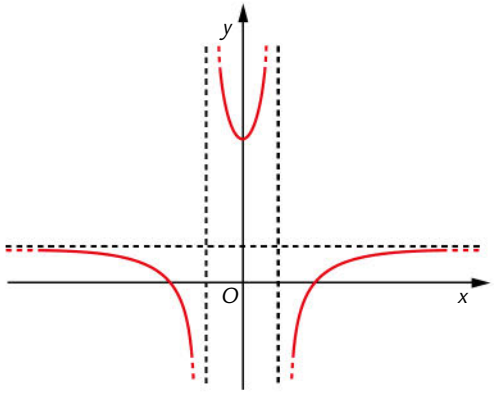
a.



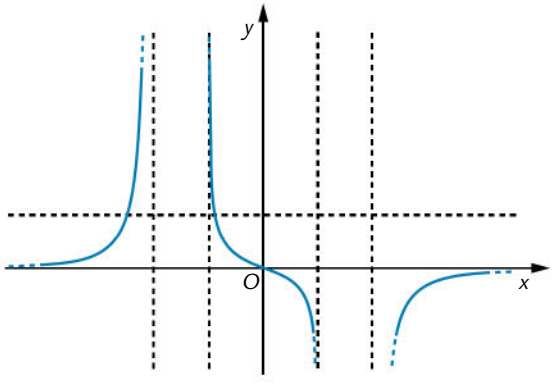
b.



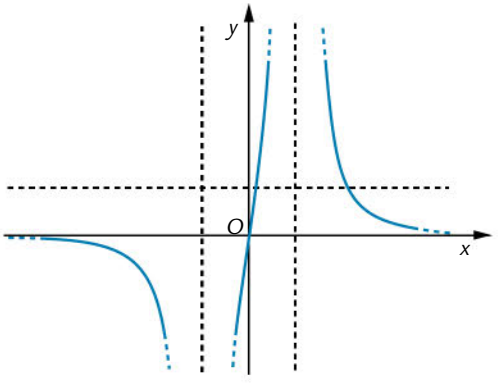
c.



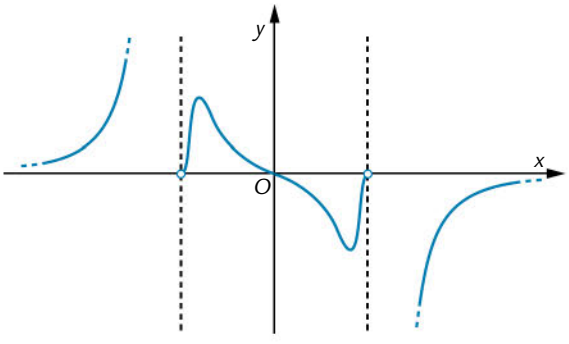
d.



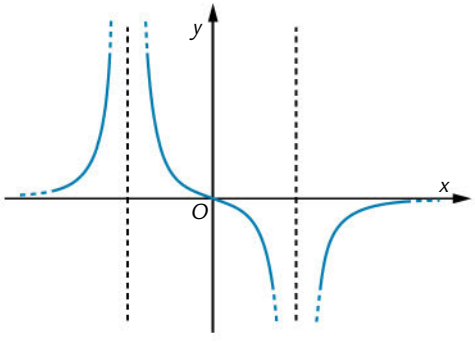
A.



B.



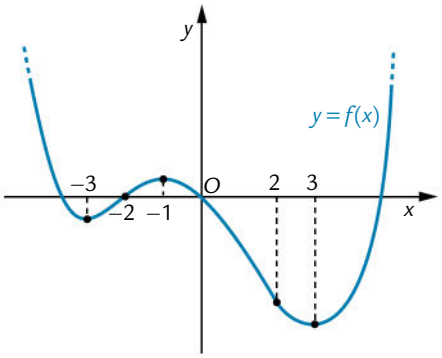
C.



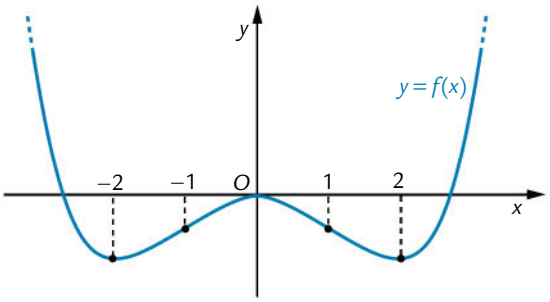
D.

Deduzione del grafico della derivata prima

209 Nella figura a lato è tracciato il grafico di una funzione $y = f(x)$; sono inoltre indicate le ascisse dei punti di estremo relativo e dei punti di flesso. Traccia il grafico di $y = f'(x)$.



210 Nella figura a lato è tracciato il grafico di una funzione $y = f(x)$; sono inoltre indicate le ascisse dei punti di estremo relativo e dei punti di flesso. Traccia il grafico di $y = f'(x)$.



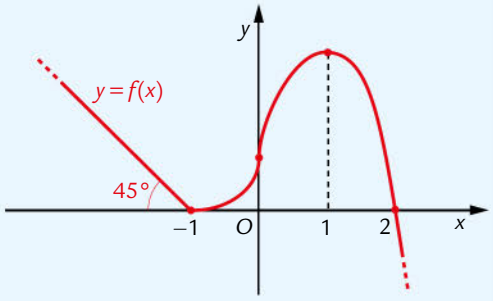
211 ESERCIZIO GUIDATO

In figura è tracciato il grafico di una funzione $y = f(x)$. Traccia un grafico plausibile per $y = f'(x)$ sapendo che:

a. il tratto per $x < -1$ è una semiretta;

b. il grafico di f si avvicina a -1 da destra con tangente orizzontale;

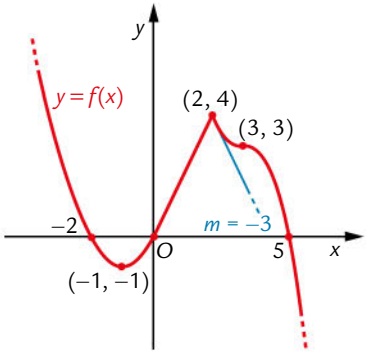
c. per $x = 0$ la funzione f presenta un flesso a tangente verticale.



- Poiché per $x < -1$ il grafico di f coincide con quello di una semiretta, la funzione f' per $x < -1$ deve essere *costante*.
- Per $x = -1$ la funzione f **non** è derivabile; precisamente $f'_-(-1) =$ ..... e $f'_+(-1) = 0$ (perché il testo precisa che il grafico si avvicina a -1 da destra con tangente *orizzontale*); perciò f' presenta per $x = -1$ un *punto di salto*.
- Per $x = 0$ la funzione f **non** è derivabile e presenta un flesso a tangente verticale; precisamente, essendo f strettamente crescente in un intorno di 0, sarà $f'(0) = +\infty$. Dunque la funzione f' presenta per $x = 0$ un *asintoto verticale*.
- $f'(1) =$ ..... perché .....
- Per $x > 1$ la funzione f è strettamente decrescente, quindi f' è .....
- Tenendo conto delle precedenti osservazioni, puoi tracciare un grafico plausibile di $y = f'(x)$.

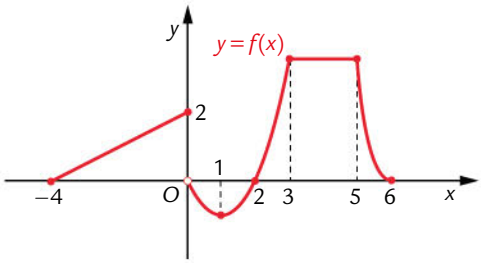
212 In figura è tracciato il grafico di una funzione $y = f(x)$. Traccia un grafico plausibile per $y = f'(x)$ sapendo che:

a. il tratto per $x < 0$ è un arco di parabola;
b. in $x = 0$ la funzione è derivabile;
c. il tratto per $0 < x < 2$ è un segmento;
d. in $x = 2$ la funzione presenta un punto angoloso e la tangente da destra ha coefficiente angolare -3;
e. in $x = 3$ la funzione presenta un punto di flesso a tangente orizzontale.



213 In figura è tracciato il grafico di una funzione $y = f(x)$. Traccia un grafico plausibile per $y = f'(x)$ sapendo che:

a. i tratti per $-4 \le x \le 0$ e $3 \le x \le 5$ sono segmenti;
b. il tratto per $0 \le x \le 3$ è un arco di parabola;
c. nel punto $x = 1$ la funzione presenta un minimo relativo;
d. nel punto $x = 5$ la funzione presenta un punto angoloso e la tangente da destra è verticale;
e. nel punto $x = 6$ la tangente è orizzontale.



5. Applicazioni dello studio di funzione alle equazioni

Teoria p. 433

Esercizi introduttivi

Test

214 A quale delle seguenti equazioni **non** è equivalente l'equazione $e^x(x^2 - 1) = 1$?

A $x^2 - 1 = e^{-x}$ B $e^x(x^2 - 1) - 1 = 0$ C $e^x = 1 - x^2$ D $e^x = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

215 La discussione di quale dei seguenti sistemi equivale alla discussione dell'equazione $x^3 - kx^2 - k - 1 = 0$?

A $\begin{cases} y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \\ y = k \end{cases}$ B $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \\ y = k \end{cases}$ C $\begin{cases} y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \\ y = k \end{cases}$ D $\begin{cases} y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \\ y = k \end{cases}$

216 Quale delle seguenti condizioni garantisce l'*esistenza* di una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[a, b]$?

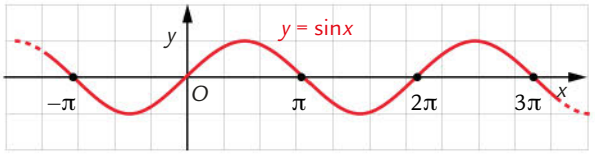
A La funzione $y = f(x)$ è continua in $[a, b]$
B La funzione $y = f(x)$ è derivabile in $[a, b]$
C La funzione $y = f(x)$ è continua in $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$
D La funzione $y = f(x)$ è continua in $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) > 0$

217 Quale delle seguenti condizioni garantisce l'*unicità* di un'eventuale soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[a, b]$?

A La funzione $y = f(x)$ è continua in $[a, b]$
B La funzione $y = f(x)$ è derivabile in $[a, b]$
C La funzione $y = f(x)$ è strettamente monotona in $[a, b]$
D La funzione $y = f(x)$ è convessa in $[a, b]$

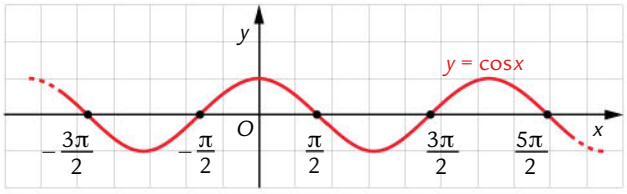
Interpretazione di grafici

218 **E se?** Utilizzando il grafico in figura, stabilisci quante soluzioni ammette l'equazione $\sin x = \dfrac{x}{5}$ nell'intervallo $[-\pi, 3\pi]$.



▸ Cambierebbe la risposta considerando, nello stesso intervallo, l'equazione $\sin x = \dfrac{x}{10}$?

219 **E se?** Utilizzando il grafico in figura, stabilisci quante soluzioni ammette l'equazione $\cos x = \dfrac{x}{4}$ nell'intervallo $\left[-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.



▸ Cambierebbe la risposta considerando, nello stesso intervallo, l'equazione $\cos x = \dfrac{x}{8}$?

220 **Vero o falso?**

a. l'equazione $\sin x = x$ non ha soluzioni V F

b. l'equazione $\sin x = 2x$ ha una sola soluzione V F

c. l'equazione $\sin x = \frac{x}{2}$ ha esattamente tre soluzioni V F

d. l'equazione $\ln x = x$ non ha soluzioni V F

e. l'equazione $\ln x = 2x$ ha una sola soluzione V F

f. l'equazione $\ln x = \frac{x}{2}$ ha esattamente tre soluzioni V F

[3 affermazioni vere e 3 false]

Ricerca delle radici di un'equazione

Stabilisci il numero delle soluzioni delle seguenti equazioni e, se esistono, determina un intervallo di lunghezza unitaria cui tali soluzioni appartengono.

221 $x^5 - 2x^4 + 2 = 0$ [Tre soluzioni: α, β, γ con $\alpha \in (-1, 0)$ e $\beta, \gamma \in (1, 2)$]

222 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ [Una sola soluzione: $\alpha \in (1, 2)$]

223 $3 \ln x - x = 0$ [Due soluzioni: α, β con $\alpha \in (1, 2)$ e $\beta \in (4, 5)$]

224 $\sqrt{x^2 + 1} = x^3$ [Una sola soluzione: $\alpha \in (1, 2)$]

225 $\ln(x + 1) = 2x$ [Due soluzioni: α, β con $\alpha = 0$ e $\beta \in (-1, 0)$]

226 $2 \cos x + x = 0$ [Una sola soluzione $\alpha \in (-2, -1)$]

227 $\frac{e^x}{x^2 - 4} = 6$ [Tre soluzioni: α, β, γ con $\alpha \in (-3, -2)$, $\beta \in (2, 3)$ e $\gamma \in (4, 5)$]

228 $\sin x = x^2$ [Due soluzioni: $\alpha = 0$, $\beta \in (0, 1)$]

229 $2(x - 2)e^x = 5$ [Una sola soluzione: $\alpha \in (2, 3)$]

230 $2^x = x$ [Nessuna soluzione]

Discussione di equazioni parametriche

Discuti le seguenti equazioni parametriche.

231 $x^3 - 6x - k = 0$ [Una soluzione per $k < -4\sqrt{2} \vee k > 4\sqrt{2}$; tre soluzioni per $-4\sqrt{2} \le k \le 4\sqrt{2}$]

232 $x^3 - (k - 2)x + 2 = 0$ [Una soluzione per $k < 5$; tre soluzioni per $k \ge 5$]

233 $x^3 - kx^2 + k = 0$ $\left[\text{Tre soluzioni per } k \le -\frac{3\sqrt{3}}{2} \vee k \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{; una soluzione per } -\frac{3\sqrt{3}}{2} < k < \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

234 $x^5 - kx^3 - 1 = 0$ $\left[\text{Una soluzione per } k < \frac{5}{6}\sqrt[5]{72}\text{; tre soluzioni per } k \ge \frac{5}{6}\sqrt[5]{72}\right]$

235 $x\sqrt{2 - x} - k = 0$ $\left[\text{Due soluzioni per } 0 \le k \le \frac{4\sqrt{6}}{9}\text{; una soluzione per } k < 0\right]$

236 $3\sqrt[3]{x} - x = k$ [Tre soluzioni per $-2 \le k \le 2$; una soluzione per $k < -2 \vee k > 2$]

237 $x = ke^{\frac{1}{2}x^2}$ $\left[\text{Due soluzioni per } -e^{-\frac{1}{2}} \le k \le e^{-\frac{1}{2}}\text{, con } k \ne 0\text{; una sola soluzione per } k = 0\right]$

238 $\ln x - k\sqrt{x} = 0$ $\left[\text{Una soluzione per } k \le 0\text{; due soluzioni per } 0 < k \le \frac{2}{e}\right]$

239 $e^{kx} - x = 0$ [Una soluzione per $k \le 0$; due soluzioni per $0 < k \le \frac{1}{e}$]

240 $1 + |x^3 - 3x^2| = k$ [Tre soluzioni per $k = 1$ (di cui due coincidenti); quattro soluzioni per $1 < k \le 5$ (di cui due coincidenti per $k = 5$), due soluzioni per $k > 5$]

241 $|x - 3| = ke^{-x}$ [Una soluzione per $k = 0$; tre soluzioni per $0 < k \le e^2$ (di cui due coincidenti per $k = e^2$); una soluzione per $k > e^2$]

242 $2 \arctan x - x - k = 0$ $\left[\text{Tre soluzioni per } -\frac{\pi}{2}+1 \le k \le \frac{\pi}{2}-1; \text{ una soluzione per } k < -\frac{\pi}{2}+1 \vee k > \frac{\pi}{2}-1\right]$

243 ESERCIZIO GUIDATO

Discuti l'equazione $x^4 - 4x^2 - k = 0$ rispetto alle limitazioni $-2 \le x \le 1$.

- Il problema equivale a discutere il sistema misto $\begin{cases} x^4 - 4x^2 - k = 0 \\ -2 \le x \le 1 \end{cases}$.
- Traccia il grafico della funzione $y = x^4 - 4x^2$ e considera solo l'*arco* del grafico i cui punti hanno ascissa x tale che $-2 \le x \le 1$. Studia quindi, al variare di k, il numero dei punti di intersezione tra tale arco e le rette del fascio di equazione $y = k$.
- Se svolgi i calcoli correttamente, troverai che il sistema misto ha due soluzioni per $-4 \le k < -3$ e tre soluzioni per $-3 \le k \le 0$.

Discuti le seguenti equazioni parametriche rispetto alle limitazioni indicate.

244 $x^3 - 3x^2 - k = 0$ $-1 \le x \le 1$ [Una soluzione per $-4 \le k < -2$; due soluzioni per $-2 \le k \le 0$]

245 $x = ke^x$ $0 \le x \le 2$ $\left[\text{Una soluzione per } 0 \le k < \frac{2}{e^2}; \text{ due soluzioni per } \frac{2}{e^2} \le k \le \frac{1}{e}\right]$

246 $\ln x - x^2 - k = 0$ $0 < x \le 1$ $\left[\text{Una soluzione per } k < -1; \text{ due soluzioni per } -1 \le k \le -\frac{1}{2}(\ln 2 + 1)\right]$

247 $\sin^2 x - \cos x - k = 0$ $0 < x \le \pi$ $\left[\text{Una soluzione per } -1 < k < 1; \text{ due soluzioni per } 1 \le k \le \frac{5}{4}\right]$

248 $\tan x - 2x = k$ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $\left[\text{Tre soluzioni per } -\frac{\pi}{2}+1 \le k \le \frac{\pi}{2}-1; \text{ una soluzione per } k < -\frac{\pi}{2}+1 \vee k > \frac{\pi}{2}-1\right]$

6. L'approssimazione delle radici di una equazione

Teoria p. 435

Metodo di bisezione

249 ESERCIZIO GUIDATO

Dopo avere individuato un intervallo cui appartiene la soluzione dell'equazione $x^3 + x - 1 = 0$, determina una sua approssimazione con una cifra decimale esatta.

- Osserva che l'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ equivale a $x^3 = 1 - x$, quindi le sue eventuali soluzioni sono le ascisse dei punti d'intersezione tra il grafico di $y = x^3$ e quello della retta di equazione $y = 1 - x$. Traccia i grafici delle due funzioni. Dall'analisi dei grafici puoi prevedere che l'equazione ha una sola soluzione, appartenente all'intervallo $[0, 1]$.
- Dimostra ciò che hai intuito dall'analisi dei grafici, applicando il teorema degli zeri alla funzione $f(x) = x^3 + x - 1$ nell'intervallo $[0, 1]$.
- Applica ora il metodo di bisezione, completando la tabella predisposta a pagina seguente. Tieni presente che $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$.
- Inoltre, dovendo trovare la soluzione x_0 con *una* cifra decimale esatta, dovrai continuare fino a individuare un intervallo i cui estremi hanno la *prima* cifra decimale *uguale*.

Passo	Intervallo	Punto medio	Valore della funzione nel punto medio	Conclusione
I	$[0, 1]$	$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}375 < 0$	Poiché $f(1) = 1 > 0$, la soluzione appartiene all'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 1\right] = [0{,}5; 1]$
II	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	.....	.....	Poiché $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, la soluzione appartiene all'intervallo $\left[\frac{1}{2}, ...\right] = [0{,}5; 0{,}75]$
III	.....	.....	.....	.....
IV	.....	.....	.....	.....

Giunto al quarto passo, se hai svolto correttamente i calcoli, troverai che $0{,}625 < x_0 < 0{,}687$; puoi quindi affermare che $x_0 \simeq$ ..... con la prima cifra decimale esatta.

Per ciascuna delle seguenti equazioni, stabilisci il numero delle soluzioni e determina un intervallo cui appartiene ogni soluzione; determina quindi un'approssimazione di ciascuna soluzione con due cifre decimali esatte, mediante il metodo di bisezione.

250 $x^3 + 2x + 1 = 0$ $[x \simeq -0{,}45]$

251 $x^4 + x - 2 = 0$ $[x_1 \simeq -1{,}35; x_2 = 1]$

252 $x^3 + x^2 + 1 = 0$ $[x \simeq -1{,}46]$

253 $\sqrt{x} = x^2 - 1$ $[x \simeq 1{,}49]$

254 $e^{2x} + x = 0$ $[x \simeq -0{,}42]$

255 $e^{-2x} + x - 2 = 0$ $[x_1 \simeq -0{,}44; x_2 \simeq 1{,}98]$

256 $2e^{-x} - x = 0$ $[x \simeq 0{,}85]$

257 $\ln x + x = 0$ $[x \simeq 0{,}56]$

258 $\ln x^2 + x - 2 = 0$ $[x \simeq 1{,}37]$

259 $\sin x = x^2$ $[x_1 = 0, x_2 \simeq 0{,}87]$

260 $\cos x = x^2 - 2x$ $[x_1 = -0{,}38, x_2 \simeq 1{,}85]$

Metodo di Newton

261 ESERCIZIO GUIDATO

Dimostra che la seguente equazione ha un'unica soluzione e, applicando il metodo di Newton in un intervallo opportuno, determina un'approssimazione della soluzione con cinque cifre decimali:

$$x^3 - x^2 + 1 = 0$$

- Per individuare l'intervallo in cui è compresa la soluzione, puoi disegnare i grafici delle funzioni $y = x^3$ e $y = x^2 - 1$ e vedere qual è all'incirca l'ascissa del punto in cui si intersecano. Quest'ultima appartiene all'intervallo ..... (usa estremi di coordinate intere, per ora).
- La funzione corrispondente all'equazione è $f(x) =$ .....
- Essa assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo?
  Sì, perché .....
- La derivata prima della funzione è $f'(x) =$ .....
- Essa, nell'intervallo scelto, è sempre ....., per cui la funzione risulta .....
- La derivata seconda della funzione è $f''(x) =$ .....
- Essa, nell'intervallo scelto, è sempre ....., per cui la funzione risulta .....
- Calcola il valore di $f(a) \cdot f''(a)$. Essendo $f(a) \cdot f''(a)$.....0, scegli $x_0 =$ .....
- Applica per alcune volte la formula $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ e troverai la soluzione cercata. $[-0{,}75488]$

Dimostra che ciascuna delle seguenti equazioni ha un'unica soluzione e, applicando il metodo di Newton in un intervallo opportuno, determina una approssimazione di tale soluzione con cinque cifre decimali.

262 $e^x + x + 1 = 0$ [−1,27846]

263 $x^2 + \ln x = 0$ [0,65292]

264 $\cos x + x - 3 = 0$ [3,79439]

265 $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$ [1,49022]

266 $x^3 - x^2 - 4x - 5 = 0$ [2,93947]

267 $\arcsin x + x - 1 = 0$ [0,48903]

268 $\arctan x + 2x - \pi = 0$ [1,44465]

Dimostra che ciascuna delle seguenti equazioni ha due soluzioni e, applicando il metodo di Newton in intervalli opportuni, determina un'approssimazione di tali soluzioni con cinque cifre decimali.

269 $x^4 - 2x - 4 = 0$ [−1,14390; 1,64293]

270 $\ln x - x + 2 = 0$ [0,15859; 3,14619]

271 $e^x - x - 3 = 0$ [−2,94753; 1,50524]

272 $x^4 - (x-1)^2 = 0$ [−1,61803; 0,61803]

Matematica e storia

273 **Metodo babilonese.** Il metodo babilonese per la determinazione (approssimata) della radice quadrata di un numero positivo k è basato sul calcolo dei termini della successione definita per ricorrenza da:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{k}{x_n}\right) \end{cases} \quad \text{con } k > 0$$

Tale successione, infatti, converge rapidamente a $\sqrt{k}$ (come puoi constatare per esempio nel caso $k = 2$). Osservando che $\sqrt{k}$ è la soluzione positiva dell'equazione algebrica $f(x) = 0$, con $f(x) = x^2 - k$, verifica che la successione definita per ricorrenza dal metodo di Newton *coincide* con la formula ricorsiva del metodo babilonese. Il metodo babilonese anticipa dunque di secoli il metodo di Newton!

Metodo delle secanti

274 ESERCIZIO GUIDATO

Dimostra che la seguente equazione ha un'unica soluzione e, applicando il metodo delle secanti in un intervallo opportuno, determina un'approssimazione di tale soluzione con quattro cifre decimali:

$x^3 + x^2 - 1 = 0$.

- Per individuare l'intervallo in cui è compresa la soluzione, puoi disegnare i grafici delle funzioni $y = x^3$ e $y = -x^2 + 1$ e vedere qual è all'incirca l'ascissa del punto in cui si intersecano. Quest'ultima appartiene all'intervallo .... (stai attento alla scelta: la derivata prima non si deve annullare).
- La funzione i cui zeri sono le soluzioni dell'equazione data è $f(x) =$ .....
- Essa assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo? Sì, perché .....
- La derivata prima della funzione è $f'(x) =$ .....
- Essa, nell'intervallo scelto, è sempre ....., per cui la funzione risulta .....
- La derivata seconda della funzione è $f''(x) =$ .....
- Essa, nell'intervallo scelto, è sempre ....., per cui la funzione risulta .....
- Calcola il valore di $f(a) \cdot f''(a)$. Essendo $f(a) \cdot f''(a)$ ..... 0, scegli $x_0 =$ .....
- Applica per alcune volte la formula $x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$ e troverai la soluzione cercata. [0,7549]

Dimostra che ciascuna delle seguenti equazioni ha un'unica soluzione e, applicando il metodo delle secanti in un intervallo opportuno, determina un'approssimazione di tale soluzione con quattro cifre decimali.

275 $x^2 + 2\ln x - 2 = 0$ [1,2479]

276 $x\ln x - 2 = 0$ [2,3458]

277 $xe^x - 1 = 0$ [0,5671]

278 $\sin x - x + 1 = 0$ [1,9346]

279 $x^2 - 2x - \sqrt{x-1} = 0$ [2,4902]

280 $x - 2 + \sqrt{x+1} = 0$ [0,6972]

Dimostra che ciascuna delle seguenti equazioni ha due soluzioni e, applicando il metodo delle secanti in intervalli opportuni, determina le approssimazioni di tali soluzioni con quattro cifre decimali.

281 $x^4 + x - 5 = 0$ [−1,6030; 1,3792]

282 $(x-3)\ln x - 1 = 0$ [0,6531; 3,7557]

283 $e^{x^2} - x - 2 = 0$ [−0,5875; 1,0369]

284 $\sin x - (x-1)^2 = 0$ [0,3862; 1,9616]

Metodo del punto unito

285 ESERCIZIO GUIDATO

Determina un'approssimazione con tre cifre decimali della soluzione della seguente equazione, dopo aver individuato un opportuno intervallo in cui applicare il metodo del punto unito:

$x = \sqrt[4]{2x+1}$

- Per individuare l'intervallo in cui è compresa la soluzione, puoi disegnare i grafici delle funzioni $y = x$ e $y = \sqrt[4]{2x+1}$ e vedere qual è all'incirca l'ascissa del punto in cui si intersecano. Quest'ultima appartiene all'intervallo .....
- Individua la funzione il cui punto unito corrisponde alla soluzione dell'equazione: $g(x) =$ .....
- La sua derivata prima è $g'(x) =$ .....
- È verificata la condizione $|g'(x)|<1$ nell'intervallo scelto? Sì, perché .....
- Bisogna scegliere $x_0 =$ ..... perché .....
- Applica per alcune volte la formula $x_n = g(x_{n-1})$ e troverai una buona approssimazione della soluzione cercata. [1,395]

Determina delle approssimazioni con tre cifre decimali delle soluzioni delle seguenti equazioni, dopo aver individuato un opportuno intervallo in cui applicare il metodo del punto unito.

286 $x = \sqrt[10]{x+1}$ [1,076]

287 $x = \dfrac{1}{10(x^3+1)}$ [0,010]

288 $x = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$ [−1,776]

289 $x + 1 = \arctan x$ [−2,152]

290 $x - 1 = e^{-2x}$ [1,109]

291 $x = \dfrac{1}{100(x^2+1)}$ [0,010]

292 $x - 2 = \dfrac{1}{x^{10}}$ [2,001]

293 $x = \ln\left(\dfrac{1}{2}x^2 + 2\right)$ [0,864]

294 $x = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 1$ [4,918]

Esercizi riassuntivi: approssimazione delle radici di un'equazione

Dimostra che ciascuna delle seguenti equazioni ha un'unica soluzione e, applicando nell'ordine i quattro metodi appresi in un intervallo opportuno iterando quattro volte il procedimento, determina un'approssimazione della soluzione. Stabilisci inoltre quale metodo converge più rapidamente.

295 $e^{-x} - x + 1 = 0$ [1,27846]

296 $\sqrt[6]{x+2} - x = 0$ [1,21486]

297 $\cos x - x + 1 = 0$ [1,28342]

298 $\dfrac{1}{3}e^{-2x} = x$ [0,21628]

299 $\sqrt{x} - x + \sqrt[4]{x} + 1 = 0$ [4,61347]

Esercizi di riepilogo

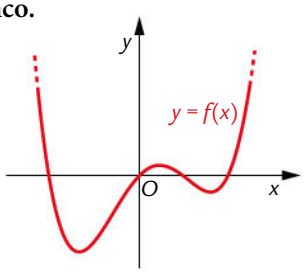
Esercizi interattivi

300 **Vero o falso?**

a. una funzione polinomiale non può avere punti di flesso a tangente orizzontale V F
b. una funzione polinomiale non può avere punti di flesso a tangente verticale V F
c. una funzione polinomiale non può avere asintoti verticali V F
d. una funzione polinomiale non può avere asintoti orizzontali V F
e. una funzione razionale frazionaria non può avere punti di flesso a tangente orizzontale V F
f. una funzione razionale frazionaria non può avere punti di flesso a tangente verticale V F
g. una funzione razionale frazionaria non può avere asintoti verticali V F
h. una funzione razionale frazionaria non può avere asintoti orizzontali V F

Test

Nei quesiti 301/305 fai riferimento al grafico della funzione $y = f(x)$ riportato qui a fianco.



301 Quanti punti stazionari presenta la funzione f?

A Esattamente uno
B Esattamente due
C Esattamente tre
D Esattamente quattro

302 Quanti punti di flesso presenta la funzione f?

A Esattamente uno B Esattamente due C Esattamente tre D Esattamente quattro

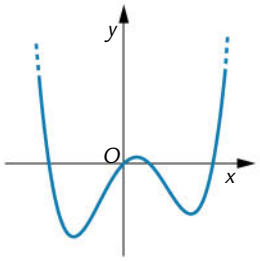
303 Supposto che f sia una funzione polinomiale, qual è il grado minimo che può avere la funzione f?

A 3 B 4 C 5 D 6

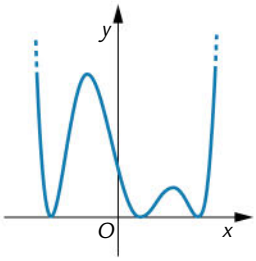
304 Quale delle seguenti può essere l'espressione analitica della funzione f?

A $f(x) = x(x-1)(x+2)$
B $f(x) = 0{,}25x(x-1)(x^2-4)$
C $f(x) = 0{,}2x(x-1)(x^2+4)$
D $f(x) = 0{,}25x(x-1)(4-x^2)$

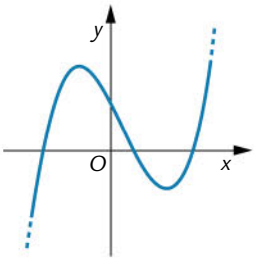
305 Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = f'(x)$?



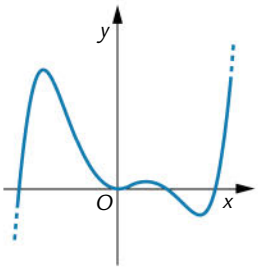
A



B



C



D

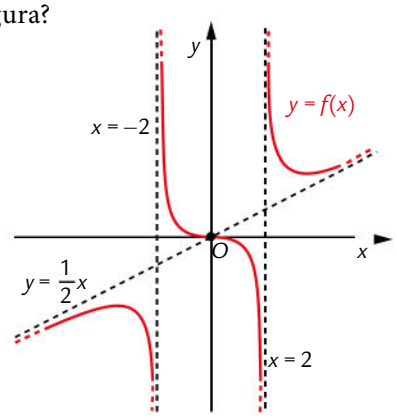
306 Quale può essere l'espressione analitica della funzione rappresentata nella figura?

A $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

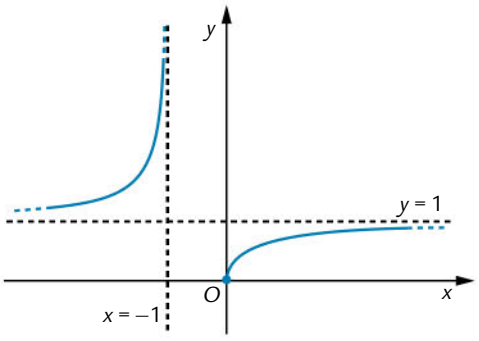
B $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-4}$

C $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+4}$

D $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2-8}$



307 Di quale funzione è grafico quello mostrato in figura?



A $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$

B $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

C $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}$

D $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

308 Se $y=f(x)$ è una funzione polinomiale, quale delle seguenti funzioni composte presenta un asintoto orizzontale destro?

A $y=f(x^2)$ B $y=f(e^{-x})$ C $y=f(|x|)$ D $y=f(e^{2x})$

309 Se $y=f(x)$ è una funzione polinomiale di secondo grado, che interseca l'asse x in due punti distinti, quale delle seguenti funzioni presenta due asintoti verticali?

A $y=f^2(x)$ B $y=e^{f(x)}$ C $y=\dfrac{1}{f(x)}$ D $y=\ln(1+|f(x)|)$

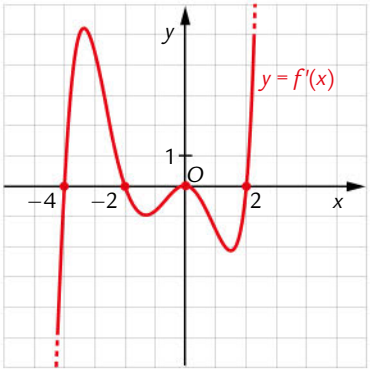
Interpretazione di grafici

310 Di una funzione $y=f(x)$, derivabile in $\mathbf{R}$, si sa che:

a. $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-6 \vee x=-2 \vee x=0 \vee x=4$

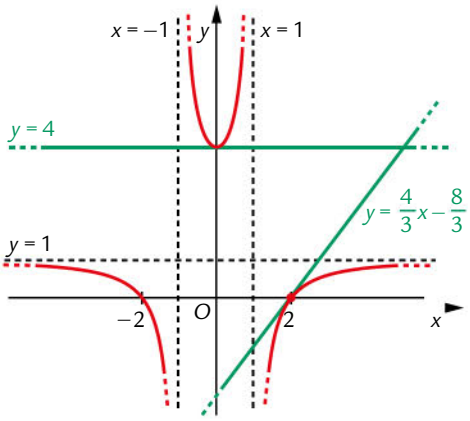
b. $f(-4)=-3, f(-2)=2, f(2)=-3$

c. il grafico della derivata prima è quello in figura e in particolare risulta $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.



Traccia con la massima precisione possibile il grafico della funzione f e stabilisci se la funzione f può ammettere asintoti orizzontali o obliqui.

311 Nella figura qui a fianco è rappresentato il grafico di una funzione pari di equazione $y=f(x)$; ivi sono rappresentati gli asintoti (tratteggiati in nero), con le relative equazioni, e le rette tangenti al grafico della funzione nei due punti di coordinate (0, 4) e (2, 0) (colorate in verde). A partire dalle informazioni deducibili dal grafico:



a. determina il dominio e l'insieme immagine della funzione;

b. spiega perché la funzione non è invertibile;

c. determina $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to1} f(x)$;

d. determina $f'(0), f'(2)$ ed $f'(-2)$;

e. indica il segno di $f'(x)$ nel dominio della funzione;

f. determina $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} f'(x)$ e $\lim\limits_{x\to1} f'(x)$.

Considera infine la funzione $g(x)=\sqrt{f(x)}$ e rispondi ai seguenti ulteriori quesiti:

a. determina il dominio di g;

b. determina $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$;

c. determina $g'(0)$;

d. spiega perché non esistono $g'(-2)$ e $g'(2)$;

e. determina $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} g'(x)$ e $\lim\limits_{x\to1^-} g'(x)$.

Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico.

312 $y = x(x-2)^3$ $\left[\text{Min}\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)\text{ flessi: } (2,0) \text{ (a tangente orizzontale) e } (1,-1)\right]$

313 $y = -2x^3 + 6x$ $\left[D = \mathbf{R};\ \min(-1,-4);\ \max(1,4);\ \text{flesso } (0,0)\right]$

314 $y = \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{0\};\ \text{asintoti: } x=0,\ y=0;\ \max\left(6, \frac{1}{6}\right);\ \text{flesso}\left(9, \frac{4}{27}\right)\right]$

315 $y = \frac{x+2}{x^2-2x+1}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{1\};\ \text{asintoti } x=1,\ y=0;\ \min\left(-5, -\frac{1}{12}\right);\ \text{flesso}\left(-8, -\frac{2}{27}\right)\right]$

316 $y = (2-x)e^x$ $[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y=0 \text{ (sinistro)};\ \max(1,e);\ \text{flesso } (0,2)]$

317 $y = (x+1)e^{-x}$ $[D = \mathbf{R};\ \text{asintoti: } y=0 \text{ (destro)};\ \max(0,1);\ \text{flesso } (1, 2e^{-1})]$

318 $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$ $\left[\text{Asintoti: } y=-1;\ \max(0,1);\ \text{flessi}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right)\right]$

319 $y = 9x(x-1)^2$ $\left[\text{Max}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right);\ \min(1,0);\ \text{flesso}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right]$

320 $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$ (Tralascia lo studio di y''.) [Asintoti: $x=0$, $y=1$ (destro); $y=0$ (sinistro)]

321 $y = e^{1-x^2}$ $\left[\text{Asintoto: } y=0;\ \max(0,e);\ \text{flessi per } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

322 $y = \ln(4-x^2)$ [Asintoti: $x=-2$ (destro), $x=2$ (sinistro); $\max(0, \ln 4)$]

323 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x}}$ [Asintoti: $x=0$ (sinistro); $y=1$; punto a tangente verticale: $x=3$]

324 $y = \ln(x^2+3x-4)$ (Tralascia lo studio di y''.) [Asintoti: $x=-4$ (sinistro), $x=1$ (destro)]

325 $y = \frac{(x^2-1)^2}{x^3}$ $\left[\text{Asintoti: } x=0,\ y=x;\ \max(-1,0),\ \min(1,0);\ \text{flessi: } \left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{4}{9}\sqrt{3}\right)\right]$

326 $y = x\ln^3 x$ $[\text{Min } (e^{-3}, -27e^{-3});\ \text{flessi } (1,0) \text{ (a tangente orizzontale) e } (e^{-2}, -8e^{-2})]$

327 $y = \frac{1}{x(x+3)^2}$ $\left[\text{Asintoti: } x=-3,\ x=0,\ y=0;\ \max\left(-1, -\frac{1}{4}\right)\right]$

328 $y = \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$ $\left[\text{Asintoti: } x=-1,\ y=1;\ \max\left(-4, \frac{4}{3}\right);\ \text{flesso}\left(-\frac{11}{2}, \frac{35}{27}\right)\right]$

329 $y = \sqrt{x^2-2x+3}$ $[\text{Asintoti: } y=x-1 \text{ (destro)},\ y=-x+1 \text{ (sinistro)};\ \min(1,\sqrt{2})]$

330 $y = x^3(x-2)$ $\left[\text{Minimo per } x = \frac{3}{2},\ \text{flessi per } x=0 \text{ (a tangente orizzontale) e } x=1\right]$

331 $y = \frac{(x-3)^2}{x^2-1}$ (Tralascia lo studio di y''.) $\left[\text{Asintoti: } x=\pm1,\ y=1,\ \text{massimo per } x=\frac{1}{3},\ \text{minimo per } x=3\right]$

332 $y = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$ $[\text{Asintoti: } x=\pm1,\ y=x;\ \text{massimo per } x=-\sqrt{5},\ \text{minimo per } x=\sqrt{5},\ \text{flesso per } x=0]$

333 $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$ (Tralascia lo studio di y''.) [Asintoti: $x=-2$, $y=1$ (destro), $y=-1$ (sinistro)]

334 $y = x^3 \ln|x|$ $\left[x=0\text{: singolarità eliminabile; } \min\left(e^{-\frac{1}{3}}, -\frac{1}{3}e^{-1}\right);\ \max\left(-e^{-\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}e^{-1}\right);\ \text{flessi per } x = \pm e^{-\frac{5}{6}}\right]$

335 $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{e^x}$ [Asintoti: $y = 0$ (destro), minimo per $x = 2 - \sqrt{5}$, massimo per $x = 2 + \sqrt{5}$, flessi per $x = 3 \pm \sqrt{6}$]

336 $y = x^3 e^{-x}$ [Asintoto: $y = 0$ (destro); max $(3, 27\, e^{-3})$; flessi: $(0, 0)$ (a tangente orizzontale) e per $x = 3 \pm \sqrt{3}$]

337 $y = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3$ $\left[\text{Asintoti: } x = 1,\ y = 1,\ \text{flessi: } (0, 0) \text{ (a tangente orizzontale) e } \left(-1, \dfrac{1}{8}\right)\right]$

338 $y = -\sqrt{x^2 - 6x + 5}$ [Asintoti: $y = x - 3$ (sinistro); $y = -x + 3$ (destro); punti a tangente verticale: $x = 1$ e $x = 5$]

339 $y = e^{x - \frac{1}{2}x^2}$ [Asintoti: $y = 0$, max $(1, \sqrt{e})$; flessi: $(0, 1)$ e $(2, 1)$]

340 $y = \dfrac{|x + 2|}{e^x}$ [Asintoti: $y = 0$ (destro); max $(-1, e)$; punto angoloso $(-2, 0)$; flesso $(0, 2)$]

341 $y = e^{\frac{x+1}{x^2-4}}$ (Tralascia lo studio di y'' ma prevedi il minimo numero di flessi compatibile con tutte le altre caratteristiche del grafico della funzione.)
[Asintoti: $x = -2$ (destro), $x = 2$ (destro), $y = 1$; osservando che per $x \to -2^-$ e per $x \to 2^-$ si ha $y' \to 0$, si può prevedere l'esistenza di almeno tre punti di flesso]

342 $y = \ln\left|\dfrac{x^2}{x - 2}\right|$ [Asintoti: $x = 0$, $x = 2$; min $(4, \ln 8)$; flessi per $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$]

343 $y = \tan x - 2 \ln \cos x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ $\left[\text{Asintoti: } x = \pm\dfrac{\pi}{2};\ \text{flesso (a tangente orizzontale) } \left(-\dfrac{\pi}{4}, \ln 2 - 1\right)\right]$

344 $y = \dfrac{x^3}{x^3 + 8}$ $\left[D = \mathbf{R} - \{-2\};\ \text{asintoti: } x = -2,\ y = 1;\ \text{flessi: } (0, 0) \text{ (a tangente orizzontale) e } \left(\sqrt[3]{4}, \dfrac{1}{3}\right)\right]$

345 $y = x\sqrt[3]{x + 2}$ $\left[\text{Non ci sono asintoti; } \min\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{4}\right);\ \text{flessi: } (-2, 0) \text{ (a tangente verticale) e } (-3, 3)\right]$

346 $y = 2 \cos x - \sin^2 x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ $\left[\text{Min } (\pi, -2);\ \text{max } (0, 2) \text{ e max } (2\pi, 2);\ \text{flessi: } \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{1}{4}\right) \text{ e } \left(\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{1}{4}\right)\right]$

347 $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 2}$ (Tralascia lo studio di y'' ma prevedi il minimo numero di flessi compatibile con tutte le altre caratteristiche del grafico della funzione.) [Asintoti: $x = -2$, $y = 1$ (destro), $y = -1$ (sinistro); punti a tangente verticale: $x = \pm 1$; deve esserci almeno un punto di flesso]

348 $y = \dfrac{2e^x - 4}{e^{2x} - 1}$ (Tralascia lo studio di y''.) [Asintoti: $x = 0$, $y = 0$ (destro), $y = 4$ (sinistro); minimo per $x = \ln(2 - \sqrt{3})$ e massimo per $x = \ln(2 + \sqrt{3})$]

349 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}}$ (Tralascia lo studio di y'' ma prevedi il minimo numero di flessi compatibile con tutte le altre caratteristiche del grafico della funzione.)
[Asintoti: $x = -2$; punti a tangente verticale: $x = \pm 1$; deve esserci almeno un flesso]

350 $y = \dfrac{2}{x} + \ln x$ $\left[\text{Asintoti: } x = 0,\ \min(2, 1 + \ln 2);\ \text{flesso } \left(4, \ln 4 + \dfrac{1}{2}\right)\right]$

351 $y = \dfrac{x^4 - 5x}{x^3 - 1}$ $\left[\text{Asintoti: } x = 1,\ y = x;\ \min(-1, -3),\ \max\left(-\sqrt[3]{5}, -\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{5}\right);\ \text{flesso } \left(-\sqrt[3]{2}, -\dfrac{7}{3}\sqrt[3]{2}\right)\right]$

352 $y = \dfrac{1}{\ln x} - \ln x$ [Asintoti: $x = 0$; $x = 1$; flesso $(e^{-1}, 0)$]

353 $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - 2x - 1$ [Asintoti: $y = -x$ (destro); $y = -3x - 2$ (sinistro); massimo per $x = \dfrac{-3 + 4\sqrt{3}}{3}$; punti a tangente verticale: $x = -3$ e $x = 1$]

354 $y = e^x\sqrt{2-x}$ [Asintoti: $y = 0$ (sinistro); max $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)$; punto a tangente verticale: $x = 2$; flesso per $x = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$]

355 $y = \ln^3 x - \ln^2 x$ [Asintoto: $x = 0$; massimo per $x = 1$, minimo per $x = e^{\frac{2}{3}}$; flessi per $x = e^{\frac{4\pm\sqrt{10}}{3}}$]

356 $y = x^2 - 3x + \ln|x|$ [Asintoti: $x = 0$; massimo per $x = \frac{1}{2}$, minimo per $x = 1$; flessi per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$]

357 $y = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & x < 0 \\ x^4 - 2x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ [Asintoti: $y = 1$ (sinistro), $x = -1$; $x = 0$: punto di salto; min $(1, -1)$; flesso $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$]

358 $y = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ (2-x)e^x - 2 & x \geq 0 \end{cases}$ [Asintoti: $y = 1$ (sinistro); $x = 0$: punto angoloso; max $(1, e-2)$; flesso $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$]

359 $y = x\sqrt[3]{\frac{x}{x+2}}$ [Asintoti: $x = -2$, $y = x - \frac{2}{3}$, minimo per $x = 0$, massimo per $x = -\frac{8}{3}$]

360 $y = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$ [$D = (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$; asintoti: $x = 0$, $x = \ln 3$, $y = \ln 3$ (sinistro) e $y = 2x$ (destro)]

361 $y = \ln|e^x - 1| + 2x$ [Asintoti: $x = 0$, $y = 3x$ (destro), $y = 2x$ (sinistro); max $\left(-\ln\frac{3}{2}, -\ln\frac{27}{4}\right)$]

362 $y = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ [Asintoti: $y = \ln 3$ (sinistro), $y = 2x$ (destro); min $(0, \ln 2)$; flessi per $x = \ln(3 \pm \sqrt{6})$]

363 $y = \frac{1}{\ln x - x + 2}$ (Tralascia lo studio di y''.) [$x = 0$: singolarità eliminabile, asintoti: $x = \alpha$ con $\alpha \in (0, 1)$ e $x = \beta$ con $\beta \in (3, 4)$ $y = 0$ (destro); minimo per $x = 1$]

364 $y = \arctan\frac{x^2}{x+1}$ (Tralascia lo studio di y'' ma prevedi il minimo numero di flessi compatibile con tutte le altre caratteristiche del grafico della funzione.)

[Asintoti: $y = \frac{\pi}{2}$ (destro) e $y = -\frac{\pi}{2}$ (sinistro); $x = -1$: punto di salto; min $(0, 0)$; max $(-2, -\arctan 4)$; calcolando anche i limiti di y' per $x \to -1^-$ e per $x \to -1^+$, si deduce che devono esserci almeno tre punti di flesso]

365 $y = x^2 + 4\cos x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ [La derivata prima va studiata graficamente; max $(0, 4)$ e min per $x = \pm\alpha$ con $\alpha \in (1, 2)$; punti di flesso per $x = \pm\frac{\pi}{3}$]

366 $y = e^x \ln|x|$ (Tralascia lo studio di y''.) [Asintoti: $x = 0$, $y = 0$ (sinistro); max per $x = \alpha$ con $\alpha \in (-2, -1)$]

367 $y = \frac{x}{x + \ln x}$ (Tralascia lo studio di y''.) [Asintoti: $x = \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$ e $y = 1$; $x = 0$: punto di singolarità eliminabile; min $\left(e, \frac{e}{e+1}\right)$]

Giustificare e argomentare

368 Giustifica perché una funzione polinomiale di terzo grado (più generalmente, di grado dispari) non può avere né punti di massimo assoluto né punti di minimo assoluto.

369 Giustifica perché una funzione polinomiale di quarto grado possiede punti di massimo assoluto *oppure* punti di minimo assoluto, ma *non* entrambi.

370 Giustifica perché una funzione polinomiale di terzo grado può avere al più un punto di massimo relativo e, analogamente, al più un punto di minimo relativo.

371 Quanti sono, al più, i punti di massimo o minimo di una funzione polinomiale di grado n? Giustifica la tua risposta e produci semplici esempi a suo sostegno.

Problemi

372 Considera la funzione di equazione $y = ax^4 + bx^2 + c$.

a. Determina i coefficienti a, b e c in modo che il suo grafico passi per il punto di coordinate (1, 3) e abbia un estremo relativo nel punto di coordinate $(\sqrt{3}, -1)$.
b. Traccia il grafico della funzione in corrispondenza dei valori di a, b e c trovati.
c. Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y avente il vertice in $V(0, 4)$, che sia tangente al grafico della funzione. [**a.** $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$; **b.** max (0, 8), min: $(\pm\sqrt{3}, -1)$; flessi: $(\pm 1, 3)$; **c.** $y = -2x^2 + 4$]

373 Considera la funzione $y = \dfrac{ax^2 + b}{x^2 + c}$.

a. Determina a, b e c in modo che il suo grafico abbia un punto di estremo relativo di ordinata 2 e un punto di flesso di coordinate (1, 1).
b. Traccia il grafico della funzione corrispondente ai valori di a, b e c trovati al punto precedente.
c. Scrivi l'equazione della circonferenza tangente al grafico della funzione nei suoi punti di flesso.
[**a.** $a = -2$, $b = 6$, $c = 3$; **b.** asintoto: $y = -2$, max (0, 2), flessi: $(\pm 1, 1)$; **c.** $3x^2 + 3y^2 - 2y - 4 = 0$]

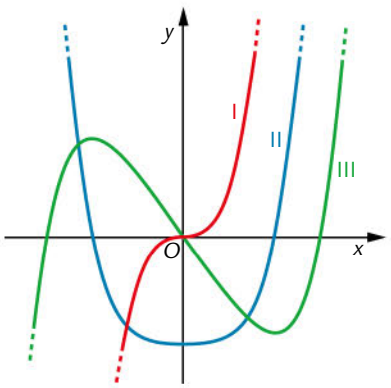
374 Considera la funzione $f(x) = \dfrac{ax^2}{x + b}$.

a. Determina a e b in modo che abbia come asintoto obliquo la retta di equazione $y = x + 2$.

In corrispondenza dei valori di a e b trovati, risolvi i seguenti quesiti.
b. Traccia il grafico della funzione $y = f(x)$.
c. Deduci dal grafico della funzione f il grafico della funzione $y = |f(x)|$. [**a.** $a = 1$, $b = -2$; **b.** max (0, 0); min (4, 8)]

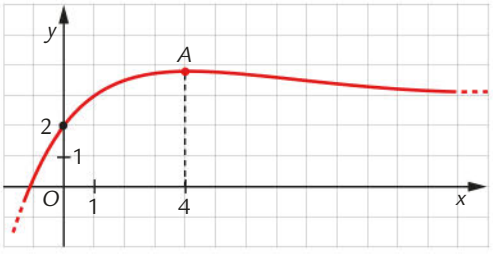
Interpretazione di grafici

375 Nella figura, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici? Motiva la risposta.



	f	f'	f''
A	I	II	III
B	I	III	II
C	II	III	I
D	III	II	I
E	III	I	II

376 In figura è rappresentato, in parte, il grafico di una funzione del tipo $f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$.



a. Dalle informazioni che puoi ricavare dal grafico (A è il punto di massimo assoluto), determina i valori di a e di b.

b. Stabilisci, giustificando la risposta, se l'equazione $f(x) = \dfrac{19}{5}$ ammette soluzioni. [**a.** $a = 1$, $b = -1$; **b.** no]

377 Considera la funzione di equazione $f(x)=\begin{cases} a(e^{2x}-e^x)+b & x<0 \\ (x-1)^3-3(x-1)^2 & x\geq 0 \end{cases}$.

a. Determina a e b in modo che sia continua e derivabile in **R**.

b. Traccia il grafico della funzione in corrispondenza dei valori di a e b trovati al punto precedente.

[**a.** $a=9$, $b=-4$; **b.** asintoti: $y=-4$ (sinistro); max $(1, 0)$; min $\left(-\ln 2, -\frac{25}{4}\right)$ e $(3, -4)$; flessi: $\left(-2\ln 2, -\frac{91}{16}\right)$, $(0, 0)$, $(2, -2)$]

378 Considera la funzione reale di variabile reale $y=\frac{(x+1)^2}{x^2+ax+b}$.

a. Determina a e b in modo che il grafico della funzione abbia come asintoti verticali le rette di equazioni $x=1$ e $x=-2$.

b. Traccia il grafico della funzione, tralasciando lo studio di y''.

[**a.** $a=1$, $b=-2$; **b.** asintoti: $x=1$, $x=-2$, $y=1$, max $(-1, 0)$; min $\left(-5, \frac{8}{9}\right)$]

379 Considera la funzione $y=e^{kx^2}$.

a. Determina per quali valori di k la funzione è limitata.

b. Determina k in modo che la funzione abbia un punto di flesso di ascissa 2.

c. Traccia il grafico della funzione.

d. Tra tutti i rettangoli che hanno un lato sull'asse x e gli estremi del lato opposto sul grafico della funzione, determina quello di area massima.

[**a.** $k\leq 0$; **b.** $k=-\frac{1}{8}$; **c.** asintoto: $y=0$, max $(0, 1)$, flessi per $x=\pm 2$; **d.** il rettangolo di area massima è quello che ha due vertici nei punti di flesso della funzione]

380 Considera la funzione $f(x)=e^x(x+a)$.

a. Determina il parametro a in modo che abbia un punto di estremo relativo per $x=-2$.

b. Traccia il grafico della funzione ottenuta in corrispondenza del valore di a trovato.

c. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in f nel suo punto d'intersezione con l'asintoto orizzontale.

d. Discuti il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x)=k$.

[**a.** $a=1$; **b.** asintoto: $y=0$ (sinistro), min per $x=-2$, flesso per $x=-3$; **c.** $y=\frac{1}{e}(x+1)$; **d.** due soluzioni per $-\frac{1}{e^2}\leq k<0$, una soluzione per $k\geq 0$]

381 Considera la funzione:

$$y=f(x)=\ln\left(\frac{kx}{1+x^2}\right), \text{ con } k>0$$

a. Determina per quale valore di k il suo punto di massimo relativo ha ordinata uguale a $-\ln 2$.

b. Traccia il grafico della funzione in corrispondenza del valore di k individuato al punto precedente.

c. Deduci il grafico della funzione $y=f(|x|)$.

d. Discuti, al variare del parametro reale k, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(|x|)=k$.

[**a.** $k=1$; **b.** asintoti: $x=0$, max $(1, -\ln 2)$, flesso per $x=\sqrt{2+\sqrt{5}}$; **d.** quattro soluzioni per $k\leq -\ln 2$]

382 Dimostra che l'equazione $\sin x=\ln x$ ammette un'unica soluzione e individua un intervallo cui essa appartiene. Determina poi un'approssimazione della soluzione con due cifre decimali esatte, applicando uno dei metodi di approssimazione che conosci. [2, 21]

383 Discuti, al variare del parametro reale k, l'esistenza e il numero delle radici dell'equazione $\ln^2 x-kx=0$.

[Due radici per $k\leq\frac{1}{e}$; tre per $0<k\leq\frac{4}{e^2}$; una per $k>\frac{4}{e^2}$, una soluzione (doppia) per $k=0$]

Realtà e modelli

●○○ **384** **Concentrazione di un farmaco nel sangue.** La famiglia di funzioni di espressione analitica $C(t) = k(e^{-at} - e^{-bt})$, dove k, a e b sono costanti positive e $a < b$, è utilizzata per modellizzare come evolve nel tempo la concentrazione nel sangue di un farmaco, assunto per via orale all'istante $t = 0$. Traccia un grafico qualitativo delle funzioni della famiglia, nel dominio che ha senso in relazione al problema, cioè per $t \geq 0$. Interpreta il significato del grafico in relazione al problema.



●●○ **385** **Modello logistico.** La famiglia di funzioni di espressione analitica $N(t) = \dfrac{KN_0}{(K - N_0)e^{-rt} + N_0}$, dove K, N_0 e r sono costanti positive, è utilizzata per modellizzare, sotto certe condizioni, come evolve nel tempo la numerosità di una popolazione costituita nell'istante $t = 0$ da N_0 individui. Traccia un grafico qualitativo delle funzioni della famiglia, nel dominio che ha senso in relazione al problema, cioè per $t \geq 0$. Interpreta il significato del grafico e dei parametri in relazione al problema.

●●○ **386** **Percorso di trekking.** Una tappa giornaliera di un percorso di trekking prevede un tragitto di 12 km. Il grafico in figura rappresenta l'altitudine y (in metri) in funzione dello spazio s percorso (in kilometri) dal punto di partenza.



a. Tra le seguenti famiglie di funzioni (dipendenti dai due parametri a e b, mentre e è il numero di Nepero), una sola è adatta a rappresentare, per $0 \leq s \leq 12$, il grafico in figura:

i. $f(s) = 150e^{-as^2} + b$ con $a > 0$ e $b > 0$

ii. $f(s) = 150e^{-as^2} + b$ con $a < 0$ e $b > 0$

iii. $f(s) = 150se^{-as^2} + b$ con $a > 0$ e $b > 0$

iv. $f(s) = 150se^{-as^2} + b$ con $a < 0$ e $b > 0$

Individua quale, giustificando adeguatamente la risposta.

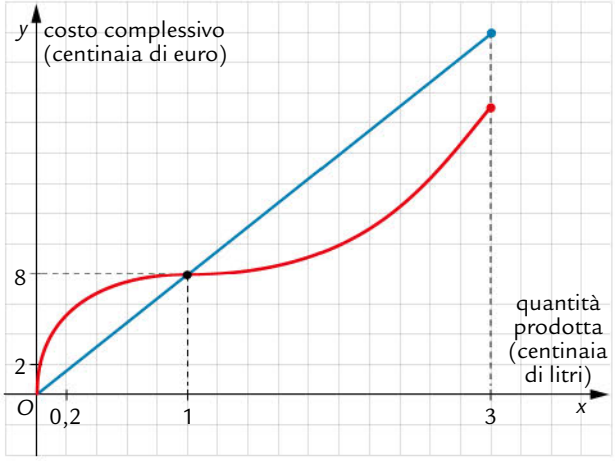
b. Tra le funzioni della famiglia individuata, determina quella che rappresenta, per $0 \leq s \leq 12$, il grafico in figura, sapendo che il punto di partenza è posto a un'altitudine di 300 m e il punto del tragitto di altitudine massima viene raggiunto dopo avere percorso 5 km dalla partenza. Qual è il dislivello in salita? Qual è il dislivello in discesa? Arrotonda i risultati al metro.

[**b.** $a = \dfrac{1}{50}$, $b = 300$, dislivello in salita $\simeq 455$ m, dislivello in discesa $\simeq 354$ m]

●●○ **387** **Costi e ricavi.** Un'azienda di prodotti chimici commercializza, tra i suoi prodotti, un liquido refrigerante. In una settimana l'azienda può produrre al massimo 300 litri di tale liquido e tutto il liquido prodotto viene venduto. In figura sono rappresentati:

- in colore rosso il grafico della funzione $y = C(x)$ che esprime il costo complessivo (espresso in centinaia di euro) necessario per la produzione di x centinaia di litri di liquido;
- in colore blu il grafico della funzione $y = R(x)$ che esprime il ricavo (espresso in centinaia di euro) della vendita di x centinaia di litri di liquido.

La funzione costo presenta un punto di flesso a tangente orizzontale in $x = 1$, mentre la funzione ricavo è lineare.



a. Determina l'espressione analitica della funzione ricavo.

b. Una sola delle seguenti funzioni è adatta a rappresentare l'andamento del costo:

i. $f(x) = ax^3 + bx$ **ii.** $f(x) = ax^4 + bx^3$ **iii.** $f(x) = ax^2 + bx\ln x$ **iv.** $f(x) = ax^2 + e^{bx}$

Individua quale, giustificando adeguatamente la risposta, e determina i valori dei parametri a e b in base alle informazioni deducibili dal grafico.

c. Scrivi l'espressione analitica della funzione $U(x)$ che esprime l'utile (in centinaia di euro) derivante dalla produzione e vendita settimanale di x centinaia di litri di liquido e tracciane il grafico.

[**a.** $R(x) = 8x$; **b.** $a = 8$, $b = -16$; **c.** $U(x) = -8x^2 + 8x + 16x\ln x$, presenta un punto di minimo per $x = \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$ e un punto di massimo per $x = \beta$ con $\beta \in (2, 3)$]

Esercizi *più*

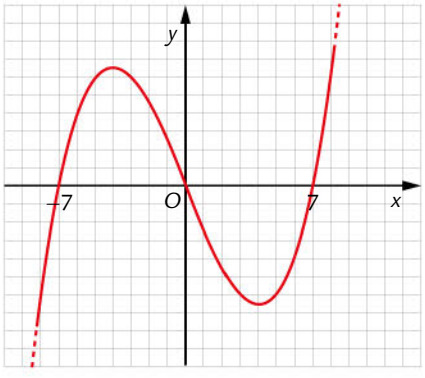
Dalle gare

●○○ **388** La funzione $f(x) = x^2e^x$ è concava nell'intervallo $[a, b]$ e convessa nei due intervalli $(-\infty, a]$ e $[b, +\infty)$. Quanto vale $a \cdot b$?

A 4 B 2 C -4 D -2 E Nessuno dei precedenti

(Fgcu Math Competition 2009)

●●○ **389** Considera il seguente grafico di una funzione $f(x)$, derivabile in $\mathbf{R}$.

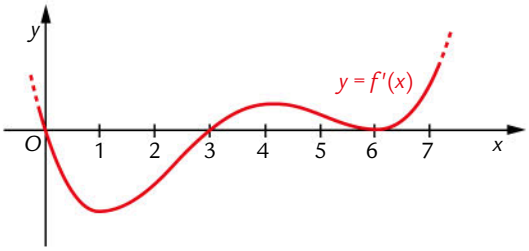


Sia $H(x) = 2f(3 - x)$. Che cosa possiamo affermare di $H'(6)$?

A $H'(6) > 0$ B $H'(6) < 0$ C $H'(6) = 0$ D $H'(6)$ non esiste

(University of North Georgia, Mathematics Tournament 2012)

Negli esercizi 390/393, fai riferimento alla figura seguente, che riporta il grafico della derivata di una funzione *f*.



390 In quale dei seguenti intervalli la funzione *f* è convessa?

A (0, 3) B (1, 4) C (3, 5) D (5, 7) E Nessuno dei precedenti

(Fgcu Math Competition 2010)

391 In quale dei seguenti intervalli la funzione *f* è crescente?

A (1, 4) B (0, 1) C (2, 4) D (4, 6) E Nessuno dei precedenti

(Fgcu Math Competition 2010)

392 Il grafico della funzione *f* presenta un punto di massimo relativo:

A in $x = 0$ B in $x = 1$ C in $x = 3$ D in $x = 4$ E in nessuno dei punti precedenti

(Fgcu Math Competition 2010)

393 Il grafico della funzione *f* presenta un punto di flesso:

A in $x = 0$ B in $x = 1$ C in $x = 2$ D in $x = 3$ E in nessuno dei punti precedenti

(Fgcu Math Competition 2010)

394 Quanti zeri ammette la funzione $f(x) = x^3 + 15x + 2012$ in **R**?

A 1 B 2 C 3 D 4 E Nessuna delle precedenti

(Fgcu Math Competition 2012)

395 Quanti punti di flesso ha la curva di equazione $x^2y + 4y = 8 - 4x$?

A Nessuno

B Esattamente uno

C Esattamente due

D Esattamente tre

E Nessuna delle precedenti risposte è esatta

(University of North Georgia, Mathematics Tournament 2014)

396 Qual è il massimo numero di punti di estremo relativo che può possedere la funzione di equazione $y = x^n - nx^{n-2}$, dove $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$?

A 0 B 2 C 3 D $n - 2$ E Nessuno dei precedenti

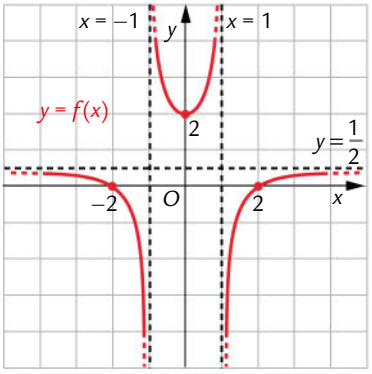
(Gainesville College, Mathematics Tournament 2004)

397 Dimostra che $x^6 \geq 6x - 5$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(Calculus Competition, Youngstown University, 2010)

Lo studio di funzione

1 Completa, in relazione alla funzione il cui grafico è mostrato a fianco.



a. Il dominio della funzione è: .....
b. Gli intervalli dove la funzione è positiva sono: .....
c. Gli intervalli dove la funzione è negativa sono: .....
d. Il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti di coordinate .....
e. Il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate .....
f. Le equazioni degli asintoti sono: .....
g. Gli intervalli dove la funzione è crescente sono: .....
h. Gli intervalli dove la funzione è decrescente sono: .....
i. L'intervallo dove la funzione è convessa è: .....
j. Gli intervalli dove la funzione è concava sono: .....
k. Il punto di estremo relativo ha coordinate: .....
l. Coordinate di eventuali punti di flesso: .....

2 Traccia il grafico di una funzione che presenti tutte le seguenti caratteristiche:

a. ha come dominio $[2,+\infty)$
b. ha come asintoto orizzontale l'asse x
c. ha un massimo assoluto in $(3, 3)$
d. è strettamente decrescente per $x > 3$
e. ha come immagine l'intervallo $(0, 3]$

Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico.

3 $y = \dfrac{x^2 - 3}{2x + 4}$

4 $y = \dfrac{x}{\ln x}$

5 $y = xe^{2-x}$

6 Determina, al variare del parametro reale k, il numero delle soluzioni dell'equazione $\dfrac{x+2}{x^3} = k$.

Valutazione							
Esercizio	1	2	3	4	5	6	Totale
Punteggio massimo	1,5	1	2	2	1,5	2	10
Punteggio ottenuto							

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 573

Utilizzare tecniche e procedure di calcolo

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

1 $y=(2x^2-3x)^2$ $[y'=2x(2x-3)(4x-3)]$

2 $y=\frac{1}{3}x^3-2x\sqrt{x}$ $\left[y'=x^2-3\sqrt{x}\right]$

3 $y=\frac{2x-1}{x}-\frac{3}{x^2}$ $\left[y'=\frac{x+6}{x^3}\right]$

4 $y=\frac{x^3}{2x+1}$ $\left[y'=\frac{x^2(4x+3)}{(2x+1)^2}\right]$

5 $y=\frac{x}{(2x-1)^2}$ $\left[y'=\frac{2x+1}{(1-2x)^3}\right]$

6 $y=(x-3)e^{-2x}$ $\left[y'=e^{-2x}(7-2x)\right]$

7 $y=x^2\ln(3x)$ $[y'=2x\ln(3x)+x]$

8 $y=3x\sqrt{2x-1}$ $\left[y'=\frac{3(3x-1)}{\sqrt{2x-1}}\right]$

9 $y=e^{x^2-3x+1}$ $\left[y'=(2x-3)e^{x^2-3x+1}\right]$

10 $y=x^2\sin 3x$ $[y'=2x\sin 3x+3x^2\cos 3x]$

11 $y=\frac{\ln x}{x^2}$ $\left[y'=\frac{1-2\ln x}{x^3}\right]$

12 $y=\ln^2 x-2\ln x-x-1$ $\left[y'=\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}-1\right]$

Calcola i seguenti limiti, utilizzando, se possibile, il teorema di de l'Hôpital.

13 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^5-32}$ $\left[\frac{1}{20}\right]$

14 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^3-27}$ $\left[\frac{7}{27}\right]$

15 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-1}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

16 $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{x-\pi}{\sin x-\sin 2x}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

17 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{2x}-e^{3x}}$ $[-2]$

18 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(e^x+2)}{x}$ $[1]$

19 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{-x}-e^{-x^2}}{x-1}$ $[e^{-1}]$

20 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

21 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\ln(2x+3)^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

22 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt[3]{x+27}}{x}$ $\left[\frac{7}{54}\right]$

23 $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{3}{x}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$ $[2]$

24 $\lim\limits_{x\to 0}[(e^{2x}-1)\ln x]$ $[0]$

---

25 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y=x^2-2\sqrt{x}$ nel suo punto di ascissa 4.

$\left[y=\frac{15}{2}x-18\right]$

26 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y=\frac{x^2}{2x-1}$ nel suo punto di ascissa 1. $[y=1]$

27 Data la funzione $y=-\frac{1}{3}x^3+9x$, determina il più ampio intervallo aperto in cui è strettamente crescente.

$[-3<x<3]$

28 Data la funzione $y=(x-2)e^{2x}$, determina il più ampio intervallo aperto in cui è strettamente decrescente.

$\left[x<\frac{3}{2}\right]$

29 Data la funzione $y = x + \frac{4}{x}$, determina i più ampi intervalli aperti in cui è strettamente crescente.

$[x < -2 \vee x > 2]$

30 Data la funzione $y = x^2 - 4\ln x$, determina il più ampio intervallo in cui è strettamente decrescente.

$[0 < x < \sqrt{2}]$

31 Data la funzione $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3$, determina i più ampi intervalli aperti in cui è convessa. $[-2 < x < 0 \vee x > 2]$

32 Data la funzione $y = x^2 e^{-3x}$, determina il più ampio intervallo aperto in cui è concava. $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right]$

Traccia il grafico delle seguenti funzioni.

33 $y = (x+1)^2(x-2)$ $[D = \mathbf{R}$; max $(-1, 0)$; min $(1, -4)$; flesso $(0, -2)]$

34 $y = -\frac{1}{32}x^5 + \frac{5}{2}x$ $[D = \mathbf{R}$; max $(2, 4)$, min $(-2, -4)$; flesso $(0, 0)]$

35 $y = \frac{x^2 - 2x + 10}{x - 1}$ $[D = \mathbb{R} - \{1\}$; asintoti $x = 1$, $y = x - 1$; max $(-2, -6)$, min $(4, 6)]$

36 $y = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$ [Asintoti: $x = \pm 1$, $y = x$; massimo per $x = -\sqrt{5}$, minimo per $x = \sqrt{5}$, flesso per $x = 0$]

37 $y = (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$

[Asintoti: $y = 0$ (destro), minimo per $x = 2 - \sqrt{5}$, massimo per $x = 2 + \sqrt{5}$; flessi per $x = 3 \pm \sqrt{6}$]

38 $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$ (Tralascia lo studio di y''.) [Asintoti: $x = -2$, $y = 1$ (destro), $y = -1$ (sinistro)]

39 $y = \ln^3 x - \ln^2 x$ [Asintoto: $x = 0$; massimo per $x = 1$, minimo per $x = e^{\frac{2}{3}}$; flessi per $x = e^{\frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}}$]

40 $y = x^2 - 3x + \ln|x|$ [Asintoto: $x = 0$; massimo per $x = \frac{1}{2}$, minimo per $x = 1$; flessi per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$]

41 $y = 4x - \tan x$, con $0 \le x \le 2\pi$

[Asintoti: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, massimi per $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{4\pi}{3}$, minimi per $x = \frac{2\pi}{3}$ e $x = \frac{5\pi}{3}$; flesso per $x = \pi$]

42 Determina a e b in modo che la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x < 0 \\ x^2 + bx + 1 & x \ge 0 \end{cases}$ sia derivabile in $\mathbf{R}$. $[a = 1, b = 0]$

43 Determina a, b e c in modo che sia applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 2]$ alla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 & x < 1 \\ x^2 + 2x + c & x \ge 1 \end{cases}$$

In corrispondenza di tali valori di a, b, c determina il punto la cui esistenza è garantita dal teorema.

$\left[a = 14, b = -19, c = -8; x = \frac{19}{21}\right]$

VERSO LE COMPETENZE

44 Determina a e b in modo che sia applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2, 2]$ alla funzione:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-2 & x\le 1\\ x^2+ax+b & x>1\end{cases}$$

In corrispondenza di tali valori di a, b determina i punti la cui esistenza è garantita dal teorema.

$\left[a=1, b=-3; x=\pm\sqrt{\frac{13}{12}} \vee x=\frac{9}{8}\right]$

45 Determina a, b, c e d in modo che la funzione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ abbia un punto di estremo relativo di coordinate $(1, -4)$, abbia un punto di flesso di ascissa $x=-2$ e la tangente nel suo punto di intersezione con l'asse y sia parallela alla retta di equazione $y=-10x$.

$\left[a=\frac{2}{3}, b=4, c=-10, d=\frac{4}{3}\right]$

46 Considera la funzione $f(x)=x^4+ax^2+bx+1$. Determina quali condizioni devono soddisfare i parametri a e b affinché $x=1$ sia un punto di minimo relativo per la funzione. $[b=-2a-4 \wedge a<-6]$

47 Considera la funzione $y=(2x^2+a)e^{-x}$. Determina per quali valori di a:

a. è strettamente decrescente in **R**;

b. è convessa in **R**.

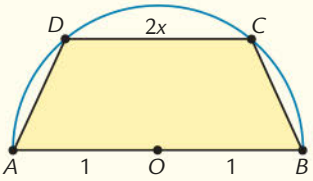
[**a.** $a\ge 2$; **b.** $a\ge 4$]

Risolvere problemi e costruire modelli

48 Considera una semicirconferenza di raggio $\frac{1}{2}$ e diametro AB. Sia P un punto sulla semicirconferenza e H la sua proiezione su AB. Qual è la massima area possibile del triangolo PHB? $\left[\frac{3\sqrt{3}}{32}\right]$

(*Suggerimento*: poni $\overline{HB}=x$ e verifica che la funzione area da rendere minima è $A(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x-x^2}$, con $0\le x\le 1$.)

49 Considera un trapezio isoscele inscritto in una semicirconferenza di raggio unitario e indica con $2x$ la lunghezza della base minore del trapezio.



a. Verifica che l'area $A(x)$ del trapezio isoscele è espressa dalla funzione $A(x)=\sqrt{(1+x)^2(1-x^2)}$ e determina per quale valore di x l'area del trapezio è massima.

b. Verifica che il perimetro $p(x)$ del trapezio è espresso dalla funzione $p(x)=2(1+x+\sqrt{2-2x})$ e determina per quale valore di x il perimetro del trapezio è massimo. Verifica che si tratta dello stesso valore di x trovato al punto **a**.

$\left[\text{max per } x=\frac{1}{2}\right]$

Realtà e modelli

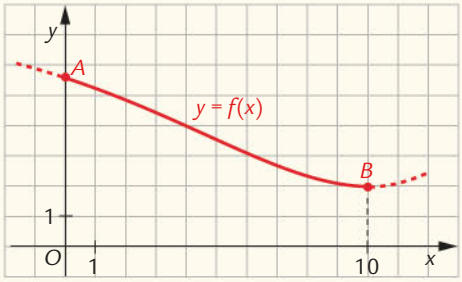
50 **Minimizzare i costi.** Si vuole costruire uno scantinato avente la forma di parallelepipedo rettangolo con i lati del pavimento uno doppio dell'altro e il volume di 300 m^3. Si vuole insonorizzare il locale applicando sulle pareti laterali e sul soffitto pannelli di materiale isolante del costo di 50 euro al metro quadrato. Sul pavimento, invece, si prevede di posare un laminato che costa 40 euro al metro quadrato. Determina le misure del pavimento che consentono di minimizzare il costo complessivo per la posa del laminato e per il materiale isolante. [5 m, 10 m]

51 **Costruire una scatola/1.** Usando un filo di ferro lungo 60 dm si costruisce l'intelaiatura (gli spigoli) di una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo, avente gli spigoli di base uno doppio dell'altro. Supponendo di volere utilizzare tutto il filo di ferro disponibile, quali devono essere le dimensioni del parallelepipedo in modo che il volume della scatola sia massimo?

$\left[\frac{10}{3}\text{ dm}, \frac{20}{3}\text{ dm}, 5\text{ dm}\right]$

52 **Pista da sci**. Il profilo di una pista da sci è modellizzato con buona approssimazione dal grafico della funzione $f(x) = (2x - 30)e^{\left(\frac{x}{5} - \frac{5}{2}\right)} + 8$ nell'intervallo [0, 10], dove l'unità di misura, sia sull'asse x sia sull'asse y, corrisponde a una distanza reale di 100 m.





a. Qual è il dislivello tra il punto A di partenza e il punto B di arrivo? Arrotonda il risultato ai metri.

b. La pendenza della pista in un dato punto, nel modello rappresentato dalla funzione f, è data dal valore assoluto del coefficiente angolare della tangente al grafico di f nel punto considerato. La pista viene classificata:

– nera, se ha almeno un punto in cui la pendenza è maggiore o uguale al 40%;

– rossa, se ha almeno un punto in cui la pendenza è compresa tra il 25% e il 40% (e nessun punto di pendenza maggiore o uguale al 40%)

– blu , se la pendenza non supera in alcun punto il 25%.

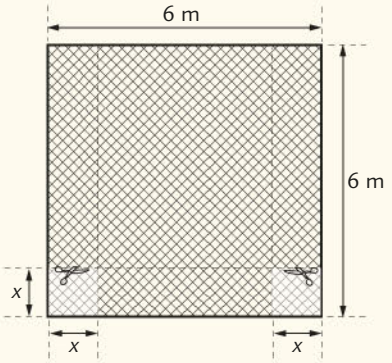
Qual è il livello di difficoltà della pista considerata?

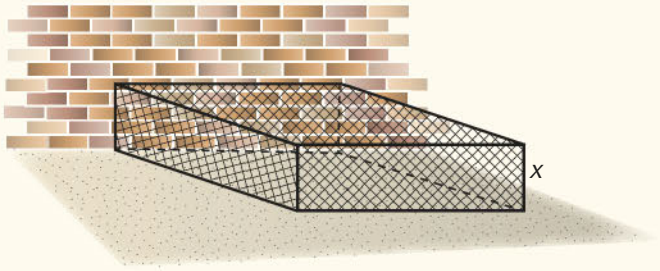
[**a.** Circa 360 m; **b.** la pendenza massima risulta circa del 44,6%, quindi si tratta di una pista nera]

53 **Delimitare un campo.** Si vuole delimitare un campo rettangolare, con un lato confinante con un fiume, con 2000 m di steccato. Se si decide di non delimitare con lo steccato il lato confinante con il fiume, quali sono le dimensioni del campo che racchiude la massima area possibile? Qual è la massima area possibile che si può recintare?

[500 m, 1000 m; 5000 000 m^2]

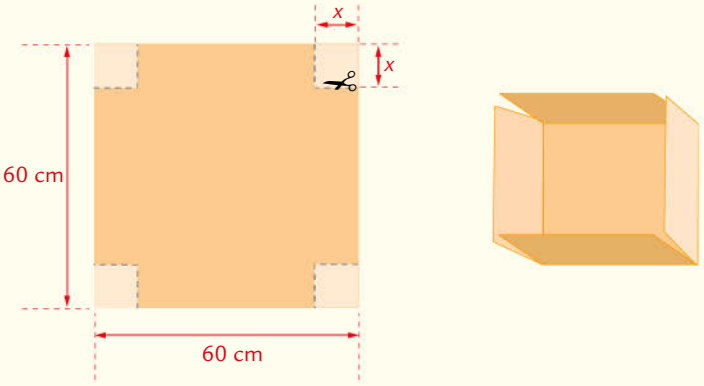
54 **Costruire una voliera.** Un allevatore vuole costruire una voliera per uccelli esotici. Egli ha a disposizione una rete metallica di forma quadrata con il lato di 6 m e si propone, tagliando i due quadrati indicati e ripiegando la rete, di ottenere la forma di un parallelepipedo rettangolo, privato di due facce perché la voliera sarà appoggiata a terra e a un muro verticale. Qual è il volume massimo che l'allevatore può ottenere?





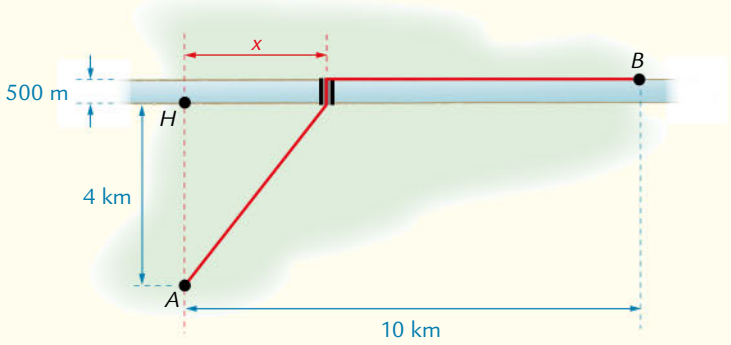
[Il volume massimo si ottiene quando $x = (3 - \sqrt{3})$ m $\simeq 1{,}27$ m ed è uguale a $12\sqrt{3}$ $m^3 \simeq 20{,}8 m^3$]

55 **Costruire una scatola/2.** Una scatola senza coperchio è ottenuta tagliando 4 quadrati uguali dagli angoli di un foglio di cartone quadrato, di lato 60 cm, e ripiegando il cartone rimasto come in figura. Quanto deve misurare il lato dei quattro quadrati che vengono ritagliati per avere la scatola di volume massimo?



[10 cm]

56 **Costruire un ponte.** Due città A e B sono situate da parti opposte rispetto a un fiume, le cui rive sono approssimativamente rettilinee e poste alla distanza di 500 m. La città A è a 4 km da una riva del fiume, la città B è posta sulla riva opposta; inoltre la città A è posta a 10 km dalla perpendicolare passante per B alle rive del fiume. In riferimento alla figura qui sotto, determina a quale distanza x dal punto H (proiezione di A sulla riva) deve essere costruito un ponte, perpendicolare alle rive del fiume, in modo che il tragitto che collega le due città (in rosso in figura) sia il minimo possibile.



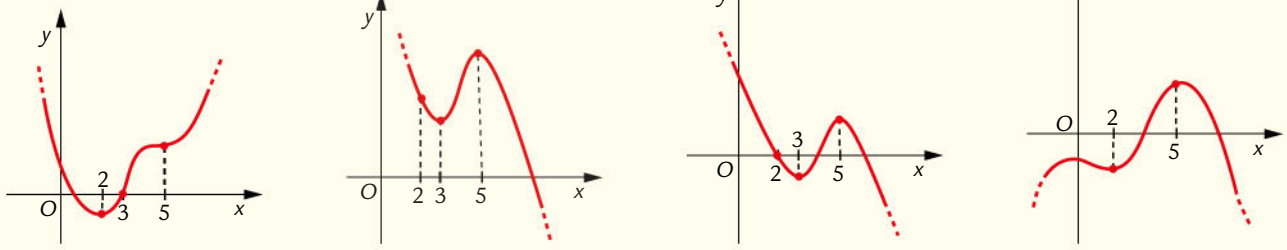
[Indicata con y la distanza, in km, tra A e B, risulta $y = \sqrt{16+x^2} - x + \frac{21}{2}$; il minimo si ha per $x = 10$]

57 **Capacità di una damigiana.** La capacità di una damigiana di vino è uguale a quella del cono circolare retto di apotema 50 cm avente volume massimo. Quanti litri di vino può contenere la damigiana?

[Volume massimo $= \frac{250\sqrt{3}\pi}{27}$ dm^3; circa 50,4 litri]

Interpretare grafici e dati

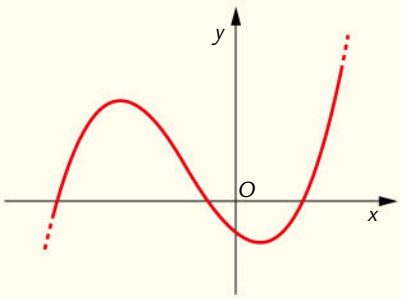
58 **Associazione.** Considera i seguenti grafici.



Associa a ciascuno di essi il gruppo di caratteristiche, scelto fra i quattro seguenti, con cui è compatibile.

a.	$f(3) < 0$	$f'(3) = 0$	$f'(5) = 0$	$f''(5) < 0$
b.	$f(3) > 0$	$f'(3) = 0$	$f'(5) = 0$	$f''(5) < 0$
c.	$f(2) < 0$	$f'(2) = 0$	$f''(2) > 0$	$f''(5) = 0$
d.	$f(2) < 0$	$f'(2) = 0$	$f''(2) > 0$	$f''(5) = 0$

59 Il grafico è quello di una cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. È possibile stabilire il segno dei coefficienti a, b, c, d? Giustifica adeguatamente la risposta.
(*Suggerimento*: deduci dal grafico il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $y' = 0$.)

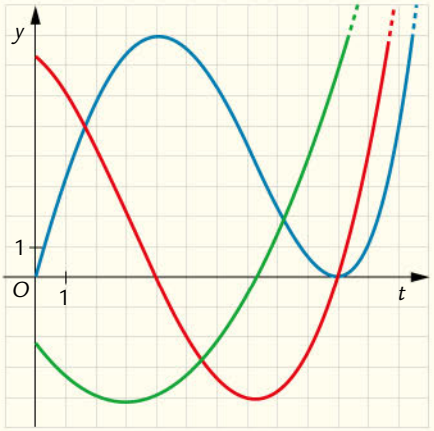


60 Nella figura sono riportati i grafici dello spazio percorso (in m), della velocità (in m/s) e dell'accelerazione (in m/s^2) di un corpo in funzione del tempo t (in s).

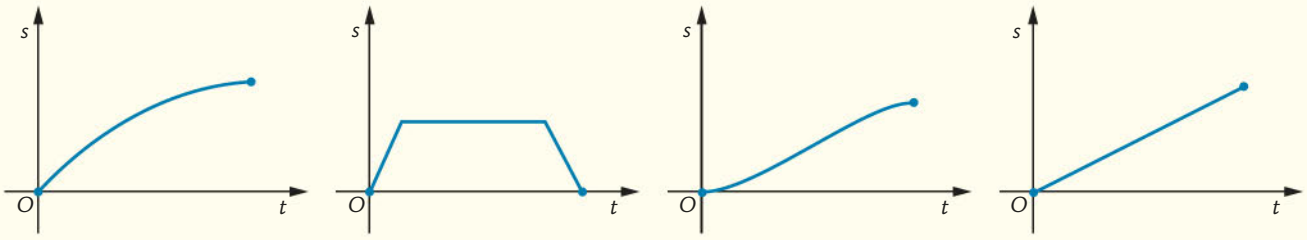
a. Identifica, giustificando la risposta, il grafico di ciascuna delle tre funzioni.

b. Individua, dai grafici:

- lo spazio percorso dal corpo dopo 4 s;
- in quali istanti la velocità è nulla;
- in quale intervallo di tempo la velocità è negativa;
- un intervallo di tempo di ampiezza 1 s contenente l'istante in cui l'accelerazione si annulla.



61 Gianni parte in motorino per andare a trovare suo cugino Luca, che abita a 20 km di distanza, e arriva dopo mezz'ora. Osserva i seguenti grafici di funzioni.



A B C D

a. Quale può essere il grafico della funzione $s(t)$ che rappresenta lo spazio percorso da Gianni?

b. Quale può essere il grafico della funzione $v(t)$ che rappresenta la velocità tenuta da Gianni durante il viaggio?

c. Luca dice a Gianni: «in un momento del viaggio la tua velocità è stata esattamente di 40 km/h».

A L'affermazione di Luca non è giustificata: potrebbe essere vera, ma potrebbe anche essere falsa.

B L'affermazione di Luca è giustificata dal teorema dei valori intermedi.

C L'affermazione di Luca è giustificata dal teorema di Rolle.

D L'affermazione di Luca è giustificata dal teorema di Lagrange.

Argomentare e dimostrare

62 Traccia il grafico e fornisci l'espressione analitica di una funzione che soddisfi, contemporaneamente, le seguenti caratteristiche:

a. è strettamente crescente per $x \leq 0$;

b. non è derivabile in $x = 0$;

c. è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\}$;

d. presenta un punto di minimo relativo per $x = 2$.

63 Una funzione f, derivabile in $\mathbf{R}$, è tale che $f'(x_0) = 0$. È vero che allora, necessariamente, la funzione f deve presentare un punto di estremo relativo in $x = x_0$? In caso di risposta affermativa giustificala, altrimenti fornisci un controesempio.

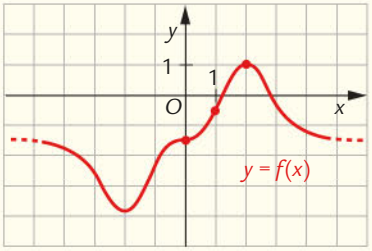
64 Una funzione f, derivabile due volte in $\mathbf{R}$, è tale che $f''(x_0) = 0$. È vero che allora, necessariamente, la funzione f deve presentare un punto di flesso in $x = x_0$? In caso di risposta affermativa giustificala, altrimenti fornisci un controesempio.

65 Considera la proposizione: «Sia f una funzione derivabile in $[a, b]$; se risulta $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora f è strettamente crescente in $[a, b]$» e stabilisci se è vera o falsa. La proposizione inversa è vera o falsa?

66 **E se?** Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ e avente due zeri x_1, x_2 appartenenti ad (a, b). È vero o falso che allora la funzione f ammette un punto stazionario in (x_1, x_2)?

▸ Cambierebbe la risposta supponendo f derivabile in $[a, b]$?

1 Osserva il grafico della funzione f di variabile reale rappresentato in figura.



a. Il valore della derivata prima di f in $x = 2$ è .....

b. Il valore della derivata prima di f in $x = 0$ è .....

c. Il valore della derivata prima di f in $x = 1$ è

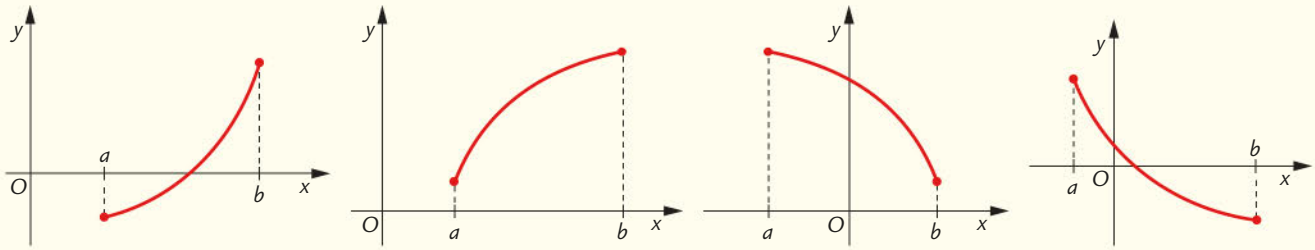
A minore di -1 C compreso tra 0 e 1

B compreso tra -1 e 0 D maggiore di 1

(Pretest)

2 Determina tra i quattro possibili grafici della funzione f, definita nell'intervallo $[a, b]$, quale verifica entrambe le seguenti condizioni per ogni $x \in (a, b)$:

- $f'(x) > 0$
- $f''(x) > 0$



A B C D

(Pretest)

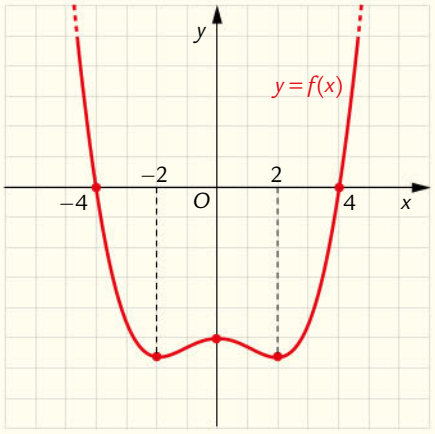
3 Qual è l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \dfrac{x-3}{2x-3}$ nel suo punto di ascissa 2?

A $y = 2x - 5$ B $y = 1 - x$ C $y = \dfrac{1}{2}$ D $y = 3x - 7$

4 La concentrazione di un farmaco nel sangue di un paziente (misurata in mg/L) è espressa dalla funzione $C(t) = \dfrac{6t}{t^2+2}$, dove t sono le ore trascorse dal momento della somministrazione. Nell'intervallo tra le 3 e le 4 ore dopo la somministrazione, la concentrazione del farmaco:

A sta diminuendo B sta aumentando C è costante D è massima

5 In riferimento al grafico della funzione $y = f(x)$ in figura, stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.



a. la funzione $y = f(x)$ è dispari V F

b. il dominio della funzione $y = \sqrt{f(x)}$ è l'insieme $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ V F

c. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \vee x > 4$ V F

d. $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee 0 < x < 2$ V F

e. l'equazione $f''(x) = 0$ ha esattamente due soluzioni V F

6 La funzione $f(x) = -3e^{4x^2}$ è:

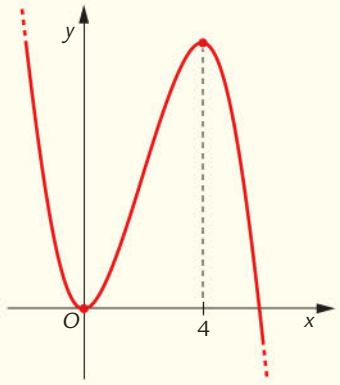
A monotòna crescente in **R** C monòtona decrescente in **R**

B convessa in **R** D concava in **R**

7 Dalla vendita di x oggetti si ha un ricavo (in migliaia di euro) dato da $R(x) = 20\ln(3x + 2)$, mentre il costo per produrre x oggetti è espresso (in migliaia di euro) dalla funzione $C(x) = \dfrac{2x}{3}$. Quanti oggetti devono essere prodotti per avere il massimo profitto?

A 26 B 27 C 28 D 29

8 In figura è tracciato il grafico di una funzione la cui equazione è del tipo $y = -x^3 + ax^2$. Qual è il valore di a?



Risposta: .....

9 Sia f una funzione derivabile in **R** e $x_0 \in \mathbf{R}$. La condizione $f'(x_0) = 0$ è:

A necessaria
B sufficiente
C necessaria e sufficiente
D né necessaria né sufficiente

per poter affermare che x_0 è un punto di estremo relativo per la funzione.

10 Il numero di persone $P(t)$ che hanno contratto un virus è ben modellizzato nei primi 10 giorni dall'inizio dell'epidemia dalla funzione $P(t) = -2t^2 + 20t + 2$, con $0 \le t \le 10$ (dove t è il tempo, misurato in giorni, trascorso dall'inizio dell'epidemia). Quando il numero di persone infette comincerà a diminuire?

A Dopo 3 giorni
B Dopo 5 giorni
C Dopo 10 giorni
D Dopo 1 giorno

11 Sia f una funzione derivabile in **R**. Barbara è convinta che «Se f è strettamente crescente in **R**, allora risulta $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$»; Paolo non è d'accordo con Barbara, sostenendo che è vero solo il viceversa di quanto affermato da Barbara; infine Marina è convinta che si stanno sbagliando entrambi. Chi ha ragione?

A Barbara B Paolo C Marina

Giustifica adeguatamente la risposta:

.....

.....

.....

12 Una funzione $y = f(x)$ è derivabile in **R** e la retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa 1 è perpendicolare alla retta di equazione $y = -2x + 1$. Allora $f'(1)$:

A è uguale a 2
B è uguale a $\frac{1}{2}$
C è uguale a -2
D non si può determinare senza ulteriori informazioni

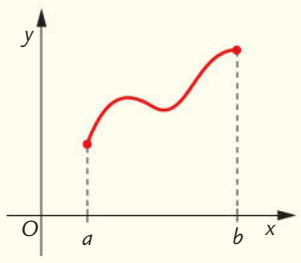
13 Per quali valori di a e b la funzione $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & x < 1 \\ x^2 + ax + b & x \ge 1 \end{cases}$ è derivabile in **R**?

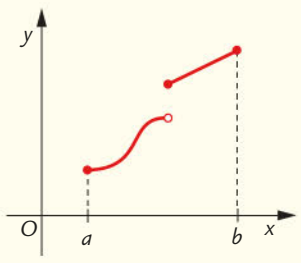
A $a = 4, b = -5$ C $a = -3, b = 4$
B $a = 3, b = -4$ D $a = -4, b = 5$

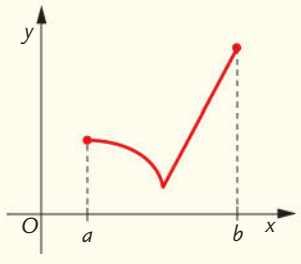
14 La concentrazione di un farmaco nel sangue di un paziente (misurata in mg/L) è espressa dalla funzione $C(x) = \frac{7x}{2x^2 + 8}$, dove x sono le ore dopo la somministrazione del farmaco. Dopo quante ore si raggiunge la massima concentrazione del farmaco?

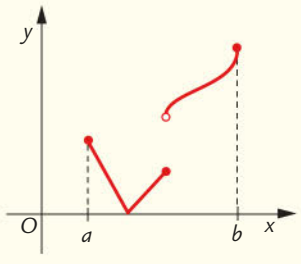
Risposta: .....

15 Individua, tra i quattro grafici proposti, quale corrisponde a una funzione continua ma non derivabile nell'intervallo $[a, b]$.

A


C


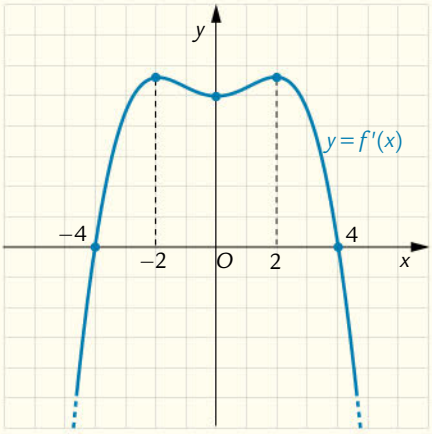
B


D


16 La funzione $f(x) = -2|x^3|$:

A non è continua in $x = 0$ B è derivabile in tutto **R** C è derivabile solo per $x = 0$ D non è derivabile nell'origine

17 In figura è riportato il grafico della funzione derivata $y = f'(x)$ di una funzione $y = f(x)$.



Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. la funzione $y = f(x)$ presenta un punto di minimo relativo per $x = -4$ V F

b. la funzione $y = f(x)$ è strettamente crescente per $-4 < x < 4$ V F

c. la funzione $y = f(x)$ presenta esattamente tre punti di estremo relativo V F

d. per $x = 0$ la funzione $y = f(x)$ presenta un punto di flesso V F

e. la tangente nel punto di ascissa $x = 0$ al grafico della funzione $y = f(x)$ è orizzontale V F

f. la funzione $y = f(x)$ presenta esattamente tre punti di flesso V F

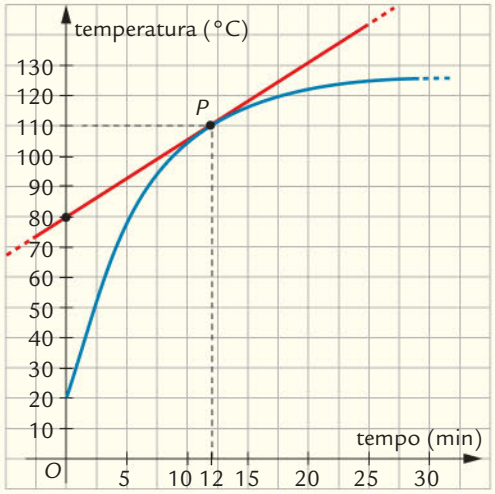
18 Quale delle seguenti funzioni è strettamente crescente in tutto **R**?

A $y = e^{2x} - e^x$ B $y = x^4 - x^2$ C $y = e^x + 2x$ D $y = \ln(x^2 + 1)$

19 Quale delle seguenti funzioni è convessa in tutto **R**?

A $y = x^3 - x^2 + 1$ B $y = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ C $y = x^4 + x^3 + 1$ D $y = x^4 + x^2 - 1$

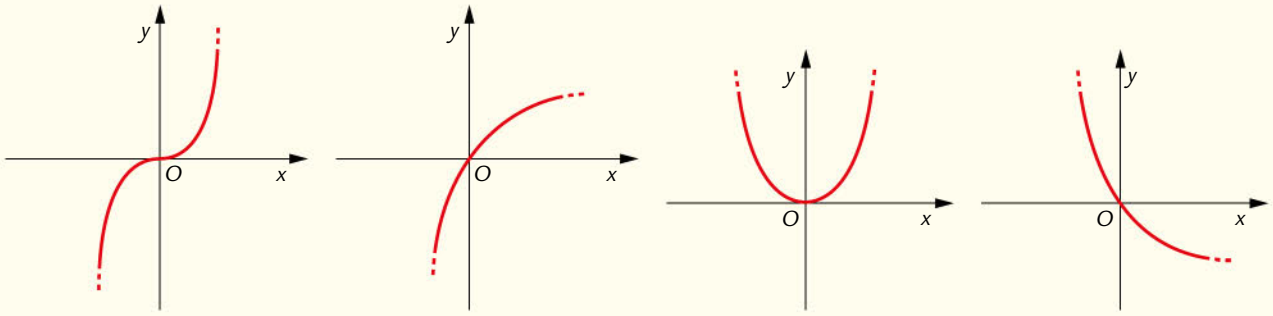
20 La temperatura di un alimento, sottoposto a un processo di sterilizzazione che inizia all'istante $t = 0$, è rappresentata dalla funzione il cui grafico è quello in figura.
Nella figura è rappresentata anche (in rosso) la retta tangente al grafico della funzione nel punto P.
A quale velocità sta crescendo la temperatura dell'alimento dopo 12 minuti?



Risposta: .....

21 La somma di due numeri reali positivi è 12. Qual è il massimo valore possibile del prodotto di uno di essi per il quadrato dell'altro?
Risposta: .....

22 Una funzione derivabile due volte in **R** è tale che: $f(0) = 0, f'(0) = -2, f''(0) = 3$. Quale delle seguenti figure rappresenta il grafico della funzione in un intorno di 0?



A B C D

23 La velocità v (in m/s) di un corpo in moto rettilineo dopo t secondi dalla partenza è espressa dalla funzione $v(t) = 2t^3 - 36t^2$. Dopo quanti secondi dalla partenza l'accelerazione del corpo diventa nulla?

Risposta: .....

24 Una regione paludosa è inquinata dal selenio a causa di alcune acque di scarico che vengono smaltite in quella zona. Si inizia a monitorare la situazione e si interviene con alcuni provvedimenti per cercare di ridurre l'inquinamento. La funzione $f(x)=\frac{x^2+36}{2x}$, dove x è il tempo (in mesi) trascorso dall'inizio degli interventi, esprime la percentuale di quanto si è ridotto il selenio rispetto alla quantità contenuta prima di iniziare gli interventi. Per esempio, $f(1) = 18{,}5$, dunque dopo 1 mese la riduzione è dell'ordine del 18,5%.

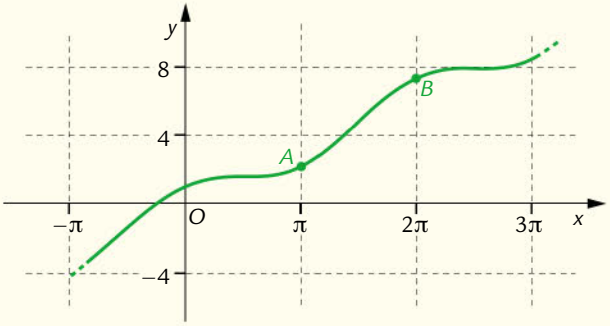
a. Dopo quanti mesi i provvedimenti presi hanno dato i peggiori risultati?

A 4 B 6 C 8 D 10

b. Dopo il numero di mesi di cui al punto precedente, di quale percentuale si è ridotta la quantità di selenio rispetto alla quantità contenuta prima di iniziare gli interventi?

A 60% B 12% C 6% D 8%

25 Barbara sta studiando il grafico della funzione $y = x + \cos x$ mostrato di seguito.



Ella afferma che la retta tangente nel punto A al grafico della funzione è parallela alla retta tangente nel punto B. Spiega perché ha ragione.

(Timss 2008)

.....

.....

26 Per quale delle seguenti funzioni il punto $x = 1$ è di minimo relativo?

A $y=-x^2+2x-1$ B $y=(x-1)^3$ C $y=x^2-2x+1$ D $y=-(x-1)^3$

27 Per quale delle seguenti funzioni il punto $x = 0$ è di massimo relativo?

A $y=x^2-x^3$ B $y=x^3-x^2$ C $y=x^3-x$ D $y=x-x^3$

28 Una scatola chiusa ha la forma di un parallelepipedo rettangolo a base quadrata con volume uguale a 16 000 cm^3. Il materiale per il coperchio e per la base costa 3 euro al centimetro quadrato mentre il materiale per le facce laterali costa la metà.

a. Indicata con x la misura, in centimetri, dei lati del quadrato di base, scrivi l'espressione analitica della funzione che esprime il costo C necessario a realizzare la scatola:

$C =$ .....

b. Quali sono le dimensioni della scatola che rendono minimo il costo di realizzazione?

Risposta: misura del lato di base = ... misura dell'altezza = ...

c. Qual è il costo minimo per realizzare la scatola?

Risposta: .....

29 In riferimento alla funzione $f(x)=xe^{-2x^2}$, stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. La funzione f è dispari V F

b. Il più ampio intervallo aperto dove la funzione f è crescente è $-2 < x < 2$ V F

c. L'equazione $f(x)=\frac{2}{5}$ non ammette soluzioni V F

d. Nell'intervallo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$ la funzione f è convessa V F

e. La funzione f presenta esattamente due punti di flesso V F

30 Cinquanta animali di una specie protetta vengono immessi in una riserva naturale. La crescita della popolazione di questa specie è ben descritta dalla funzione:

$$P(t) = \frac{500}{1+9e^{-0,2t}}$$

dove $P(t)$ rappresenta approssimativamente il numero di unità della popolazione al tempo t, misurato in mesi.

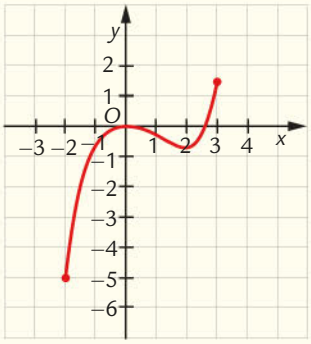
a. Qual è la velocità di crescita della popolazione dopo un anno?

A Circa 20 unità al mese
B Circa 25 unità al mese
C Circa 30 unità al mese
D Nessuna delle precedenti

b. Dopo quanto tempo dall'immissione degli animali nella riserva la velocità di crescita della popolazione è massima?

A Dopo circa 5 mesi
B Dopo circa 11 mesi
C Dopo circa 1 anno e mezzo
D Dopo circa 2 anni

31 La funzione f è definita e continua nell'intervallo limitato e chiuso $[-2, 3]$ e il suo grafico è rappresentato in figura.

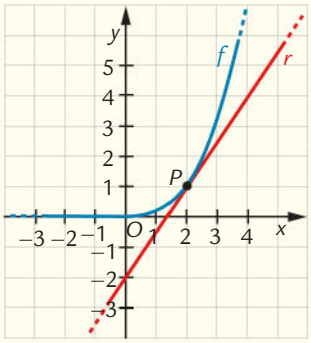


Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni, relative alla funzione f, è vera (V) o falsa (F).

1. $f(1) > f(2)$ V F
2. La funzione f ha un massimo assoluto in $x = 0$ V F
3. La derivata prima della funzione f è negativa per $-2 < x < 2$ V F
4. La funzione f ha un minimo assoluto nell'intervallo $[-2, 3]$ V F

(Esempi di domande Invalsi al termine del secondo ciclo)

32 La retta r di equazione $y = \frac{3}{2}x - 2$ è tangente nel punto P di ascissa 2 al grafico della funzione f rappresentato in figura.



a. Quanto vale $f(2)$?

Risposta: $f(2) =$ .....

b. Quanto vale la derivata prima di f in $x = 2$, cioè $f'(2)$?

Risposta: $f'(2) =$ .....

(Esempi di domande Invalsi al termine del secondo ciclo)

1 La derivata della funzione $f(x)=\cos\left(e^{\frac{1}{x+3}}\right)$ è:

A $-\frac{1}{(x+3)^2}e^{\frac{1}{x+3}}\sin e^{\frac{1}{x+3}}$

C $\frac{1}{(x+3)^2}e^{\frac{1}{x+3}}\sin e^{\frac{1}{x+3}}$

B $-\frac{1}{(x+3)^2}\sin e^{\frac{1}{x+3}}$

D $\ln|x+3|\,e^{\frac{1}{x+3}}\sin e^{\frac{1}{x+3}}$

(Analisi matematica 1, gennaio 2009, Ingegneria, Politecnico di Torino)

2 Data $f(x)=\frac{(x^7+7)\sin x+7x}{x^7+7}$, calcola $f'(0)$.

(Istituzioni di matematiche, settembre 2010, Biologia, Università di Pavia) [2]

3 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^x}{\sin 2x}=$

A $\frac{e}{2}$ B $-\frac{e}{2}$ C $\frac{1}{2}$ D $-\frac{1}{2}$

(Calcolo 1, aprile 2004, Ingegneria, Università di Trento)

4 Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=2$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

A $f(x)$ ha un asintoto obliquo per $x\to+\infty$

B $f(x)=2x+c$

C $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$

D $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

(Calcolo 1, aprile 2004, Ingegneria, Università di Trento)

5 Stabilisci per quali valori di a e b la funzione $f(x)=\begin{cases}a+b\sin x & x<0\\ \frac{x}{1+x^2} & x\geq 0\end{cases}$ è derivabile in **R**. Per tali valori è anche derivabile due volte in **R**?

(Analisi matematica 1, marzo 2009, Ingegneria dei sistemi, Politecnico di Milano) [$a=0$, $b=1$; è derivabile due volte]

6 Sia $y=g(x)$ l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y=-6x^2+\ln x$ nel suo punto di ascissa 1. Qual è il valore di $g(0)$?

(Analisi matematica 1, gennaio 2008, Ingegneria, Università di Pavia) [5]

7 Sia data $f(x)=16+x+x^2+\frac{x^3}{4}$. Sia x_M l'unico punto di massimo di f. Qual è il valore di $f(x_M)+x_M$?

(Analisi matematica 1, gennaio 2008, Ingegneria, Università di Pavia) [14]

8 Data la funzione $f(x)=e^{5x}+e^{-x}$, calcola le ascisse dei punti di estremo relativo di f.

(Istituzioni di matematiche, luglio 2010, Biologia, Università di Pavia) $\left[x=-\frac{1}{6}\ln 5\right]$

9 Scrivi l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 1 al grafico della funzione $f(x)=e^x-\ln x$.

(Istituzioni di matematiche, agosto 2010, Biologia, Università di Padova) $[y=x(e-1)+1]$

10 Data la funzione $f(x)=x^2\left(\ln 6x-\frac{3}{2}\right)$, determina il più grande intervallo aperto in cui f è convessa.

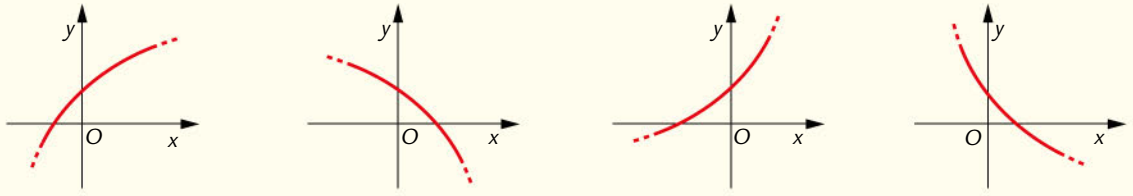
(Istituzioni di matematiche, giugno 2010, Biologia, Università di Pavia) $\left[x>\frac{1}{6}\right]$

11 Sia f una funzione definita su **R** e derivabile in 0. La seguente implicazione è vera o falsa? Fornisci una dimostrazione oppure un controesempio.

$$f'(0)=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

(Analisi matematica 1, febbraio 2009, Ingegneria, Università di Pavia)

12 Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile tale che $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ e $g''(0) = -4$. Allora il grafico di $\dfrac{1}{1+g(x)}$ vicino a $x = 0$ è:



A B C D

(Analisi matematica 1, giugno 2006, Ingegneria, Università di Trento)

13 Sia data la seguente funzione f, reale di variabile reale, definita da:

$$f(x) = \frac{x\,|x| - 1}{x + 1} + 1$$

Traccia un grafico qualitativo della funzione f. La funzione f è derivabile nel suo dominio?

(Analisi matematica 1, marzo 2010, Ingegneria, Università di Brescia)

[La funzione coincide con la retta $y = x$ per $x \geq 0$; per $x < 0$ ha come asintoti: $x = -1$ e $y = -x + 2$ e presenta un punto di minimo per $x = -1 - \sqrt{2}$; è derivabile nel suo dominio]

14 Data la funzione $f(x) = \ln\left(\sqrt{|x^3 - 3x|}\right)$, determina l'insieme di definizione, studia i limiti agli estremi dell'insieme di definizione, stabilisci eventuali simmetrie, studia la monotonia e determina eventuali minimi e massimi. Disegna un grafico approssimativo di f.

(Analisi matematica 1, febbraio 2010, Ingegneria dei sistemi, Università di Roma)

$\left[\text{Dominio} = \mathbf{R} - \{0, \pm\sqrt{3}\};\ \text{funzione pari; asintoti: } x = 0,\ x = \pm\sqrt{3},\ \text{max: } \left(1, \frac{1}{2}\ln 2\right)\right]$

15 Sia $f(x) = 4x^3 \ln(-x)$. Allora:

A f è invertibile in $(-1, 0)$

B f è invertibile in $\left(-\infty, -e^{-\frac{1}{3}}\right]$

C f è invertibile in $\left[-1, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}\right]$

D f non è invertibile in alcun intervallo $I \subset (-\infty, -1)$

(Analisi matematica 1, luglio 2003, Fisica, Università di Milano)

16 Sia $f(x) = \ln(1 + |x|)$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio?

a. È continua
b. È derivabile
c. È superiormente limitata
d. È inferiormente limitata
e. È monotona
f. È periodica
g. È pari
h. È dispari

(Analisi matematica 1, febbraio 2009, Ingegneria, Università di Pavia)

[La funzione possiede in tutto il suo dominio tre delle proprietà elencate]

17 Sia $f(x) = x^7 e^{-|x|} - 8$. Quali delle seguenti proprietà ha la funzione f in tutto $\mathbf{R}$?

a. È continua
b. È derivabile
c. È limitata inferiormente
d. È dispari
e. È limitata superiormente
f. È pari
g. È monotona
h. È periodica

(Analisi matematica 1, febbraio 2007, Ingegneria, Università di Pavia)

[La funzione possiede in tutto $\mathbf{R}$ quattro delle proprietà elencate]

18 Determina il massimo e il minimo della funzione $f(x) = x + 2\,|\cos x\,|$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

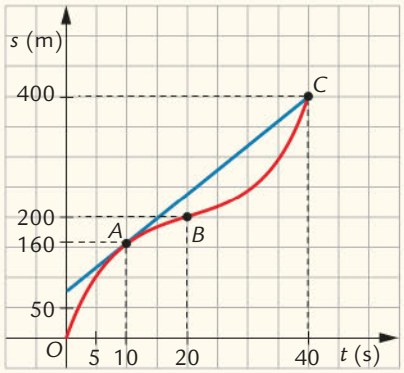
(Analisi matematica 1, febbraio 2005, Informatica, Università di Pisa)

$\left[\min = \frac{\pi}{2},\ \max = 2 + 2\pi\right]$

Compito di realtà 1

Una gara di sci e le giornaliste sportive

Le giornaliste sportive Emanuela e Barbara stanno osservando il grafico riportato in figura, dove la curva rossa rappresenta lo spazio s (in metri), percorso da uno sciatore durante una gara, in funzione del tempo t (in secondi), mentre in blu è rappresentata (in parte) la retta tangente alla curva nel punto A. Il punto B è un punto di flesso.





Barbara deduce dal grafico alcune considerazioni che lasciano stupita Emanuela:

- **prima dell'istante in cui è stato fatto partire il cronometro ($t = 0$), probabilmente agli sciatori è stato concesso di percorrere un tratto in discesa per «lanciarsi»;**
- **la gara prevedeva un tratto in salita e uno in discesa;**
- **dopo 10 s la velocità dello sciatore era esattamente di 8 m/s;**
- **la velocità media dello sciatore nell'intervallo di tempo considerato è stata di 10 m/s e, in tale intervallo, la velocità dello sciatore è stata uguale alla velocità media in due diversi istanti.**

1 Giustifica le affermazioni che Barbara ha fornito a Emanuela.

2 Supponendo che la curva rossa riportata in figura abbia un'espressione analitica del tipo $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, determina i coefficienti a, b, c e d in base ai dati che puoi ricavare dal grafico.

Barbara osserva inoltre che, «a occhio», la curva sembra simmetrica rispetto al punto B. Ne deduce che nell'istante in cui il cronometro è stato fatto partire e nell'istante finale lo sciatore doveva avere la stessa velocità.

3 Utilizzando la funzione che hai determinato al punto **2**, verifica se sussiste o meno la simmetria rispetto al punto B e, di conseguenza, stabilisci se è vero che nell'istante finale la velocità dello sciatore è stata la stessa dell'istante iniziale.

4 Determina la minima e la massima velocità dello sciatore, espresse in km/h.

5 Determina la funzione che esprime l'accelerazione dello sciatore in funzione del tempo e rappresenta il suo grafico. Che significato puoi dare al fatto che l'accelerazione, nell'intervallo di tempo considerato, assume sia valori negativi, sia valore 0, sia valori positivi?

Risposte p. 576

VERSO LE COMPETENZE

Compito di realtà 2

Lattine d'olio



Un'azienda vuole costruire una lattina di capacità 1 litro (cioè di volume uguale a 1000 cm^3) con una forma che può essere modellizzata con buona aprossimazione tramite un cilindro.

1 Indicata con r la misura, in centimetri, del raggio di base della lattina, esprimi in funzione di r la sua superficie totale $S(r)$.

2 Tre lattine da 1 litro di forma cilindrica hanno raggio di base rispettivamente uguale a 5 cm, 8 cm e 10 cm. Quale delle tre lattine richiede la minima quantità di alluminio per costruirla?

3 Quanto deve misurare il raggio di base della lattina perché la quantità di alluminio necessario per costruirla sia la minima possibile?



Un dipendente dell'azienda vorrebbe modificare la forma delle lattine: invece della forma cilindrica, suggerisce di produrre lattine la cui forma sia approssimativamente quella di un parallelepipedo rettangolo, con i lati di base uno doppio dell'altro.
Il responsabile della produzione però non pensa sia una buona idea perché, anche realizzando la lattina a forma di parallelepipedo con le dimensioni che minimizzano il costo per l'acquisto dell'alluminio, si dovrebbe comunque sostenere una spesa maggiore rispetto alla lattina cilindrica avente le dimensioni calcolate al punto 3.

4 Verifica che il responsabile di produzione ha ragione.

Si decide infine di utilizzare due diverse tipologie di alluminio per la costruzione delle lattine cilindriche; il costo c (in euro al cm^2) dell'alluminio utilizzato per la superficie laterale della lattina risulta la metà di quello impiegato per le due basi.

5 Scrivi, in questa nuova ipotesi, la funzione $C(r)$ che fornisce il costo complessivo dell'alluminio necessario alla costruzione della lattina cilindrica in funzione del raggio di base r. Il raggio della lattina preferibile dal punto vista esclusivamente economico, cioè quella che minimizza il costo del materiale per produrla, cambia rispetto a quanto stabilito al punto 3? Di quanto in percentuale?

6 Verifica che il valore minimo della funzione $C(r)$ calcolato al punto 5 dipende dal costo c dell'alluminio utilizzato per la superficie laterale, mentre il punto r in cui viene assunto tale valore minimo risulta *indipendente* da c. Come lo spiegheresti sia matematicamente sia in relazione al problema economico in esame?

Risposte p. 577

TEMA I

Complementi di analisi



Nelle Unità precedenti, studiando le funzioni di *una* variabile, abbiamo visto che esse sono strumenti fondamentali per la modellizzazione di moltissimi fenomeni.
In molti casi, tuttavia, i modelli basati sulle funzioni di una variabile si rivelano poco realistici poiché la variazione di una grandezza può dipendere da più di una variabile.
Per poter costruire modelli più raffinati abbiamo bisogno dunque di funzioni che dipendano da più di una variabile.

Unità 8

Funzioni di due variabili

PREREQUISITI

- Equazioni, disequazioni e sistemi in una variabile
- Geometria analitica (rette e coniche)
- Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

COMPETENZE

- Utilizzare le funzioni di due variabili per costruire modelli matematici in vari ambiti, in particolare in quello tecnico-scientifico

Unità 8

Tema I

Funzioni di due variabili

- Figure animate
- Esercizi interattivi

1. Introduzione alle funzioni di due variabili

Il principale oggetto di questa Unità sarà lo studio delle funzioni di due variabili, funzioni, cioè, definite da un'equazione della forma:

$$z = f(x, y)$$

essendo x e y le variabili *indipendenti* e z la variabile *dipendente*. È bene mettere in rilievo subito due importanti differenze rispetto alle funzioni di una variabile.

a. Mentre il *dominio* di una funzione reale di una variabile reale è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$, il dominio D di una funzione reale di due variabili reali è un insieme di coppie ordinate (x, y) di numeri reali, ovvero un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$: $D \subseteq \mathbf{R}^2$.
b. Mentre il *grafico* di una funzione reale di una variabile reale si traccia nel *piano cartesiano* (ed è rappresentato da una *curva*), il grafico di una funzione reale di due variabili si traccia nello *spazio*, riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (ed è rappresentato da una *superficie*).

RICORDA

Come di consueto, indicheremo con $\mathbf{R}^2$ l'insieme $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, cioè l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Analogamente indicheremo con $\mathbf{R}^3$ l'insieme $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ delle terne ordinate di numeri reali.

Prima di intraprendere lo studio delle funzioni di due variabili è importante:

- rivedere e approfondire alcune questioni legate ai sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$;
- vedere come può essere definito un sistema di riferimento cartesiano nello spazio.

Sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ definiti mediante disequazioni in due variabili

I sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ con cui lavoreremo più spesso nello studio delle funzioni di due variabili sono quelli definiti mediante *disequazioni* in due variabili (ovvero in due incognite) o *sistemi* di disequazioni in due variabili. Ai fini della risoluzione di tali disequazioni è bene tenere presente quanto segue:

a. le disequazioni di primo grado della forma:

$$ax + by + c > 0 \qquad \text{o} \qquad ax + by + c < 0$$

e le corrispondenti ottenute sostituendo i simboli di $>$ e $<$ con $\geq$ o $\leq$ rappresentano dei *semipiani*, esclusa o inclusa la retta che delimita il semipiano;
b. i *sistemi* formati da disequazioni di primo grado in due incognite rappresentano l'*intersezione* dei semipiani rappresentati dalle singole disequazioni, quindi in particolare consentono di rappresentare *poligoni*;
c. le disequazioni della forma:

$$F(x, y) \geq 0 \qquad \text{o} \qquad F(x, y) \leq 0$$

nel caso in cui $F(x, y) = 0$ sia l'equazione di una *conica*, rappresentano:
– una delle due regioni in cui il piano resta diviso dalla conica (inclusa la conica stessa) se quest'ultima è una circonferenza, una parabola o una ellisse (*vedi* la **Fig. 1** a pagina seguente, nel caso di una parabola);
– i punti delle due regioni convesse o i punti della regione concava in cui il piano resta diviso dalla conica (inclusa la conica stessa) se quest'ultima è un'iperbole (**Fig. 2** a pagina seguente).

Ragionamenti analoghi valgono per le disequazioni del tipo $F(x, y) > 0$ e $F(x, y) < 0$, con la sola differenza che in questo caso la conica andrà *esclusa*.

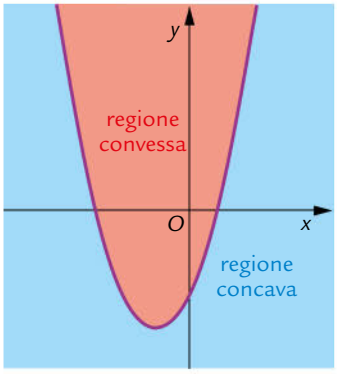


Figura 1 Una parabola divide il piano in due regioni, una concava (colorata in azzurro) e una convessa (colorata in rosso).

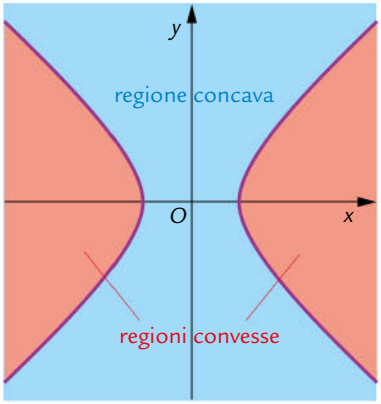


Figura 2 Un'iperbole divide il piano in una regione concava (colorata in azzurro) e in due regioni convesse (colorate in rosso).

ESEMPI Disequazioni in due variabili

Rappresentiamo graficamente le regioni di piano definite dalle seguenti disequazioni:

a. $x - 2y + 6 > 0$ **b.** $x^2 - 2y - 4 \leq 0$ **c.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 1$

a. Si tratta di una disequazione lineare in forma *implicita*. Risolviamo anzitutto la disequazione rispetto a y:

$$x - 2y + 6 > 0 \Rightarrow -2y > -x - 6 \Rightarrow y < \frac{1}{2}x + 3$$

Ne segue che la disequazione data rappresenta il semipiano «al di sotto» della retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + 3$, esclusa la retta stessa, che va perciò tratteggiata (**Fig. 3**).

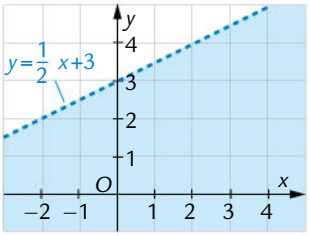


Figura 3

In alternativa, per stabilire quale dei due semipiani è rappresentato dalla disequazione si sarebbe potuto utilizzare il metodo del «punto di prova», che consiste nel sostituire nella disequazione le coordinate di un punto e stabilire se la disequazione è soddisfatta o meno. Nel nostro caso, possiamo scegliere per esempio come punto l'origine; sostituendo nella disequazione data 0 al posto di x e di y, otteniamo: $0 - 2 \cdot 0 + 6 > 0$, ossia $6 > 0$, che è evidentemente una disuguaglianza *vera*. Pertanto l'origine *appartiene* al grafico di $x - 2y + 6 > 0$. Concludiamo di nuovo che fra i due semipiani delimitati dalla retta di equazione $x - 2y + 6 = 0$ quello che rappresenta la disequazione $x - 2y + 6 > 0$ è il semipiano che contiene l'origine, cioè il semipiano colorato in **Fig. 3**.

b. Risolviamo la disequazione rispetto a y:

$$x^2 - 2y - 4 \leq 0 \Rightarrow -2y \leq -x^2 + 4 \Rightarrow y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2$$

Ne deduciamo che la disequazione rappresenta i punti «al di sopra» della parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ e i punti della parabola stessa (**Fig. 4**). In alternativa avremmo potuto considerare come punto di prova l'origine e osservare che le sue coordinate soddisfano la disequazione originaria; avremmo così concluso che la disequazione rappresenta la regione che ha come frontiera la parabola cui appartiene l'origine, ovverosia quella colorata in **Fig. 4**.

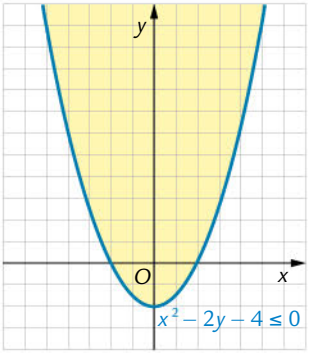


Figura 4

c. Rappresentiamo anzitutto l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Essa divide il piano in due regioni: una costituita dai punti interni o appartenenti all'ellisse, una costituita dai punti esterni all'ellisse. Consideriamo come punto di prova l'origine. Le sue coordinate (0, 0) soddisfano la disequazione data: infatti sostituendo 0 al posto di x e y otteniamo la disuguaglianza $\frac{0^2}{16} + \frac{0^2}{4} \leq 1$, ossia $0 \leq 1$, che è vera.

Quindi la disequazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\le 1$ rappresenta la regione che ha come frontiera l'ellisse e alla quale appartiene l'origine, ossia la regione costituita dai punti interni all'ellisse e dai punti dell'ellisse stessa (**Fig. 5**).

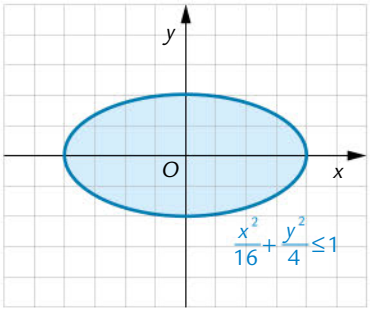


Figura 5

ESEMPI Sistemi di disequazioni in due variabili

Rappresentiamo graficamente le regioni di piano definite algebricamente dai seguenti sistemi:

a. $\begin{cases} y-1\ge 0 \\ 1-x\le 0 \\ x+y-4\le 0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y\ge 0 \\ x^2+y^2-2x-2y-7\le 0 \end{cases}$

a. Esplicitiamo le disequazioni del sistema rispetto a y:

$$\begin{cases} y-1\ge 0 \\ 1-x\le 0 \\ x+y-4\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 1 \\ -x\le -1 \\ y\le -x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 1 \\ x\ge 1 \\ y\le -x+4 \end{cases}$$

I tre semipiani rappresentati dalle disequazioni del sistema sono:

- quello costituito dai punti «al di sopra» della retta di equazione $y = 1$ e dai punti della retta stessa;
- quello costituito dai punti «a destra» della retta di equazione $x = 1$ e dai punti della retta stessa;
- quello costituito dai punti «al di sotto» della retta di equazione $y = -x + 4$ e dai punti della retta stessa.

La loro intersezione è il triangolo di vertici $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ e $C(1, 3)$ (**Fig. 6**).

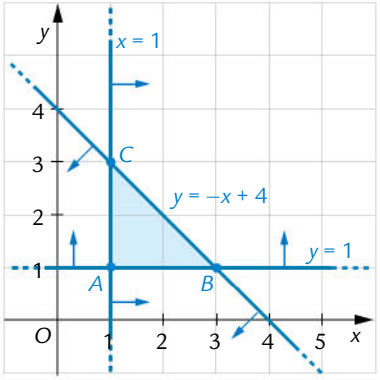


Figura 6

b. La disequazione $x^2+y^2-2x-2y\ge 0$ rappresenta i punti *esterni* alla circonferenza di centro (1, 1) e raggio $\sqrt{2}$ e i punti *appartenenti* alla circonferenza stessa.
La disequazione $x^2+y^2-2x-2y-7\le 0$ rappresenta i punti *interni* alla circonferenza di centro (1, 1) e raggio 3 e i punti *appartenenti* alla circonferenza stessa.
Il sistema rappresenta l'intersezione delle due regioni precedenti, ossia la *corona circolare* in **Fig. 7**.

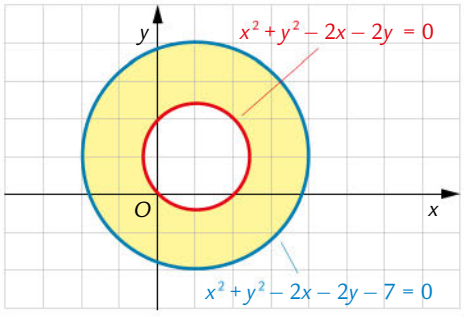
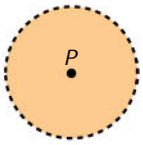
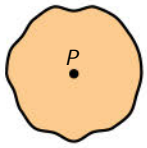
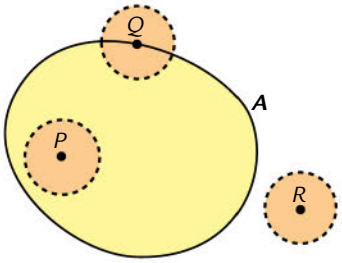
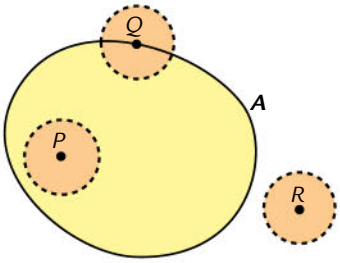
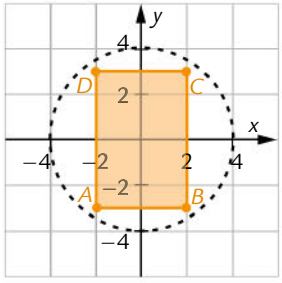
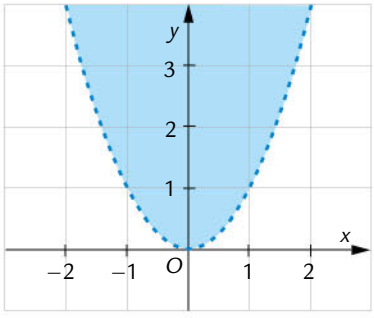


Figura 7

Intorni e insiemi aperti e chiusi in $\mathbf{R}^2$

Definiamo ora in $\mathbf{R}^2$ concetti analoghi a quelli di intorno di un punto e di intervallo aperto, chiuso, limitato e illimitato.

Definizione	Esempi	Controesempi
Si chiama **intorno** (circolare) di un punto $P(x_0, y_0)$ in $\mathbf{R}^2$ l'insieme dei punti del piano che distano da P meno di r, con $r > 0$. Un intorno è quindi l'insieme dei punti le cui coordinate (x, y) sono tali che: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$ Il punto P e il numero r sono detti rispettivamente il **centro** e il **raggio** dell'intorno.	 È un intorno circolare di P.	 Non è un intorno circolare di P.
Dato un insieme A di punti del piano e un punto P appartenente al piano, si dice che il punto P è: a. **interno** all'insieme A se esiste un intorno di P interamente contenuto in A; b. **esterno** all'insieme A se esiste un intorno di P che non contiene alcun punto di A; c. **di frontiera** per l'insieme A se ogni intorno di P contiene almeno un elemento di A e almeno un elemento non appartenente ad A; d. **di accumulazione** per l'insieme A se ogni intorno di P contiene almeno un elemento di A distinto da P.	 P è un punto interno all'insieme A, Q è un punto di frontiera ed R è un punto esterno. Inoltre P e Q sono punti di accumulazione per l'insieme A.	 P **non** è né esterno né di frontiera per l'insieme A, Q **non** è né interno né esterno all'insieme A, R **non** è né interno né di frontiera per l'insieme A. Il punto R **non** è di accumulazione per l'insieme A.
Un insieme di punti del piano si dice: a. **aperto**, se tutti i suoi punti sono interni all'insieme; b. **chiuso**, se il suo complementare è aperto.	 È un insieme aperto. È un insieme chiuso.	 È un insieme che non risulta né aperto né chiuso.
Un insieme di punti del piano si dice: a. **limitato** se esiste un intorno dell'origine in cui è interamente contenuto; b. **illimitato** in caso contrario.	 Il rettangolo $ABCD$ è un insieme limitato. Per esempio, l'intorno dell'origine delimitato dalla circonferenza tratteggiata contiene internamente il rettangolo.	 L'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > x^2\}$ **non** è limitato (ovvero è illimitato).

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio

Anche lo spazio, come il piano, può essere riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, procedendo come segue:

CONVENZIONE
Salvo avviso contrario, converremo di utilizzare sistemi di riferimento nello spazio di tipo destro, come in Fig. 8.

- si considerano tre rette a due a due ortogonali, dette **asse** x, **asse** y e **asse z**, tutte e tre passanti per un punto O, **origine** del sistema di riferimento;
- si orientano i tre assi e si considera su di essi un'unità di misura; se l'orientamento è come in **Fig. 8** il sistema di riferimento si dice **destro**, mentre se è come in **Fig. 9** si dice **sinistro**.

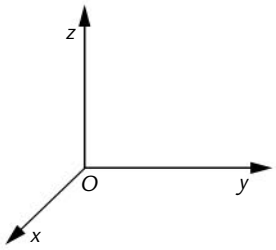


Figura 8

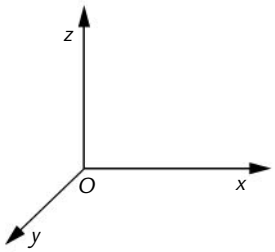


Figura 9

Il piano che contiene gli assi x e y è detto piano xy; analogamente il piano che contiene gli assi x e z è detto piano xz e il piano che contiene gli assi y e z è detto piano yz (**Fig. 10**). I tre piani xy, yz e xz, detti **piani coordinati**, dividono lo spazio in otto parti, detti **ottanti** (gli analoghi dei quadranti nel piano). A ogni punto P dello spazio è possibile associare una *terna ordinata* di numeri reali (x, y, z), che costituiscono le **coordinate** del punto P (**Fig. 11**):

- il numero x, detto **ascissa** di P, è la coordinata sull'asse x del punto di intersezione P_x di tale asse con il piano passante per P e parallelo al piano yz;
- il numero y, detto **ordinata** di P, è la coordinata sull'asse y del punto di intersezione P_y di tale asse con il piano passante per P e parallelo al piano xz;
- il numero z, detto **quota** di P, è la coordinata sull'asse z del punto di intersezione P_z di tale asse con il piano passante per P e parallelo al piano xy.

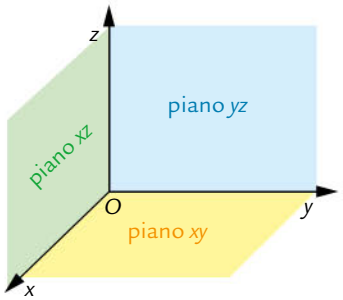


Figura 10

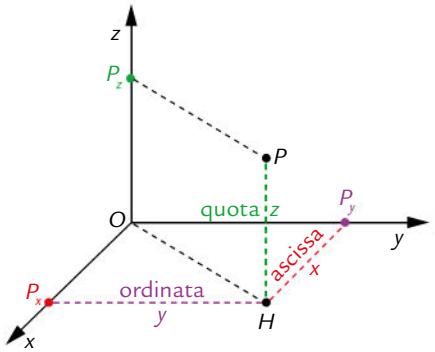


Figura 11

In particolare, il piano xy è costituito da punti di coordinate $(x, y, 0)$, quindi è definito dall'equazione $z = 0$; analogamente il piano xz è definito dall'equazione $y = 0$ e il piano yz è definito dall'equazione $x = 0$.

Distanza tra due punti nello spazio

Molte formule già viste nel piano si possono estendere in modo naturale nello spazio; per esempio la formula per calcolare la distanza tra due punti.
Per verificare questo fatto, cominciamo con il considerare due punti $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ e indichiamo con $H(x_2, y_2, z_1)$ la proiezione di Q sul piano passante per P e parallelo al piano xy (piano i cui punti hanno quota $z = z_1$).

Figura animata
Distanza tra due punti nello spazio

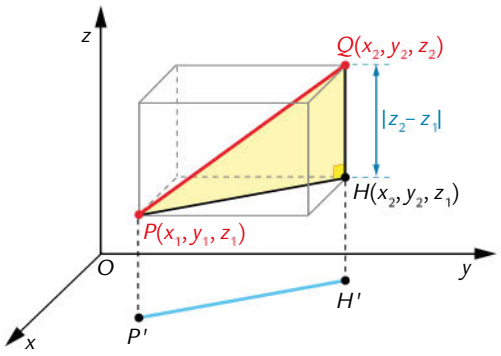


Figura 12

Per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo PHQ (**Fig. 12**) risulta:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{QH}^2}$$

Osserviamo ora che:

- la distanza tra i due punti P e H è uguale alla distanza tra le loro proiezioni $P'(x_1, y_1)$ e $H'(x_2, y_2)$ sul piano xOy, quindi:

$$\overline{PH} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- la distanza tra Q e H, essendo due punti aventi stessa ascissa e stessa ordinata, è uguale al valore assoluto della differenza delle quote:

$$\overline{QH} = |z_2 - z_1|$$

Pertanto:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\underbrace{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}_{\overline{PH}^2} + \underbrace{(z_2 - z_1)^2}_{\overline{QH}^2}}$$

RICORDA
$|a|^2 = a^2$, quindi
$|z_2 - z_1|^2 = (z_2 - z_1)^2$

A questo punto è evidente che la formula per la distanza di due punti nello spazio, come anticipato, è la naturale estensione della formula nel piano.

TEOREMA 1 | Distanza tra due punti nello spazio

Nello spazio, la **distanza** d tra due punti di coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) è espressa dalla formula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ESEMPIO Distanza tra due punti nello spazio

La distanza tra i due punti $A(2, 3, 4)$ e $B(1, 5, 6)$ è data da:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + (5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Anche la formula del punto medio di un segmento si estende naturalmente allo spazio. Si può dimostrare infatti quanto segue.

DEFINIZIONE | Punto medio di un segmento nello spazio

Il **punto medio** di un segmento i cui estremi hanno coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) ha coordinate:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

ESEMPIO Punto medio di un segmento nello spazio

Il punto medio del segmento AB, di estremi $A(2, 3, 4)$ e $B(1, 2, 6)$, è il punto M di coordinate $\left(\frac{2+1}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$. Dunque $M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 5\right)$.

Piani e rette nello spazio

Abbiamo visto che, nel piano cartesiano, l'equazione *implicita* di una generica *retta* è:

$$ax + by + c = 0$$

Nello spazio, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, si dimostra che l'equazione *implicita* di un generico *piano* è:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad [1]$$

Inoltre, sempre in analogia con quanto visto a proposito della retta, così come l'equazione di una generica retta, **non** parallela all'asse y e passante per il punto $P(x_0, y_0)$, è:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$ L'equazione dipende da un solo parametro: m

così si dimostra che, nello spazio, l'equazione di un generico piano, **non** parallelo all'asse z e passante per il punto $P(x_0, y_0, z_0)$, è:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$ L'equazione dipende da due parametri: a e b

È importante infine esaminare le equazioni di alcuni piani *particolari*.

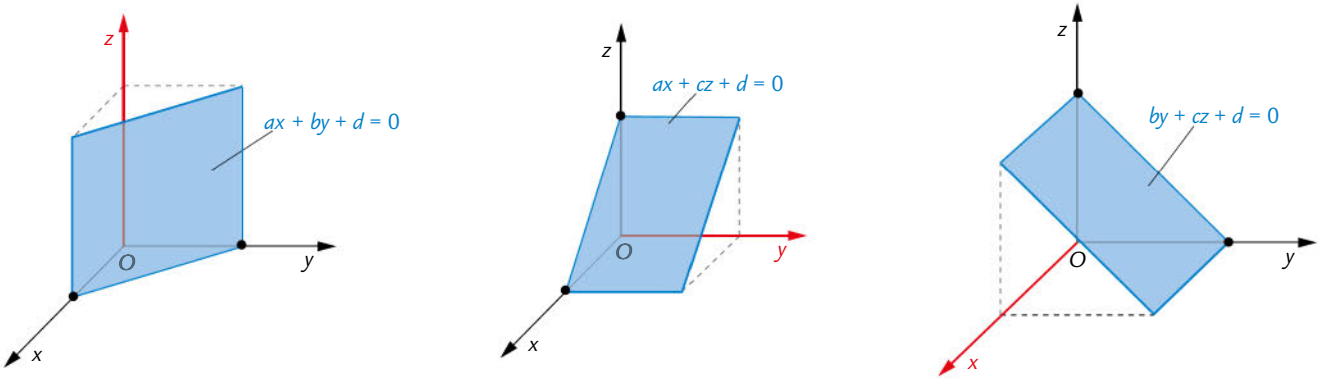
a. Se nell'equazione [1] è $d = 0$, si ottiene l'equazione di un piano passante per l'origine (infatti le coordinate dell'origine soddisfano l'equazione del piano).

b. Se nell'equazione [1] *uno* (*almeno*) dei coefficienti a, b o c è nullo, si ottiene un piano che risulta *parallelo* all'asse corrispondente alla variabile mancante. Per esempio, se $c = 0$, allora si ottiene il piano di equazione $ax + by + d = 0$ in cui manca la variabile z; un piano di questo tipo è *parallelo* all'asse z: infatti se $d \neq 0$, l'asse z e il piano non hanno punti in comune (perché nessun punto di coordinate $(0, 0, k)$ soddisfa l'equazione del piano), mentre se $d = 0$, l'asse z giace sul piano.

RICORDA

Come sai, due rette nel piano si dicono parallele quando non hanno punti in comune oppure coincidono. Analogamente, nello spazio diciamo che una retta è parallela a un piano quando non ha punti in comune con esso oppure giace sul piano.

Un piano siffatto risulta anche perpendicolare al piano xy (**Fig. 13a**). Analoghi ragionamenti possono essere condotti negli altri casi (**Figg. 13b** e **c**).



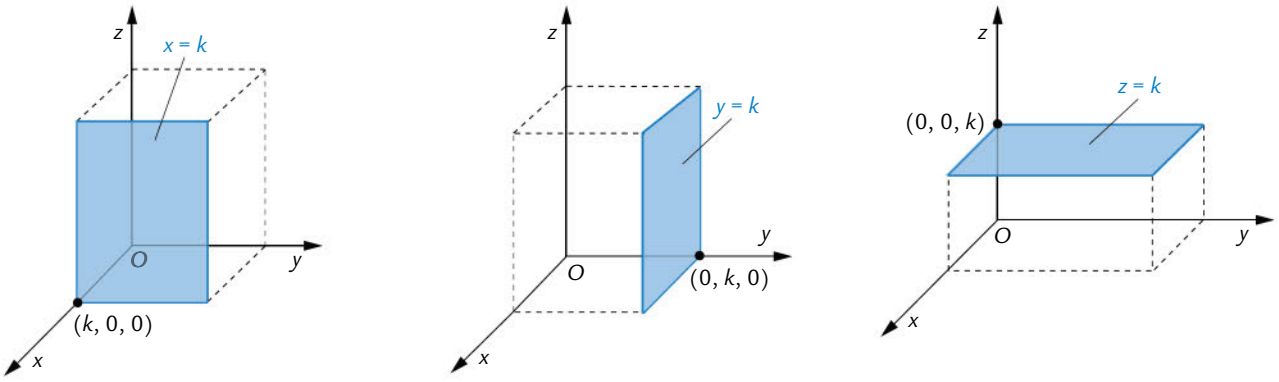
a. Piano parallelo all'asse z (deve perciò intersecare i piani xz e yz lungo rette parallele all'asse z). Tale piano è anche perpendicolare al piano xy.

b. Piano parallelo all'asse y (deve perciò intersecare i piani yz e xy lungo rette parallele all'asse y). Tale piano è anche perpendicolare al piano xz.

c. Piano parallelo all'asse x (deve perciò intersecare i piani xy e xz lungo rette parallele all'asse x). Tale piano è anche perpendicolare al piano yz.

Figura 13

c. Se nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ *due* (*soli*) dei coefficienti a, b o c sono nulli, si ottiene un piano *parallelo* a uno dei piani coordinati. Per esempio, se $b = c = 0$ (e $a \neq 0$), otteniamo un piano di equazione $ax + d = 0$, ossia $x = -\frac{d}{a}$, che è del tipo $x = k$ ed è parallelo al piano yz (**Fig. 14a**). Analoghi ragionamenti possono essere condotti negli altri casi (**Figg. 14b** e **c**).



a. Piano parallelo al piano *yz*. **b. Piano parallelo al piano *xz*.** **c. Piano parallelo al piano *xy*.**

Figura 14

Una *retta* nello spazio può essere definita mediante l'*intersezione* di due piani in cui è contenuta; per esempio, l'asse z è l'intersezione dei due semipiani xz e yz, quindi può essere definito dal sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Esercizi p. 532

2. Dominio, limiti, continuità

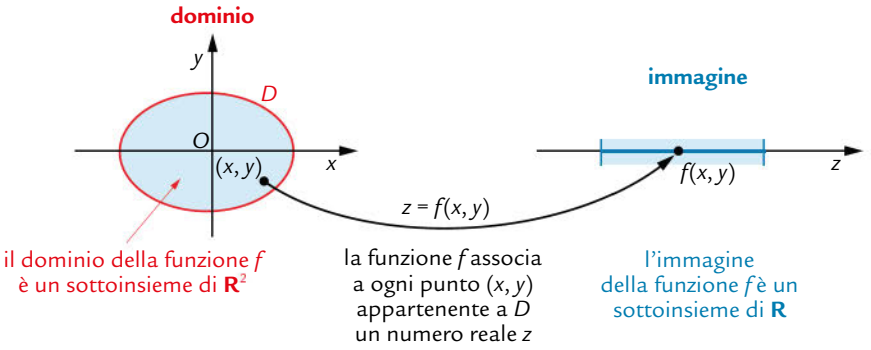
Iniziamo lo studio delle funzioni reali di due variabili reali focalizzando la nostra attenzione sul dominio e sulle nozioni di limite e di continuità.

Dominio

Precisiamo anzitutto la *definizione* di funzione di due variabili.

DEFINIZIONE | Funzione di due variabili

Dato un insieme $D \subseteq \mathbf{R}^2$ e una corrispondenza $f : D \to \mathbf{R}$, si dice che essa è una **funzione** di dominio D e codominio $\mathbf{R}$ se associa a ogni coppia ordinata $(x, y) \in D$ uno e un solo elemento di $\mathbf{R}$.



Una funzione di due variabili viene solitamente assegnata mediante un'equazione del tipo $z = f(x, y)$, dove x e y sono le variabili *indipendenti* mentre z è la variabile *dipendente*, oppure assegnando semplicemente la sua espressione analitica $f(x, y)$.
In analogia con quanto già visto per le funzioni di una variabile, in assenza di indicazioni diverse si sottintende che il **dominio** sia quello **naturale**, ossia l'insieme costituito dalle coppie ordinate (x, y) per cui tutte le operazioni che compaiono nell'espressione analitica della funzione risultano definite. Le condizioni da imporre per individuare il dominio di una funzione di due variabili sono quindi del tutto analoghe a quelle viste per le funzioni di una variabile (i denominatori vanno posti diversi da zero, i radicandi dei radicali di indice pari maggiori o uguali a zero, gli argomenti dei logaritmi maggiori di zero ecc.).

ESEMPI Dominio di una funzione di due variabili

Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

a. $z = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$ **b.** $z = \sqrt{\ln(x + y)}$ **c.** $z = \sqrt{y - x^2} + \ln(x - y + 2)$

a. Affinché il radicando sia non negativo e il denominatore sia diverso da zero deve essere soddisfatta la disequazione:

$$9 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow -x^2 - y^2 > -9 \Rightarrow x^2 + y^2 < 9$$

L'ultima disequazione scritta è soddisfatta in corrispondenza dei punti *interni* del cerchio di centro l'origine e raggio 3, quindi il dominio della funzione data è l'insieme rappresentato in **Fig. 15** (un cerchio, *privato* della circonferenza che lo delimita).

b. Per l'esistenza del radicale dobbiamo imporre la condizione $\ln(x + y) \geq 0$ e per l'esistenza del logaritmo la condizione $x + y > 0$. In definitiva deve essere soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} \ln(x + y) \geq 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x + y) \geq \ln 1 \\ x + y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \geq 1 \\ x + y > 0 \end{cases} \Rightarrow x + y \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 - x$$

L'ultima disequazione scritta rappresenta i punti «al di sopra» della retta di equazione $y = 1 - x$ e i punti appartenenti alla retta stessa, quindi il dominio della funzione originaria è il semipiano rappresentato in **Fig. 16**.

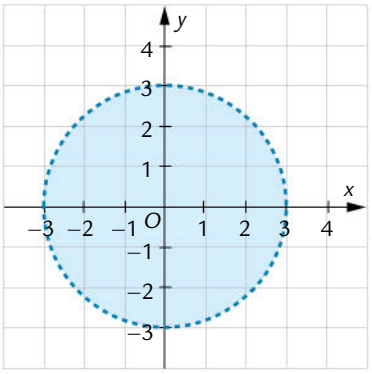


Figura 15

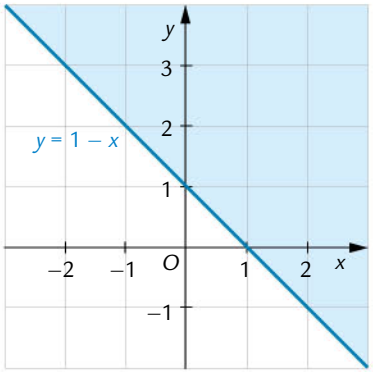


Figura 16

c. La funzione è definita purché siano verificate, contemporaneamente, le seguenti condizioni:

$y - x^2 \geq 0$ per l'esistenza del radicale quadratico

$x - y + 2 > 0$ per l'esistenza del logaritmo

In definitiva, il dominio è dunque costituito dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ x - y + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x^2 \\ -y > -x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x^2 \\ y < x + 2 \end{cases}$$

La prima disequazione rappresenta i punti della parabola di equazione $y = x^2$ e quelli interni a essa; la seconda il semipiano aperto dei punti al di sotto della retta di equazione $y = x + 2$; il dominio della funzione data è perciò il segmento parabolico rappresentato in **Fig. 17**.

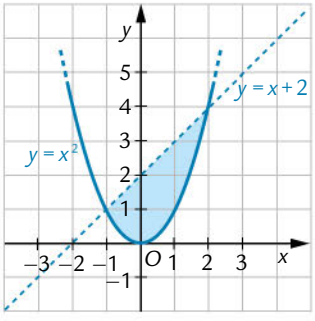


Figura 17

Grafico e curve di livello

Sappiamo che il grafico di una funzione $y = f(x)$ di una variabile, di dominio D, è l'insieme:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in D \wedge y = f(x)\}$$

e rappresenta una *curva* nel piano cartesiano. Analogamente, il grafico di una funzione $z = f(x, y)$ di due variabili, di dominio D, è l'insieme:

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}$$

La sua rappresentazione nello spazio riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali è una *superficie* (**Fig. 18**).

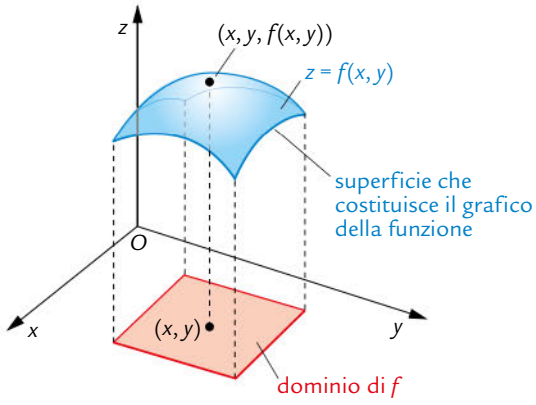


Figura 18

Tracciare il grafico di una funzione di due variabili è generalmente un'operazione poco agevole da effettuare a mano (conviene ricorrere a un opportuno software di calcolo); risulta spesso più semplice (e sufficiente per molti scopi) rappresentare nel piano le *sezioni* ottenute dall'*intersezione* della superficie che costituisce tale grafico con piani orizzontali, ossia paralleli al piano xy. Il procedimento è il seguente: tracciato un piano di equazione $z = k$ che interseca la superficie in esame, la sua intersezione con quest'ultima è una *curva*: la proiezione di tale curva sul piano xy (che in tale piano ha equazione $f(x, y) = k$) è detta **curva** (o **linea**) **di livello** (**Fig. 19**).

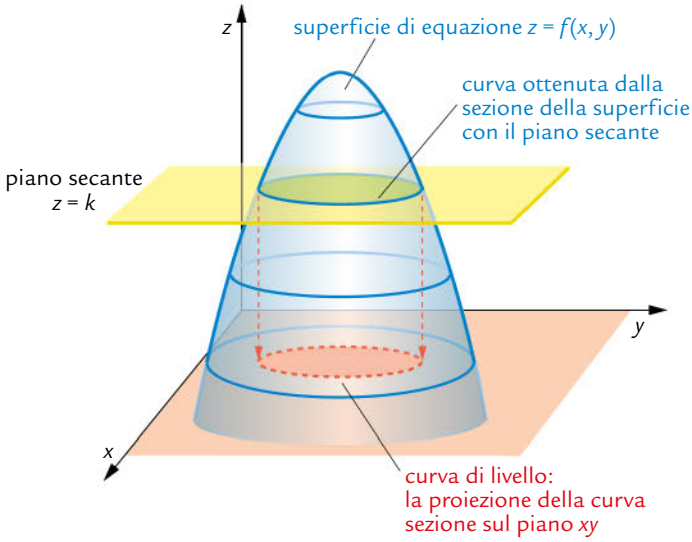


Figura 19

DALLA REALTÀ

Nelle cartine topografiche, le curve altimetriche uniscono i punti della superficie terrestre con la stessa altezza: sono esempi di curve di livello. Analogamente, in metereologia le curve isobare (le curve isoterme) sono costituite dai punti della superficie terrestre con uguale pressione atmosferica (temperatura).

Rappresentando sul piano xy le curve di livello corrispondenti a diversi valori di k si ottiene un'utile rappresentazione della superficie in esame, come mostriamo nel prossimo esempio.

ESEMPIO Curve di livello

Studiamo le curve di livello della funzione $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Le curve di livello hanno equazione $\sqrt{16 - x^2 - y^2} = k$. Affinché le curve di livello non coincidano con l'insieme vuoto deve essere $k \geq 0$. Se è verificata questa condizione, l'equazione delle curve di livello, elevando al quadrato i suoi due membri, può essere scritta nella forma equivalente:

$$x^2 + y^2 = 16 - k^2$$

Si tratta di un fascio di circonferenze concentriche di centro (0, 0) e raggio $r = \sqrt{16 - k^2}$. Ne deduciamo che:

- se $k \geq 0$ (condizione posta all'inizio) e $16 - k^2 > 0$ (condizione per l'esistenza del raggio), ossia se $0 \leq k < 4$, le curve di livello sono circonferenze;
- se $k = 4$, il raggio è nullo e la curva di livello è una circonferenza degenere nell'origine;
- se $k < 0 \vee k > 4$, le linee di livello coincidono con l'insieme vuoto.

La superficie di equazione $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ è la superficie di una *semisfera* (**Fig. 20**); alcune curve di livello sono rappresentate in **Fig. 21**.

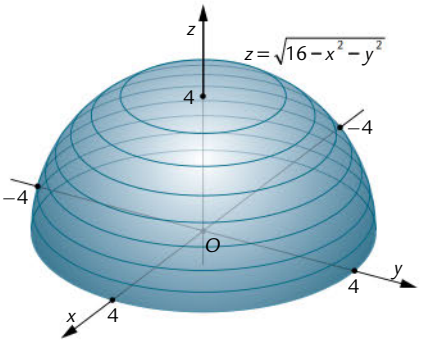


Figura 20

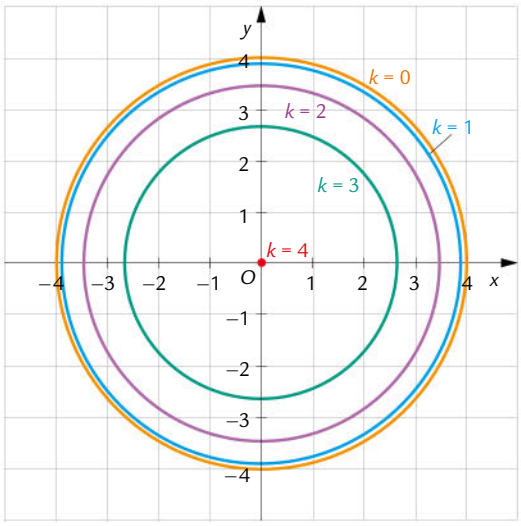


Figura 21

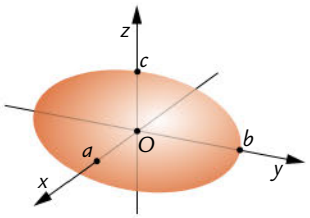
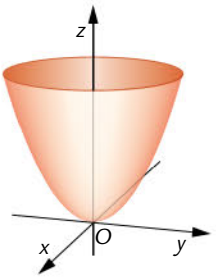
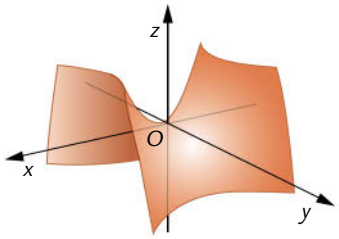
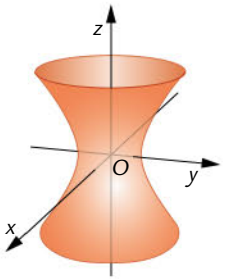
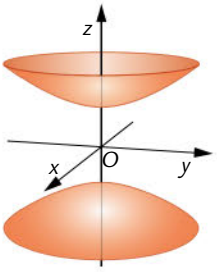
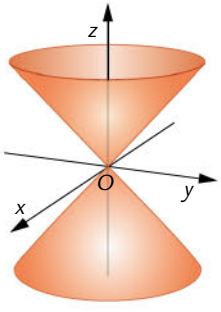
Nello spazio, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, una **superficie** viene definita *più in generale* come il luogo dei punti le cui coordinate (x, y, z) soddisfano un'equazione del tipo $F(x, y, z) = 0$ (le superfici che rappresentano il grafico di una *funzione* di due variabili $z = f(x, y)$ sono solo casi *particolari* di questa definizione). Risultano particolarmente importanti, nelle applicazioni, le superfici **quadriche**, luogo dei punti che soddisfano un'equazione di secondo grado in x, y, z del tipo:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

Nota l'analogia tra la definizione delle *quadriche* e quella delle *coniche*. Le quadriche sono definite da equazioni di secondo grado in x, y, z così come le coniche sono definite da equazioni di secondo grado in x e y. Le quadriche giocano quindi, nello spazio, un ruolo analogo a quello giocato dalle coniche nel piano.

Escludendo i cilindri e i casi degeneri, i vari tipi di quadriche sono quelli riportati in **Tab. 1**.

Tabella 1

Quadriche			
Nome della superficie	**Equazione in forma canonica**	**Grafico**	**Osservazioni**
Ellissoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		Le curve di livello sono ellissi. Anche le sezioni con piani paralleli ai due piani *xz* e *yz* sono ellissi. Se $a = b = c \neq 0$, si ha una superficie sferica.
Paraboloide ellittico	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$		Le curve di livello sono ellissi. Le sezioni con piani paralleli ai due piani *xz* e *yz* sono parabole.
Paraboloide iperbolico	$z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$		Le curve di livello sono iperboli. Le sezioni con piani paralleli ai due piani *xz* e *yz* sono parabole.
Iperboloide a una falda (o iperbolico)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		Le curve di livello sono ellissi. Le sezioni con piani paralleli ai due piani *xz* e *yz* sono iperboli.
Iperboloide a due falde (o ellittico)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		Le curve di livello sono ellissi. Le sezioni con piani paralleli ai due piani *xz* e *yz* sono iperboli.
Doppia superficie conica	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		Le curve di livello sono ellissi. Le sezioni con piani paralleli ai due piani *xz* e *yz* sono iperboli.

Limiti e continuità

Estendiamo ora alle funzioni di due variabili il concetto di *limite*. Intuitivamente, come per le funzioni di una variabile, il significato della scrittura

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

è che quando il punto (x, y) si avvicina al punto (x_0, y_0) (senza tuttavia coincidere con esso), i corrispondenti valori della funzione si avvicinano a l.
Formalmente, la definizione di limite viene data sulla base del concetto di *intorno*, che permette di esprimere il concetto di «vicinanza» a un punto, sulla falsariga della definizione precedentemente vista per le funzioni di una variabile.

DEFINIZIONE | Limite per una funzione di due variabili

Data una funzione $f(x, y)$, di dominio D, sia $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ un punto di accumulazione per D. Diremo che il **limite della funzione** per (x, y) che tende a (x_0, y_0) è l se, per ogni intorno U di l, è possibile determinare un intorno V di (x_0, y_0) tale che, per ogni $(x, y) \in V \cap D$, con $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, risulta $f(x, y) \in U$. In tal caso scriveremo:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \qquad [2]$$

Esplicitando gli intorni, possiamo dire in modo equivalente che:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

quando, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile trovare $\delta > 0$ per cui risulta:

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon$$

per ogni $(x, y) \in D$ per cui

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

OSSERVA
La condizione:
$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$
equivale a:
$(x, y) \neq (x_0, y_0)$

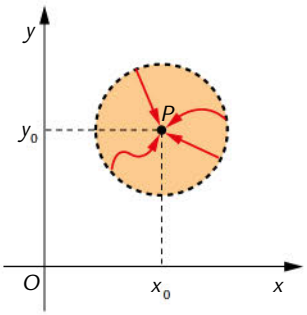


Figura 22 Alcuni possibili percorsi di avvicinamento al punto (x_0, y_0).

È importante osservare che, mentre per le funzioni di una variabile esiste un'*unica* direzione di avvicinamento a un punto x_0, (potendo variare eventualmente solo il verso di avvicinamento, da destra o da sinistra), lavorando con funzioni di due variabili è possibile avvicinarsi al punto (x_0, y_0) lungo *diversi percorsi* (**Fig. 22**).
Se la [2] è verificata, allora comunque si scelga un percorso di avvicinamento al punto (x_0, y_0) la restrizione della funzione $f(x, y)$ a tale percorso deve dare luogo a una funzione (in una variabile) che tende a l; per poter affermare che **non** esiste il limite di una funzione $f(x, y)$ per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ è dunque sufficiente trovare *due* percorsi di avvicinamento a (x_0, y_0) tali che le corrispondenti restrizioni di $f(x, y)$ danno luogo a limiti *diversi*.

ESEMPIO Non esistenza di un limite per una funzione di due variabili

Verifichiamo che la funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

non ammette limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

Consideriamo i due avvicinamenti all'origine (nel piano xy) lungo le bisettrici dei quadranti, cioè lungo le rette di equazioni $y = x$ e $y = -x$.
La restrizione della funzione alla retta di equazione $y = x$ è la funzione:

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Pertanto, se $y = x$:

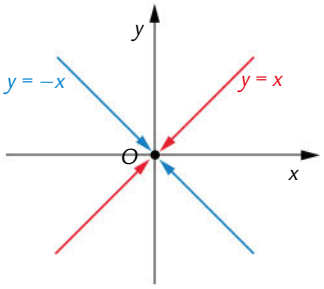
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \underset{\text{se } y=x}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La restrizione della funzione alla retta di equazione $y = -x$ è la funzione:

$$f(x,-x) = \frac{-x^2}{x^2+x^2} = -\frac{1}{2}$$

Pertanto, se $y = -x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \underset{\text{se } y=-x}{=} \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$



Avendo trovato due diversi percorsi di avvicinamento all'origine che danno luogo a limiti diversi, concludiamo che il limite della funzione originaria per $(x, y) \to (0, 0)$ non esiste.

L'analogia tra la definizione di limite per funzioni di due variabili e la definizione per funzioni di una variabile porta come conseguenza che è possibile estendere alle funzioni di due variabili la maggior parte dei teoremi visti per le funzioni di una variabile (in particolare il teorema di unicità del limite e i teoremi sul limite della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni).
Inoltre, grazie alla nozione di limite, possiamo estendere alle funzioni di due variabili anche il concetto di continuità.

DEFINIZIONE | Continuità in un punto per funzioni di due variabili

Data una funzione $f(x, y)$ e un punto (x_0, y_0) appartenente al dominio della funzione e di accumulazione per esso, si dice che la funzione è **continua nel punto** (x_0, y_0) quando il limite della funzione per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ esiste ed è uguale al valore della funzione stessa nel punto (x_0, y_0), ovverosia quando risulta:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

ESEMPIO Esame della continuità in un punto

La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è definita in (0, 0), tuttavia abbiamo mostrato nell'esempio precedente che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **non** esiste, pertanto la funzione **non** è continua nell'origine.

Diremo che una **funzione** di due variabili, di **dominio** D, è **continua** quando lo è in ogni punto appartenente a D.
È possibile dimostrare che una funzione reale di una variabile reale, continua, risulta continua anche se considerata di due variabili; per esempio sono continue le seguenti funzioni di due variabili:

$$f(x, y) = x^2 \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = e^y$$

Tenendo conto di questa osservazione e del fatto che anche per le funzioni di due variabili valgono i teoremi di continuità sulla somma, sul prodotto, sul quoziente e sulla composizione di funzioni continue (purché siano bene definite e il denominatore sia diverso da zero), possiamo dedurre per esempio che:

- la funzione $f(x,y) = x^2 + xy + xe^y$ è continua in $\mathbf{R}^2$;
- la funzione $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ è continua in $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$;
- la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$ è continua nel suo dominio naturale D, cioè nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$.

Esercizi p. 540

3. Derivate parziali

Le definizioni di derivate parziali

Vogliamo ora introdurre, anche per le funzioni di due variabili, il concetto di *derivata*. Studiando le funzioni di una variabile, abbiamo visto che la derivata viene definita come *limite del rapporto incrementale*; il primo problema che si pone, per estendere il concetto di derivata a funzioni di due variabili x e y, è proprio stabilire che cosa si debba intendere per «incremento» della coppia di variabili (x, y); l'idea per superare questo problema è di fare variare una sola variabile alla volta, considerando l'altra come costante. Ragionando in questa ottica, cioè facendo variare la sola variabile x o la sola variabile y, la naturale estensione del concetto di derivata porta alle seguenti definizioni.

DEFINIZIONE | Derivate parziali

Data una funzione $f(x, y)$, di dominio D, sia (x_0, y_0) un punto interno a D.
Si chiama **derivata parziale** della funzione f **rispetto a x nel punto (x_0, y_0)**, e si indica con il simbolo $f'_x(x_0, y_0)$, il limite, se esiste finito, del rapporto incrementale costruito a partire da (x_0, y_0) incrementando solo la variabile x, al tendere a zero dell'incremento:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad [3]$$

Analogamente, si definisce la **derivata parziale** della funzione f **rispetto a y nel punto (x_0, y_0)**:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad [4]$$

RICORDA

Data una funzione $y = f(x)$ e un punto x_0 interno al dominio della funzione, si definisce:

$f'(x_0) =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

(a condizione che il limite esista finito).

La [3], quando venga calcolata in un generico punto (x, y) anziché in un prefissato punto (x_0, y_0), fornisce l'espressione analitica della **funzione derivata parziale** di f rispetto a x, brevemente detta «derivata parziale di f rispetto a x» e indicata con $f'_x(x, y)$ o f'_x.
Analogamente, si può ottenere la (*funzione*) derivata parziale di f rispetto a y, indicata con $f'_y(x, y)$ o f'_y.
Per calcolare la derivata parziale di una funzione $f(x, y)$ rispetto a una delle due variabili, basta considerare l'altra variabile come *costante* e applicare le ordinarie regole di derivazione viste per le funzioni in una sola variabile.

ATTENZIONE!

Il concetto di derivata parziale è stato definito supponendo che il punto sia *interno* al dominio, perché in un punto di *frontiera* potrebbe non essere possibile costruire il rapporto incrementale.

ESEMPI Calcolo di derivate parziali

Calcoliamo le derivate parziali delle due funzioni:

a. $f(x, y) = x^3 + 3x - y^2$ **b.** $f(x, y) = x^3y^2 - xy^2$

a. Per calcolare la derivata parziale rispetto a x, occorre considerare y come costante:

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{x^3 + 3x}_{\text{contiene la variabile } x} - \underbrace{y^2}_{\text{costante nella derivazione rispetto a } x}) = 3x^2 + 3 - 0 = 3x^2 + 3$$

Per calcolare la derivata parziale rispetto a y, occorre considerare x come costante:

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{x^3 + 3x}_{\text{costante nella derivazione rispetto a } y} - \underbrace{y^2}_{\text{variabile}}) = 0 - 2y = -2y$$

b. Ragionando come nel caso precedente, abbiamo:

$f'_x(x, y) = 3x^2 \cdot y^2 - 1 \cdot y^2 = 3x^2y^2 - y^2$

$f'_y(x, y) = x^3 \cdot 2y - x \cdot 2y = 2x^3y - 2xy$

NOTAZIONI ALTERNATIVE

Le derivate parziali della funzione f nel punto (x_0, y_0), oltre che con i simboli $f'_x(x_0, y_0)$ ed $f'_y(x_0, y_0)$ vengono indicate con i simboli:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Le funzioni derivate parziali, oltre che con f'_x ed f'_y, vengono indicate con i simboli: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

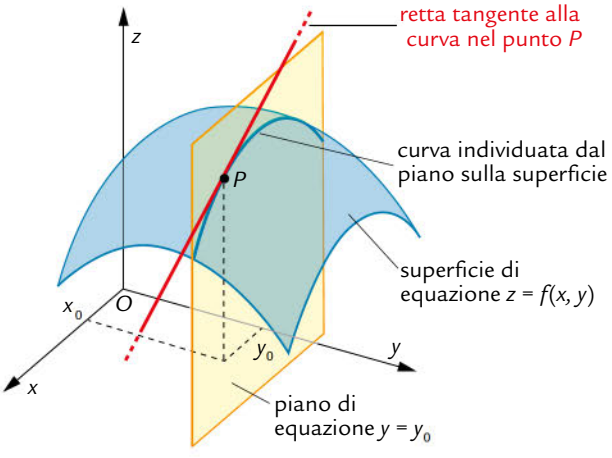
VISUALIZZIAMO I CONCETTI — Il significato geometrico delle derivate parziali

- In base a quanto detto, la derivata parziale rispetto a x nel punto (x_0, y_0) di una funzione $f(x, y)$ può essere calcolata con il seguente procedimento:
  - si considera la variabile y come una costante, uguale a y_0, e si fissa l'attenzione sulla funzione $f(x, y_0)$ nella sola variabile x;
  - si calcola la derivata in x_0 della funzione $f(x, y_0)$.

- Osserviamo ora che:
  - fissare $y = y_0$ significa, geometricamente, intersecare la superficie di equazione $z = f(x, y)$ con il piano di equazione $y = y_0$, ottenendo così una curva;
  - calcolare la derivata di $f(x, y_0)$ in x_0 significa calcolare il coefficiente angolare della retta tangente alla curva ottenuta tramite la sezione nel punto di ascissa x_0 (ricorda infatti che per una funzione $y = f(x)$ di una variabile, la derivata prima della funzione f nel punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.

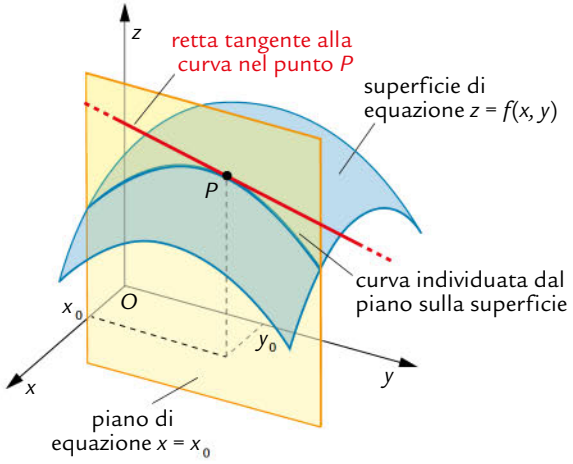
Si deduce così il significato geometrico di $f'_x(x_0, y_0)$ illustrato nella didascalia della **Fig. 23a**.

- Con un ragionamento analogo si deduce il significato geometrico di $f'_y(x_0, y_0)$ illustrato nella didascalia della **Fig. 23b**.



a. Sezionando la superficie di equazione $z = f(x, y)$ con il piano di equazione $y = y_0$, si ottiene una curva. La retta tangente a questa curva nel punto P di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha coefficiente angolare m uguale alla derivata parziale rispetto a x della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0), vale a dire:

$m = f'_x(x_0, y_0)$



b. Sezionando la superficie di equazione $z = f(x, y)$ con il piano di equazione $x = x_0$, si ottiene una curva. La retta tangente a questa curva nel punto P di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha coefficiente angolare m uguale alla derivata parziale rispetto a y della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0), vale a dire:

$m = f'_y(x_0, y_0)$

Figura 23

Il concetto di derivata parziale si può facilmente estendere a funzioni di più di due variabili; consideriamo per esempio la funzione:

$$f(x, y, z) = x^3y^2z + 2x + 3y + z$$

Abbiamo che:

- la derivata parziale di f rispetto a x si ottiene derivando rispetto a x, considerando y e z costanti:
$$f'_x(x, y, z) = 3x^2y^2z + 2$$
- la derivata parziale di f rispetto a y si ottiene derivando rispetto a y, considerando x e z costanti:
$$f'_y(x, y, z) = 2x^3yz + 3$$
- la derivata parziale di f rispetto a z si ottiene derivando rispetto a z, considerando x e y costanti:
$$f'_z(x, y, z) = x^3y^2 + 1$$

RIFLETTI

Così come una funzione di due variabili è definita in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$, analogamente una funzione di tre variabili ha per dominio un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$.

Derivate parziali di secondo ordine

Una volta calcolate le derivate parziali f'_x ed f'_y di una funzione f (dette derivate parziali **prime**), se f'_x ed f'_y risultano a loro volta derivabili rispetto a x e a y è possibile calcolarne nuovamente le derivate parziali, ottenendo le cosiddette **derivate parziali seconde**. Si hanno in tutto quattro possibili derivate parziali seconde, come riassunto nella seguente tabella.

NOTAZIONI ALTERNATIVE

Simboli equivalenti a: f''_{xx}, f''_{yy} **sono:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Simboli equivalenti a: f''_{xy}, f''_{yx} **sono:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

Ordine di derivazione	Simbolo per indicare la corrispondente derivata parziale seconda
Si deriva f'_x rispetto a x	f''_{xx}
Si deriva f'_x rispetto a y	f''_{xy}
Si deriva f'_y rispetto a x	f''_{yx}
Si deriva f'_y rispetto a y	f''_{yy}

Le due derivate parziali seconde f''_{xy} ed f''_{yx} vengono dette derivate parziali **miste**.

ESEMPIO Calcolo di derivate parziali seconde

Data la funzione $f(x,y) = 2x^4 - 4xy^2$, calcoliamo le derivate parziali seconde.

Calcoliamo anzitutto le derivate parziali prime:

$$f'_x(x, y) = 8x^3 - 4y^2 \quad \text{e} \quad f'_y(x, y) = -8xy$$

Ora calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$f''_{xx}(x, y) = 24x^2 \quad \text{e} \quad f''_{xy}(x, y) = -8y$$
$$f''_{yx}(x, y) = -8y \quad \text{e} \quad f''_{yy}(x, y) = -8x$$

Nell'esempio precedente le due derivate parziali seconde *miste* sono risultate entrambe uguali a $-8y$ e quindi uguali fra loro. Si tratta di una proprietà vera in generale? La risposta è *negativa*; infatti esistono esempi di funzioni di due variabili che ammettono derivate parziali miste *diverse* tra loro, tuttavia l'uguaglianza di f''_{xy} ed f''_{yx} è una proprietà vera per tutte le funzioni con cui si lavora comunemente, in forza del teorema seguente.

TEOREMA 2 | Teorema di Schwarz

Se una funzione $z = f(x, y)$ ammette entrambe le derivate parziali miste f''_{xy} ed f''_{yx} e tali derivate sono continue in un punto (x_0, y_0), allora:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

In particolare, dal **Teorema 2** segue che una funzione $f(x, y)$ ammette derivate parziali miste uguali ogni qualvolta queste ultime sono funzioni continue.

Il concetto di derivabilità

L'introduzione delle derivate parziali ci consente di definire il concetto di *derivabilità* di una funzione in un punto anche per le funzioni di due variabili.

DEFINIZIONE | Funzione derivabile

Una funzione $f(x, y)$ viene detta **derivabile** in (x_0, y_0) se in tale punto ammette sia la derivata parziale rispetto a x, sia la derivata parziale rispetto a y.

È importante osservare che il concetto di funzione *derivabile* per le funzioni di due variabili presenta sostanziali *differenze* rispetto all'analogo concetto per le funzioni di una variabile: mentre per le funzioni in una variabile, infatti, la *derivabilità* in un punto implica la *continuità* nel punto, ciò non è più vero per le funzioni di due variabili, come mostra il seguente controesempio.

CONTROESEMPIO Funzione derivabile ma non continua in un punto

Verifichiamo che la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

è derivabile in (0, 0), pur non essendo continua in tale punto.

La funzione è definita in (0, 0) ma, come abbiamo verificato in uno degli esempi precedenti, **non** esiste il limite delle funzione per $(x, y) \to (0, 0)$, dunque la funzione **non** è continua in tale punto.

D'altra parte, la funzione è identicamente nulla sia sull'asse x (ossia per $y = 0$) sia sull'asse y (ossia per $x = 0$), perciò le derivate parziali nell'origine devono esistere ed essere uguali a 0, come è confermato anche dal calcolo in base alla definizione:

$$f_x'(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$

Per vedere garantita la continuità di una funzione di due variabili in un punto (x_0, y_0) in cui è derivabile, occorre richiedere una proprietà «più forte» della derivabilità, la cosiddetta **differenziabilità**, su cui però non ci soffermeremo ulteriormente.

Il piano tangente a una superficie

Studiando le funzioni di una variabile abbiamo visto che il concetto di derivata consente di affrontare il problema del calcolo dell'equazione della *retta tangente* a una curva di equazione $y = f(x)$ in un suo punto.

L'analogo problema che si pone per le funzioni di due variabili è quello del calcolo dell'equazione del *piano tangente* in un punto alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ (**Fig. 24**).

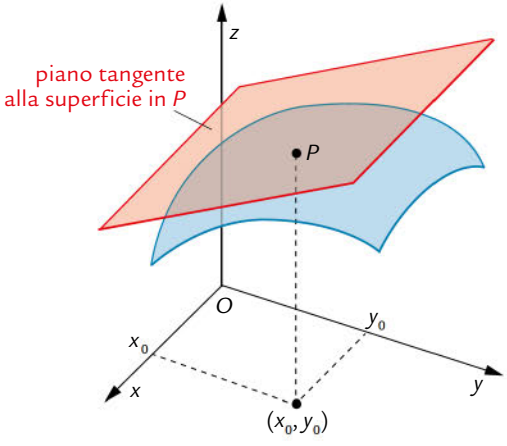


Figura 24

Prima di occuparci della ricerca dell'*equazione* del piano tangente, dobbiamo però chiederci sotto quali condizioni tale piano tangente *esiste*.
Per le funzioni di una variabile infatti abbiamo visto che l'esistenza della retta tangente in un punto x_0 è garantita se la funzione è derivabile in x_0; per le funzioni di due variabili le cose **non** vanno altrettanto bene.

Gli esempi nelle seguenti figure mostrano infatti che il piano tangente in un punto (x_0, y_0), oltre a non esistere quando cade la derivabilità in (x_0, y_0) (**Fig. 25**), può non esistere anche quando la funzione è derivabile in (x_0, y_0) (**Fig. 26**).

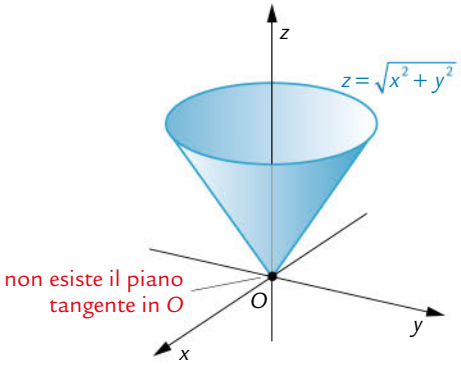


Figura 25 La funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è *continua* nell'origine, ma si può facilmente verificare che **non** è ivi derivabile. Infatti, calcolando le derivate parziali in (0, 0) in base alla definizione, si trova che esse non esistono. Di conseguenza non esiste il piano tangente in *O* alla superficie di equazione $z = f(x, y)$, come si intuisce anche dal grafico della superficie (una superficie conica con vertice nell'origine).

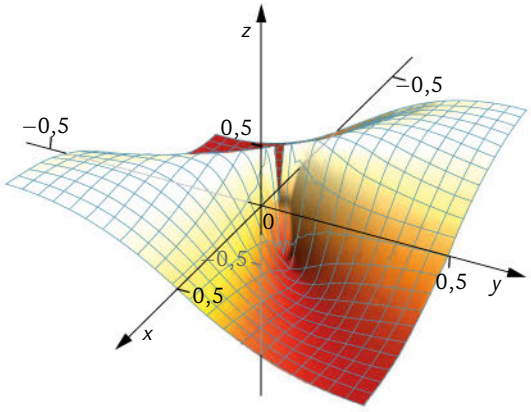


Figura 26 Come abbiamo visto negli esempi precedenti, la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è *derivabile* nell'origine. Ciò nonostante, non esiste il piano tangente nell'origine alla superficie di equazione $z = f(x, y)$, come si può intuire dal grafico: la funzione assume infatti tutti i valori compresi tra −0,5 e 0,5 in ogni intorno dell'origine, di raggio arbitrariamente piccolo. D'altra parte, la non esistenza del piano tangente si poteva prevedere anche dal fatto che la funzione $f(x, y)$ non è continua in (0, 0).

Fortunatamente, nei casi delle funzioni con cui si lavora più comunemente, ossia per le funzioni dotate di *derivate parziali prime continue*, si può dimostrare che il piano tangente *esiste*. Supposto dunque di essere in questa situazione, quale sarà l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa x_0 e ordinata y_0? Ragioniamo come segue, facendo riferimento alla **Fig. 27**.

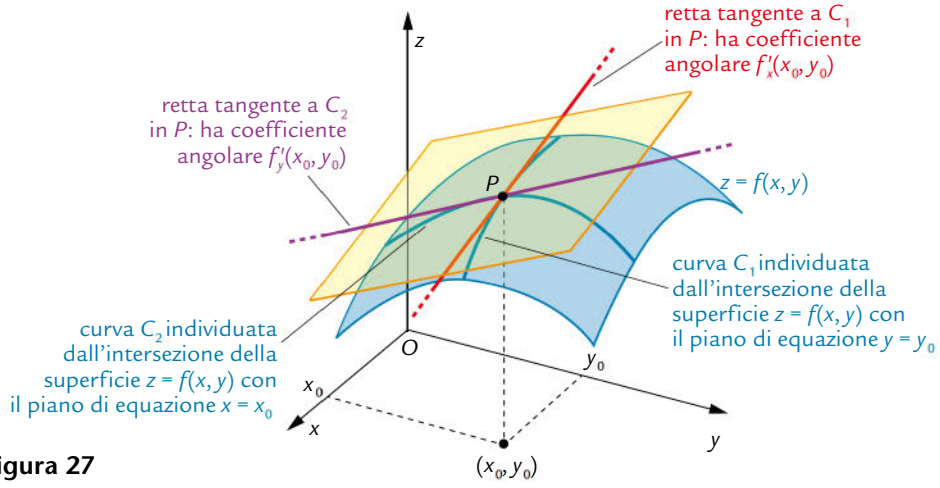


Figura 27

1. L'equazione del piano tangente, dovendo passare per il punto P di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, deve essere del tipo:

$$z = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$ vedi il Paragrafo 1

2. Se intersechiamo con il piano di equazione $y = y_0$ la superficie di equazione $z = f(x, y)$ e il suo piano tangente in P (**Fig. 27**), otteniamo rispettivamente la curva che sul piano $y = y_0$ ha equazione $z = f(x, y_0)$ e la retta tangente a tale curva nel punto di ascissa x_0, retta la cui equazione (sempre nel piano $y = y_0$) sarà:

$$z = f(x_0, y_0) + a(x - x_0)$$ Poni $y = y_0$ nell'equazione del piano

ATTENZIONE!

Stiamo assumendo implicitamente che il piano tangente **non** sia parallelo all'asse *z*; in effetti si potrebbe dimostrare che, nelle ipotesi assunte (continuità delle derivate parziali), questa condizione è certamente verificata.

D'altra parte, in base a quanto osservato all'inizio del paragrafo (nella rubrica **Visualizziamo i concetti**), tale retta deve avere coefficiente angolare uguale a $f'_x(x_0, y_0)$, dunque deve essere:

$$a = f'_x(x_0, y_0)$$

3. Intersecando con il piano di equazione $x = x_0$ la superficie di equazione $z = f(x, y)$ e il suo piano tangente in P, e ragionando analogamente al punto 2, si deduce che:

$$b = f'_y(x_0, y_0)$$

In definitiva, l'equazione del piano tangente deve essere:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Riassumiamo la discussione fin qui effettuata nel seguente teorema.

TEOREMA 3 | Esistenza ed equazione del piano tangente a una superficie

Se $f(x, y)$ è una funzione per cui esistono e sono continue le derivate parziali in un punto (x_0, y_0), allora esiste il piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa x_0 e ordinata y_0, e l'equazione di tale piano è:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad [5]$$

ESEMPIO Equazione del piano tangente

Determiniamo l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = x^3 - ye^x - y^2$ nel suo punto di ascissa $x = 0$ e ordinata $y = 1$.

Allo scopo di applicare la [5] calcoliamo anzitutto il valore assunto in (0, 1) dalla funzione data e dalle sue derivate parziali:

$f(x, y) = x^3 - ye^x - y^2$ quindi $f(0, 1) = -2$

$f'_x(x, y) = 3x^2 - ye^x$ quindi $f'_x(0, 1) = -1$

$f'_y(x, y) = -e^x - 2y$ quindi $f'_y(0, 1) = -3$

Abbiamo ora tutti gli elementi per applicare la [5]:

$$z = -2 + (-1)(x - 0) + (-3)(y - 1)$$

da cui, svolgendo i calcoli:

$$z = -x - 3y + 1$$

Il differenziale

Studiando le funzioni in una variabile, abbiamo visto che data una funzione $y = f(x)$ e un punto x_0 interno al dominio della funzione, la variazione subita da y in seguito a una piccola variazione (indicata con dx) di x_0, è approssimativamente uguale al differenziale (indicato con dy) della funzione f relativo al punto x_0 e all'incremento dx:

$$dy = f'(x_0)\,dx$$

La nozione di differenziale si può estendere alle funzioni in due variabili come segue.

DEFINIZIONE | Differenziale di una funzione in due variabili

Data la funzione $z = f(x, y)$ e un punto $P(x_0, y_0)$, interno al dominio di f si chiama ***differenziale*** della funzione f, relativo al punto P e agli incrementi dx e dy, l'espressione:

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy \qquad [6]$$

Il differenziale della funzione $z = f(x, y)$ relativo al punto $P(x_0, y_0)$ permette di valutare con buona approssimazione la variazione subita dalla variabile z quando x_0 subisce un piccolo incremento dx e nel contempo y_0 subisce un piccolo incremento dy.

Ciò dipende dal fatto che, in prossimità del punto P, il grafico della funzione f è ben approssimato dal grafico del piano a esso tangente in P, dunque è possibile approssimare la variazione Δz (effettiva) subita da z nel passaggio da (x_0, y_0) a $(x_0 + dx, y_0 + dy)$, con la variazione, diciamo dz, subita da z sul piano tangente in P al grafico della funzione (**Fig. 28**).

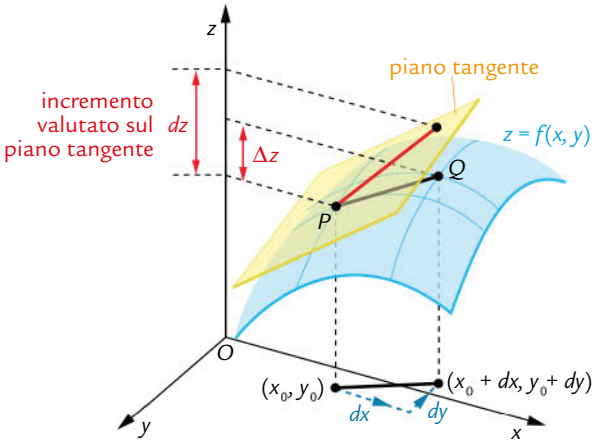


Figura 28

In formule, detta $z = T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ l'equazione del piano tangente nel punto $P\,(x_0, y_0)$, abbiamo che:

$$\Delta z = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$$

$$dz = \underbrace{T(x_0 + dx, y_0 + dy)}_{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy} - \underbrace{T(x_0, y_0)}_{f(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

e quindi: $\Delta z \simeq \underbrace{f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0 y_0)dy}_{dz}$

Esercizi p. 548

4. Massimi e minimi

Definizioni di punto di massimo e minimo, relativi e assoluti, per funzioni di due variabili

DEFINIZIONE | Punti di massimo e minimo relativi

Si dice che (x_0, y_0) è un **punto di massimo relativo** (o locale) per la funzione $f(x, y)$, di dominio D, se esiste un intorno I di (x_0, y_0) tale che:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \qquad \text{per ogni } (x, y) \in I \cap D$$

Analogamente, si dice che (x_0, y_0) è un **punto di minimo relativo** per la funzione $f(x, y)$, di dominio D, se esiste un intorno I di (x_0, y_0) tale che:

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \qquad \text{per ogni } (x, y) \in I \cap D$$

I punti di minimo relativo e i punti di massimo relativo di una funzione si dicono punti di **estremo relativo**.

Il *valore assunto* dalla funzione in corrispondenza di un *punto* (x_0, y_0) di massimo (minimo) relativo, cioè $f(x_0, y_0)$, è detto **massimo** (**minimo**) **relativo** della funzione. Se le condizioni espresse nelle definizioni precedenti valgono per *tutti* i punti del *dominio* D (anziché in $I \cap D$), allora i punti di massimo e minimo sono detti **assoluti**.

ATTENZIONE!

Rifletti sulle differenze nel linguaggio: chiamiamo «punto di massimo» il punto di coordinate (x_0, y_0) e «massimo» il valore $f(x_0, y_0)$ assunto dalla funzione in corrispondenza di un punto di massimo. Analoga distinzione vale per i concetti di «punto di minimo» e di «minimo». Di conseguenza massimi e minimi sono espressi da *numeri reali*, mentre i punti di massimo e di minimo sono espressi da *coppie ordinate* di numeri reali. Si parla talvolta di «punti di massimo e minimo» anche per riferirsi al punto di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sulla superficie di equazione $z = f(x, y)$.

DEFINIZIONE | Punti di massimo e minimo assoluti

Si dice che (x_0, y_0) è un **punto di massimo assoluto** (o **globale**) per la funzione $f(x, y)$, di dominio D, se risulta:

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in D$$

Analogamente, si dice che (x_0, y_0) è un **punto di minimo assoluto** per la funzione $f(x,y)$, di dominio D, se risulta:

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in D$$

I punti di minimo e di massimo assoluti di una funzione si dicono **punti di estremo assoluto**.

Il *valore* assunto dalla funzione in corrispondenza di un punto (x_0, y_0) di massimo (minimo) assoluto, cioè $f(x_0, y_0)$, è detto **massimo** (**minimo**) **assoluto** della funzione. Come abbiamo già osservato per le funzioni di una variabile, i punti di estremo assoluto sono anche punti di estremo relativo, mentre un punto di estremo relativo **non** è necessariamente un punto di estremo assoluto (vedi la **Fig. 29**).

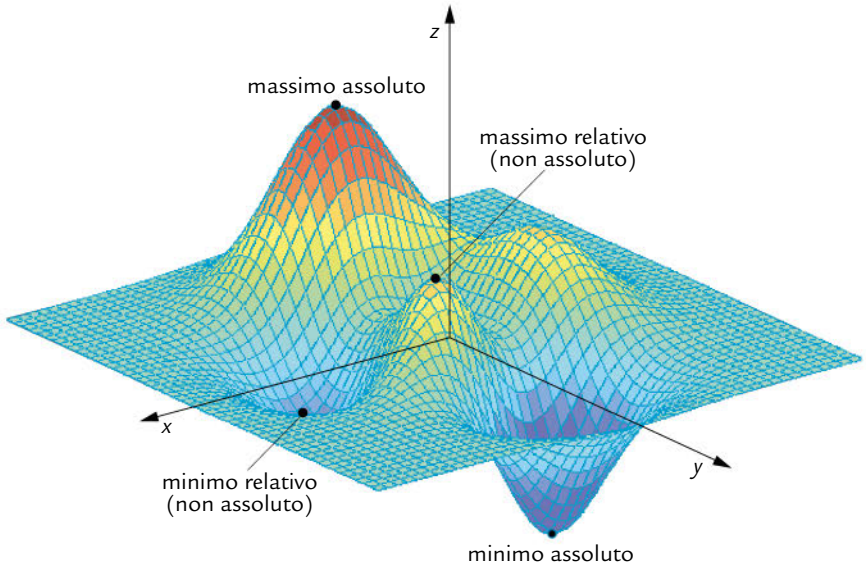


Figura 29

Circa l'esistenza di minimo e massimo assoluti per le funzioni di due variabili vale la seguente generalizzazione del teorema di Weierstrass.

TEOREMA 4 | Teorema di Weierstrass

Se una funzione $f(x, y)$ è continua in un insieme $D \subset \mathbf{R}^2$ chiuso e limitato, allora tale funzione ammette massimo e minimo assoluti in D.

Massimi e minimi liberi

Nell'**Unità 6** abbiamo visto che se un punto x_0, *interno* al dominio di una funzione $y = f(x)$, è punto di *estremo relativo* e in tale punto la funzione è derivabile, allora la *retta tangente* al grafico della funzione in $(x_0, f(x_0))$ deve essere *orizzontale*, quindi deve risultare $f'(x_0) = 0$ (**Fig. 30a** a pagina seguente).
Per le funzioni di due variabili, il ruolo giocato dalla *retta tangente* viene svolto dal *piano tangente* (**Fig. 30b** a pagina seguente).
Precisamente, se in un punto (x_0, y_0) *interno* al dominio di una funzione $z = f(x, y)$ la funzione presenta un punto di estremo relativo ed esiste il piano tangente, quest'ultimo deve essere orizzontale.

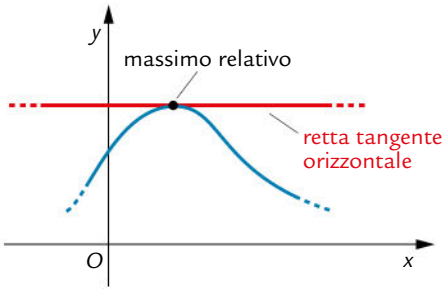
Poiché l'equazione del piano tangente è:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

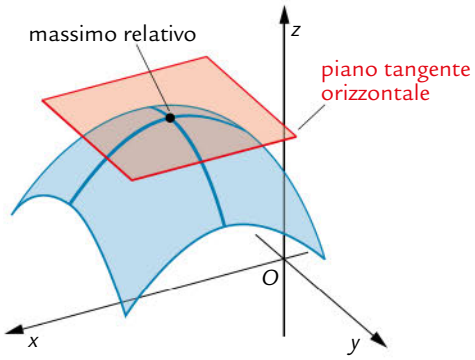
affinché esso risulti orizzontale la sua equazione deve essere del tipo $z = k$, con $k \in \mathbf{R}$, pertanto si deve avere:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Questo risultato, dedotto con considerazioni intuitive (sotto l'ipotesi di esistenza del piano tangente), potrebbe essere dimostrato, sotto la sola ipotesi di derivabilità.



a. Nel piano (funzioni di una variabile).



b. Nello spazio (funzioni di due variabili).

Figura 30

TEOREMA 5 | Condizione necessaria per l'esistenza di un punto di estremo relativo

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un insieme $D \subseteq \mathbf{R}^2$. **Se** (x_0, y_0) è un punto di massimo o minimo relativo **interno** all'insieme D e se **esistono** le derivate parziali prime di f in (x_0, y_0), allora risulta:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Un punto (x_0, y_0) che annulla sia la derivata parziale rispetto a x sia la derivata parziale rispetto a y di una funzione $f(x, y)$ è detto punto **stazionario** (o *critico*). Esistono (come per le funzioni di una variabile) punti stazionari che **non** sono né di massimo né di minimo: tali punti vengono chiamati **punti di sella** (o **di colle**).

Per esempio, la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ ha un punto di sella nell'origine (**Fig. 31**). Tipicamente, nell'intorno di un punto di sella, il grafico di una funzione di due variabili ha un comportamento simile a quello presentato nell'intorno dell'origine dalla funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$, tuttavia esistono casi differenti: vedi per esempio la funzione $f(x, y) = x^3$ (**Fig. 32**).

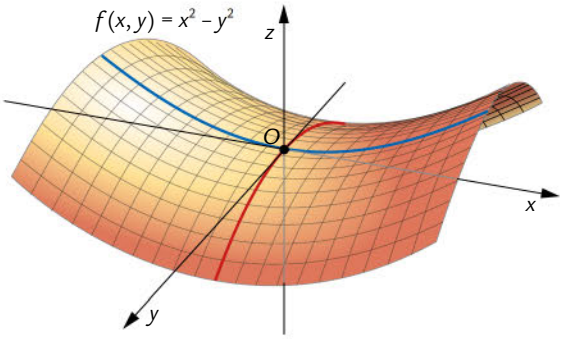


Figura 31 Tra le curve passanti per il punto di sella O e appartenenti alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ ne esistono alcune per cui l'origine è un punto di *minimo* (per esempio la curva in blu ottenuta dalla sezione della superficie con il piano $y = 0$) e altre per cui l'origine è un punto di *massimo* (per esempio la curva in rosso ottenuta dalla sezione della superficie con il piano $x = 0$).

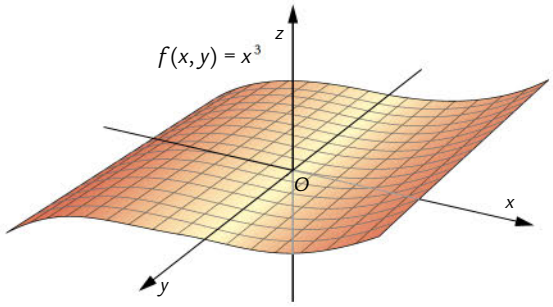


Figura 32 Tutti i punti di coordinate $(0, k)$, con k reale, sono punti di sella. In particolare, è un punto di sella l'origine O. In questo caso non è possibile individuare curve passanti per O e appartenenti alla superficie $z = f(x, y)$ per cui l'origine è un punto di massimo o di minimo: il comportamento della funzione in un intorno di O è paragonabile a quello di una funzione di una variabile nell'intorno di un punto di flesso orizzontale.

Ci troviamo dunque in una situazione di perfetta analogia con quanto visto per le funzioni di una variabile: il **Teorema 5** esprime una condizione (la stazionarietà) *necessaria* (*ma non sufficiente*) perché un punto (x_0, y_0) sia di estremo relativo. È necessario perciò disporre di un criterio che consenta di individuare la natura dei punti stazionari. Per enunciare tale criterio, dobbiamo premettere la seguente definizione.

DEFINIZIONE | Hessiano

Sia $f(x, y)$ una funzione che ammette derivate parziali seconde continue in (x_0, y_0). Si definisce **hessiano** di f nel punto (x_0, y_0), e si indica con il simbolo $H(x_0, y_0)$, il seguente determinante:

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

TEOREMA 6 | Criterio per l'analisi dei punti stazionari

Sia $f(x, y)$ una funzione che ammette derivate parziali seconde continue e sia (x_0, y_0) un suo punto stazionario; allora vale quanto segue:

a. se $\begin{cases} H(x_0, y_0) > 0 \\ f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \end{cases}$, il punto (x_0, y_0) è di minimo relativo;

b. se $\begin{cases} H(x_0, y_0) > 0 \\ f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \end{cases}$, il punto (x_0, y_0) è di massimo relativo;

c. se $H(x_0, y_0) < 0$, il punto (x_0, y_0) è di sella;

d. se $H(x_0, y_0) = 0$, occorre procedere a ulteriori analisi per stabilire la natura del punto (x_0, y_0).

Il **Teorema 5** costituisce quindi un filtro preliminare, che ci consente di determinare i punti *candidati* a essere di estremo relativo (i punti stazionari); il **Teorema 6** ci consente di stabilire l'*effettiva natura* dei punti stazionari (eccetto il caso in cui l'hessiano è nullo, di cui non ci occuperemo).

ESEMPIO Ricerca dei punti di estremo relativo

Determiniamo gli eventuali punti di estremo relativo o di sella della funzione $f(x, y) = 2x^3 + 4y^2 - 12xy$.

- **Individuiamo gli eventuali punti stazionari**

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 12y = 0 \\ 8y - 12x = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni: $(0, 0)$ e $\left(3, \frac{9}{2}\right)$.

- **Calcoliamo l'hessiano**

Determiniamo anzitutto le derivate parziali seconde:

$$f''_{xx} = 12x; \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -12; \quad f''_{yy} = 8$$

L'hessiano, nel generico punto (x, y), è quindi:

$$H(x, y) = f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - [f''_{xy}(x, y)]^2 = 12x \cdot 8 - (-12)^2 = 96x - 144$$

- **Studiamo la natura dei punti stazionari**

Punto stazionario	Valore di f''_{xx}	Valore dell'hessiano	Natura del punto
$(0, 0)$	0	–144	Punto di sella L'hessiano è negativo
$\left(3, \frac{9}{2}\right)$	36	144	Punto di minimo relativo Sia l'hessiano sia f''_{xx} sono positivi

Massimi e minimi vincolati

In molte applicazioni pratiche in cui si è interessati a determinare i punti di massimo e minimo di una funzione $z = f(x, y)$, le variabili *indipendenti* x e y sono soggette a dei *vincoli*: si parla in questo caso di massimi e minimi **vincolati**, per distinguerli dai massimi e minimi **liberi** di cui ci siamo occupati nel sottoparagrafo precedente. Pensiamo per esempio a un problema di ottimizzazione del profitto: quest'ultimo sarà espresso in funzione di alcune variabili indipendenti, che non potranno essere libere di assumere qualsiasi valore, ma saranno soggette a un *vincolo di bilancio*.
Si pone dunque il problema della ricerca dei punti di massimo e minimo di una funzione $z = f(x, y)$, con x e y soggette a un dato vincolo. In questo sottoparagrafo supporremo che il *vincolo* sia espresso sotto forma di *equazione* nelle due variabili x e y, diciamo $g(x, y) = 0$.

VISUALIZZIAMO I CONCETTI **Ottimizzazione vincolata**

- L'equazione del vincolo $g(x, y) = 0$ in generale rappresenta una curva C_1 nel piano xy. Geometricamente, il problema della ricerca dei punti di estremo vincolato equivale a restringere il *dominio* della funzione $z = f(x, y)$ a tale curva (la retta colorata in rosso nel caso particolare illustrato in **Fig. 33**) e a focalizzare l'attenzione sui punti $(x, y, f(x, y))$, appartenenti alla superficie di equazione $z = f(x, y)$, aventi ascissa e ordinata soddisfacenti il vincolo: questi ultimi punti definiscono una seconda curva C_2 (la curva in blu in **Fig. 33**): ricercare il massimo e il minimo assoluto della funzione, soggetta al vincolo $g(x, y) = 0$, significa cercare il massimo e il minimo sulla *curva* C_2, *anziché* su tutta la *superficie*.
- Un punto di estremo vincolato può non risultare un punto di estremo relativo per la funzione considerata, qualora venga rimosso il vincolo: per esempio, in riferimento alla **Fig. 33**, il punto di massimo assoluto per la funzione $z = f(x, y)$ (senza vincolo) risulta $P(x_P, y_P)$, mentre il punto di massimo assoluto vincolato risulta $Q(x_Q, y_Q)$ e quest'ultimo non è un punto di massimo (né relativo né assoluto) per la funzione originaria.

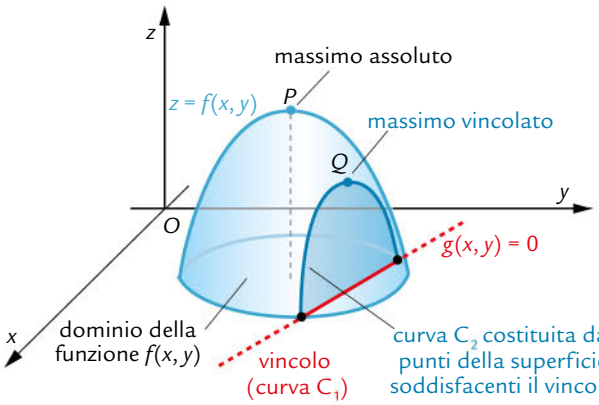


Figura 33

Illustreremo tre metodi per la ricerca dei punti di estremo vincolato:

1. il *metodo di sostituzione*;
2. il *metodo delle curve di livello*;
3. il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*.

Il **metodo di sostituzione** può essere applicato quando è semplice esplicitare il vincolo $g(x, y) = 0$ rispetto a una delle due variabili: in tal caso, l'espressione che esprime una variabile in funzione dell'altra può essere sostituita nell'espressione analitica $f(x, y)$ della funzione che si vuole ottimizzare e il problema può essere ricondotto a un problema in una sola variabile, come mostriamo nel seguente esempio.

ESEMPIO Massimi e minimi vincolati con il metodo di sostituzione

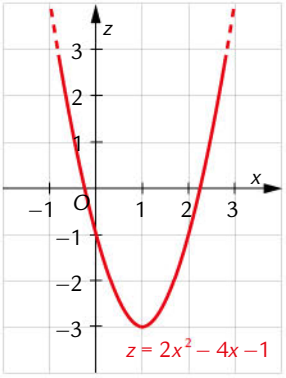
Determiniamo gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto della funzione $z = f(x,y) = x^2 + y^2 + 4y - 1$, soggetta al vincolo $x + y = 0$.

Poiché in questo caso l'equazione del vincolo è *lineare*, è facile esplicitare per esempio la variabile y. Si ha $y = -x$ e, sotto questa condizione, la funzione data diventa:

$$f(x,-x) = x^2 + (-x)^2 + 4(-x) - 1 = 2x^2 - 4x - 1$$

Il problema iniziale, di ottimizzazione vincolata in due variabili, è così ricondotto a un problema di ottimizzazione libera in una sola variabile; determinare gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto della funzione:

$$z = 2x^2 - 4x - 1$$



Quest'ultima è una funzione di secondo grado, avente come grafico una *parabola* con la concavità verso l'alto, dunque ha un punto di minimo (assoluto) in corrispondenza dell'ascissa del vertice, cioè per:

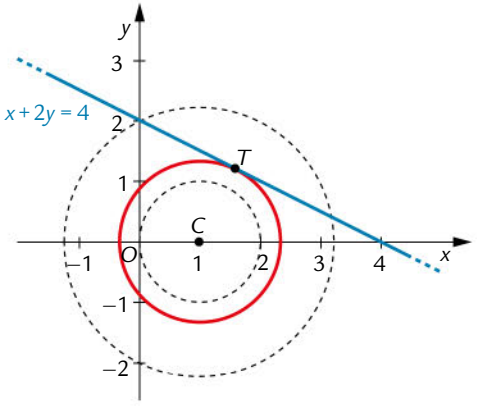
$$x = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$$

Sostituendo questo valore nell'equazione $y = -x$ (ottenuta esplicitando il vincolo) otteniamo $y = -1$ e concludiamo che l'unico punto di estremo vincolato è $(1, -1)$, che è un punto di minimo assoluto.

Il **metodo delle curve di livello** si può utilizzare se è facile rappresentare nel piano cartesiano sia il vincolo $g(x, y) = 0$ sia le curve di livello della funzione $z = f(x, y)$. Illustriamo il metodo analizzando un esempio.

ESEMPIO Metodo delle curve di livello

Determiniamo gli eventuali estremi vincolati della funzione $z = x^2 + y^2 - 2x$ soggetta al vincolo $x + 2y = 4$.



- Rappresentiamo anzitutto il vincolo, ossia la retta di equazione $x + 2y = 4$, e alcune curve di livello della funzione $z = x^2 + y^2 - 2x$; queste ultime hanno equazione:

  $$x^2 + y^2 - 2x = k \quad \text{ossia} \quad x^2 + y^2 - 2x - k = 0 \qquad [7]$$

  pertanto sono circonferenze di centro $C(1, 0)$ e raggio $\sqrt{1+k}$; in particolare, al crescere di k cresce il raggio della circonferenza.
- Osserviamo ora che un eventuale minimo o massimo (assoluto) della funzione soggetta al vincolo assegnato corrisponde all'eventuale minimo o massimo valore di k per cui le curve di livello intersecano il vincolo. Dalla figura si vede che:
  - il minimo valore di k per cui le curve di livello intersecano il vincolo corrisponde al valore di k, diciamo $\bar{k}$, per cui la curva di livello e il vincolo sono tangenti;
  - non esiste un massimo valore di k per cui le curve di livello intersecano il vincolo: infatti per ogni valore di k con $k > \bar{k}$ si ottengono circonferenze che intersecano il vincolo.

  Per individuare il valore di k corrispondente alla configurazione di tangenza si può per esempio imporre che la distanza del centro C dalla retta di equazione $x + 2y - 4 = 0$ sia uguale al raggio della circonferenza [7]; si ottiene così l'equazione:

  $$\frac{|1 + 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{1+k} \quad \text{da cui:} \quad k = \frac{4}{5}$$
- La conclusione è che la funzione assegnata ammette minimo vincolato (anche assoluto) uguale a $\frac{4}{5}$, assunto in corrispondenza del punto di tangenza T, che puoi verificare avere coordinate $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$, mentre non ammette massimo vincolato.

Si potrebbe dimostrare che quanto emerso dall'analisi dell'esempio precedente vale in generale, cioè un eventuale minimo/massimo vincolato (che indichiamo con $\bar{k}$) della funzione $z = f(x, y)$, soggetta al vincolo $g(x, y) = 0$, corrisponde a una **configurazione di tangenza** tra la curva di livello di equazione $f(x, y) = \bar{k}$ e il vincolo.
Proprio a partire da questa proprietà è possibile capire l'idea alla base del terzo metodo che vogliamo illustrare per il calcolo degli estremi vincolati: il **metodo dei moltiplicatori di Lagrange**. Osserva la **Fig. 34** e leggi la relativa didascalia.

RIMANDO
Rivedi i principali concetti sui vettori e sul parallelismo di due vettori nell'Unità Vettori disponibile nell'ebook del Volume 3.

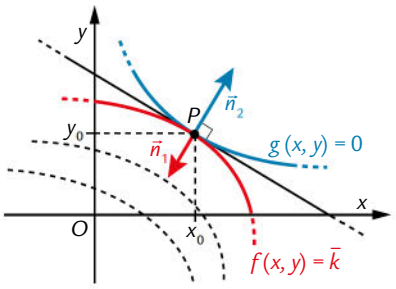


Figura 34 In corrispondenza di un punto di estremo vincolato $P(x_0, y_0)$, il vettore $\vec{n}_1$ normale alla curva di livello di equazione $f(x, y) = \bar{k}$ in P e il vettore $\vec{n}_2$ normale al vincolo in P risultano paralleli (data la tangenza tra vincolo e curva di livello). Pertanto, se $\vec{n}_2 \neq \vec{0}$, deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$.

Poiché si può dimostrare che i due vettori $\vec{n}_1$ ed $\vec{n}_2$ hanno come componenti $\vec{n}_1(f'_x, f'_y)$ ed $\vec{n}_2(g'_x, g'_y)$, ne segue che in corrispondenza di un punto di estremo vincolato in cui $\vec{n}_2 \neq \vec{0}$ devono valere (per un opportuno λ) le relazioni:

$$f'_x = \lambda g'_x \quad \text{ed} \quad f'_y = \lambda g'_y$$

Resta così giustificato intuitivamente il seguente teorema.

RIFLETTI
La funzione $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ è detta lagrangiana e il sistema [8] può interpretarsi come condizione affinché il punto (x_0, y_0, λ) sia stazionario per la lagrangiana. Infatti le tre equazioni che compongono il sistema [8] corrispondono alle condizioni di annullamento delle tre derivate parziali della lagrangiana rispetto alle tre variabili x, y e λ. Possiamo quindi dire che il metodo dei moltiplicatori di Lagrange trasforma un problema di ottimizzazione vincolata in un problema di ottimizzazione libera (per la lagrangiana), introducendo una variabile in più (il moltiplicatore di Lagrange λ).

TEOREMA 7 | Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Consideriamo la funzione $f(x, y)$ e il vincolo $g(x, y) = 0$, essendo f e g due funzioni che supponiamo:

- dotate di derivate parziali prime continue;
- tali che le derivate parziali prime di $g(x, y)$ non si annullano contemporaneamente in corrispondenza di alcun punto appartenente al vincolo.

Se (x_0, y_0) è un punto di estremo vincolato della funzione $f(x, y)$, soggetta al vincolo $g(x, y) = 0$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, detto **moltiplicatore di Lagrange**, tale che (x_0, y_0, λ) soddisfa il sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \lambda g'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) = \lambda g'_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \qquad [8]$$

In pratica il **Teorema 7** ci fornisce una condizione analoga a quella di stazionarietà espressa dal **Teorema 5**: ci dice cioè che i punti (x_0, y_0) *candidati* a essere di estremo vincolato (relativo o assoluto) sono quelli che possono ottenersi risolvendo il sistema [8]. Esistono delle condizioni sufficienti (del tipo di quelle espresse dal **Teorema 6**) per stabilire la natura di questi punti, che illustreremo nella sezione **In un altro modo** a pagina seguente; ora presentiamo un esempio in cui riusciremo a stabilire la natura dei punti stazionari vincolati sulla base degli strumenti già in nostro possesso.

ESEMPIO Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Determiniamo i punti di estremo della funzione $f(x, y) = x + y$, soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 18$.

Osserviamo anzitutto che in questo caso non è agevole esplicitare il vincolo rispetto a x o a y (si introdurrebbero dei radicali), quindi è opportuno applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

- **Individuiamo gli eventuali punti stazionari vincolati**

Nel nostro caso è

$$f(x, y) = x + y \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 18$$

quindi, in base al **Teorema 7**, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 1 = \lambda \cdot (2x) & f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ 1 = \lambda \cdot (2y) & f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ x^2 + y^2 - 18 = 0 & g = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni del sistema si ricava $x = y$; sostituendo nella terza equazione abbiamo allora:

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

Dovendo essere $x = y$, da $x = 3$ si ricava $y = 3$, mentre da $x = -3$ si ricava $y = -3$. Perciò gli unici punti candidati a essere di estremo vincolato sono (3, 3) e (−3, −3).

OSSERVA

Sono soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema 7, infatti:
- **le due funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono continue e hanno derivate parziali continue in tutto $\mathbf{R}^2$;**
- **le derivate parziali di $g(x, y)$, ossia: $g'_x = 2x$ e $g'_y = 2y$ si annullano contemporaneamente solo se $x = y = 0$, cioè nel punto (0, 0), che però non appartiene al vincolo (l'origine non appartiene infatti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 18$).**

- **Studiamo la natura dei punti stazionari**

Per stabilire la natura dei punti stazionari, osserviamo anzitutto che il vincolo, costituito dai punti di una circonferenza, è un insieme *chiuso* e *limitato*. Pertanto, per il teorema di Weierstrass, devono esistere minimo e massimo assoluti della funzione sulla circonferenza. Ora, poiché i punti candidati a essere di massimo o minimo sono solo due, (3, 3) e (−3, −3), e inoltre risulta $f(3, 3) = 6$ e $f(-3, -3) = -6$, è immediato concludere che (3, 3) è un punto di massimo vincolato (che risulta anche assoluto), mentre (−3, −3) è un punto di minimo vincolato (che risulta anche assoluto).

IN UN ALTRO MODO — Il metodo dell'hessiano orlato

Illustriamo un metodo alternativo al modo di ragionare illustrato nell'esempio precedente, per determinare la natura di un punto stazionario vincolato (x_0, y_0), individuato con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e corrispondente al valore $\lambda = \lambda_0$. Esso si basa sul concetto di **determinante**, che puoi rivedere nell'Unità **Matrici** disponibile nell'ebook del **Volume 3**. Il metodo è descritto nella prima colonna della seguente tabella e applicato nella seconda colonna al caso del precedente esempio.

Metodo dell'hessiano orlato	**Esempio** Funzione: $f(x,y) = x + y$ Vincolo: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 18$
1. Si calcola il seguente determinante del terzo ordine, detto **hessiano orlato**: $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & f''_{xx} - \lambda g''_{xx} & f''_{xy} - \lambda g''_{xy} \\ g'_y & f''_{yx} - \lambda g''_{yx} & f''_{yy} - \lambda g''_{yy} \end{vmatrix}$	Osserviamo che: $f'_x(x,y) = 1 \qquad f'_y(x,y) = 1$ $f''_{xx}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$ $g'_x(x,y) = 2x \qquad g'_y(x,y) = 2y$ $g''_{xx}(x,y) = g''_{yy}(x,y) = 2 \qquad g''_{xy}(x,y) = g''_{yx}(x,y) = 0$ dunque l'hessiano orlato risulta: $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & -2\lambda \end{vmatrix} + 2y \begin{vmatrix} 2x & -2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix} =$ sviluppo del determinante secondo la prima riga $= -2x(-4\lambda x) + 2y(4\lambda y) = 8\lambda(x^2 + y^2)$
2. Si valuta l'hessiano orlato in corrispondenza di (x_0, y_0, λ_0) e si conclude come segue: – se $\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, il punto (x_0, y_0) è di massimo vincolato; – se $\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, il punto (x_0, y_0) è di minimo vincolato; – se $\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, non è possibile stabilire la natura del punto (x_0, y_0) secondo questo criterio.	Si è trovato nell'esempio precedente che i due punti vincolati stazionari sono (3, 3) e (−3, −3), corrispondenti rispettivamente a $\lambda = \frac{1}{6}$ e $\lambda = -\frac{1}{6}$. È immediato osservare che: $\overline{H}\left(3, 3, \frac{1}{6}\right) > 0 \Rightarrow$ (3, 3) è un punto di massimo vincolato $\overline{H}\left(-3, -3, -\frac{1}{6}\right) < 0 \Rightarrow$ (−3, −3) è un punto di minimo vincolato

PER SAPERNE DI PIÙ **Significato economico dei moltiplicatori di Lagrange**

Sebbene il metodo dei moltiplicatori di Lagrange possa apparire più complicato di quello di sostituzione dato che introduce *una variabile in più*, esso è molto utilizzato, perché il *moltiplicatore di Lagrange* ha un importante *significato economico*.
Consideriamo, infatti, un problema di ottimizzazione della funzione $f(x, y)$, soggetta al vincolo $g(x, y) = k$; si dimostra che il valore λ_0 del moltiplicatore di Lagrange associato a un certo punto di estremo vincolato (x_0, y_0) esprime (approssimativamente) di quanto varia il massimo o il minimo corrispondente a (x_0, y_0), ossia $f(x_0, y_0)$, in seguito a una variazione di una unità del parametro k. Per esempio, supponiamo che la funzione $f(x, y)$ esprima il profitto e che il parametro k che compare nel vincolo esprima la quantità disponibile di una certa materia prima, acquistabile al prezzo unitario p. Per aumentare la materia prima disponibile di una quantità Δk occorre sostenere un costo $p\Delta k$, mentre il massimo profitto varierà di circa $\lambda_0\Delta k$. Aumentare la quantità di materia prima disponibile risulterà conveniente se e solo se:

$$p\Delta k \leq \lambda_0\Delta k \Rightarrow p \leq \lambda_0$$

Dunque possiamo interpretare il moltiplicatore di Lagrange λ_0 come il *prezzo unitario massimo che possiamo essere disposti a pagare la materia prima, per aumentarne la quantità disponibile.* Per questo motivo i moltiplicatori di Lagrange sono chiamati anche **prezzi ombra**. Inoltre, il fatto che nella variazione $\lambda_0\Delta k$ del massimo profitto il valore λ_0 compaia come fattore conferma la bontà dell'appellativo «moltiplicatore».

Massimi e minimi assoluti in un insieme chiuso e limitato

Nel precedente sottoparagrafo ci siamo occupati dei problemi di ottimizzazione vincolata nel caso in cui il vincolo sia assegnato sotto forma di un'*equazione* del tipo $g(x, y) = 0$. Tuttavia, nelle applicazioni, capita di frequente che il vincolo sia espresso tramite una *disequazione* o che la funzione sia soggetta a più vincoli (tipicamente più *disequazioni* poste *a sistema*). Per esempio, può sorgere la necessità di risolvere un problema di ottimizzazione con vincoli espressi dalla disequazione $x^2 + y^2 \leq 16$ (che rappresenta un cerchio) oppure dal sistema $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$ (che rappresenta un quadrato).
Gettiamo ora uno sguardo su questi problemi, limitandoci ai casi in cui i vincoli siano rappresentati da un insieme D chiuso e limitato (il che garantisce l'esistenza del minimo e del massimo assoluto per il teorema di Weierstrass); in queste ipotesi il metodo per determinare gli estremi assoluti della funzione è il seguente:

1. si determinano gli eventuali punti di estremo relativo della funzione, nei punti *interni* all'insieme D (utilizzando i **Teoremi 5** e **6**);
2. si determinano gli eventuali punti di massimo e minimo vincolati, sulla *frontiera* dell'insieme D (utilizzando il metodo di sostituzione o quello dei moltiplicatori di Lagrange);
3. si individuano gli eventuali punti di non derivabilità della funzione in D;
4. si calcolano i valori assunti dalla funzione nei punti individuati ai passi precedenti e dal loro confronto si deducono il minimo e il massimo assoluto della funzione.

ESEMPIO Ottimizzazione su un insieme chiuso e limitato

Determiniamo il minimo e il massimo assoluto della funzione $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 6y + 4$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 \leq 16$.

- **Analisi preliminare**

Il vincolo rappresenta un cerchio avente centro nell'origine e raggio 4 e la funzione è continua e derivabile su tutto $\mathbf{R}^2$ (quindi non possono esserci massimi o minimi che cadono in punti di non derivabilità). Non resta allora che cercare i punti candidati a essere di massimo e minimo prima *internamente* al cerchio e poi sulla circonferenza che ne costituisce la *frontiera*.

- **Ricerca dei punti stazionari interni al cerchio**

Imponendo che siano nulle le derivate parziali otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 8x = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Abbiamo quindi un unico punto stazionario internamente al cerchio, di coordinate (0, 3). Ai fini di risolvere il problema in esame, **non** è necessario stabilire l'esatta natura del punto calcolando l'hessiano.

- **Ricerca dei punti di estremo vincolato sulla frontiera**

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 8x = \lambda \cdot (2x) & f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ 2y - 6 = \lambda \cdot (2y) & f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ x^2 + y^2 = 16 & g = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo, si trova che i punti candidati a essere punti di estremo, sulla frontiera, sono: $(0, \pm 4)$, $(\pm\sqrt{15}, -1)$.

- **Conclusione**

Calcoliamo i valori assunti dalla funzione nei punti determinati ai passi precedenti.

Possibili punti di estremo	$(0, 3)$ dall'analisi dei punti interni al cerchio	$(0, -4)$ dall'analisi dei punti di frontiera	$(0, 4)$ dall'analisi dei punti di frontiera	$(\pm\sqrt{15}, -1)$ dall'analisi dei punti di frontiera
Corrispondente valore della funzione	-5	44	-4	71

Ne deduciamo che il minimo assoluto della funzione è -5 e viene assunto in $(0, 3)$, mentre il massimo assoluto è 71 e viene raggiunto nei due punti di coordinate $(\pm\sqrt{15}, -1)$.

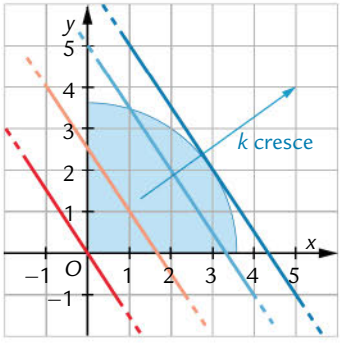
Nel caso particolare in cui l'espressione analitica della funzione e l'insieme D rappresentato dai vincoli siano molto semplici, la ricerca del minimo e del massimo assoluti può essere condotta, anziché con il metodo generale sopra esposto, con il metodo delle *curve di livello* illustrato nel prossimo esempio.

ESEMPIO Metodo delle curve di livello

Determiniamo il massimo e il minimo assoluti della funzione $z = 3x + 2y$, soggetta ai vincoli $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 13 \end{cases}$, utilizzando il metodo delle curve di livello.

- **Analisi grafica, in base alle curve di livello**

Le curve di livello hanno equazioni $3x + 2y = k$, dunque costituiscono un fascio (improprio) di rette parallele alla retta di equazione $3x + 2y = 0$. Il minimo e il massimo assoluto della funzione corrispondono al minimo e al massimo valore di k per cui le rette del fascio intersecano la regione rappresentata dai vincoli (il quadrante circolare colorato nella figura qui a fianco). Il minimo valore di k per cui le rette del fascio intersecano il quadrante circolare corrisponde alla retta passante per l'origine; il massimo valore di k per cui le rette del fascio intersecano il quadrante corrisponde alla retta tangente nel primo quadrante alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 13$.



- **Calcolo dei valori notevoli di k**

La retta passante per l'origine corrisponde ovviamente al valore $k = 0$.

Per determinare il valore di k corrispondente alla retta tangente si può imporre che sia nullo il discriminante dell'equazione risolvente il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3x + 2y = k \end{cases}$; accettando solo il valore di k *positivo* (perché stiamo cercando la tangente che tocca la circonferenza nel primo quadrante), si trova $k = 13$.

- **Conclusione**

Il minimo assoluto della funzione, con i vincoli assegnati, è 0 e viene raggiunto in corrispondenza dell'origine; il massimo assoluto, uguale a 13, viene raggiunto in corrispondenza del punto di tangenza tra la retta e la circonferenza, che puoi verificare avere coordinate (3, 2).

Esercizi p. 552

Funzioni di due variabili

Funzione di due variabili a valori in R

Ogni funzione $f : D \to \mathbf{R}$ con $D \subseteq \mathbf{R}^2$ che associa a ogni coppia ordinata $(x, y) \in D$ un solo elemento di $\mathbf{R}$.

ESEMPIO

La funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da:

$f(x, y) = x^2 - 2y^2$

Dominio (naturale) di una funzione $z = f(x, y)$

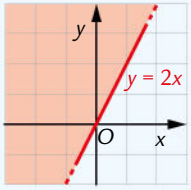
L'insieme dei punti (x, y) per cui è definita la funzione $f(x, y)$.

ESEMPIO

Il dominio della funzione

$z = \sqrt{y - 2x}$

è costituito dai punti (x, y) per cui $y \geq 2x$, cioè dal semipiano in figura.



Derivate parziali di una funzione $z = f(x, y)$

La derivata parziale di $f(x, y)$ rispetto a x, indicata con $f'_x(x,y)$, si calcola derivando l'espressione $f(x, y)$ come se y fosse una costante. Analogamente si calcola la derivata parziale di $f(x, y)$ rispetto a y.

ESEMPIO

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x, y) = 2x \\ f'_y(x, y) = -4y \end{cases}$$

Piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ in (x_0, y_0)

Il piano tangente esiste se esistono e sono continue le derivate parziali della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0).

In tal caso l'equazione del piano tangente è:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

ESEMPIO

Il piano tangente alla superficie $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ nel punto $(1, 2)$ ha equazione:

$$z = \underbrace{f(1, 2)}_{-7} + \underbrace{f'_x(1, 2)}_{2}(x - 1) + \underbrace{f'_y(1, 2)}_{-8}(y - 2)$$

cioè:

$$z = -7 + 2(x - 1) - 8(y - 2) = 2x - 8y + 7$$

Punti stazionari

Sono i punti che annullano sia la derivata parziale rispetto a x, sia la derivata parziale rispetto a y, della funzione $f(x, y)$ cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$

ESEMPIO

I punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^4 + 4x + y^2 - 2y$ sono le soluzioni del sistema: $\begin{cases} 4x^3 + 4 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} x^3 = -1 \\ y - 1 \end{cases}$.

L'unico punto stazionario è quindi $(-1, 1)$.

Classificazione di un punto stazionario (x_0, y_0)

Condizioni per stabilire la natura del punto, basate sul calcolo dell'hessiano:

$$\underbrace{H(x_0, y_0)}_{\text{hessiano}} = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

ESEMPIO

Nel caso dell'esempio precedente:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24x^2 \qquad f''_{xx} = 12$$

Poiché $H(-1, 1) = \underbrace{24}_{>0}$ e $f''_{xx}(-1, 1) = \underbrace{12}_{>0}$

e concludiamo che $(-1, 1)$ è un punto di minimo.

$H(x_0, y_0) < 0$

Il punto è di sella.

$H(x_0, y_0) = 0$

Caso dubbio: occorre procedere con ulteriori analisi.

$H(x_0, y_0) > 0$

Se $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ il punto è di massimo.
Se $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ il punto è di minimo.

Punti di estremo vincolato

Sono gli eventuali punti di estremo della funzione $f(x, y)$, soggetta al vincolo $g(x, y) = 0$.
Si possono determinare con tre metodi:
- metodo di sostituzione;
- metodo delle linee di livello;
- metodo dei moltiplicatori di Lagarange.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Sotto le opportune ipotesi, gli eventuali punti (x, y) di estremo vincolato soddisfano (per un opportuno λ) il sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \lambda g'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) = \lambda g'_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Punti di estremo assoluto

Se f è continua e se l'insieme D è chiuso e limitato, la loro esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass.
Se la funzione è derivabile in D, essi sono da ricercare tra gli eventuali punti di *estremo relativo interni* a D o tra gli eventuali punti di *estremo vincolato* sul contorno di D.

1. Introduzione alle funzioni di due variabili

Teoria p. 500

Disequazioni in due variabili: dalla rappresentazione analitica al grafico

1 ESERCIZIO GUIDATO

Rappresenta nel piano cartesiano i semipiani definiti dalle seguenti disequazioni:

a. $y > -2$ **b.** $x \leq 0$ **c.** $y > x - 1$ **d.** $y \leq 1 - 2x$

a. La disequazione $y > -2$ definisce il semipiano formato dai punti aventi ordinata maggiore di -2, cioè il semipiano «al di sopra» della retta di equazione $y = -2$. Rappresenta graficamente tale semipiano nella **Fig. a**. Attenzione alla frontiera: va disegnata con una linea continua o tratteggiata?

b. La disequazione $x \leq 0$ definisce il semipiano chiuso «a sinistra» dell'asse y. Rappresenta graficamente tale semipiano nella **Fig. b**: la frontiera va disegnata con una linea continua o tratteggiata?

c. Il semipiano definito dalla disequazione $y > x - 1$ è quello «al di sopra» della retta di equazione $y = x - 1$, *esclusi* i punti della retta stessa. Rappresenta la retta e il semipiano nella **Fig. c**: la frontiera del semipiano va disegnata con una linea continua o tratteggiata?

d. Il semipiano definito dalla disequazione $y \leq 1 - 2x$ è quello «al di sotto» della retta di equazione $y = 1 - 2x$, *inclusi* i punti della retta stessa. Rappresenta la retta e il semipiano nella **Fig. d**: la frontiera del semipiano va disegnata con una linea continua o tratteggiata?

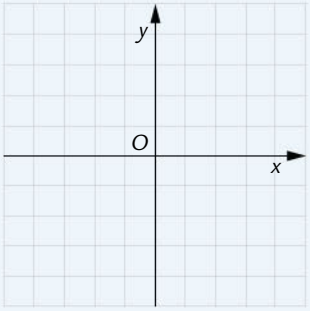


Figura a

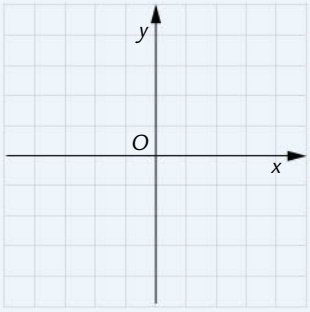


Figura b

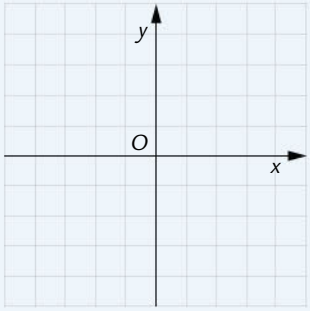


Figura c

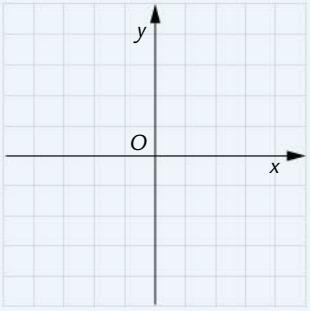


Figura d

2 ESERCIZIO GUIDATO

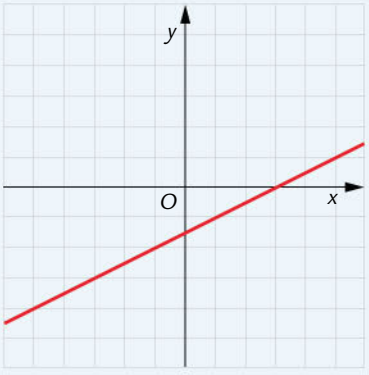
Rappresenta il semipiano definito dalla disequazione:

$x - 2y - 3 \leq 0$

Per rappresentare il semipiano definito dalla disequazione $x - 2y - 3 \leq 0$, risolvi anzitutto la disequazione rispetto a y:

$x - 2y - 3 \leq 0 \Rightarrow -2y \leq -x + 3 \Rightarrow y \geq \ldots\ldots$

Ne segue che il semipiano definito dalla disequazione $x - 2y - 3 \leq 0$ è quello «al di sopra» della retta di equazione $y = \ldots\ldots$, *inclusa* la retta stessa. Rappresenta il semipiano nella figura qui a fianco, dove è già stata disegnata la frontiera.



Rappresenta graficamente i semipiani definiti dalle seguenti disequazioni.

3 $y > 2x$

4 $y \leq x + 2$

5 $y \leq 0$

6 $y > x - 3$

7 $y > -2x$

8 $x \geq 2$

9 $y > -x + 1$

10 $y < -1$

11 $y \leq -\frac{3}{2}x + 2$

12 $x > 3$

13 $y > \frac{1}{2}x - 1$

14 $y < -x$

15 $y \geq x + 2$

16 $y \leq -\frac{1}{3}x + 1$

17 $x - y - 1 \leq 0$

18 $3x + 9 < 0$

19 $x - y > 0$

20 $2x - y - 6 \geq 0$

21 $x - \frac{1}{2}y \leq 0$

22 $6 - 2x < 0$

23 $3x - y - 1 < 0$

24 $2y + 4 \geq 0$

25 $x + y + 1 \geq 0$

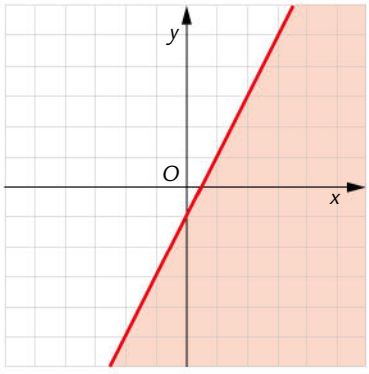
26 $x - 2y - 4 \geq 0$

27 $2x - y > 0$

28 $x - \frac{1}{2}y - 3 < 0$

---

29 **Caccia all'errore.** Barbara deve risolvere il seguente esercizio: «Rappresentare graficamente il semipiano definito dalla disequazione $2x - y - 1 < 0$».
La sua soluzione è la seguente: «Traccio il grafico della retta di equazione $2x - y - 1 = 0$. Poiché nella disequazione $2x - y - 1 < 0$ compare il simbolo «<», il semipiano definito dalla disequazione $2x - y - 1 < 0$ è quello al di sotto della retta, cioè quello colorato in figura».



Quale errore ha commesso Barbara? Come puoi convincerla del fatto che il suo ragionamento non è corretto? Qual è il semipiano definito dalla disequazione?

Rappresenta graficamente i segmenti o le semirette definiti dai seguenti sistemi misti.

30 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ x \geq 2 \end{cases}$

31 $\begin{cases} y = -x + 1 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

32 $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$

33 $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

34 $\begin{cases} x + y = -2 \\ x > 4 \end{cases}$

35 $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$

36 $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 2 \\ -3 < x \leq 3 \end{cases}$

37 $\begin{cases} 2x - 6y + 1 = 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$

38 $\begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$

39 $\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ -4 < x \leq 6 \end{cases}$

40 $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y - 1 = 0 \\ -2 < x \leq 3 \end{cases}$

41 ESERCIZIO GUIDATO

Rappresenta graficamente la regione di piano definita dal seguente sistema: $\begin{cases} 2x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \end{cases}$.

—

- Devi anzitutto rappresentare il semipiano definito dalla disequazione $2x - y + 1 \geq 0$: rappresenta tale semipiano nella **Fig. a**, dove è già stata disegnata la frontiera del semipiano.
- Rappresenta poi, in **Fig. b**, il semipiano definito dalla seconda disequazione del sistema, cioè da $x + y - 1 \geq 0$.
- La regione definita dal sistema è l'intersezione dei due semipiani in **Fig. a** e in **Fig. b**: rappresenta tale regione nella **Fig. c**: otterrai un angolo.

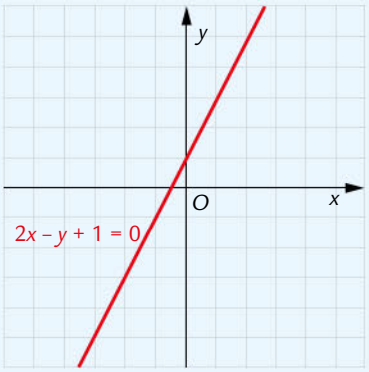


Figura a

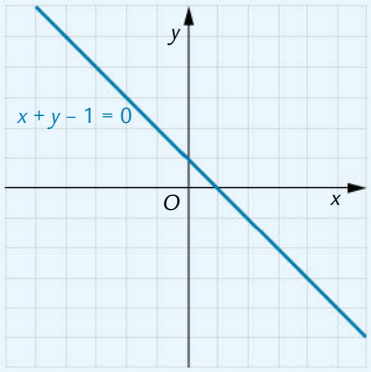


Figura b

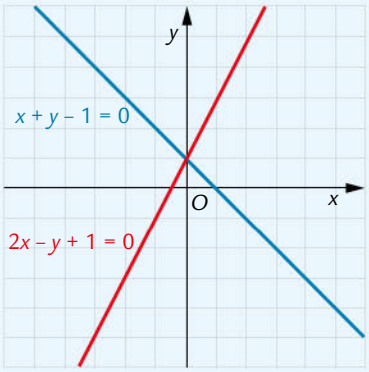


Figura c

Rappresenta graficamente le regioni di piano (angoli, strisce o poligoni) definite dai seguenti sistemi.

42 $\begin{cases} x \geq -3 \\ y \leq 4 \\ y \geq x - 3 \end{cases}$

43 $\begin{cases} y \geq -x - 1 \\ 2x - y + 2 < 0 \end{cases}$

44 $\begin{cases} x < 0 \\ x + y > 0 \\ y < 2x + 3 \end{cases}$

45 $\begin{cases} x \leq 3 \\ x + 2y + 1 > 0 \\ y > -2x \\ y < x + 3 \end{cases}$

46 $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2y - 4 < 0 \\ y \leq 2 - x \end{cases}$

47 $\begin{cases} y \geq -x + 1 \\ y \leq x + 3 \\ y \geq 2x \end{cases}$

48 $\begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ x + y + 3 \geq 0 \end{cases}$

49 $\begin{cases} y \geq -2x + 1 \\ x - y \leq 0 \\ y \geq 2x + 2 \end{cases}$

50 $\begin{cases} x > 0 \\ x < y + 3 \\ x - 2y + 6 > 0 \\ 2x + 3y - 16 < 0 \end{cases}$

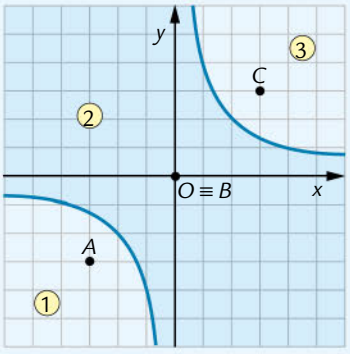
51 $\begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 2 \\ y < x + 4 \\ y < -x + 3 \end{cases}$

52 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq -x + 2 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases}$

53 ESERCIZIO GUIDATO

Rappresentiamo graficamente l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy \leq 4$.

—



Tracciamo anzitutto il grafico dell'iperbole di equazione $xy = 4$. I due rami dell'iperbole individuano tre regioni di piano (indicate con 1, 2, 3). Sostituendo nella disequazione $xy \leq 4$ le coordinate di tre punti di prova: $A(-3, -3)$, $B \equiv O(0, 0)$, $C(3, 3)$, appartenenti rispettivamente alle tre regioni 1, 2, 3, osserviamo che:

- la disequazione $xy \leq 4$ **non** è soddisfatta in corrispondenza delle coordinate di A e di C poiché le disuguaglianze $(-3) \cdot (-3) \leq 4$ e $3 \cdot 3 \leq 4$ sono *false*;
- la disequazione $xy \leq 4$ è soddisfatta in corrispondenza delle coordinate di B poiché $0 \cdot 0 \leq 4$ è una disuguaglianza *vera*.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione data è rappresentato dalla regione 2 (inclusi i punti dell'iperbole perché il simbolo di disuguaglianza, cioè $\leq$, è debole).

Rappresenta graficamente le regioni di piano definite dalle seguenti disequazioni.

54 $x^2 + y^2 - 4 < 0$

55 $2y - x^2 \geq 0$

56 $x^2 + y^2 - 6x \geq 0$

57 $xy - 12 < 0$

58 $2y - x^2 \geq 4x$

59 $x^2 + y^2 - 4y < 0$

60 $-x^2 + 3x < y$

61 $y \geq \frac{1}{x-2}$

62 $x^2 + y^2 - 6x - 6y < 0$

63 $y < \frac{x-3}{x}$

64 $x + 2y^2 \leq 0$

65 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1$

66 $\frac{x^2}{4} \geq 1 + y^2$

67 $x - y^2 \geq 0$

68 $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \geq 0$

69 $4x^2 + y^2 \leq 16$

70 $x^2 + y^2 - 2x > 0$

71 $xy < 6$

72 $x^2 + y^2 - 4x - 4 \leq 0$

73 $x^2 - y^2 > -9$

74 $x^2 - 2x - 2y + 1 \geq 0$

75 $x^2 - y^2 - 16 > 0$

76 $x^2 + y^2 + 2x < 3$

77 $x^2 - y^2 \geq 0$

78 $|y - x^2 - 1| > 3$

79 $|x^2 + y^2 - 4x| < 1$

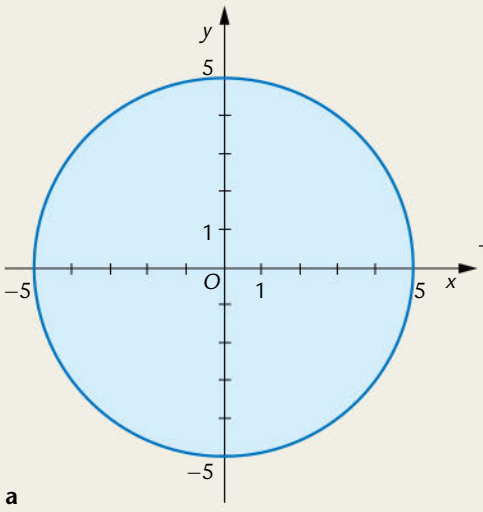
80 $|x^2 + y^2 - 6x - 8| \geq 8$

81 $|y - x^2| \leq 2$

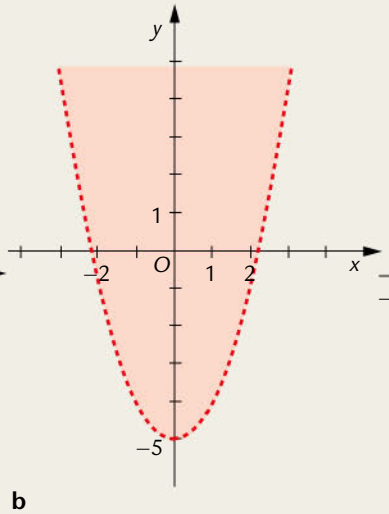
82 **ESERCIZIO SVOLTO**

Rappresentiamo graficamente l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ y > x^2 - 5 \end{cases}$.

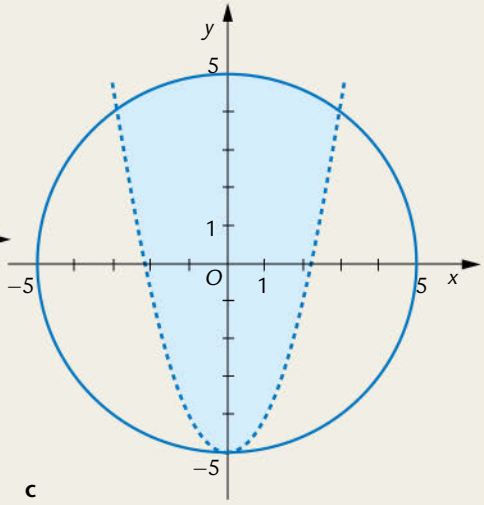
La prima disequazione del sistema rappresenta i punti del piano che hanno distanza dall'origine minore o uguale a 5, ovvero il *cerchio* di centro l'origine e raggio 5 rappresentato in **Fig. a**.
La seconda disequazione del sistema è soddisfatta, per esempio, dalle coordinate dell'origine (infatti $0 > -5$): pertanto la disequazione rappresenta la parte di piano limitata dalla parabola di equazione $y = x^2 - 5$ che contiene l'origine, *esclusa* la parabola stessa (**Fig. b**).
Il sistema è rappresentato dall'intersezione di queste due regioni di piano, ossia dalla regione colorata in **Fig. c**.



a



b



c

Rappresenta graficamente le regioni di piano definite dai seguenti sistemi di disequazioni.

83 $\begin{cases} y - x^2 > 0 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

84 $\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ x - y^2 \geq 0 \end{cases}$

85 $\begin{cases} x + y^2 - 2y \leq 0 \\ x^2 + 3x + 2 < 0 \end{cases}$

86 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} < 1 \\ y \geq x + 2 \end{cases}$

87 $\begin{cases} x^2 - y^2 \geq -1 \\ y + x^2 - 4 < 0 \end{cases}$

88 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 < 1 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$

89 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 \leq 4 \\ x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1 \end{cases}$

90 $\begin{cases} x^2 - y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

91 $\begin{cases} 4x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$

92 $\begin{cases} y \geq \sqrt{x} \\ y \geq x^2 - 2x \end{cases}$

93 $\begin{cases} x^2 - 4y^2 \leq 4 \\ x^2 - 4y^2 \geq 0 \end{cases}$

94 $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y \leq 0 \\ y^2 + 4y + 3 \leq 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 > 0 \end{cases}$

95 $\begin{cases} x^2 - y^2 < 1 \\ xy > 0 \end{cases}$

96 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} < 1 \\ xy \geq 0 \end{cases}$

97 $\begin{cases} y \leq \sqrt{x^2 + 4} \\ y \leq 4 - x|x| \end{cases}$

98 $\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{4} < 1 \\ |x - y| \geq 2 \end{cases}$

99 $\begin{cases} y \leq -\dfrac{1}{3}x^2 + 4 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \geq 1 \\ |y| - 3 < 0 \end{cases}$

100 $\begin{cases} |y - x^2| \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

101 $\begin{cases} |x| \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \end{cases}$

102 $\begin{cases} |x| \geq 3 \\ -\sqrt{25 - x^2} \leq y \leq 0 \end{cases}$

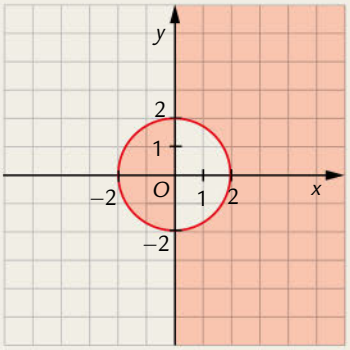
103 ESERCIZIO SVOLTO

Rappresenta graficamente l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$x(x^2 + y^2 - 4) \geq 0$

Osserva che la disequazione $x(x^2 + y^2 - 4) \geq 0$ è verificata se e solo se i due fattori sono entrambi *maggiori* o *uguali* a zero oppure se i due fattori sono entrambi *minori* o *uguali* a zero; in simboli: $x(x^2 + y^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$.

L'insieme S delle soluzioni della disequazione data è dunque l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi scritti; si ricava così che la rappresentazione grafica di S è quella in figura.



Rappresenta graficamente gli insiemi delle soluzioni delle seguenti disequazioni.

104 $y(x^2 + y^2 - 9) \geq 0$

105 $x(x^2 + y^2 - 2x) < 0$

106 $(x - 2)(x^2 + y^2 - 16) \leq 0$

107 $x(y - x^2) < 0$

108 $(y - 2)(y + x^2 - 2x) < 0$

109 $(x + 1)(y + x^2 - 1) < 0$

110 $\dfrac{x - y}{x - y^2} \leq 0$

111 $\dfrac{x + 2 - y}{x^2 + 2 - y} \geq 0$

112 $\dfrac{x^2 + y^2 - 16}{y - x + 4} \leq 0$

113 $\dfrac{9 - x^2 - y^2}{y + x + 3} \geq 0$

114 $xy - 2y \geq 1$

115 $xy - 2x + y - 2 \leq 0$

Disequazioni in due variabili: dal grafico alla rappresentazione analitica

116 ESERCIZIO SVOLTO

Scriviamo la disequazione che rappresenta il semipiano colorato.

Dobbiamo anzitutto determinare l'equazione della retta che costituisce la frontiera del semipiano.

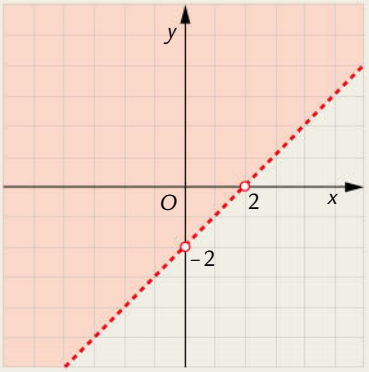
Possiamo notare, per esempio, che si tratta della retta, parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, che taglia l'asse y nel punto di coordinate $(0, -2)$: quindi la sua equazione è $y = x - 2$.

Osserviamo poi che:

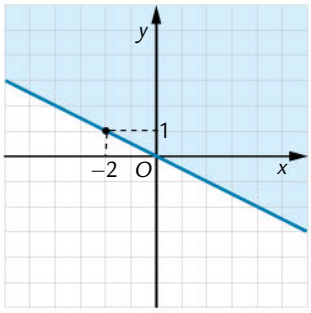
- il semipiano colorato è quello al di sopra della frontiera;
- si tratta di un semipiano aperto (la frontiera è tratteggiata e quindi **non** è inclusa).

Concludiamo che la disequazione che rappresenta il semipiano è:

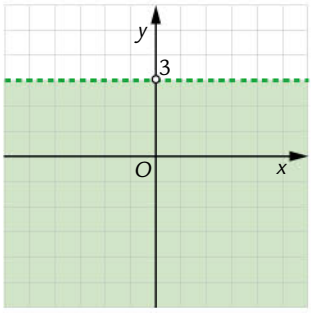
$y > x - 2$



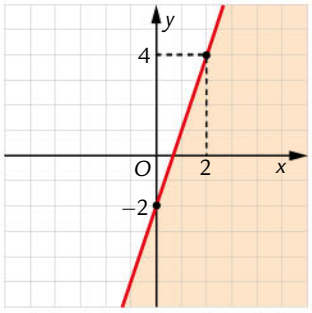
117 Scrivi le disequazioni che rappresentano i semipiani colorati nelle seguenti figure.



a

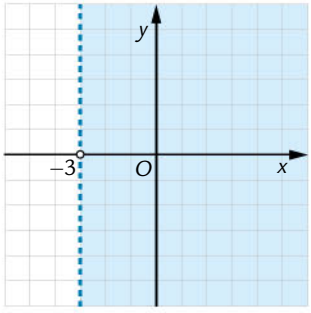


b

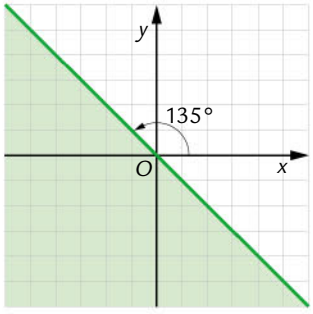


c

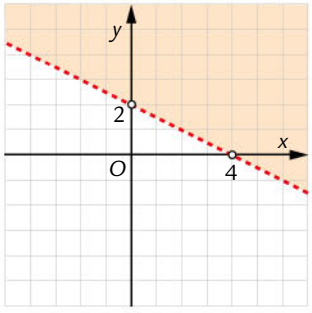
118 Scrivi le disequazioni che rappresentano i semipiani colorati nelle seguenti figure.



a

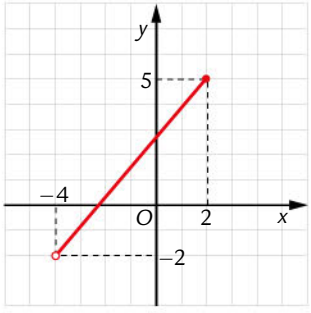


b

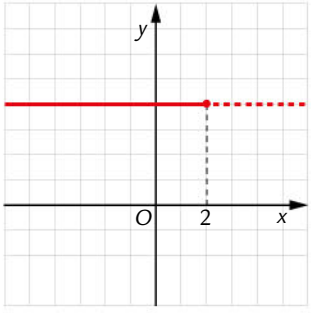


c

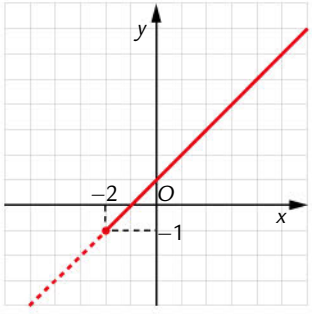
119 Scrivi un sistema misto che rappresenti le semirette e i segmenti disegnati nelle seguenti figure. Il punto pieno è da considerare incluso e il punto vuoto escluso.



a



b



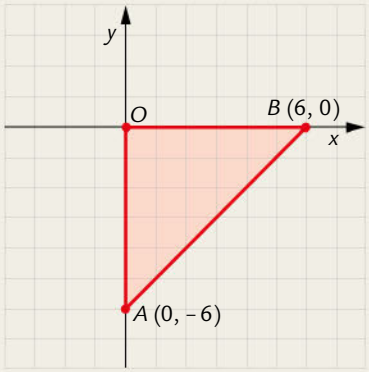
c

120 ESERCIZIO SVOLTO

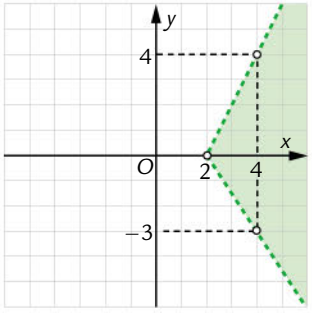
Rappresentiamo analiticamente il triangolo disegnato nella figura.

- I punti interni al triangolo non sono altro che i punti del quarto quadrante, appartenenti al semipiano al di sopra della retta AB.
- Si ricava facilmente che l'equazione della retta AB è $y = x - 6$.
- Quindi il triangolo è rappresentato analiticamente dal seguente sistema:

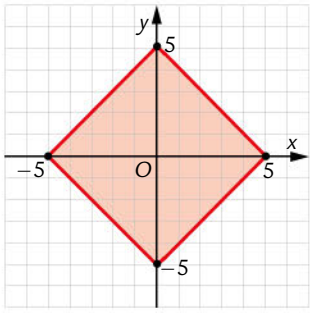
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ y \geq x - 6 \end{cases}$$



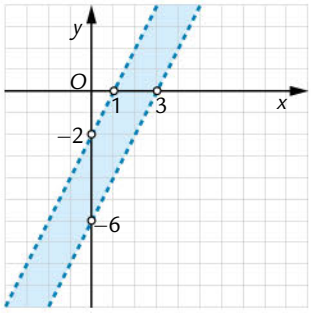
121 Scrivi un sistema che rappresenti le regioni di piano colorate nelle seguenti figure.



a

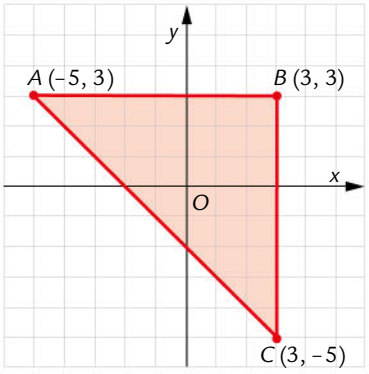


b

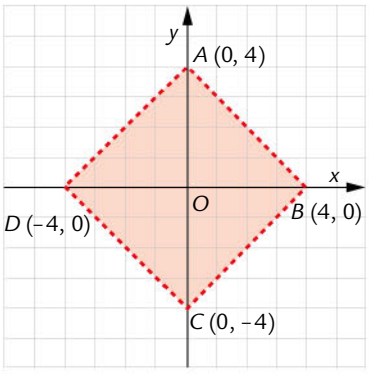


c

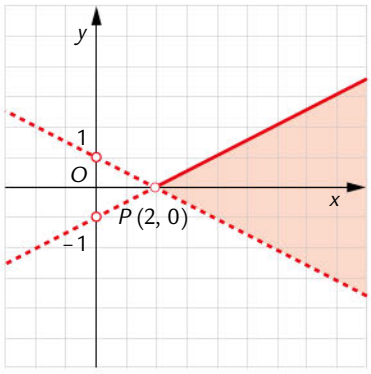
122 Rappresenta analiticamente le regioni di piano colorate nelle seguenti figure (nell'ultima figura il punto vuoto indica che P **non** appartiene alla regione).



a.



b.

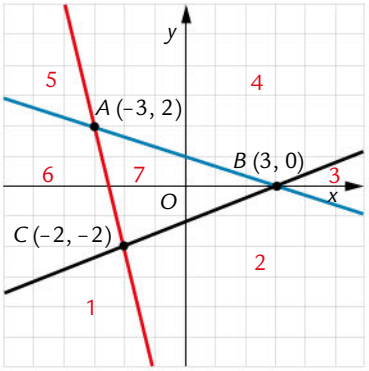


c.

123 Rappresenta analiticamente il rettangolo $ABCD$ di vertici $A(-2, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, -1)$, $D(-2, -1)$, esclusi i lati.

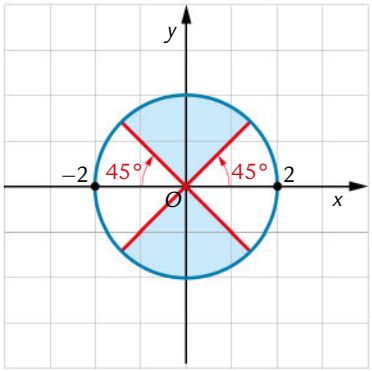
124 Rappresenta analiticamente il trapezio $ABCD$ di vertici $A(-1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(3, -1)$, $D(-2, -1)$, compresi i lati.

125 Le rette AB, BC e AC, disegnate nella figura qui a fianco, dividono il piano in 7 regioni chiuse. Per ciascuna regione, scrivi una sua rappresentazione analitica, tramite un opportuno sistema di disequazioni.



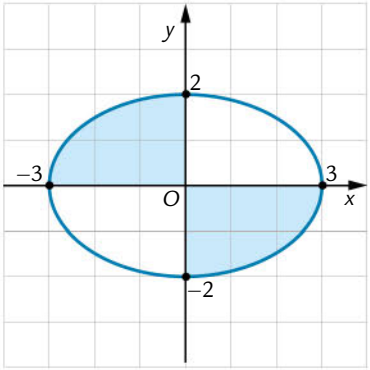
---

126 Scrivi un sistema di disequazioni che rappresenti la regione di piano colorata in figura. Per quali valori di k il punto $P(k, k + 2)$ appartiene a tale regione?



$\left[\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ |y| \ge |x| \end{cases}; -1 \le k \le 0\right]$

127 Scrivi un sistema di disequazioni che rappresenti la regione di piano colorata in figura. Per quali valori di a il punto $P(2 - a, a)$ appartiene a tale regione?



$\left[\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1 \\ xy \le 0 \end{cases}; -\frac{10}{13} \le a \le 0 \vee a = 2\right]$

Insiemi aperti, chiusi, limitati di $\mathbf{R}^2$

Rappresenta i luoghi dei punti del piano che soddisfano le seguenti disequazioni o sistemi. Per ciascun insieme rappresentato, stabilisci se si tratta di un sottoinsieme aperto, chiuso o limitato di $\mathbf{R}^2$.

128 $2x - y + 6 \geq 0$ $\quad 2x - y + 6 < 0$ $\quad 1 - x \leq 0$

129 $\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -3 < x < 4 \\ -2 < y < 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

130 $x^2 + y^2 > 4$ $\quad x^2 + y^2 \leq 16$ $\quad x^2 + y^2 - 2x \leq 0$

131 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ xy \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ xy < 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ x > 0, y < 0 \end{cases}$

132 $y > 4 - x^2$ $\quad y \leq -x^2$ $\quad x \leq 2y - y^2$

133 $\begin{cases} y > x^2 - 2x \\ y < 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y \leq 4 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y > x^2 \\ y \geq 4 \end{cases}$

134 $xy > 1$ $\quad x^2 - y^2 \leq 4$ $\quad xy \leq 4$

135 $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2 + y^2 > 4 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ y > x^2 \end{cases}$

136 $x^2 + 4y^2 < 16$ $\quad 4x^2 + y^2 \leq 16$ $\quad 4x^2 + 4y^2 \geq 25$

137 **Giustificare e argomentare** Francesco sostiene che un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ è necessariamente limitato oppure illimitato; Giacomo afferma invece che un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ è necessariamente aperto oppure chiuso. Uno solo dei due ha ragione: chi? Perché? Giustifica la tua risposta.

Il sistema di riferimento cartesiano nello spazio

Determina la distanza tra i punti A e B.

138 $A(1, -1, 0)$; $B(0, 1, 2)$ $\quad [3]$

139 $A(1, -2, 3)$; $B(1, -1, 0)$ $\quad [\sqrt{10}]$

140 $A(2, 0, 3)$; $B(1, -1, 4)$ $\quad [\sqrt{3}]$

141 $A(4, 2, 3)$; $B(5, 1, 6)$ $\quad [\sqrt{11}]$

142 $A\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$; $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$ $\quad \left[\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

143 $A\left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$; $B\left(\frac{1}{3}, -1, 1\right)$ $\quad \left[\frac{\sqrt{41}}{3}\right]$

---

144 Dati i punti $A(a, a + 2, 0)$ e $B(0, a, a - 1)$, determina per quali valori di a risulta $\overline{AB} = 3$. $\quad [a = -1 \vee a = 2]$

145 Dati i punti $A(a, a - 2, 0)$ e $B(0, a, a + 1)$, determina per quali valori di a risulta $\overline{AB} = \sqrt{29}$. $\quad [a = -4 \vee a = 3]$

Determina il punto medio del segmento AB.

146 $A(3, 4, 5)$; $B(1, 2, 5)$ $\quad [(2, 3, 5)]$

147 $A(0, -2, 7)$; $B(4, 6, 1)$ $\quad [(2, 2, 4)]$

148 $A(-2, 0, -3)$; $B(1, 1, 4)$ $\quad \left[\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

149 $A(4, 2, 3)$; $B(5, 1, 6)$ $\quad \left[\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)\right]$

150 $A\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$; $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$ $\quad \left[\left(0, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)\right]$

151 $A\left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$; $B\left(\frac{1}{3}, -2, 1\right)$ $\quad \left[\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)\right]$

---

152 Dato il punto $A(3, 4, 5)$, determina il punto B, in modo che il punto medio del segmento AB sia $M(-1, 2, 4)$. $\quad [(-5, 0, 3)]$

153 Dato il punto $A(2, -1, 4)$, determina il punto B, in modo che il punto medio del segmento AB sia $M(0, 7, 6)$. $\quad [(-2, 15, 8)]$

154 Determina il simmetrico del punto $A(2, 4, 8)$ rispetto al punto $P(0, -2, -3)$. $\quad [(-2, -8, -14)]$

155 Determina il simmetrico del punto $A(-1, 4, 5)$ rispetto al punto $P(3, -1, 6)$ $[(7, -6, 7)]$

156 Verifica che il triangolo ABC avente vertici $A(2, -1, 0)$, $B(1, 1, 4)$, $C(4, 2, -1)$ è rettangolo e calcola la sua area. (*Suggerimento*: verifica che è soddisfatto il teorema di Pitagora.) $\left[\text{Area} = \frac{7}{2}\sqrt{6}\right]$

157 Verifica che il triangolo ABC avente vertici $A(-3, 0, 4)$, $B(3, 0, -2)$, $C(-3, 6, -2)$ è equilatero e determina la sua area. $[\text{Area} = 18\sqrt{3}]$

158 Verifica che il triangolo ABC avente vertici $A(3, 1, -1)$, $B(-1, 5, -1)$, $C(-1, 1, 0)$ è isoscele e calcola la sua area. $[\text{Area} = 6\sqrt{2}]$

159 ESERCIZIO GUIDATO

Scrivi l'equazione del piano passante per i tre punti $A(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 3)$, $C(0, 0, 3)$.

- L'equazione generale del piano $ax + by + cz + d = 0$ dipende apparentemente da quattro parametri, a, b, c e d, ma in realtà i parametri essenziali sono solo tre. Supponiamo per esempio $d \neq 0$; dividendo i due membri dell'equazione per d, otteniamo l'equazione:

  $$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0$$

  ossia, ponendo $\frac{a}{d} = p$, $\frac{b}{d} = q$, $\frac{c}{d} = r$: $px + qy + rz + 1 = 0$

  Per determinare l'equazione del piano è sufficiente perciò determinare i tre parametri p, q ed r.
- Imponendo che i punti A, B e C appartengano al piano di equazione $px + qy + rz + 1 = 0$ si ottiene il sistema:

  $$\begin{cases} p + 2r + 1 = 0 \\ q + 3r + 1 = 0 \\ 3r + 1 = 0 \end{cases}$$

  da cui $p = -\frac{1}{3}$, $q = 0$, $r = -\frac{1}{3}$. Ora puoi facilmente concludere. $[x + z - 3 = 0]$

Attenzione! Se il sistema fosse risultato impossibile, **non** avremmo potuto concludere che il problema è impossibile perché abbiamo supposto inizialmente $d \neq 0$; al contrario, avremmo dovuto ricercare l'equazione del piano tra quelle in cui $d = 0$, cioè tra le equazioni del tipo $ax + by + cz = 0$.

160 Scrivi l'equazione del piano passante per i tre punti $A(-1, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(0, 0, 2)$. $[x - z + 2 = 0]$

161 Scrivi l'equazione del piano passante per i tre punti $A(2, 0, 0)$, $B(0, 0, 3)$, $C(1, -1, 4)$. $[3x + 5y + 2z - 6 = 0]$

162 Scrivi l'equazione del piano passante per i tre punti $A(0, -2, 0)$, $B(0, 1, -2)$, $C(1, 0, 3)$. $[13x - 2y - 3z - 4 = 0]$

2. Dominio, limiti, continuità

Teoria p. 507

Esercizi introduttivi

Test

163 Da che cosa è costituito il dominio della funzione $z = \sqrt{x + y - 2}$?

A Un semipiano aperto
B Un semipiano chiuso
C Il piano, privato di una retta
D Una retta

164 Da che cosa è costituito il dominio della funzione $z = \frac{1}{x + y - 2}$?

A Un semipiano aperto
B Un semipiano chiuso
C Il piano, privato di una retta
D Una retta

165 Da che cosa è costituito il dominio della funzione $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$?

A L'intero piano
B Un solo punto
C Il piano, privato di un punto
D Il piano, privato di una circonferenza di raggio 1

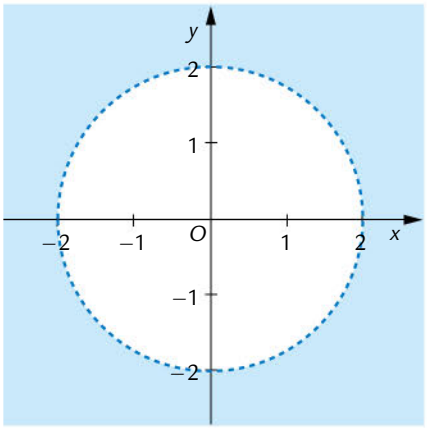
166 Quale delle seguenti funzioni ha come dominio l'insieme rappresentato in figura?

A $z = x^2 + y^2 - 4$

B $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$

C $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

D $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$



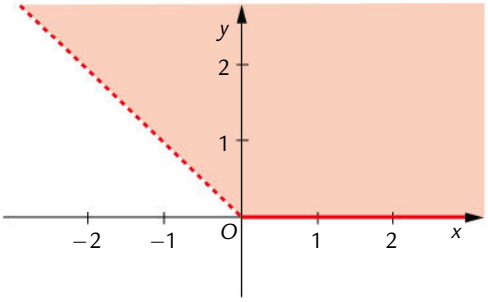
167 Quale delle seguenti funzioni ha come dominio l'insieme rappresentato in figura?

A $z = \ln x + \sqrt{x + y}$

B $z = \sqrt{y} + \ln(x + y)$

C $z = \ln y + \sqrt{x + y}$

D $z = \sqrt{x} + \ln(x + y)$



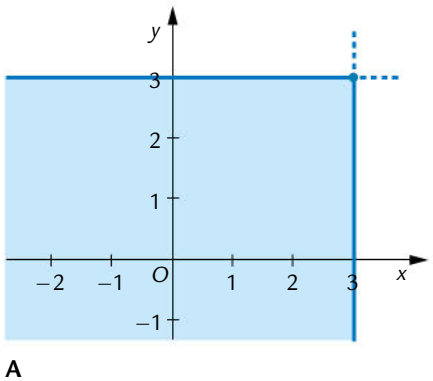
168 **Associazione.** Associa a ciascuna delle seguenti quattro funzioni la rappresentazione del suo dominio.

a. $z = \sqrt{\dfrac{3 - x}{3 - y}}$

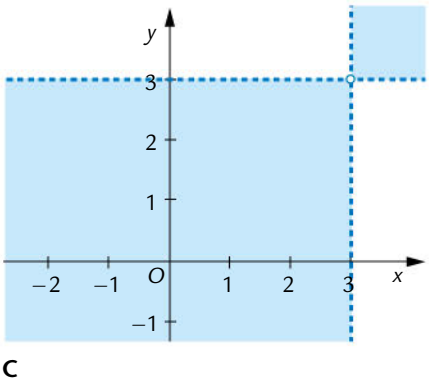
b. $z = \ln\left(\dfrac{3 - x}{3 - y}\right)$

c. $z = \sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - y}$

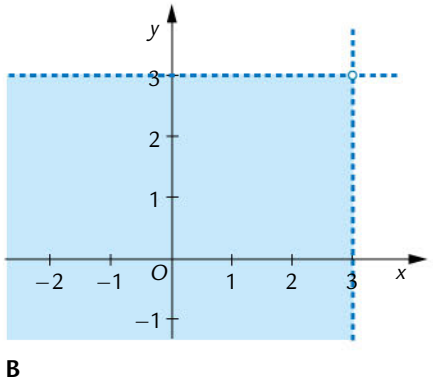
d. $z = \ln(3 - x) + \ln(3 - y)$



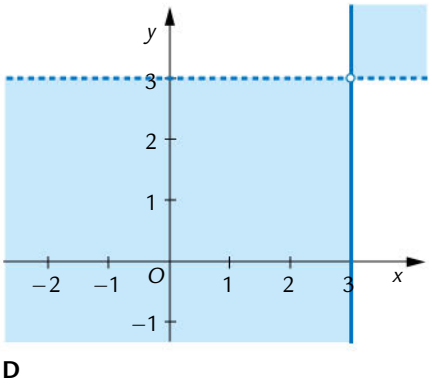
A



C



B



D

Il dominio delle funzioni di due variabili

169 ESERCIZIO GUIDATO

Determina il dominio delle seguenti funzioni e rappresentalo graficamente.

a. $z = \dfrac{x^2}{x^2 + 2y^2}$ **b.** $z = \dfrac{\sqrt{x - 2y}}{x - 1}$ **c.** $z = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ **d.** $z = \ln\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right)$

a. La funzione è definita purché risulti $x^2 + 2y^2 \neq 0$. Questa condizione, essendo $x^2 + 2y^2$ la somma di due quantità non negative, è sempre verificata eccetto che nel caso in cui risulta $x = y = 0$. Pertanto il dominio della funzione è $\mathbf{R}^2$ escluso $(0, 0)$. La rappresentazione grafica è perciò l'intero piano, *privato* dell'origine.

b. La funzione è definita purché il radicando sia non negativo e il denominatore sia diverso da zero; ne seguono le condizioni:

$$\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica dei punti che soddisfano questo sistema è costituita da un *semipiano*, da cui vanno esclusi i punti appartenenti alla retta di equazione $x = 1$.

c. La funzione è definita purché i radicandi siano non negativi e il denominatore sia diverso da zero; ne seguono le condizioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica dei punti che soddisfano questo sistema è costituita da una *corona circolare*, delimitata dalle due circonferenze aventi centro nell'origine e raggi rispettivamente 1 e 2; la circonferenza di raggio 1 è inclusa, mentre quella di raggio 2 è esclusa.

d. La funzione è definita purché sia $\dfrac{x-2}{y-1} > 0$; l'insieme delle soluzioni di questa disequazione è l'*unione* degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 2 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

Ciascuno dei due sistemi è rappresentato graficamente da un angolo retto, da cui vanno esclusi i punti appartenenti ai lati dell'angolo; il dominio della funzione è l'*unione* di questi due angoli, dunque è costituito da *due angoli opposti al vertice* (esclusi i lati degli angoli).

Determina il dominio delle seguenti funzioni e rappresentalo graficamente.

170 $z = \dfrac{x}{x - 2y}$

171 $z = \sqrt{x + 2y - 3}$ [Il semipiano definito dalla disequazione $x + 2y - 3 \geq 0$]

172 E se? $z = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2y}}$

▶ Cambierebbe la risposta, considerando la funzione $z = \ln(x + 2y)$? E considerando la funzione $z = \sqrt{x - 2y}$?

173 $z = \dfrac{x^2 + y}{x^2 + y^2 - 16}$ [Il piano privato della circonferenza avente centro nell'origine e raggio 4]

174 $z = \dfrac{x + 2y}{2y + x^2}$

175 $z = \sqrt{2x - x^2 - y^2}$ [I punti del cerchio limitato dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$]

176 $z = \ln\left(\dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$

177 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - x^2}} + \sqrt{x - y}$ [I punti del segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla bisettrice del primo e del terzo quadrante, esclusi i punti della parabola stessa]

178 $z = \dfrac{x^2}{x - y - 3}$

179 $z = \sqrt{2x - y + 3}$

180 $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2 - 9}$

181 $z = \dfrac{\sqrt{2x - 4y + 6}}{x - 1}$ [Il semipiano definito dalla disequazione $x - 2y + 3 \geq 0$ privato dei punti della retta di equazione $x = 1$]

182 $z = \sqrt{x} + \sqrt{-y}$

183 $z = \ln(xy - 4)$ [I punti esterni all'iperbole di equazione $xy = 4$]

184 $z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$

185 $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$ [I punti esterni alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$]

186 $z = \ln x + \ln(x - 2y)$

187 $z = \sqrt{x + y^2 - 2}$ [I punti esterni o appartenenti alla parabola di equazione $x = 2 - y^2$]

188 $z = \dfrac{x}{\sqrt{2y - x^2}}$

189 $z = \dfrac{\sqrt{y + 2}}{x + y + 2}$

190 $z = \ln\left(\dfrac{x}{2} - y + 2\right)$ [Il semipiano definito da $x - 2y + 4 > 0$]

191 $z = \ln x + \ln(4 - y) + \sqrt{y - x}$

192 $z = \sqrt{y} + \ln(3 - x) + \sqrt{x + 4 - y}$ [L'intersezione dei tre semipiani definiti da $y \geq 0$, $x < 3$, $y \leq x + 4$]

193 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y}$

194 $z = \sqrt{4y - x^2 - y^2}$ [Il cerchio limitato dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4y = 0$]

195 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

196 $z = \sqrt{y - x^2} + \ln(y - 4)$ [I punti del semipiano $y > 4$ che risultano interni o appartenenti alla parabola di equazione $y = x^2$]

197 **E se?** $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

▶ Cambierebbe la risposta, considerando la funzione $z = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$? Le due funzioni sono uguali?

198 $z = e^{\frac{x-1}{y+2}}$ [Il piano privato della retta di equazione $y = -2$]

199 $z = \dfrac{x^3 y^2}{x^2 - 4y^2}$ [Il piano privato delle rette di equazioni $x = \pm 2y$]

200 $z = \dfrac{xy}{x^2 - 4}$

201 $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ [Il piano privato dell'origine]

202 $z = \dfrac{2x + 3y}{x^2 - y^2}$

203 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ [L'unione dei due angoli di vertice l'origine e lati sulle bisettrici e che contengono i semiassi delle ascisse positive e negative]

204 **E se?** $z = \ln(xy)$

▶ Cambierebbe la risposta, considerando la funzione $z = \ln x + \ln y$? Le due funzioni sono uguali?

205 $z = \dfrac{e^{y-x}}{x+1}$

206 $z = \dfrac{1}{e^{x-y} - \dfrac{1}{e^2}}$ [Il piano privato della retta di equazione $x - y + 2 = 0$]

207 $z = \sqrt{e^{x-y} - \dfrac{1}{e^{3-x}}}$

208 $z = \sqrt{1 - e^{x^2+y^2-4}}$ [Il cerchio limitato dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$]

209 $z = \dfrac{x}{|x| - y}$

210 $z = \sqrt{\dfrac{x-2}{y-1}}$ [L'unione dei punti per cui $x \geq 2 \wedge y > 1$ e di quelli per cui $x \leq 2 \wedge y < 1$]

211 $z = \sqrt{y^2 - 4x^2}$ [L'unione dei due angoli che hanno vertice nell'origine, i lati sulle rette di equazioni $y = \pm 2x$ e che contengono i semiassi delle ordinate positive e negative]

212 $y = \sqrt{\log_2(x - y - 3)}$ [Il semipiano definito dalla disequazione $x - y - 4 \geq 0$]

213 $y = \dfrac{x-y}{\log_2(x+y)}$

214 $y = \dfrac{1}{\log_2 x} + \sqrt{\log_2 y}$ [I punti per cui $x > 0 \wedge y \geq 1$, esclusi quelli appartenenti alla retta $x = 1$]

215 $y = \dfrac{x-y}{\sqrt{\log_2(x^2+y^2-8)}}$

216 $z = \dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{1}{\ln y}$ [I punti del primo quadrante tali che $x \neq 1$ e $y \neq 1$]

217 $z = \sqrt{2 - |y-1|}$

218 $z = e^y + \ln(|x-3| - 4)$ [L'unione dei due semipiani definiti da $x < -1$ e $x > 7$]

219 $y = \ln\left|\dfrac{x-4}{y-x-3}\right|$

220 $z = \dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}$ [Il piano privato dell'origine e della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$]

221 $z = \sqrt{\ln\dfrac{1}{x^2+y^2}}$

222 $z = \ln(9 - x^2) + \ln(16 - y^2)$ [Il rettangolo di vertici $(\pm 3, 4)$ e $(\pm 3, -4)$ esclusi i punti dei lati]

223 $z = \sqrt{xy + 2y}$

224 $z = \ln\left(\dfrac{y-x}{x-3}\right)$ [L'unione dei punti per cui $y > x \wedge x > 3$ e di quelli per cui $y < x \wedge x < 3$]

225 **E se?** $z = \dfrac{\ln(25 - x^2)}{\sqrt{4 - y^2}}$

▶ Cambierebbe la risposta, considerando la funzione $z = \dfrac{\ln(25 - x^2)}{\sqrt{2-y} \cdot \sqrt{2+y}}$?

E considerando la funzione $z = \dfrac{\ln(5-x) + \ln(5+x)}{\sqrt{4 - y^2}}$?

226 $z = \sqrt{\dfrac{y+2}{x+y+2}}$ [L'unione dei punti per cui $y \geq -2 \wedge y > -x - 2$ e di quelli per cui $y \leq -2 \wedge y < -x - 2$]

227 $z = \ln(4 - xy) + \sqrt{xy}$

228 $z = \sqrt{\dfrac{y-2}{x^2+y^2-9}}$ [L'unione dei punti per cui $y \geq 2 \wedge x^2+y^2 > 9$ e di quelli per cui $y \leq 2 \wedge x^2+y^2 < 9$]

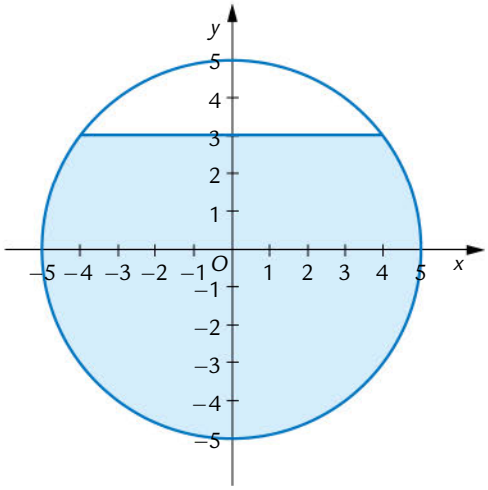
229 $z = \ln\left(\dfrac{x+y+2}{xy+4}\right)$

230 $z = \dfrac{\ln(y-e^{-x})}{\sqrt{y^2-3y+2}}$ [I punti della regione di piano definita da $y > e^{-x}$ per cui $y < 1 \vee y > 2$]

231 $z = \dfrac{\ln(e^x-y)}{\ln(2x^2+3x+1)}$

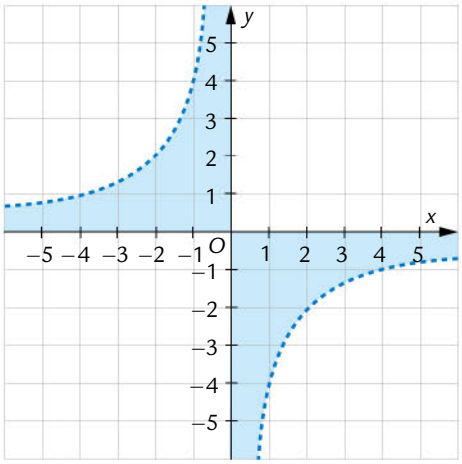
232 **Inventa tu.** Scrivi l'equazione di una funzione nelle due variabili x e y che abbia come dominio:

a. l'insieme rappresentato nella **Fig. a**;



a

b. l'insieme rappresentato nella **Fig. b**.



b

233 **Inventa tu.** Scrivi l'equazione di una funzione nelle due variabili x e y che abbia come dominio il quadrato $ABCD$ di vertici $A(-2, -2)$, $B(2, -2)$, $C(2, 2)$, $D(-2, 2)$.

234 **Inventa tu.** Scrivi l'equazione di una funzione nelle due variabili x e y che abbia come dominio il triangolo ABC di vertici $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 3)$.

Curve di livello

Test

235 Qual è la forma delle curve di livello della funzione $z = x^2 - 4y^2 - 5$?

A Parabole B Circonferenze C Ellissi (eventualmente degeneri) D Iperboli (eventualmente degeneri)

236 Qual è la forma delle curve di livello della funzione $z = x^2 + 4y - 5$?

A Parabole B Circonferenze C Ellissi (eventualmente degeneri) D Iperboli (eventualmente degeneri)

237 Qual è la forma delle curve di livello della funzione $z = x^2 + 4y^2 - 5$?

A Parabole B Circonferenze C Ellissi (eventualmente degeneri) D Iperboli (eventualmente degeneri)

238 **ESERCIZIO SVOLTO**

Rappresentiamo graficamente alcune curve di livello della funzione $z = x^2 + y^2 + 2x$.

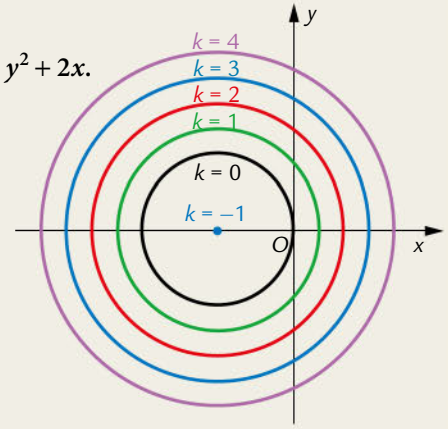
Le curve di livello della funzione hanno equazioni $x^2 + y^2 + 2x = k$, ovvero:

$x^2 + y^2 + 2x - k = 0$

Si tratta di un fascio di circonferenze concentriche di centro $(-1, 0)$ e raggio $r = \sqrt{1+k}$. Ne deduciamo che:

- se $k > -1$, le curve di livello sono circonferenze;
- se $k = -1$, la curva di livello è una circonferenza degenere nel punto di coordinate $(-1, 0)$;
- se $k < -1$, le curve di livello coincidono con l'insieme vuoto.

Alcune curve di livello sono rappresentate nella figura qui a fianco.

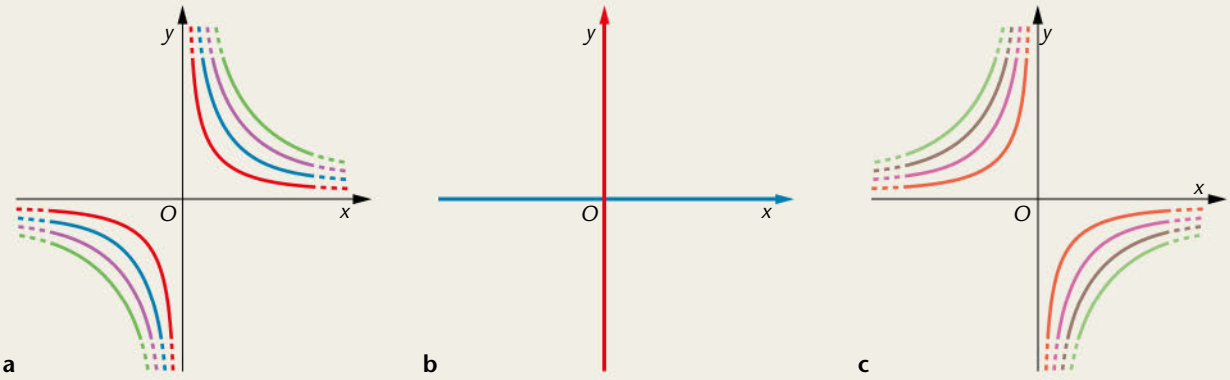


239 ESERCIZIO SVOLTO

Rappresentiamo alcune delle curve di livello della funzione $z = xy$.

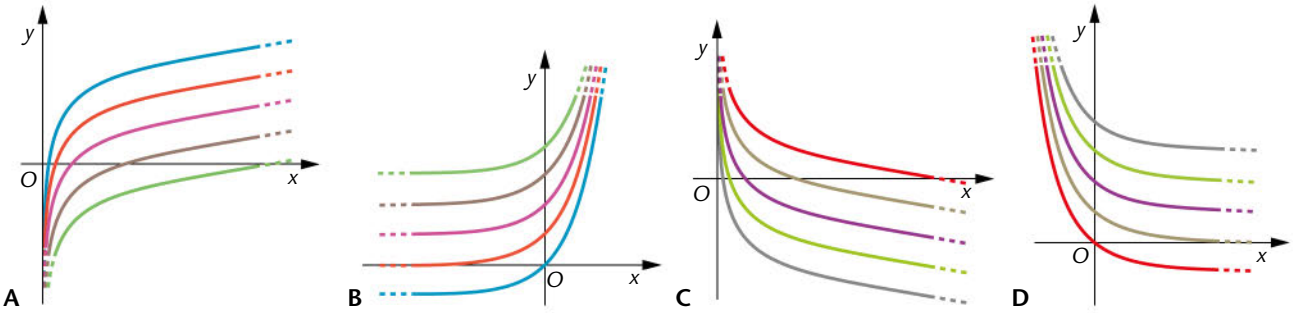
Le curve di livello della funzione data hanno equazione $xy = k$, con $k \in \mathbf{R}$:

- Se $k > 0$, si tratta di iperboli equilatere che giacciono nel primo e nel terzo quadrante (**Fig. a**);
- se $k = 0$, si ha l'equazione $xy = 0$ che equivale a $x = 0 \vee y = 0$, perciò rappresenta l'unione dei due assi (**Fig. b**);
- se $k < 0$, si tratta di iperboli equilatere che giacciono nel secondo e nel quarto quadrante (**Fig. c**).



240 Associazione. Associa a ogni funzione la figura che ne rappresenta alcune curve di livello.

a. $z = e^x - y + 1$ **b.** $z = \ln x - y$ **c.** $z = e^{-x} - y + 1$ **d.** $z = -\ln x - y$



Descrivi le curve di livello delle seguenti funzioni e rappresentane graficamente alcune.

241 $z = 2x - y$ [Il fascio improprio di rette parallele alla retta di equazione $y = 2x$]

242 $z = x + y$

243 $z = x + 2y$ [Il fascio improprio di rette parallele alla retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x$]

244 $z = -2x - 3y$

245 $z = y + x^2$ [Parabole di equazione $y = -x^2 + k$, con $k \in \mathbf{R}$]

246 $z = y - x^2 - 4x$

247 $z = 2x - y^2$ [Parabole con asse orizzontale di equazione $x = \frac{y^2 + k}{2}$, $k \in \mathbf{R}$]

248 $z = y^2 - 2y - x$

249 $z = x^2 + y^2$ [Circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = k$: se $k \geq 0$ si tratta di circonferenze reali di centro l'origine e raggio $\sqrt{k}$ (in particolare, se $k = 0$ la circonferenza degenera nell'origine); se $k < 0$ l'equazione non rappresenta alcun punto]

250 $z = x^2 + y^2 - 9$

251 $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ [Circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 2x + 4y = k$: se $k \geq -5$ si tratta di circonferenze di centro $(-1, -2)$ e raggio $\sqrt{k+5}$ (in particolare, se $k = -5$ la circonferenza degenera nel centro); se $k < -5$ l'equazione non rappresenta alcun punto]

252 $z = x^2 + y^2 - 6y$

253 $z = -2xy$ [Curve di equazione $-2xy = k$ con $k \in \mathbb{R}$: se $k \neq 0$ si tratta di iperboli equilatere; se $k = 0$ l'equazione rappresenta l'unione dei due assi cartesiani]

254 $z = xy - 2$

255 $z = x^2 - y^2$ [Curve di equazione $x^2 - y^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}$: se $k \neq 0$ si tratta di iperboli equilatere; se $k = 0$ l'equazione rappresenta l'unione delle bisettrici dei quadranti]

256 $z = x^2 - 4y^2$

257 $z = |x| - y$ [Curve di equazione $y = |x| - k$, con $k \in \mathbb{R}$: per $k = 0$ si ottiene il grafico della funzione valore assoluto e per $k \neq 0$ il corrispondente di quest'ultimo in un'opportuna traslazione verticale]

258 $z = y - 2|x|$

259 $z = e^{x-2y}$ [Curve di equazione $e^{x-2y} = k$, con $k \in \mathbb{R}$: se $k > 0$ si tratta delle rette di equazione $x - 2y = \ln k$; se $k \leq 0$ l'equazione non rappresenta alcun punto]

260 $z = e^{y-x}$

261 $z = y - \ln x^2$ [Curve di equazione $y - \ln x^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}$: per $k = 0$ si ottiene il grafico della funzione logaritmica di equazione $y = 2\ln|x|$ e per $k \neq 0$ il corrispondente di quest'ultimo in un'opportuna traslazione verticale]

262 $z = \ln x^3 - y$

263 Rappresenta la curva di livello corrispondente all'intersezione della superficie di equazione $z = e^{x-2y}$ con il piano di equazione $z = \frac{1}{e}$. [La retta di equazione $x - 2y + 1 = 0$]

264 Rappresenta la curva di livello corrispondente all'intersezione della superficie di equazione $z = 2^{-x^2-y^2}$ con il piano di equazione $z = \frac{1}{16}$. [La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$]

265 Rappresenta la curva di livello corrispondente all'intersezione della superficie di equazione $z = \log_2(x - y + 3)$ con il piano di equazione $z = 2$. [La retta di equazione $x - y - 1 = 0$]

266 Rappresenta la curva di livello corrispondente all'intersezione della superficie di equazione $z = \log_2(4x^2 - 2y)$ con il piano di equazione $z = 3$. [La parabola di equazione $y = 2x^2 - 4$]

Limiti e continuità

Utilizzando la continuità delle funzioni, calcola i seguenti limiti.

267 $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (x^3 - xy^2)$ [15]

268 $\lim\limits_{(x,y)\to(4,1)} (xy^2 - x^2y)$ [−12]

269 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

270 $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

271 $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2 + y^2}$ [5]

272 $\lim\limits_{(x,y)\to(3,5)} \sqrt{y^2 - x^2}$ [4]

273 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln(2 - xy)$ [0]

274 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2+y^2}$ [1]

Determina il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ in cui le seguenti funzioni sono continue.

275 $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ [$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$]

276 $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 2}$

277 $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ [$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$]

278 $f(x,y) = \frac{x^2}{2x^2 + 4y^2}$

279 $f(x,y) = \ln(xy + 1)$ [$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$]

280 $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

281 $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y-1}}$ [$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \wedge y < 1\}$]

282 $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x-2}}$

3. Derivate parziali

Teoria p. 514

Esercizi introduttivi

Test

283 Data la funzione $f(x, y) = x^2y - xy^2$, quale delle seguenti è l'espressione corretta della sua derivata parziale rispetto a x?

A $2xy - y^2$ B $x^2 - 2xy$ C $xy - 2y^2$ D Nessuna delle precedenti

284 Data la funzione $f(x, y) = x^2y - xy^2$, quale delle seguenti è l'espressione corretta della sua derivata parziale rispetto a y?

A $2xy - y^2$ B $x^2 - 2xy$ C $xy - 2y^2$ D Nessuna delle precedenti

285 Data la funzione $f(x, y) = x^2y - xy^2$, quale delle seguenti relazioni è corretta?

A $f''_{xx} = f''_{yy}$ B $f''_{xx} + f''_{xy} + f''_{yy} = 0$ C $f''_{xy} + f''_{yx} = 0$ D $f''_{xy} = f''_{xx} + f''_{yy}$

286 Data la funzione $f(x, y) = x^2y - xy^2$, qual è l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa 1 e ordinata 2?

A $z = 4 - 3x$ B $z = 3x - 4y - 1$ C $z = 4 - 3y$ D $z = 3x + 4y - 1$

287 Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto (x_0, y_0); allora:

A la funzione f è continua in (x_0, y_0)

B esiste la derivata parziale di f rispetto a x in (x_0, y_0), ma potrebbe non esistere la derivata parziale di f rispetto a y in (x_0, y_0)

C esistono le derivate parziali di f rispetto a x e y e queste ultime sono continue in (x_0, y_0)

D nessuna delle precedenti risposte è esatta

Il calcolo delle derivate parziali

288 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo le derivate parziali prime delle seguenti funzioni:

a. $z = x^4 - x^3y + y^4$ **b.** $z = xe^{-x^2-y^2}$

a. Derivando rispetto alla variabile x, considerando y come costante abbiamo:

$$z'_x = 4x^3 - 3x^2y$$

Derivando rispetto alla variabile y, considerando x come costante abbiamo:

$$z'_y = -x^3 + 4y^3$$

b. In questo caso abbiamo:

$$z'_x = 1 \cdot e^{-x^2-y^2} + x \cdot (-2xe^{-x^2-y^2}) = e^{-x^2-y^2} - 2x^2e^{-x^2-y^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$z'_y = x \cdot (-2ye^{-x^2-y^2}) = -2xye^{-x^2-y^2}$$

Calcola le derivate parziali prime delle seguenti funzioni.

289 $z = 4x - 5y + 11$ $[z'_x = 4, z'_y = -5]$

290 $z = 8x - 6y + 10$ $[z'_x = 8, z'_y = -6]$

291 $z = 3xy + 2x^2$ $[z'_x = 4x + 3y, z'_y = 3x]$

292 $z = 3x^2y^4 + x^5 + y$ $[z'_x = 5x^4 + 6xy^4, z'_y = 12x^2y^3 + 1]$

293 $z = 2x^3y + 4y^2 + 5$ $[z'_x = 6x^2y, z'_y = 2x^3 + 8y]$

294 $z = 4x^2 - 3y^4$ $[z'_x = 8x, z'_y = -12y^3]$

295 $z = 3x^2 + 5y^4 - 2x - 7y$ $[z'_x = 6x - 2, z'_y = 20y^3 - 7]$

296 $z = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$ $[z'_x = 4x^3 - 4xy^2, z'_y = 4y^3 - 4x^2y]$

297 $z = x^3y^2 + x^4y + 5x^4 + y^4$ $[z'_x = 4x^3y + 20x^3 + 3x^2y^2, z'_y = x^4 + 2x^3y + 4y^3]$

298 $z = x(x-2y)^2 + 5$ $\left[z'_x = 3x^2 - 8xy + 4y^2,\ z'_y = 8xy - 4x^2\right]$

299 $z = 3y(x+y)^2 - 4x$ $\left[z'_x = 6xy + 6y^2 - 4,\ z'_y = 3x^2 + 12xy + 9y^2\right]$

300 $z = (1+2x)(1+y) - xy^2$ $\left[z'_x = -y^2 + 2y + 2,\ z'_y = 2x - 2xy + 1\right]$

301 $z = x^3(1+y)^2$ $\left[z'_x = 3x^2(y+1)^2,\ z'_y = 2x^3(y+1)\right]$

302 $z = y^3(2x^2 + y^2)^2$ $\left[z'_x = 16x^3y^3 + 8xy^5,\ z'_y = 12x^4y^2 + 20x^2y^4 + 7y^6\right]$

303 $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x}$ $\left[z'_x = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2},\ z'_y = -\dfrac{2y}{x}\right]$

304 $z = \dfrac{x^2 + 2y^2}{y^3}$ $\left[z'_x = \dfrac{2x}{y^3},\ z'_y = -\dfrac{3x^2 + 2y^2}{y^4}\right]$

305 $z = \dfrac{x - 2y}{x + 2y}$ $\left[z'_x = \dfrac{4y}{(x+2y)^2},\ z'_y = -\dfrac{4x}{(x+2y)^2}\right]$

306 $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ $\left[z'_x = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},\ z'_y = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]$

307 $z = xy\sqrt{x}$ $\left[z'_x = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\,y,\ z'_y = x\sqrt{x}\right]$

308 $z = e^{-4xy}$ $\left[z'_x = -4ye^{-4xy},\ z'_y = -4xe^{-4xy}\right]$

309 $z = \sqrt{2x + 3y}$ $\left[z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3y}},\ z'_y = \dfrac{3}{2\sqrt{2x+3y}}\right]$

310 $z = \sqrt{5x^2 + 4y^2}$ $\left[z'_x = \dfrac{5x}{\sqrt{5x^2+4y^2}},\ z'_y = \dfrac{4y}{\sqrt{5x^2+4y^2}}\right]$

311 $z = \ln(3x^2 + y^2)$ $\left[z'_x = \dfrac{6x}{3x^2+y^2},\ z'_y = \dfrac{2y}{3x^2+y^2}\right]$

312 $z = \ln(x^2 + 4y^2 + 1)$ $\left[z'_x = \dfrac{2x}{x^2+4y^2+1},\ z'_y = \dfrac{8y}{x^2+4y^2+1}\right]$

313 $z = \ln(3 + e^{2xy})$ $\left[z'_x = \dfrac{2ye^{2xy}}{e^{2xy}+3},\ z'_y = \dfrac{2xe^{2xy}}{e^{2xy}+3}\right]$

314 $z = \ln(1 - e^{-xy})$ $\left[z'_x = \dfrac{y}{e^{xy}-1},\ z'_y = \dfrac{x}{e^{xy}-1}\right]$

315 $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$ $\left[z'_x = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$

316 $z = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\left[z'_x = \dfrac{4y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ z'_y = -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$

317 $z = x\ln(x^2 + y^2)$ $\left[z'_x = \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2},\ z'_y = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right]$

318 $z = \dfrac{\ln(xy)}{x^2}$ $\left[z'_x = \dfrac{1 - 2\ln(xy)}{x^3},\ z'_y = \dfrac{1}{x^2y}\right]$

319 $z = x^2e^{-2xy}$ $\left[z'_x = 2xe^{-2xy}(1-xy),\ z'_y = -2x^3e^{-2xy}\right]$

320 $z = ye^{-x^2-y^2}$ $\left[z'_x = -2xye^{-x^2-y^2}, z'_y = (1-2y^2)e^{-x^2-y^2}\right]$

321 $z = x\ln(xy)$ $\left[z'_x = 1+\ln(xy), z'_y = \frac{x}{y}\right]$

322 $z = xy\ln x$ $\left[z'_x = y\ln x + y, z'_y = x\ln x\right]$

323 $z = \sin(xy) + y\cos x$ $\left[z'_x = y\cos(xy) - y\sin x, z'_y = x\cos(xy) + \cos x\right]$

324 $z = \cos(xy) - x\cos y$ $\left[z'_x = -y\sin(xy) - \cos y, z'_y = x\sin y - x\sin(xy)\right]$

Calcola le derivate parziali seconde delle seguenti funzioni, verificando la validità del teorema di Schwarz.

325 $z = x - 5xy$ $\left[z''_{xx} = 0, z''_{yy} = 0, z''_{xy} = z''_{yx} = -5\right]$

326 $z = x(x-2y)^2$ $\left[z''_{xx} = 2(3x-4y), z''_{yy} = 8x, z''_{xy} = z''_{yx} = 8(y-x)\right]$

327 $z = 5y^4 - 3x^2y^3$ $\left[z''_{xx} = -6y^3, z''_{yy} = 60y^2 - 18x^2y, z''_{xy} = z''_{yx} = -18xy^2\right]$

328 $z = 4x^3 - 2y^2$ $\left[z''_{xx} = 24x, z''_{yy} = -4, z''_{xy} = z''_{yx} = 0\right]$

329 $z = 4x^2 + 5y^4 - 3xy$ $\left[z''_{xx} = 8, z''_{yy} = 60y^2, z''_{xy} = z''_{yx} = -3\right]$

330 $z = 4x^4 - 8y^3 - 5xy^2$ $\left[z''_{xx} = 48x^2, z''_{yy} = -10x - 48y, z''_{xy} = z''_{yx} = -10y\right]$

331 $z = \frac{x^2 - xy}{y}$ $\left[z''_{xx} = \frac{2}{y}, z''_{yy} = \frac{2x^2}{y^3}, z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{2x}{y^2}\right]$

332 $z = \frac{3x^2 + 5xy}{x^2}$ $\left[z''_{xx} = \frac{10y}{x^3}, z''_{yy} = 0, z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{5}{x^2}\right]$

333 $z = e^{-2x} - e^{-3y}$ $\left[z''_{xx} = 4e^{-2x}, z''_{yy} = -9e^{-3y}, z''_{xy} = z''_{yx} = 0\right]$

334 $z = e^{4x} - e^{5xy}$ $\left[z''_{xx} = 16e^{4x} - 25y^2e^{5xy}, z''_{yy} = -25x^2e^{5xy}, z''_{xy} = z''_{yx} = -5e^{5xy}(1+5xy)\right]$

335 $z = \ln(8-xy)$ $\left[z''_{xx} = -\frac{y^2}{(xy-8)^2}, z''_{yy} = -\frac{x^2}{(xy-8)^2}, z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{8}{(xy-8)^2}\right]$

336 $z = \ln(1+e^{xy})$ $\left[z''_{xx} = \frac{y^2e^{xy}}{(1+e^{xy})^2}, z''_{yy} = \frac{x^2e^{xy}}{(1+e^{xy})^2}, z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{e^{xy}(1+xy+e^{xy})}{(1+e^{xy})^2}\right]$

337 **Matematica e chimica** L'equazione di stato dei gas perfetti, come è noto, è $pV = nRT$, dove p è la pressione del gas, V è il volume occupato, T è la temperatura assoluta del gas (espressa in kelvin), n sono le moli del gas e R è la costante universale dei gas.

a. Calcola $\frac{\partial p}{\partial V}$, cioè il tasso di variazione della pressione rispetto al volume, supponendo la temperatura costante. Inversamente, calcola $\frac{\partial V}{\partial p}$, cioè il tasso di variazione del volume rispetto alla pressione, supponendo la temperatura costante.

b. Calcola $\frac{\partial p}{\partial T}$, cioè il tasso di variazione della pressione rispetto alla temperatura, supponendo il volume costante. Inversamente, calcola $\frac{\partial T}{\partial p}$, cioè il tasso di variazione della temperatura rispetto alla pressione, supponendo il volume costante.

c. Verifica che: $\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1$ e $\frac{\partial V}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial V} = -1$.

Il piano tangente

338 **ESERCIZIO GUIDATO**

Determina il piano tangente alla superficie di equazione $z = x^3 - xy^2 - y^3$ nel suo punto di ascissa 1 e ordinata 2.

- Ricorda che il piano tangente a una superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa x_0 e ordinata y_0 ha equazione:
  $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
- Calcola anzitutto le derivate parziali rispetto a x e a y della funzione $f(x, y) = x^3 - xy^2 - y^3$; verifica che:
  $f'_x = 3x^2 - y^2$ e $f'_y = -2xy - 3y^2$
- Valuta ora la funzione e le derivate parziali per $x = 1$ e $y = 2$:
  $f(1, 2) = 1^3 - 1 \cdot 2^2 - 2^3 = ...$ $f'_x(1, 2) = 3 \cdot 1^2 - 2^2 = ...$ $f'_y(1, 2) = -2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = ...$
- Hai ora tutti gli elementi per scrivere l'equazione del piano tangente:
  $z = (.....) + (.....)(x - 1) + (-16)(y - 2)$

Svolgendo i calcoli troverai che l'equazione del piano richiesto è $z = -x - 16y + 22$.

Determina l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ nel suo punto P, di cui sono date l'ascissa e l'ordinata.

339 $f(x, y) = x^2y + 1$ (1, 2) $[z = 4x + y - 3]$

340 $f(x, y) = x^3y^2$ (−1, 1) $[z = 3x - 2y + 4]$

341 $f(x, y) = (x - 2y)^2$ (0, −1) $[z = 4x - 8y - 4]$

342 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ (1, 1) $[z = 2x + 4y - 3]$

343 $f(x, y) = x^3 - 2y^2$ (2, 1) $[z = 12x - 4y - 14]$

344 $f(x, y) = \frac{x^3}{y^2}$ (2, −1) $[z = 12x + 16y]$

345 $f(x, y) = \frac{x^2}{y^3}$ (−2, 1) $[z = -4x - 12y + 8]$

346 $f(x, y) = e^{xy}$ (0, 1) $[z = x + 1]$

347 $f(x, y) = ye^{2x}$ (0, 1) $[z = 2x + y]$

348 $f(x, y) = 2x^2y - 3x$ (−1, 2) $[z = -11x + 2y - 8]$

349 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ (0, 1) $[z = 2y]$

350 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 5}$ (2, 0) $\left[z = \frac{1}{3}(2x + 5)\right]$

351 Determina per quale valore di k il piano tangente alla superficie di equazione $z = x^2 + ky^2$ nel punto P di ascissa e ordinata uguali a 1 passa per l'origine del sistema di riferimento. $[k = -1]$

352 Determina per quale valore di k il piano tangente alla superficie di equazione $z = x^3 + ky$ nel punto P di ascissa 1 e ordinata 2 passa per il punto di coordinate (3, 1, 0). $[k = -7]$

Il differenziale

Determina il differenziale delle seguenti funzioni, relativamente al punto P indicato.

353 $z = 2x^2 + 3y^3$ $P(1, -2)$ $[dz = 4dx + 36dy]$

354 $z = 3xy + y^2$ $P(2, -1)$ $[dz = -3dx + 4dy]$

355 $z = 2x^3 + xy^4$ $P(1, -1)$ $[dz = 7dx - 4dy]$

356 $z = -x^2y + 2y^3$ $P(2, -1)$ $[dz = 4dx + 2dy]$

357 $z = xe^{x^2y}$ $P(0, 0)$ $[dz = dx]$

358 $z = xe^{-y^2} + ye^x$ $P(0, 0)$ $[dz = dx + dy]$

359 $z = \frac{4}{x} + \frac{8y}{x}$ $P(2, -2)$ $[dz = 3dx + 4dy]$

360 $z = \frac{6}{x} + \frac{9x}{y}$ $P(2, 3)$ $\left[dz = \frac{3}{2}dx - 2dy\right]$

Matematica ed elettronica

361 È noto che due resistenze R_1 ed R_2, collegate in parallelo, equivalgono a una resistenza R tale che $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Utilizzando un opportuno differenziale, dai una approssimazione della variazione (in ohm) subita da R se R_1 cresce da 2,5 Ω a 2,6 Ω, mentre R_2 cresce da 1,95 Ω a 2 Ω. [Cresce di circa 0,035 Ω]

362 Siano R_1 ed R_2 due resistenze, collegate in parallelo, e sia R la resistenza a esse equivalente. Utilizzando un opportuno differenziale, dai una approssimazione della variazione subita da R se R_1 decresce da 1,5 Ω a 1,4 Ω, mentre R_2 cresce da 2,5 Ω a 2,55 Ω. [Decresce di circa 0,03 Ω]

4. Massimi e minimi

Teoria p. 520

Esercizi introduttivi

Test

363 Sia (x_0, y_0) un punto stazionario della funzione $f(x, y)$; sapendo che $H(x_0, y_0) = 2$ e $f''_{xx}(x_0, y_0) = -3$, possiamo affermare che il punto (x_0, y_0):

A è un punto di massimo relativo
B è un punto di minimo relativo
C è un punto di sella
D i dati non consentono di stabilire la natura del punto

364 Sia (x_0, y_0) un punto stazionario della funzione $f(x, y)$; sapendo che $H(x_0, y_0) = 2$ e $f''_{xx}(x_0, y_0) = 3$, possiamo affermare che il punto (x_0, y_0):

A è un punto di massimo relativo
B è un punto di minimo relativo
C è un punto di sella
D i dati non consentono di stabilire la natura del punto

365 Sia (x_0, y_0) un punto stazionario della funzione $f(x, y)$; sapendo che $H(x_0, y_0) = -2$, possiamo affermare che il punto (x_0, y_0):

A è un punto di massimo relativo
B è un punto di minimo relativo
C è un punto di sella
D i dati non consentono di stabilire la natura del punto

366 Sia (x_0, y_0) un punto stazionario della funzione $f(x, y)$; sapendo che $H(x_0, y_0) = 0$, possiamo affermare che il punto (x_0, y_0):

A è un punto di massimo relativo
B è un punto di minimo relativo
C è un punto di sella
D i dati non consentono di stabilire la natura del punto

Massimi e minimi relativi

367 ESERCIZIO GUIDATO

Determina i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella della funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + x^2y$.

- Calcola anzitutto le derivate parziali: $f'_x = 2x + 2xy$ $\quad$ $f'_y = 4y + x^2$
- Per determinare gli eventuali punti stazionari devi ora risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2xy = 0 \\ 4y + x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1 + y) = 0 \\ 4y + x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y + x^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 + y = 0 \\ 4y + x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ldots\ldots$$

  Completando la soluzione del sistema, troverai che ci sono tre punti stazionari, di coordinate:
  $(0, 0)$; $(2, -1)$; $(-2, -1)$
- Per stabilire la natura dei punti stazionari, calcola anzitutto il determinante hessiano:

$$H(x, y) = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f_{xy})^2 = \underbrace{(2 + 2y)}_{f''_{xx}} \cdot \underbrace{4}_{f''_{yy}} - \underbrace{(2x)^2}_{f''_{xy}} = 8 + 8y - 4x^2$$

- Valuta infine l'hessiano in corrispondenza dei tre punti trovati:

$H(0, 0) = \ldots\ldots$ e $f''_{xx}(0, 0) = \ldots\ldots$ $\Rightarrow$ $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo
$H(2, -1) = \ldots\ldots$ $\Rightarrow$ $(2, -1)$ è un punto di .....
$H(-2, -1) = \ldots\ldots$ $\Rightarrow$ $(-2, -1)$ è un punto di .....

Determina i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella delle funzioni date.

368 $f(x,y)=x^2y+y^2-8x$ [(–2, –2): punto di sella]

369 $f(x,y)=(x+2)^2+(y-1)^2$ [(–2, 1): punto di min]

370 $f(x,y)=x^2-2x+y^3-3y$ [(1, 1): punto di min; (1, –1): punto di sella]

371 $f(x,y)=8y-x^3+12x-y^2$ [(2, 4): punto di max; (–2, 4): punto di sella]

372 $f(x,y)=(x-3)^2+(y+4)^2$ [(3, –4): punto di min]

373 $f(x,y)=-x^2-y^2+2x-4y$ [(1, –2): punto di max]

374 $f(x,y)=x^2+y^2+4xy+2y$ $\left[\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\text{: punto di sella}\right]$

375 $f(x,y)=x^2+y^2-2x-6y$ [(1, 3): punto di min]

376 $f(x,y)=x^2-y^2+4xy-8y$ $\left[\left(\frac{8}{5},-\frac{4}{5}\right)\text{: punto di sella}\right]$

377 $f(x,y)=x^3-x^2y-y^2$ $\left[(0,0)\text{: punto di sella; }\left(-3,-\frac{9}{2}\right)\text{: punto di sella}\right]$

378 $f(x,y)=x^3+y^3+6xy$ [(0, 0): punto di sella; (–2, –2): punto di max]

379 $f(x,y)=y^3-x^3+3xy$ [(0, 0): punto di sella; (–1, 1): punto di min]

380 $f(x,y)=x^2+8y^2-2x^2y$ $\left[(0,0)\text{: punto di min; }\left(2,\frac{1}{2}\right)\text{: punto di sella; }\left(-2,\frac{1}{2}\right)\text{: punto di sella}\right]$

381 $f(x,y)=2xy-8x^4-\frac{1}{4}y^2$ $\left[(0,0)\text{: punto di sella; }\left(\frac{1}{2},2\right)\text{: punto di max; }\left(-\frac{1}{2},-2\right)\text{: punto di max}\right]$

382 $f(x,y)=2x^2y-8xy-8y^2-2$ $\left[(0,0)\text{: punto di sella; }\left(2,-\frac{1}{2}\right)\text{: punto di max; }(4,0)\text{: punto di sella}\right]$

383 $f(x,y)=x^3-y^3+8xy$ $\left[(0,0)\text{: punto di sella; }\left(\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right)\text{: punto di min}\right]$

384 $f(x,y)=2xy-4x^4-\frac{1}{4}y^4$ $\left[(0,0)\text{: punto di sella; }\left(\frac{1}{2},1\right)\text{: punto di max; }\left(-\frac{1}{2},-1\right)\text{: punto di max}\right]$

385 $f(x,y)=x^3-y^3-(1+x-y)^3$ $\left[(1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1)\text{: punto di sella; }\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\text{: punto di max}\right]$

386 $f(x,y)=(2+x+y)^3-x^3-y^3$ $\left[(2,-2),\ (-2,2),\ (-2,-2)\text{: punto di punto di sella; }\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\text{: punto di min}\right]$

387 $f(x,y)=\frac{y}{x}+\frac{27}{y}-x$ [(3, –9): punto di max]

388 $f(x,y)=x-\frac{y}{x}-\frac{8}{y}$ [(2, –4): punto di min]

389 $f(x,y)=-\frac{x}{y}+\frac{8}{y}+x$ [(8, 1): punto di sella]

390 $f(x,y)=x^3-3x^2+y-e^y$ [(0, 0): punto di max; (2, 0): punto di sella]

391 $f(x,y)=y^3-6y^2+9y+x+e^{-x}$ [(0, 3): punto di min; (0, 1): punto di sella]

392 $f(x, y) = e^{x^2-4y^2}$ [(0, 0): punto di sella]

393 $f(x, y) = 7e^{-x^2-y^2}$ [(0, 0): punto di max]

394 $f(x, y) = 2e^{x^2+y^2}$ [(0, 0): punto di min]

395 $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - \ln(2x - y)$ $\left[\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)\text{: punto di min}\right]$

396 $f(x, y) = \ln(2y - x) - 2x^2 - y^2$ $\left[\left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)\text{: punto di max}\right]$

397 $f(x, y) = (x + 2y)e^{-x^2-4y^2}$ $\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\text{: punto di max; } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\text{: punto di min}\right]$

398 $f(x, y) = (3x - y)e^{-9x^2-y^2}$ $\left[\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)\text{: punto di max; } \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)\text{: punto di min}\right]$

399 $f(x, y) = (x^2 - 2y)^2 e^{-y}$ $\left[(0, 2)\text{: punto di max; } \left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2\right)\text{: punti di min per ogni } \alpha \in \mathbf{R}\right]$

400 $f(x, y) = (y^2 + 4x)e^x$ [(−1, 0): punto di min]

401 $f(x, y) = (y^2 - 3x)^2 e^{-x}$ $\left[(2, 0)\text{: punto di max; } \left(\frac{\alpha^2}{3}, \alpha\right)\text{: punti di min per ogni } \alpha \in \mathbf{R}\right]$

402 Determina a e b in modo che il punto (2, 0) risulti critico per la funzione $f(x, y) = 3y^2 - 2x^2 + ax - e^{-xy} - by^3 + by$. In corrispondenza dei valori di a e b trovati, determina la natura di tale punto critico. [$a = 8$, $b = -2$; punto di sella]

403 Determina a e b in modo che il punto (0, 2) risulti critico per la funzione $f(x, y) = x^2 + ax + e^{xy} + by^4 - y^2$. In corrispondenza dei valori di a e b trovati, determina la natura di tale punto critico. $\left[a = -2, b = \frac{1}{8}\text{; punto di min}\right]$

Massimi e minimi vincolati

404 ESERCIZIO GUIDATO

Determina eventuali massimi o minimi vincolati della funzione $z = 12x^2 - xy$ soggetta al vincolo $y = 3x^2$, utilizzando il metodo di sostituzione.

- Sostituendo $3x^2$ al posto di y nell'equazione della funzione, sei ricondotto a cercare i punti di massimo e minimo della funzione nella sola variabile x: $z = 12x^2 - x(3x^2) = 12x^2 - 3x^3$
- Studiando con i metodi dell'analisi la funzione $z = 12x^2 - 3x^3$ troverai che essa ammette un punto di minimo relativo in $x = 0$ e un punto di massimo relativo in $x = \frac{8}{3}$.
- Pertanto, la funzione originaria, soggetta al vincolo $y = 3x^2$, ammette:
  - un punto di minimo relativo nel punto di ascissa $x = 0$ e ordinata $y = 3 \cdot 0^2 = 0$, ossia in (0, 0);
  - un punto di massimo relativo nel punto di ascissa $x = \frac{8}{3}$ e ordinata $y = 3 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{3}$, ossia in $\left(\frac{8}{3}, \frac{64}{3}\right)$.

Il minimo vincolato è dunque $f(0, 0) = 0$ mentre il massimo vincolato è $f\left(\frac{8}{3}, \frac{64}{3}\right) = \frac{256}{9}$.

Determina eventuali massimi o minimi vincolati della funzione $z = f(x, y)$, soggetta al vincolo indicato a fianco, utilizzando il metodo di sostituzione.

405 $z = x^2 - 2y^2$ $x + y + 2 = 0$ [Max = 8 in (−4, 2)]

406 $z = xy$ $x + 2y - 4 = 0$ [Max = 2 in (2, 1)]

407 $z = 3x - y$ $y = x^3$ [Max = 2 in (1, 1); min = −2 in (−1, −1)]

408 $z = 6x^2 + xy$ $\quad y = 2x^2$ $\quad$ [Max = 8 in (–2, 8); min = 0 in (0, 0)]

409 $z = 8x^2 - y^2$ $\quad x^2 - y = 0$ $\quad$ [Min = 0 in (0, 0); max = 16 in (± 2, 4)]

410 $z = 4xy - x^2$ $\quad x^3 - 2y = 0$ $\quad \left[\text{Max} = 0 \text{ in } (0,\ 0);\ \text{min} = -\frac{1}{8} \text{ in } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)\right]$

411 $z = x + y$ $\quad xy = 8$ $\quad \left[\text{Min} = 4\sqrt{2} \text{ in } \left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right);\ \text{max} = -4\sqrt{2} \text{ in } \left(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)\right]$

412 $z = 3x + y$ $\quad xy = 12$ $\quad$ [Min = 12 in (2, 6); max = –12 in (–2, –6)]

413 $z = x^2 y$ $\quad x + y = 6$ $\quad$ [Min = 0 in (0, 6); max = 32 in (4, 2)]

414 $z = xy^2$ $\quad x - y = 4$ $\quad \left[\text{Min} = 0 \text{ in } (4,\ 0);\ \text{max} = \frac{256}{27} \text{ in } \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)\right]$

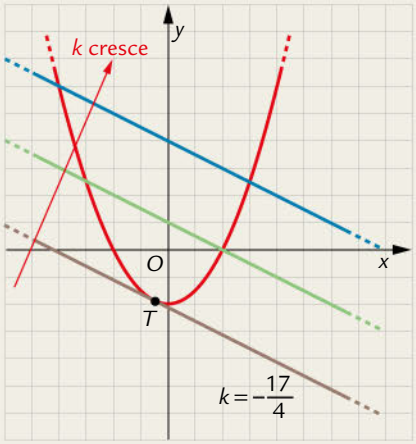
415 $z = e^{-x^2-y^2}$ $\quad 2x - y - 1 = 0$ $\quad \left[\text{Max} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}} \text{ in } \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)\right]$

416 $z = e^{-x^2-2y^2}$ $\quad x - y - 1 = 0$ $\quad \left[\text{Max} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \text{ in } \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right]$

417 **ESERCIZIO SVOLTO**

Determiniamo l'eventuale massimo o minimo vincolato della funzione $z = x + 2y$ soggetta al vincolo $x^2 - 2y - 4 = 0$, utilizzando il metodo delle curve di livello.

L'equazione del vincolo, $x^2 - 2y - 4 = 0$, risolta rispetto a y fornisce: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, dunque è l'equazione di una parabola. Le curve di livello invece hanno equazioni del tipo $x + 2y = k$, ovverosia $y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$, dunque si tratta di rette parallele a $y = -\frac{1}{2}x$. L'eventuale massimo/minimo vincolato corrisponde all'eventuale massimo/minimo valore di k per cui la retta $x + 2y = k$ interseca il vincolo. Osserva ora la figura a lato; da essa si deduce che:



- il minimo valore di k per cui la retta $x + 2y = k$ interseca il vincolo è $k = -\frac{17}{4}$, che corrisponde al caso in cui la retta è *tangente* al vincolo: ne segue che il *minimo vincolato* è $-\frac{17}{4}$ e viene raggiunto in corrispondenza del punto di *tangenza* T, che risulta quindi un *punto di minimo vincolato* per la funzione data: puoi verificare che T ha coordinate $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{8}\right)$
- la retta $x + 2y = k$ interseca il vincolo per ogni valore di k tale che $k \geq -\frac{17}{4}$: non esiste perciò massimo vincolato.

Determina eventuali massimi e minimi vincolati della funzione $z = f(x, y)$ soggetta al vincolo indicato a fianco, utilizzando il metodo delle curve di livello.

418 $z = x + 2y - 1$ $\quad x^2 + y^2 = 20$ $\quad$ [Max = 9 in (2, 4); min = –11 in (–2, –4)]

419 $z = x - y - 1$ $\quad x^2 + y^2 = 16$ $\quad \left[\text{Max} = 4\sqrt{2} - 1 \text{ in } \left(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right);\ \text{min} = -1 - 4\sqrt{2} \text{ in } \left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)\right]$

420 $z = x - 2y$ $\quad x^2 + y^2 = 4$ $\quad \left[\text{Max} = 2\sqrt{5} \text{ in } \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right);\ \text{min} = -2\sqrt{5} \text{ in } \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)\right]$

421 $z = 2x + 3y$ $\quad x^2 + y^2 = 9$ $\quad \left[\text{Max} = 3\sqrt{13} \text{ in } \left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{9\sqrt{13}}{13}\right);\ \text{min} = -3\sqrt{13} \text{ in } \left(-\frac{6\sqrt{13}}{13}, -\frac{9\sqrt{13}}{13}\right)\right]$

422 $z = y - 2x$ $\quad y = x^2 - 4$ $\quad$ [Min = –5 in (1, –3)]

423 $z = x + y$ $\quad y = -x^2 + 2x$ $\quad \left[\text{Max} = \frac{9}{4} \text{ in } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)\right]$

424 $z = x^2 + y^2$ $\quad x + y - 1 = 0$ $\quad \left[\text{Min} = \frac{1}{2} \text{ in } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

425 $z = x^2 + y^2 - 2x$ $\quad 2x - 3y = 1$ $\quad \left[\text{Min} = -\frac{12}{13} \text{ in } \left(\frac{11}{13}, \frac{3}{13}\right)\right]$

426 $z = xy$ $\quad x + y = 5$ $\quad \left[\text{Max} = \frac{25}{4} \text{ in } \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)\right]$

427 $z = -x^2 - y$ $\quad y = -\frac{x}{2}$ $\quad \left[\text{Max} = \frac{1}{16} \text{ in } \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)\right]$

428 $z = \frac{1}{2}x^2 + x - y$ $\quad x - y - 2 = 0$ $\quad [\text{Min} = 2 \text{ in } (0, -2)]$

429 $z = -2xy$ $\quad x - 2y = 1$ $\quad \left[\text{Max} = \frac{1}{4} \text{ in } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right]$

430 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo eventuali massimi e minimi vincolati della funzione $z = 2x - y$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 20$, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Osserviamo che nel nostro caso $f(x,y) = 2x - y$ e $g(x,y) = x^2 + y^2 - 20$. I punti candidati a essere di massimo o minimo, ovvero i punti stazionari vincolati, si ottengono dunque, in base al metodo dei moltiplicatori di Lagrange, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \lambda g'_x(xy) \\ f'_y(x,y) = \lambda g'_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \lambda \cdot 2x \\ -1 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

I due punti candidati a essere massimi o minimi sono dunque (4, –2) e (–4, 2). Per determinare la natura dei punti possiamo procedere in due modi differenti (sebbene il primo sia evidentemente preferibile, perché richiede molti meno calcoli).

1° modo: con considerazioni basate sul teorema di Weierstrass

Il vincolo, in questo caso una circonferenza, è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^2$, quindi per il teorema di Weierstrass certamente esistono massimo e minimo assoluti della funzione sul vincolo assegnato. Poiché, in base ai calcoli effettuati, i due punti «candidati» a essere di massimo e minimo sono soltanto (4, –2) e (–4, 2), per stabilire qual è il punto di massimo e qual è il punto di minimo basterà confrontare i valori assunti dalla funzione $f(x,y) = 2x - y$ in (4, –2) e (–4, 2): il valore più piccolo ottenuto sarà il minimo assoluto della funzione, il più grande il massimo assoluto. Puoi verificare che: $f(4,-2) = 2 \cdot 4 - (-2) = 10$ mentre $f(-4,2) = 2 \cdot (-4) - (2) = -10$ dunque il massimo assoluto della funzione, uguale a 10, è raggiunto in corrispondenza del punto di coordinate (4, –2), che è quindi di massimo vincolato, mentre il minimo assoluto, uguale a –10, è raggiunto in corrispondenza del punto di coordinate (–4, 2), che è quindi di minimo vincolato.

2° modo: con il metodo dell'hessiano orlato

Calcoliamo il determinante della matrice hessiana orlata:

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & f''_{xx} - \lambda g''_{xx} & f''_{xy} - \lambda g''_{xy} \\ g'_x & f''_{yx} - \lambda g''_{yx} & f''_{yy} - \lambda g''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2 + y^2)$$

$$g'_x = 2x, g'_y = 2y$$
$$f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{xy} = f''_{yx} = 0$$
$$g''_{xx} = 2, g''_{yy} = 2, g''_{xy} = g''_{yx} = 0$$

Abbiamo che:

$\underbrace{H\left(4,-2,\frac{1}{4}\right)>0}_{8\lambda(x^2+y^2)>0 \text{ se } \lambda>0}$ quindi $(4, -2)$ è un punto di massimo vincolato

$\underbrace{H\left(-4,2,-\frac{1}{4}\right)<0}_{8\lambda(x^2+y^2)<0 \text{ se } \lambda<0}$ quindi $(-4, 2)$ è un punto di minimo vincolato

Il massimo vincolato della funzione è perciò $f(4, -2) = 10$ mentre il minimo vincolato è $f(-4, 2) = -10$.

Determina eventuali massimi e minimi vincolati della funzione $z = f(x, y)$ soggetta al vincolo indicato a fianco, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

431 $z = 3x + 4y$ $\quad x^2 + y^2 = 25$ [Max = 25 in (3, 4); min = −25 in (−3, −4)]

432 $z = 4x - 6y - 1$ $\quad x^2 + 4y^2 = 4$ $\left[\text{Max} = 9 \text{ in } \left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right); \text{ min} = -11 \text{ in } \left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)\right]$

433 $z = 4x^2 + y^2 + 3$ $\quad x^2 + 4y^2 = 16$ [Max = 67 in (±4, 0); min = 7 in (0, ±2)]

434 $z = x^2 - 9y^2$ $\quad 9x^2 + y^2 = 9$ [Max = 1 in (±1, 0); min = −81 in (0, ±3)]

435 $z = xy$ $\quad x^2 + y^2 = 16$ [Max = 8 in $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ e $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$; min = −8 in $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ e $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$]

436 $z = 3xy$ $\quad x^2 + y^2 = 18$ [Max = 27 in (−3, −3) e (3, 3); min = −27 in (−3, 3) e (3, −3)]

437 $z = xy^2$ $\quad 2x^2 + y^2 = 24$ [Max (assoluto) = 32 in (2, −4) e (2, 4); min (assoluto) = −32 in (−2, −4) e (−2, 4); max (relativo) = 0 in $(-2\sqrt{3}, 0)$ e min (relativo) = 0 in $(2\sqrt{3}, 0)$]

438 $z = x^2 + (y-3)^2$ $\quad (x-1)^2 + y^2 = 10$ [Max = 40 in (2, −3); min = 0 in (0, 3)]

439 $z = (x+1)^2 + y^2$ $\quad x^2 + (y-2)^2 = 5$ [Max = 20 in (1, 4); min = 0 in (−1, 0)]

440 $z = x - y^2 + 2$ $\quad x^2 + y^2 = 9$

$\left[\text{Max (assoluto)} = 5 \text{ in } (3,0);\ \text{min (assoluto)} = -\frac{29}{4} \text{ in } \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{35}}{2}\right);\ \text{max (relativo)} = -1 \text{ in } (-3,0)\right]$

441 $z = e^{x^2-y^2}$ $\quad 4x^2 + 9y^2 = 36$ [Max = e^9 in (±3, 0); min = e^{-4} in (0, ±2)]

442 $z = e^{xy}$ $\quad x^2 + y^2 = 8$ [Max = e^4 in (−2, −2) e (2, 2); min = e^4 in (−2, 2) e (2, −2)]

Massimi e minimi assoluti

443 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo il massimo e il minimo assoluti della funzione $z = x - 2y$ soggetta ai vincoli $\begin{cases} y \le -x + 4 \\ y \ge x - 2 \\ y \le 7x + 4 \end{cases}$.

Osserviamo che in questo caso la *funzione* data è *lineare* ed è soggetta a *vincoli* di tipo *lineare*. La ricerca del massimo e del minimo assoluti può avvenire sia con il metodo delle curve di livello, sia con il metodo «generale» esposto nella teoria.

1° modo: metodo generale

- Il sistema di vincoli individua il triangolo ABC nella **Fig. a**.
- Non possono esistere punti interni al triangolo candidati a essere di massimo o di minimo, perché le derivate parziali della funzione sono costanti e diverse da zero:
  $f'_x = 1 \quad f'_y = -2$
- Il massimo e il minimo assoluti devono perciò essere raggiunti sul contorno del triangolo. Osserviamo che le restrizioni della funzione ai tre lati AB, BC e AC sono le tre funzioni lineari:

$\underbrace{z = x - 2(-x+4) = 3x - 8}_{\text{funzione crescente}}$ $\quad \underbrace{z = x - 2(7x+4) = -13x - 8}_{\text{funzione decrescente}}$ $\quad \underbrace{z = x - 2(x-2) = -x + 4}_{\text{funzione decrescente}}$

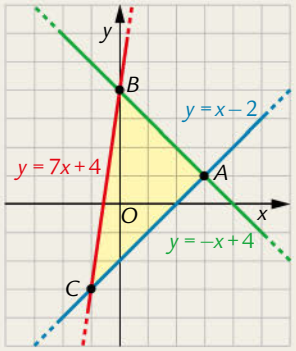


Figura a

Dal momento che le tre restrizioni sono funzioni monotone, lungo ciascuna restrizione il minimo e il massimo devono essere raggiunti agli estremi. Dunque i punti sul contorno del triangolo candidati a essere di massimo o minimo possono essere soltanto i tre vertici del triangolo, ossia A, B, C.
Calcolando il valore della funzione in corrispondenza di questi tre punti abbiamo:

$$f(3,1)=1; \quad f(0,4)=-8; \quad f(-1,-3)=5$$

dunque il minimo assoluto della funzione è -8 ed è raggiunto in corrispondenza del punto $(0, 4)$, mentre il massimo assoluto della funzione è 5 e viene raggiunto in corrispondenza del punto $(-1, -3)$.

2° modo: metodo delle curve di livello
Le curve di livello sono le rette di equazione $x-2y=k$, ovvero le rette parallele alla retta di equazione $y=\frac{1}{2}x$. Il massimo e il minimo assoluti della funzione soggetta ai vincoli assegnati corrispondono al minimo e al massimo valore di k per cui le curve di livello intersecano il triangolo ABC. Dalla **Fig. b** si deduce che tali valori di k corrispondono alla retta passante per B e per C.

Imponendo il passaggio della retta $x-2y=k$ per B si trova $k=-8$ e imponendo il passaggio per C si trova $k=5$. Si ritrova così che il massimo assoluto della funzione è 5 ed è raggiunto in corrispondenza del punto C, mentre il minimo assoluto è -8 ed è raggiunto in corrispondenza del punto B.

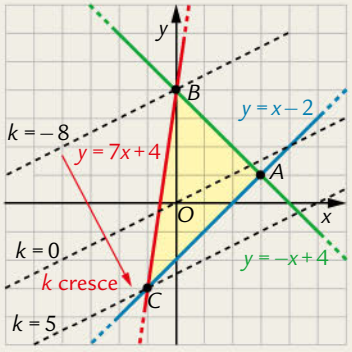


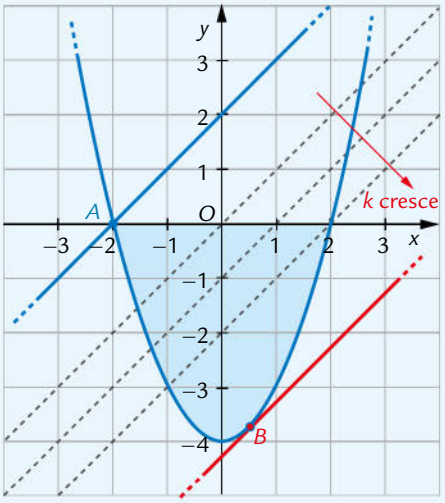
Figura b

444 ESERCIZIO GUIDATO

Determina il massimo e il minimo assoluti della funzione $z=x-y$ soggetta ai vincoli $\begin{cases} y \geq x^2-4 \\ y \leq 0 \end{cases}$.

- Anche in questo caso, come nell'esercizio precedente, è possibile applicare il metodo delle *curve di livello*, poiché la funzione z è *lineare* quindi le curve di livello (le rette del fascio di equazione $x-y=k$) sono facili da tracciare.
- Il minimo e il massimo assoluti della funzione corrispondono al minimo e al massimo valore di k per cui le rette del fascio (parallele alla bisettrice del primo e del terzo quadrante) intersecano la regione rappresentata dai vincoli (il segmento parabolico colorato in figura). Puoi renderti conto che tali valori di k corrispondono alla retta del fascio passante per A e alla retta del fascio tangente alla parabola.
- Verifica che i valori di k corrispondenti alle rette sopradette sono $k=-2$ e $k=\frac{17}{4}$ e concludi.

$\left[\text{Min} = -2 \text{ in } (-2,0); \text{ max} = \frac{17}{4} \text{ in } \left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)\right]$



445 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo il massimo e il minimo assoluti della funzione $z=4x+4y-2x^2-y^2-xy$ nella regione di piano definita dal sistema $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq -x+4 \end{cases}$.

Osserviamo che in questo caso non sarebbe agevole applicare il metodo delle curve di livello, perché queste ultime sono curve di cui non sappiamo tracciare il grafico. Applichiamo perciò il metodo generale.

- Il sistema $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq -x+4 \end{cases}$ definisce il triangolo OAB in **Fig. a**. Poiché si tratta di un insieme *chiuso* e limitato, l'esistenza del massimo e minimo assoluti della funzione nel triangolo è garantita dal teorema di Weierstrass.
- I punti candidati a essere di massimo o di minimo, *interni* al triangolo, sono i punti *stazionari* ovvero quelli che annullano le derivate parziali della funzione; essendo:

$f'_x = 4-4x-y$ e $f'_y = 4-2y-x$

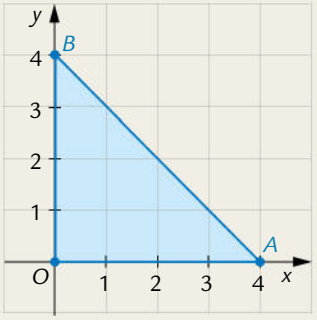


Figura a

occorre risolvere il sistema: $\begin{cases} 4-4x-y=0 \\ 4-2y-x=0 \end{cases}$

che fornisce come soluzione $\left(\frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$. Ai fini del problema che vogliamo risolvere, non è necessario determinare l'esatta natura del punto (calcolando l'hessiano), basta calcolare il valore della funzione in corrispondenza di esso; si verifica che in $\left(\frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$ la funzione assume valore $z = \frac{32}{7} \simeq 4{,}57$.

- Determiniamo ora gli eventuali punti di massimo e minimo sulla *frontiera* del triangolo OAB:
  - lungo il lato OA è $y = 0$, quindi la funzione $z = 4x + 4y - 2x^2 - y^2 - xy$ diventa $z = 4x - 2x^2$, con $0 \le x \le 4$; si può facilmente concludere (*vedi* **Fig. b**) che essa ha minimo assoluto uguale a -16 per $x = 4$ e massimo assoluto uguale a 2 per $x = 1$;
  - lungo il lato OB è $x = 0$, quindi la funzione $z = 4x + 4y - 2x^2 - y^2 - xy$ diventa $z = 4y - y^2$, con $0 \le y \le 4$; si può facilmente concludere (*vedi* **Fig. c**) che essa ha minimo assoluto uguale a 0 per $y = 0$ e per $y = 4$ e massimo assoluto uguale a 4 per $y = 2$;
  - lungo il lato AB è $y = -x + 4$, quindi la funzione $z = 4x + 4y - 2x^2 - y^2 - xy$ diventa:

    $z = 4x + 4(-x+4) - 2x^2 - (-x+4)^2 - x(4-x) = 4x - 2x^2$, con $0 \le x \le 4$

    che, come abbiamo già visto, assume valore minimo uguale a -16 per $x = 4$ e massimo uguale a 2 per $x = 1$.

  Concludiamo che, lungo la frontiera del triangolo, la funzione assume valore minimo, uguale a -16, nel punto $(4, 0)$ e valore massimo, uguale a 4, nel punto $(0, 2)$.

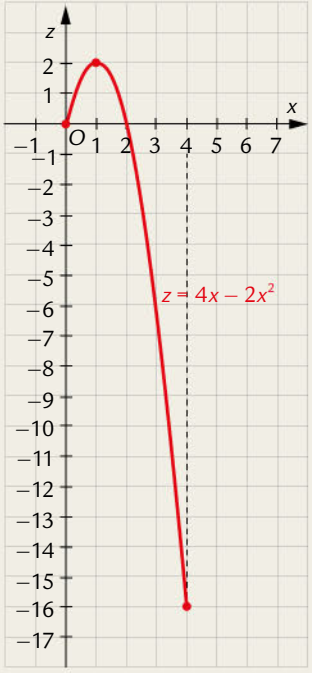


Figura b

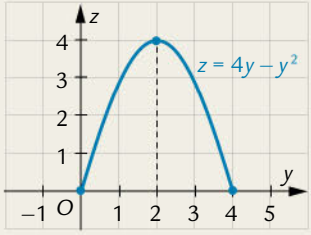


Figura c

- I risultati trovati sono riassunti nella seguente tabella.

Possibili punti di estremo	$\left(\frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$ proveniente dall'analisi dei punti interni al triangolo	$(4, 0)$ proveniente dall'analisi dei punti lungo la frontiera	$(0, 2)$ proveniente dall'analisi dei punti lungo la frontiera
Corrispondente valore della funzione	$\frac{32}{7} \simeq 4{,}57$	-16	4

- Concludiamo che il massimo assoluto della funzione, uguale a $\frac{32}{7}$, è assunto in $\left(\frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$ e il minimo assoluto, uguale a -16, è assunto in $(4, 0)$.

Determina il massimo e il minimo assoluti della funzione $z = f(x, y)$, nella regione definita a fianco, utilizzando il metodo che ritieni più opportuno.

446 $z = 4x - 2y + 1$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2y \geq x \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$ [Max = 7 in (2, 1); min = −5 in (0, 3)]

447 $z = 2x - 3y + 1$ $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 2x + 3 \\ x + 5 + 3y \geq 0 \end{cases}$ [Max = 9 in (1, −2); min = −12 in (1, 5)]

448 $z = -3x + 5y - 2$ $\begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq -3x - 6 \\ 3x - y \leq 0 \end{cases}$ [Max = 22 in (−3, 3); min = −14 in (−1, −3)]

449 $z = x - 2y - 3$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ 4y \geq 3x - 6 \\ y \leq -x + 2 \end{cases}$ [Max = 1 in (−2, −3); min = −7 in (−2, 1)]

450 $z = \frac{1}{2}x - 2y + 5$ $\begin{cases} 2x - 2 \leq y \leq 2x + 3 \\ -\frac{1}{2}x - 2 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$ [Max = 9 in (0, −2); min = −1 in (0, 3)]

451 $z = 2x - y - 1$ $\begin{cases} x - 2y \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$ $\left[\text{Min} = \frac{5}{2} \text{ in } \left(2, \frac{1}{2}\right); \text{ non esiste massimo}\right]$

452 $z = 4x - 2y - 3$ $\begin{cases} -2 \leq y \leq 1 \\ -3 \leq x - y \leq 4 \end{cases}$ [Max = 15 in (5, 1); min = −19 in (−5, −2)]

453 $z = 2x + y - 1$ $\begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ y \leq 5 \end{cases}$ [Max = 10 in (3, 5); min = −6 in (−1, −3)]

454 $z = x + y - 2$ $\begin{cases} y \leq 4x - x^2 \\ y \geq -2x \end{cases}$ $\left[\text{Max} = \frac{17}{4} \text{ in } \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right); \text{min} = -8 \text{ in } (6, -12)\right]$

455 $z = x^2 + y^2$ $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \geq 1 - x \\ y \leq 4 - x \end{cases}$ $\left[\text{Max} = 16 \text{ in } (0, 4) \text{ e } (4, 0); \text{min} = \frac{1}{2} \text{ in } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

456 $z = xy$ $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \geq 2 - x \\ y \leq 6 - x \end{cases}$ [Max = 9 in (3, 3); min = 0 in (0, 4)]

457 $z = xy$ $\begin{cases} x + y = 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ [Max = 4 in (2, 2); min = 0 in (0, 4) e (4, 0)]

458 $z = x^2 - 2y + 5$ $\quad x^2 + y^2 \le 4$ $\quad [\text{Max} = 10 \text{ in } (\pm\sqrt{3}, -1); \text{ min} = 1 \text{ in } (0, 2)]$

459 $z = y^2 - 4x + 6$ $\quad x^2 + y^2 \le 9$ $\quad [\text{Max} = 19 \text{ in } (-2, \pm\sqrt{5}); \text{ min} = -6 \text{ in } (3, 0)]$

460 $z = x^2 + y^2 - 2xy$ $\quad x^2 + 4y^2 \le 5$ $\quad \left[\text{Max} = \frac{25}{4} \text{ in } \left(-2, \frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(2, -\frac{1}{2}\right); \text{ min} = 0 \text{ in } (0, 0)\right]$

461 $z = x^3 - xy^2$ $\quad \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 4 - x \end{cases}$ $\quad [\text{Max} = 64 \text{ in } (4, 0); \text{ min} = -8 \text{ in } (1, 3)]$

462 $z = y^3 - x^2 y - 4$ $\quad \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 2 - x \end{cases}$ $\quad \left[\text{Max} = 4 \text{ in } (0, 2); \text{ min} = -5 \text{ in } \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

463 $z = 6x^2 - 2xy$ $\quad \begin{cases} |x| \le 3 \\ |y| \le 3 \end{cases}$ $\quad \left[\text{Max} = 72 \text{ in } (-3, 3) \text{ e } (3, -3); \text{ min} = -\frac{3}{2} \text{ in } \left(-\frac{1}{2}, -3\right) \text{ e } \left(\frac{1}{2}, 3\right)\right]$

464 $z = x^2 + y^2 + 9y$ $\quad x^2 + (y-4)^2 \le 1$ $\quad [\text{Max} = 70 \text{ in } (0, 5); \text{ min} = 36 \text{ in } (0, 3)]$

465 $z = x^2 - 2xy + y$ $\quad \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 2 \end{cases}$ $\quad \left[\text{Max} = 4 \text{ in } (2, 0); \text{ min} = -\frac{1}{12} \text{ in } \left(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right)\right]$

466 $z = x^3 + y^3 - 6xy$ $\quad \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$ $\quad [\text{Max} = 55 \text{ in } (3, -2); \text{ min} = -71 \text{ in } (-3, -2)]$

467 $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y + 3$ $\quad \begin{cases} x \le 1 \\ y \le -1 \\ x + y \ge -3 \end{cases}$ $\quad [\text{Max} = 6 \text{ in } (-2, -1) \text{ e } (1, -4); \text{ min} = -1 \text{ in } (0, -2)]$

468 $z = 3x^2 + 16y^2 + 12x - 10$ $\quad x^2 + 4y^2 \le 16$ $\quad [\text{Max} = 86 \text{ in } (4, 0); \text{ min} = -22 \text{ in } (-2, 0)]$

469 $z = e^{xy}$ $\quad \begin{cases} y \ge x^2 - 3 \\ y \le 1 \end{cases}$ $\quad [\text{Max} = e^2 \text{ in } (-1, -2) \text{ e } (2, 1); \text{ min} = e^{-2} \text{ in } (-2, 1) \text{ e } (1, -2)]$

470 $z = e^{2x^2 - y^2}$ $\quad \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$ $\quad [\text{Max} = e^8 \text{ in } (\pm 2, 0) \text{ e min} = e^{-4} \text{ in } (0, \pm 2)]$

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

471 **Vero o falso?**

a. la distanza tra i due punti $A(1, -1, 2)$ e $B(2, 3, 4)$ è compresa tra 4 e 5 V F

b. nello spazio, riferito a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, l'equazione $x - 2y - 1 = 0$ rappresenta una retta V F

c. il piano di equazione $y - 2z + 5 = 0$ è parallelo all'asse x V F

d. il dominio della funzione $z = \ln(xy)$ è un insieme aperto V F

e. il dominio della funzione $z = \sqrt{xy}$ è un insieme aperto V F

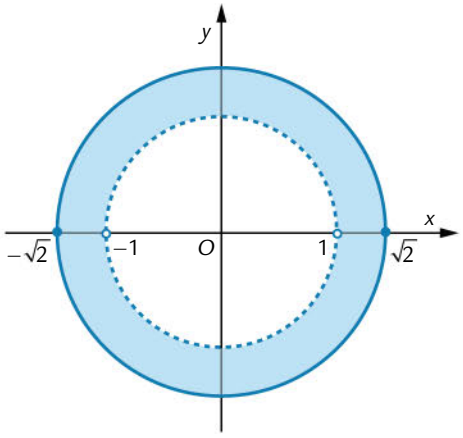
f. data la funzione $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, risulta $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ V F

Test

472 Quale delle seguenti funzioni ha come dominio un insieme *chiuso*?

A $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$ B $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ C $z = \ln(x^2 - y^2)$ D Nessuna delle altre risposte è corretta

473 La regione di piano rappresentata qui a fianco rappresenta il dominio di quale delle funzioni seguenti?



A $z = \sqrt{-\ln(x^2 + y^2 - 1)}$

B $z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$

C $z = \ln\left(-\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right)$

D $z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right)$

474 Le curve di livello della superficie di equazione $z = x^2 - y$ proiettate sul piano xy, costituiscono:

A un fascio di rette C un fascio di iperboli

B un fascio di parabole D un fascio di circonferenze

475 Il piano di equazione $3x - 2z - 1 = 0$ è:

A parallelo all'asse x C parallelo all'asse z

B parallelo all'asse y D non è parallelo a nessuno degli assi coordinati

476 Una funzione $z = f(x, y)$ ha come punto stazionario $P(-1, 1)$. Se l'hessiano relativo alla funzione f, valutato nel punto P, risulta *positivo*, che cosa possiamo affermare a proposito del punto P?

A È certamente un punto di massimo relativo di f

B È certamente un punto di minimo relativo di f

C È certamente un punto di sella di f

D Le informazioni date non sono sufficienti per stabilire la natura del punto P

477 Quanto vale l'hessiano della funzione $f(x, y) = x^3y - xy^4$ in $(-1, 0)$?

A -9 B -7 C 12 D Nessuna delle altre risposte è corretta

478 Qual è l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = x^3y^5$ nel suo punto di ascissa 1 e ordinata -1?

A $z = 3x + 5y + 7$ B $z = -3x + 5y + 7$ C $z = 3x - 5y + 7$ D $z = -3x + 5y - 7$

479 Data la funzione $z = 3x^2 - 6x - y^2$, il punto $(1, 0)$:

A è di minimo relativo B è di massimo relativo C è di sella D non è un punto stazionario

480 Per quali valori di a e b il piano tangente alla superficie di equazione $z = ax^2 + y^2 + by + 2x - 1$ nel suo punto di ascissa 1 e ordinata -1 risulta orizzontale?

A $a = -1, b = 2$ B $a = -1, b = -2$ C $a = 1, b = -2$ D $a = 1, b = 2$

481 Quanto vale il massimo assoluto della funzione $z = e^{-x^2-2x-y^2}$?

A 0 B 1 C e D La funzione data non ammette massimo assoluto

482 Sia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile e con derivata continua in $\mathbf{R}$, tale che $f(-2) = 12$. Sapendo che il piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa 1 e ordinata -2 passa per l'origine, quanto vale $f'(-2)$?

A -2 B -3 C -4 D Non è possibile stabilirlo con le informazioni date

483 Determina e rappresenta graficamente i domini delle seguenti funzioni:

a. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ **c.** $z = \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

b. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ **d.** $z = \ln\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$

Per ciascun dominio, stabilisci se si tratta di un insieme aperto o chiuso e se si tratta di un insieme limitato o illimitato.

484 Determina e rappresenta graficamente i domini delle seguenti funzioni:

a. $z = \dfrac{1}{2y - x^2}$ **c.** $z = \ln(2y - x^2) + \ln(2 - y)$

b. $z = \sqrt{2y - x^2}$ **d.** $z = \sqrt{\dfrac{2y - x^2}{4 - y}}$

Per ciascun dominio, stabilisci se si tratta di un insieme aperto o chiuso e se si tratta di un insieme limitato o illimitato.

485 Considera la funzione $f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}$.

a. Determina e rappresenta graficamente il suo dominio.

b. Scrivi l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa $x = 4$ e ordinata $y = 5$.

[**a.** Il dominio è costituito da un angolo, inclusi i suoi lati; **b.** $z = \frac{1}{4}(2y + 6 - x)$]

486 Considera la funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 5} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

a. Determina e rappresenta graficamente il suo dominio.

b. Scrivi l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa $x = 0$ e ordinata $y = 3$.

[**a.** Il dominio è costituito da una corona circolare chiusa; **b.** $z = \frac{1}{4}(3y + 15)$]

487 Data la superficie di equazione $z = x^2 + 4y^2$:

a. rappresenta le curve di livello;

b. scrivi l'equazione del piano tangente nel suo punto di ascissa e ordinata uguali a 1;

c. determina gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o di sella;

d. determina i massimi e minimi relativi e assoluti, vincolati alla parabola di equazione $y = x^2$.

[**a.** Il fascio di iperboli di equazione $x^2 - 4y^2 = k$ (iperbole degenere in due rette per $k = 0$);
b. $z = 2x - 8y + 3$; **c.** $(0, 0)$: sella; **d.** min relativo in $(0, 0)$, max assoluti in $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{8}\right)$]

488 Data la superficie di equazione $z = x^2 + 4y^2$:

a. rappresenta le curve di livello;

b. scrivi l'equazione del piano tangente nel suo punto di ascissa 1 e ordinata -1;

c. determina il massimo e il minimo assoluti della funzione, soggetta al vincolo $x^2 + y^2 \leq 4$.

[**a.** Il fascio di ellissi di equazione $x^2 + 4y^2 = k$ (ellisse degenere nell'origine per $k = 0$);
b. $z = 2x - 8y - 5$; **c.** max $= 16$ in $(0, \pm 2)$; min $= 0$ in $(0, 0)$]

489 Data la funzione $f(x, y) = x^2 - 4y^2 + y^4$:

a. scrivi l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa 1 e ordinata -1;

b. determina eventuali punti di massimo e minimo relativi o di sella della funzione $f(x, y)$;

c. determina il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x, y)$, soggetta al vincolo $x^2 + y^4 = 4$.

[**a.** $z = 2x + 4y$; **b.** $(0, 0)$: sella, $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$: minimi; **c.** max $= 4$ in $(\pm 2, 0)$; min $= -4$ in $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$]

490 Considera la superficie di equazione $z = e^{2x - 4x^2 + 2y - y^2}$.

a. Scrivi l'equazione del piano tangente nel suo punto di intersezione con l'asse z.

b. Determina gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o di sella.

c. Determina il massimo e il minimo assoluti della funzione nel triangolo definito dal sistema: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq 2 - x \end{cases}$

[**a.** $z = 2x + 2y + 1$; **b.** $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$: massimo; **c.** max $= e^{\frac{5}{4}}$ in $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ e min $= e^{-12}$ in $(2, 0)$]

(Maturità per ragionieri programmatori, Sessione suppletiva 1986)

491 **E se?** Verifica che la funzione $f(x, y) = x + |y|$ **non** è derivabile in (0, 0).

▶ Cambierebbe la risposta, considerando la funzione $f(x, y) = x + |y|^3$? Giustifica adeguatamente la risposta.

492 Considera la funzione $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - 6xy^2 + 8x$.

a. Determina gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o di sella.

b. Determina il minimo e il massimo assoluti della funzione nel rettangolo individuato dal sistema:

$$\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$$

$\left[\text{a. } \left(0, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\text{: punti di sella; b. max} = 40 \text{ in } (-2, 2) \text{ e min} = -\frac{76}{3} \text{ in } \left(-2, -\frac{1}{3}\right)\right]$

493 **Giustificare e argomentare**

a. Michele afferma (correttamente) che l'origine degli assi (0, 0) è un punto di minimo relativo (e assoluto) della funzione $z = x^4 + y^4$, pur non essendo applicabile il criterio dell'hessiano per lo studio di tale punto stazionario (verificalo). Sapresti giustificare quanto affermato da Michele?

b. Come si potrebbe dimostrare che l'origine degli assi risulta invece un punto di sella per la funzione $z = x^4 - y^4$?

---

494 Un'azienda produce armadi di due tipi, classico e lusso. Il costo settimanale complessivo per produrre x armadi di tipo classico e y di tipo lusso è espresso dalla funzione:



$$C(x, y) = 8000 + 40x + 80y - xy$$

Ogni settimana si vogliono produrre:

- almeno 60 armadi di tipo classico e almeno 80 di tipo lusso;
- al massimo 120 armadi di tipo classico e al massimo 100 armadi di tipo lusso.

Quale produzione settimanale genera i costi più alti? Quale i costi più bassi?

[Costi più alti: 60 armadi di tipo classico e 100 di tipo lusso; costi più bassi: 120 armadi di tipo classico e 100 di tipo lusso]

495 Un'azienda produce due beni, diciamo A e B. Il profitto settimanale (in euro) derivante dalla vendita di x unità del bene del tipo A e y unità del bene del tipo B è espresso dalla funzione:

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 - y^2 - \frac{1}{4}xy + 100x + 80y + 2000$$

L'azienda stabilisce che in una settimana devono essere prodotte complessivamente 250 unità dei due beni A e B. Qual è la produzione settimanale che garantisce il massimo utile, supponendo che tutti i beni prodotti vengano venduti? E a quanto ammonta il massimo profitto?

[Profitto massimo = 1361,25 euro in corrispondenza della produzione di 183 unità del bene A e 67 del bene B]

496 Tre città, rispetto a un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, sono rappresentate dai tre punti $A(20, 10)$, $B(-10, 20)$ e $C(5, -10)$. Stabilisci in quale posizione P deve essere posto un ripetitore televisivo, se si vuole minimizzare la somma dei quadrati delle distanze di P dalle tre città.

$\left[P\left(5, \frac{20}{3}\right)\right]$

497 Considera la funzione $f(x, y) = ayx^2 + by^2x - 3x$.

a. Determina a e b in modo che $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ sia un punto stazionario per la funzione.

In corrispondenza dei valori di a e b trovati, esegui quanto richiesto.

b. Determina tutti i punti stazionari della funzione e specifica la loro natura.

c. Scrivi l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa $x = 1$ e ordinata $y = -1$.

$\left[\text{a. } a = 2, b = -4\text{; b. } \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(2, \frac{1}{2}\right)\text{: punti di sella; c. } z = -11x + 10y + 12\right]$

498 Considera la funzione $f(x, y) = ax^2 - 4x + y^3 + by$.

a. Determina a e b in modo che (1, 2) sia un punto stazionario per la funzione.

In corrispondenza dei valori di a e b trovati, esegui quanto richiesto.

b. Determina tutti i punti stazionari della funzione e specifica la loro natura.

c. Scrivi l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa $x = 2$ e ordinata $y = -1$. [a. $a = 2, b = -12$; b. (1, 2): minimo (1, −2): sella; c. $z = 4x - 9y - 6$]

Funzioni di due variabili

1 **Vero o falso?**

a. le curve di livello della funzione $z = 4x^2 + 9y^2 - 1$ sono rette V F

b. se $z = 4xy + 3y$, allora $z'_y(1,1) = 7$ V F

c. l'origine O degli assi cartesiani è un punto di sella per la funzione $z = f(x,y) = xy$ V F

d. la funzione $z = f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ è continua in ogni punto del suo dominio V F

Determina il dominio delle seguenti funzioni e rappresentalo graficamente.

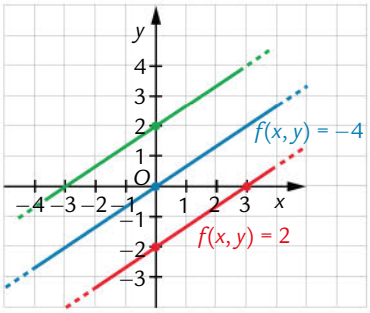
2 $z = \ln(x + y - 3)$

3 $z = \sqrt{y - x^2 + 2} + \sqrt{4 - y}$

4 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(9 - x^2 - y^2)$

5 Rappresenta le curve di livello della funzione $z = x^2 + y^2 - 4x$.

6 Le rette parallele in figura rappresentano le curve di livello di una funzione *lineare*. Quale? Illustra (in breve) il tuo ragionamento sulla base delle indicazioni fornite.



7 Secondo la legge di van der Waals, la pressione p, il volume V e la temperatura assoluta T di un gas sono legati dalla relazione:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

dove n è il numero di moli, a e b sono due costanti che dipendono dal gas considerato ed R è la costante universale dei gas.

a. Determina il tasso di variazione della pressione rispetto alla temperatura, supponendo il volume costante.

b. Determina il tasso di variazione della pressione rispetto al volume, supponendo la temperatura costante.

8 Determina l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = x^3 - x^2 y - y^2$ nel suo punto di ascissa 1 e ordinata 2.

9 Determina gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^4 - 6xy$ e stabilisci se si tratta di punti di massimo o minimo relativo o di sella.

10 Determina il massimo e il minimo assoluti della funzione:

$z = x^2 + y^2 - 4x - 2y$

soggetta al vincolo $x^2 + y^2 \leq 20$.

Valutazione											
Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**Totale**
Punteggio massimo	$0{,}25 \cdot 4 = 1$	0,5	1	1	1	1	$0{,}5 \cdot 2 = 1$	1	1	1,5	10
Punteggio ottenuto											

Tempo indicativo: 1 ora

Risposte p. 574

Utilizzare tecniche e procedure di calcolo

Rappresenta graficamente il dominio di ciascuna delle seguenti funzioni. Stabilisci quindi se il dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso o aperto, limitato o illimitato.

1 $z = \dfrac{e^{xy}}{x - y + 4}$

2 $z = e^x \sqrt{2x - y}$

3 $z = \ln x + \ln y + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

4 $z = y \ln(4 - x^2) + \dfrac{y}{x\sqrt{16 - y^2}}$

5 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{18 - 2x^2 - 2y^2}$

6 $z = \dfrac{\ln(y - x^2)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

7 $z = \ln\left(\dfrac{x}{2 - y}\right)$

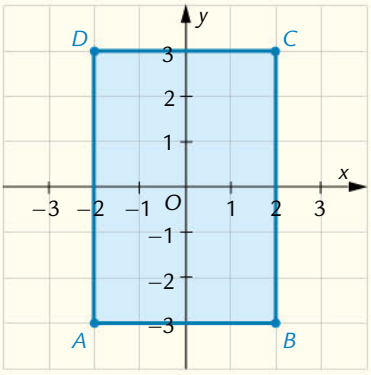
8 $z = \sqrt{\dfrac{x - 2}{y + 2}}$

9 $z = \dfrac{\ln x}{\ln(x - y)}$

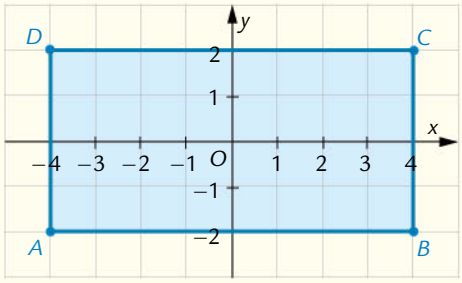
10 $z = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x}{x - 2}\right)} + \ln\sqrt{\dfrac{y}{2 - y}}$

---

11 Il dominio di una funzione $z = f(x, y)$ è il rettangolo $ABCD$ in figura. Rappresenta il dominio della funzione $z = f(x - y, x + y)$.



12 Il dominio di una funzione $z = f(x, y)$ è il rettangolo $ABCD$ in figura. Rappresenta il dominio della funzione $z = f(x^2 + y^2, x + y)$.



---

13 Determina gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^3 - 6x^2 - y^2 + 4y$ e stabilisci se si tratta di punti di massimo o minimo relativo oppure di sella. [(0, 2): max; (4, 2): sella]

14 Determina gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^3 + 6xy^2 - 12x$ e stabilisci se si tratta di punti di massimo o minimo relativo o di sella. $\left[(-2, 0)\text{: max; } (2, 0)\text{: min; } \left(0, \pm\sqrt{2}\right)\text{: sella}\right]$

15 Determina gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x, y) = (x - y)e^{x - y^2}$ e stabilisci se si tratta di punti di massimo o minimo relativo o di sella. $\left[\text{min in } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

16 Determina i punti, appartenenti alla superficie di equazione $z = x^3 - y^3 - x^2y^2$, in cui il piano tangente è orizzontale. $\left[(0, 0, 0); \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{27}{16}\right)\right]$

17 Determina i punti, appartenenti alla superficie di equazione $z = x^3 - 27x^2 - y^2 - 2y$, in cui il piano tangente è orizzontale. [(0, −1, 1); (18, −1, −2915)]

18 Considera la funzione $f(x, y) = xy^2$.

a. Scrivi l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel suo punto di ascissa −2 e ordinata 1.

b. Determina il minimo e il massimo assoluti della funzione, soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 12$.

$\left[\text{a. } z = x - 4y + 4\text{; b. max} = 16\text{, raggiunto in } \left(2, \pm 2\sqrt{2}\right)\text{, min} = -16 \text{ in } \left(-2, \pm 2\sqrt{2}\right)\right]$

19 Determina il minimo e il massimo assoluti della funzione $f(x,y)=x-y$, soggetta al vincolo:
$x^2+4y^2=20$ [Max = 5 in $(4,-1)$ e min = -5 in $(-4,1)$]

20 Determina il minimo e il massimo assoluti della funzione $f(x,y)=2xy$, soggetta al vincolo:
$x^2+y^2-xy=12$ [Max = 24 in $(-2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$ e $(2\sqrt{3},2\sqrt{3})$; min = -8 in $(-2,2)$ e $(2,-2)$]

21 Determina il minimo e il massimo assoluti della funzione $f(x,y)=2xy^2-y^4$, soggetta ai vincoli:
$\begin{cases} x\geq 0, y\geq 0 \\ y\leq 1-x \end{cases}$ $\left[\text{Min} = -1 \text{ in } (0,1) \text{ e max} = \frac{3}{16} \text{ in } \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$

22 Determina a e b in modo che $(1,-1)$ risulti un punto stazionario per la funzione $f(x,y)=axy^2+by^3+x^4$.
$\left[a=-4, b=-\frac{8}{3}\right]$

23 Determina a e b in modo che $(-1,1)$ risulti un punto stazionario per la funzione $f(x,y)=ax^2y+by^2+x^3$.
$\left[a=\frac{3}{2}, b=-\frac{3}{4}\right]$

24 Determina per quali valori di k il piano di equazione $z=k$ è tangente alla superficie di equazione:
$z=e^x-x+y^3-3y$ $[k=-1 \vee k=3]$

25 Determina per quali valori di k il piano di equazione $z=k$ è tangente alla superficie di equazione:
$z=x^2-4x+xy^2$ $[k=-4 \vee k=0]$

26 Considera la superficie di equazione $z=kx^2-(k-2)y^3$. Determina k in modo che il piano tangente alla superficie nel suo punto di ascissa 1 e ordinata -1 sia:
a. passante per l'origine; **b.** parallelo all'asse x; **c.** parallelo all'asse y. $\left[\text{a. } k=\frac{4}{3}\text{; b. } k=0\text{; c. } k=2\right]$

27 Considera la superficie di equazione $z=(k-1)x^3-2kxy^2$. Determina k in modo che il piano tangente alla superficie nel suo punto di ascissa 2 e ordinata 1 sia:
a. passante per l'origine; **b.** parallelo all'asse x; **c.** parallelo all'asse y. $\left[\text{a. } k=2\text{; b. } k=\frac{6}{5}\text{; c. } k=0\right]$

28 Determina per quali valori di k l'origine risulta un punto di sella per la funzione:
$f(x,y)=x^2-ky^2-xy^2-y^2$ $[k\geq -1]$

29 Determina per quali valori di k l'origine risulta un punto di massimo relativo per la funzione:
$f(x,y)=2x^2-xy^3-y^2-kx^2$ $[k>2]$

Risolvere problemi e costruire modelli

30 Un'azienda può produrre un bene presso due diversi stabilimenti. Il costo (in euro) per la produzione di q_1 unità del bene presso il primo stabilimento è espresso dalla funzione $C_1=q_1^2+2q_1+250$.
Il costo (in euro) per la produzione di q_2 unità del bene presso il secondo stabilimento è espresso dalla funzione $C_2=2q_2^2+10q_2+100$. Ogni unità del bene, indipendentemente dallo stabilimento di produzione, viene venduta a 50 euro. Supponiamo che vengano prodotte q_1 unità nel primo stabilimento, q_2 nel secondo e che tutte queste unità prodotte vengano vendute; affinché l'utile generato da tale vendita sia massimo, come dovrebbero essere le quantità q_1 e q_2?
$[q_1=24, q_2=10]$

31 Un'azienda produce due modelli di un certo tipo di armadi, il modello standard e il modello di lusso. Il costo settimanale per la produzione di x armadi del tipo standard e y armadi di lusso è espresso dalla funzione:
$C(x,y)=60x+80y-2xy+5000$
Ogni settimana devono essere prodotti almeno 80 armadi standard e almeno 100 armadi di lusso; inoltre gli armadi standard prodotti possono essere al massimo 200 e gli armadi di lusso prodotti possono essere al massimo 150. Quanti armadi standard e quanti di lusso dovrebbero essere prodotti in una settimana, per minimizzare i costi?
[200 armadi standard e 150 di lusso]

32 Tra i punti appartenenti al piano di equazione $x-2y-z+4=0$, determina quello più vicino all'origine.
(*Suggerimento*: è sufficiente minimizzare il quadrato della distanza di un generico punto appartenente al piano dall'origine.)
$\left[\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)\right]$

33 Determina il punto più vicino all'origine, appartenente alla superficie di equazione $z=x^2-2y+1$.
(*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente.)
$\left[\left(0,\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)\right]$

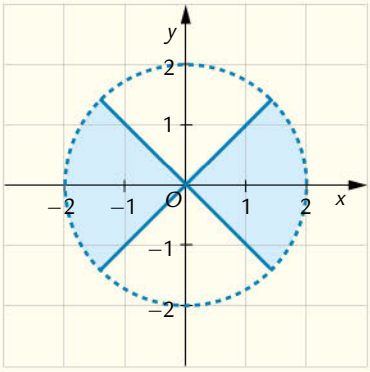
1 La regione di piano in figura rappresenta il dominio di quale delle seguenti funzioni?

A $z = \sqrt{x^2 - y^2} + \ln(4 - x^2 - y^2)$

B $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(x^2 - y^2)$

C $z = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

D Nessuna delle precedenti



2 Da che cosa è costituito il dominio della funzione $z = \dfrac{x^2 y - x y^2}{x - 2y - 1}$?

A Da tutto $\mathbf{R}^2$

B Da $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$

C Da $\mathbf{R}^2$, esclusi i punti di una retta

D Da un semipiano aperto

3 Il dominio della funzione $z = \sqrt{x} + \ln y$ è:

A un insieme aperto

B un insieme chiuso

C un insieme che non risulta né aperto né chiuso

D un insieme limitato

4 Quale delle seguenti funzioni è continua in tutto $\mathbf{R}^2$?

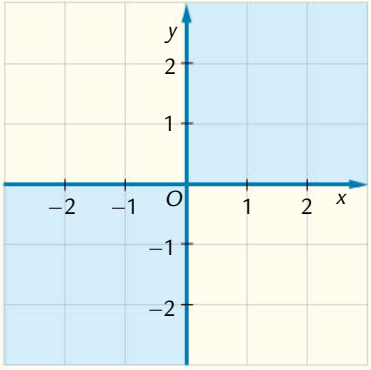
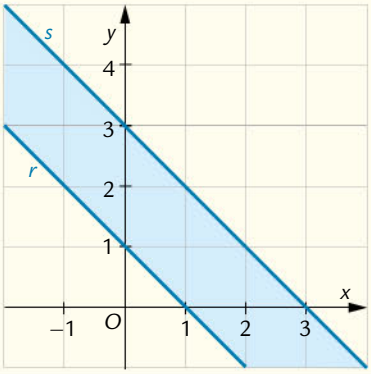
A $z = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

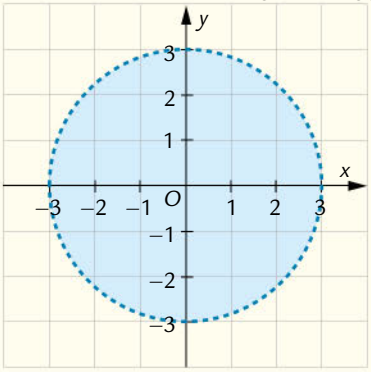
B $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

C $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

D $z = \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2 + 1)}$

5 Completa la seguente tabella scrivendo, a fianco dell'insieme descritto a parole e rappresentato nella prima colonna, la rappresentazione analitica dell'insieme stesso e l'espressione analitica di una funzione che abbia come dominio tale insieme.

Descrizione e rappresentazione dell'insieme	Rappresentazione analitica dell'insieme rappresentato	Espressione analitica di una funzione che ha come dominio l'insieme rappresentato
L'insieme costituito dai punti appartenenti al primo e al terzo quadrante e agli assi. 	.....	.....
La striscia di piano limitata dalla due rette r ed s. 	.....	.....

Descrizione e rappresentazione dell'insieme	Rappresentazione analitica dell'insieme rappresentato	Espressione analitica di una funzione che ha come dominio l'insieme rappresentato
L'insieme costituito dai punti interni del cerchio avente centro nell'origine e raggio 3. 	....	....

6 Data la funzione $f(x,y) = x^3y + 3x^4y^2$, quanto vale $f'_x(-1,1) + f'_y(-1,1)$?

A -4 B -2 C 3 D 4

7 Quanto vale l'hessiano della funzione $f(x,y) = x^3y + xy^2$ nel punto (1, 2)?

Risposta: .....

8 Quale delle seguenti è la derivata parziale prima della funzione $f(x,y) = x^2e^{xy^2}$ rispetto alla variabile x?

A $f'_x(x,y) = 2x^3ye^{xy^2}$ C $f'_x(x,y) = 2xe^{xy^2}$

B $f'_x(x,y) = e^{xy^2}(x^2y^2 + 2x)$ D $f'_x(x,y) = 2xy^2e^{xy^2}$

9 Quale delle seguenti è la derivata parziale prima della funzione $f(x,y) = x^2e^{xy^2}$ rispetto alla variabile y?

A $f'_y(x,y) = 2x^3ye^{xy^2}$ C $f'_y(x,y) = x^2e^{2xy}$

B $f'_y(x,y) = e^{xy^2}(x^2y^2 + 2x)$ D $f'_y(x,y) = 2xy^2e^{xy^2}$

10 Stabilisci quali affermazioni sono vere e quali sono false, relativamente a una funzione $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, continua in tutto $\mathbf{R}^2$ e dotata di derivate parziali continue.

a. se $f'_x(1,2) = f'_y(1,2) = 0$, allora (1, 2) è un punto di estremo relativo per la funzione f V F

b. se (1, 2) è un punto stazionario per la funzione f e risulta $H(1,2) < 0$, allora (1, 2) è un punto di sella V F

c. se l'hessiano della funzione f è nullo in corrispondenza del punto (1, 2) allora (1, 2) può essere un punto di massimo o minimo relativo, ma non di sella V F

d. se (1, 2) è un punto stazionario per la funzione f e risulta $H(1,2) > 0$ ed $f''_{xx}(1,2) < 0$, allora (1, 2) è un punto di massimo relativo per la funzione f V F

11 Quale dei seguenti è un punto di minimo relativo per la funzione $f(x,y) = 6x - x^3 - 2y^2$?

A $(-\sqrt{2}, 0)$ B $(0, 0)$ C $(\sqrt{2}, 0)$ D Nessuno dei precedenti

12 È data la funzione $z = x^2y$.

a. Spiega perché possiamo essere certi che esiste il piano tangente alla superficie di equazione $z = x^2y$ nel suo punto di ascissa 1 e ordinata 2.

.....

b. Scrivi l'equazione del piano tangente.

.....

c. Riporta i calcoli necessari per giungere all'equazione di cui al punto **b**.

.....

.....

13 La funzione $f(x,y) = x^3 - 3y^2$, soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 4$:

A ammette massimo assoluto uguale a 12 e minimo assoluto uguale a -8

B ammette massimo assoluto uguale a 8 e minimo assoluto uguale a -12

C presenta massimo assoluto uguale a 10 mentre non ammette minimo assoluto

D presenta minimo assoluto uguale a -10 mentre non ammette massimo assoluto

14 La funzione $f(x,y) = x^3 - 2y - y^2$, soggetta ai vincoli $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$:

A ammette massimo assoluto uguale a 9 e minimo assoluto uguale a -16

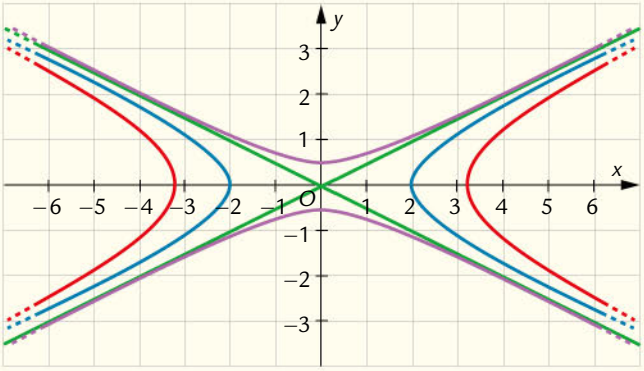
B ammette massimo assoluto uguale a 10 e minimo assoluto uguale a -15

C presenta massimo assoluto uguale a 11 mentre non ammette minimo assoluto

D presenta minimo assoluto uguale a -14 mentre non ammette massimo assoluto

15 Nella figura sono state tracciate alcune linee di livello; a quale delle seguenti funzioni appartengono?

A $z = x^2 + 4y$ B $z = x^2 + 4y^2$ C $z = x^2 - 4y^2$ D $z = 4xy$



16 Considera il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4}$. Tale limite esiste?

a. Risposta: SÌ NO

b. Giustifica la tua risposta:

.....

17 Data la funzione $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy$, quanto vale $f''_{xx} + f''_{xy} + f''_{yx} + f''_{yy}$ nel punto $(1, -1)$?

A -8 B -4 C 4 D 8

18 L'utile U (in euro) derivante dalla vendita della quantità q_1 di un certo bene e della quantità q_2 di un altro bene è espresso dalla funzione $U = 150q_1 + 90q_2 - 4q_1^2 - q_2^2 - 2q_1q_2$. Qual è l'utile massimo che è possibile ottenere?

A 1500 euro B 2325 euro C 5000 euro D 6725 euro

19 Un'azienda riceve un ordine di 100 unità di un dato bene. Il bene può essere prodotto presso due diversi stabilimenti, 1 e 2. Il costo complessivo C per produrre q_1 unità del bene nello stabilimento 1 e q_2 unità nello stabilimento 2 è espresso dalla funzione $C = 2q_1^2 + 0{,}5q_2^2 + 24q_1 + 4q_2$. Come va suddivisa la produzione delle 100 unità del bene tra i due stabilimenti in modo da minimizzare il costo complessivo?

A 80 unità nello stabilimento 1 e 20 nel 2

B 20 unità nello stabilimento 1 e 80 nel 2

C 16 unità nello stabilimento 1 e 84 nel 2

D 84 unità nello stabilimento 1 e 16 nel 2

20 Una superficie $z = f(x, y)$ è tale che tutte le sue sezioni con piani paralleli al piano xz sono rette e tutte le sue sezioni con piani paralleli al piano yz sono rette. È vero, allora, che la superficie deve essere necessariamente un piano?

a. Risposta: SÌ NO

b. Giustifica la tua risposta:

.....

Compito di realtà

Scatole di cartone



Si vuole costruire con del cartone (di spessore trascurabile) una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo con base quadrata, avente le seguenti caratteristiche:

- **sia aperta in corrispondenza della faccia superiore;**
- **presenti un divisorio, disposto perpendicolarmente a due facce, che abbia la stessa altezza della scatola e la divida in due parti uguali.**

1 Indicate con x e y le lunghezze (in centimetri) rispettivamente del lato di base e dell'altezza della scatola, esprimi in funzione di x e di y la superficie totale $S(x, y)$ del cartone necessario a costruirla.

2 Considera una scatola il cui lato di base misura 40 cm e la cui altezza è 20 cm. Utilizzando il differenziale della funzione $S(x, y)$, determina di quanto varia approssimativamente la superficie totale del cartone necessario a costruirla, se il lato di base cresce del 10%, mentre l'altezza diminuisce del 10%. Da quale errore relativo è affetta la stima ottenuta con il differenziale?

Si desidera che il volume della scatola sia di 1350 cm^3 e si vuole rendere minima la quantità di cartone da utilizzare per costruirla.

3 Sfruttando il vincolo espresso dalla condizione sul volume, esprimi la superficie totale del cartone necessario a costruire la scatola in funzione del solo lato di base, cioè in funzione della sola variabile x. Calcola quindi quali devono essere le dimensioni della scatola per minimizzare la quantità di cartone. Qual è, in tal caso, la superficie totale del cartone che serve a costruire la scatola?

4 Risolvi il precedente problema di ottimizzazione senza ricondurlo a un problema in una sola variabile, cioè impostandolo come un problema di ottimizzazione nelle due variabili x e y. Verifica che il metodo dei moltiplicatori di Lagrange conduce al sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 2\lambda xy \\ 5x = \lambda x^2 \\ x^2 y = 1350 \end{cases}$$

Poi risolvi tale sistema e verifica di aver determinato la soluzione precedentemente ottenuta al punto **3**.

Considera ora una scatola avente la stessa forma di quella considerata all'inizio, ma di volume doppio, costruita con la minima quantità possibile di cartone.

5 L'altezza di quest'ultima scatola di quanto risulta superiore, in percentuale, rispetto all'altezza della scatola ricavata al punto **3**?

Generalizza infine il problema. Supponi che si voglia costruire una scatola con n comparti di volume V, sempre con l'obiettivo di risparmiare cartone il più possibile.

6 Verifica che la soluzione ottimale si ottiene in corrispondenza di:

$$x = \sqrt[3]{\frac{(n+3)V}{2}}$$

Risposte p. 577

Risposte alle prove proposte nel volume

Prove di autoverifica

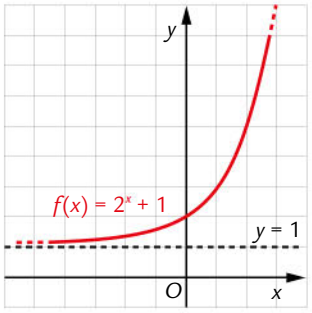
Unità 1

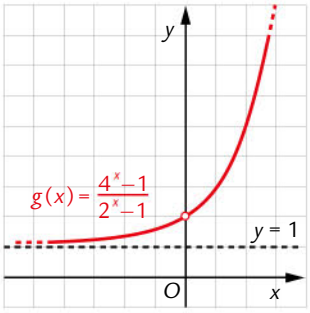
1. **a.** $f(-2)=-4$, $f(4)=0$; **b.** $[-7, 5]$; **c.** $[-5, 6]$; **d.** $-4, 0, 4$; **e.** $[-2, 2]$; **f.** né pari né dispari; **g.** non è invertibile.

2. R **3.** $\mathrm{R}-\left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$ **4.** $x<-3 \vee x>2$ **5.** $\mathrm{R}-\left\{\frac{1}{8}\right\}$ **6.** $-2<x<2$

7. $x>0 \wedge x \neq 8$ **8.** **a.** Dispari; **b.** né pari né dispari; **c.** pari. **9.** B **10.** $(g \circ f)(x)=g(f(x))=4x^2+2x-3$

11. **a.** Il dominio di f è **R**, mentre quello di g è $\mathbf{R}-\{0\}$: le due funzioni **non** sono uguali, perchè **non** hanno lo stesso dominio; i grafici di f e di g differiscono solo per il fatto che il grafico di g è «bucato» in corrispondenza di $x=0$, mentre il grafico di f non lo è.





b. $f^{-1}(x)=\log_2(x-1)$

Unità 2

1. **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$; **b.** $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$; **c.** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$; **d.** $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$; **e.** $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$; **f.** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$.

2. La funzione $f(x)$ in C è l'unica per cui risulti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ e inoltre $f(0)=1$.

3. V, V, F, V **4.** **a.** 0; **b.** 5; **c.** $-\infty$; **d.** 0

5. **a.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x}{x+3}=\frac{2}{5}$; **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^2-x+1}{2x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^2}{2x^2}=3$; **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=2-0=2$

6. **a.** e^{-4}; **b.** 2 **7.** $a=\frac{2}{3}$ **8.** Velocità limite $=\frac{gd^2}{c}$; tempo $=\frac{\ln 10}{c}d^2$.

Unità 3

1. **a.** $a_n=10-6n$; **b.** $a_{10}=-50$; **c.** -230; **d.** $-\infty$, la successione è divergente.

2. **a.** $a_n=6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$; **b.** $\frac{32}{27}$; **c.** $\frac{422}{27}$; **d.** 0, la successione è convergente.

3. $x=-4$ **4.** $x=\frac{8}{5}$ **5.** $\frac{50}{51}$

6. Al primo membro occorre calcolare la somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica la cui ragione è $q=3$ e il cui primo termine è $a_1=2$. Si ottiene così la disequazione equivalente $2\cdot\frac{3^n-1}{3-1}\geq1000$, cioè $3^n\geq1001$, da cui $n\geq\log_3 1001\simeq6{,}3$. Poiché n è un numero naturale, deve essere $n\geq7$. **7.** $a_n=4n-1$, quindi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=4$.

8. **a.** 5, 3, 5, 3, 5, 3; non si tratta di progressione aritmetica né geometrica; **b.** la somma di due termini consecutivi è uguale a 8: da $a_{n+1}+a_n=8$ segue $a_{n+1}=8-a_n$.

9. Un albero avente n file è costituito in tutto da $\frac{n(n+1)}{2}$ palline. La disequazione $\frac{n(n+1)}{2}\leq100$ fornisce $\underbrace{\frac{-1-\sqrt{801}}{2}}_{\simeq-14{,}65}\leq n\leq\underbrace{\frac{-1+\sqrt{801}}{2}}_{\simeq13{,}65}$. Se ne deduce che il numero massimo di file è 13.

Unità 4

1. F, V, V, V

2. **a.** $a=4$, $x=\pm\sqrt{3}$; **b.** è vero, perché la funzione è continua in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nel dominio; **c.** il teorema di Weierstrass non è applicabile sul dominio naturale della funzione, cioè $\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{3}\}$, perché quest'ultimo insieme **non** è un intervallo chiuso e limitato.

3. $x=-3$: singolarità eliminabile; $x=0$: seconda specie.

4. $x=1$: punto di salto **5.** $x=\pm 2$, $y=2x+3$ **6.** $x=-\frac{9}{4}$, $y=0$ (destro)

7. Dominio: $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$; asintoto orizzontale (bilatero): $y=1$; asintoti verticali: $x=\pm 1$, intersezioni con gli assi cartesiani: $A(0,0)$ e $B(-2,0)$. **8.** **a.** $a=-8$; **b.** $a=-3$; **c.** $a\in\mathbb{R}-\{-8,-3\}$

Unità 5

1. V, F, F, V

2. $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2}{3+h}-\frac{2}{3}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6-2(3+h)}{3(3+h)h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2}{3(3+h)}=-\dfrac{2}{9}$

3. $f'(-2)=-1$, $f'(3)=\frac{5}{3}$, $f'(6)=0$, mentre non esiste la derivata in $x=9$.

4. $x=-2$: punto a tangente verticale; $x=0$: punto di salto; $x=1$: punto angoloso; $x=3$: punto di cuspide.

5. $f'(x)=12x^2-4x+1$ **6.** $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{6}{x^3}$

7. $f'(x)=\dfrac{2(x-1)}{(x+1)^3}$ **8.** $f'(x)=2x^3(4\ln x+1)$

9. $f'(x)=2e^{2x}+2xe^{1+x^2}$ **10.** $y=\frac{5}{4}(x-2)+\frac{3}{2}\iff y=\frac{5}{4}x-1$

11. La velocità di decrescita della pressione è di circa −115,64 mb/km a una altezza di 1km sopra la superficie terrestre e di circa −101,54 mb/km a una altezza di 2 km sopra la superficie terrestre; ciò corrisponde a una diminuzione nel modulo della velocità del 12,2% circa.

12. Le condizioni di continuità e di derivabilità di f in 0 si traducono nel sistema $\begin{cases} b=a+1 \\ a=b \end{cases}$, che è impossibile.

Unità 6

1. V, F, V, V

2. Le soluzioni dell'equazione $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, cioè dell'equazione $6c^2-1=\dfrac{2-0}{1-(-1)}$, sono $c=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Il limite è uguale a 2

4. **a.** $-4<x<4$ con $x\neq 0$; **b.** $-2\sqrt{2}\le x\le 0\vee x\ge 2\sqrt{2}$

5. Minimo per $x=-\frac{3}{2}$, flesso a tangente orizzontale per $x=0$, non ci sono massimi.

6. Minimo per $x=3$, non ci sono massimi né flessi a tangente orizzontale.

7. Il solo flesso è $x=0$, ascendente.

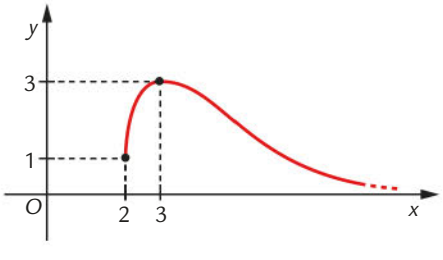
8. Il flesso $x=-2\sqrt{3}$ è ascendente, il flesso $x=0$ è discendente, il flesso $x=2\sqrt{3}$ è ascendente.

9. **a.** $g(x)=-x^2+50x-100$, guadagno massimo per $x=25$; **b.** $f(x)=x+50+\dfrac{100}{x}$, $x=10$.

Unità 7

1. **a.** $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$; **b.** $x<-2,-1<x<1,x>2$; **c.** $-2<x<-1,1<x<2$; **d.** $(\pm 2,0)$; **e.** $(0,2)$; **f.** $x=\pm 1$, $y=\frac{1}{2}$; **g.** $0<x<1,x>1$; **h.** $x<-1,-1<x<0$; **i.** $-1<x<1$; **j.** $x<-1,x>1$; **k.** $(0,2)$; **l.** non ci sono punti di flesso.

2. Un possibile grafico è quello in figura.



3. Asintoti: $x=-2$, $y=\frac{1}{2}x-1$; max $(-3,-3)$; min $(-1,-1)$.

4. Dominio $=(0,1)\cup(1,+\infty)$; asintoti: $x=1$; punto di singolarità eliminabile: $x=0$; min (e,e); flesso $\left(e^2,\frac{1}{2}e^2\right)$.

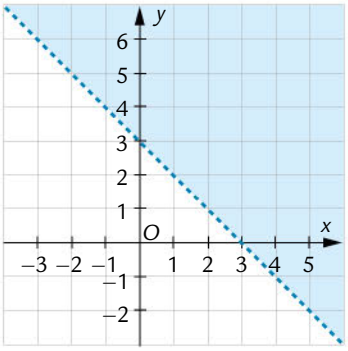
5. Dominio $=\mathbf{R}$; asintoti: $y=0$ (destro); max $(1,e)$; flesso $(2,2)$.

6. Se $k\le 0$ una soluzione; se $0<k<\frac{1}{27}$ tre soluzioni; se $k=\frac{1}{27}$ due soluzioni; se $k>\frac{1}{27}$ una soluzione.

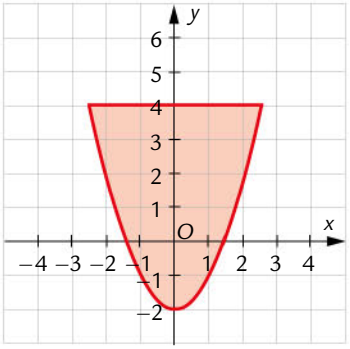
Unità 8

1. F, V, V, V

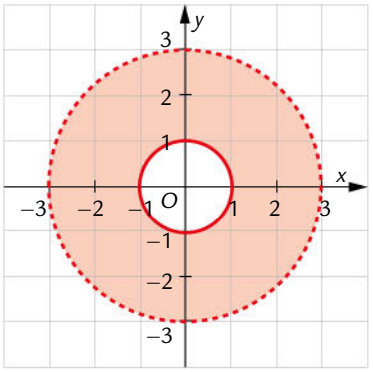
2. Vedi la figura qui sotto.



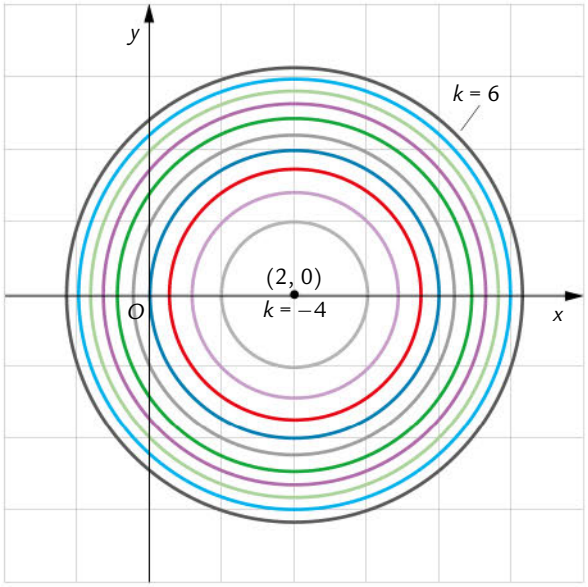
3. Vedi la figura qui sotto.



4. Vedi la figura qui sotto.



5. Le curve di livello sono le circonferenze di equazione $x^2+y^2-4x=k$; esse esistono per $k\ge -4$. Le curve di livello ottenute assegnando a k i valori interi compresi tra -4 e 6 (inclusi) sono rappresentate nella figura qui sotto. In particolare, per $k=-4$ la curva di livello è costituita da una circonferenza degenere nel punto di coordinate $(2, 0)$.



6. La funzione richiesta è del tipo $z=f(x,y)=a(2x-3y)+b$, con a, b coefficienti da determinare sulla base delle indicazioni incluse nella figura di riferimento. Dal sistema $\begin{cases}6a+b=2\\ a\cdot 0+b=-4\end{cases}$ si ottiene $a=1$ e $b=-4$. La funzione richiesta è dunque $f(x,y)=2x-3y-4$.

7. **a.** $\frac{\partial P}{\partial T}=\frac{nR}{V-nb}$; **b.** $\frac{\partial P}{\partial V}=\frac{an^2}{V}-\frac{nRT}{(v-nb)^2}$

8. $z=-x-5y+6$ **9.** $(0,0)$: sella; $\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$ e $\left(-\frac{9}{4},-\frac{3}{2}\right)$: minimi relativi

10. Max $=40$ in $(-4,-2)$ e min $=-5$ in $(2,1)$

Compiti di realtà

Tema G

Compito di realtà 1

1. Dai dati che si hanno a disposizione, seguono le condizioni:

$$\begin{cases} P(0)=72 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=1800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1+b}=72 \\ a=1800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1800 \\ b=24 \end{cases}$$

Dunque l'espressione analitica della funzione cercata è $P(t)=\dfrac{1800}{1+24\cdot 2^{-\frac{t}{5}}}$.

2. $P(15)=\dfrac{1800}{1+24\cdot 2^{-\frac{15}{5}}}=\dfrac{1800}{1+3}=450$

3. All'aumentare di t il denominatore di $P(t)$ decresce mentre il numeratore resta costante: pertanto la funzione $P(t)$ è crescente.

4. La funzione che descrive la popolazione dopo il quindicesimo anno, in base alle indicazioni fornite, deve soddisfare alle seguenti condizioni:

- per $t=15$ deve assumere valore uguale a 450;
- deve essere decrescente, poiché la popolazione diminuisce;
- deve tendere a 0 quando $t\to+\infty$, poiché si dice che l'infezione porta progressivamente alla morte di tutti gli individui.

L'unica, tra le funzioni date, che soddisfa a tutte le richieste è quella riportata al punto **B**.

Si ha infatti:

$$P(15)=\frac{450}{(15-15)^4+1}=\frac{450}{1}=450 \qquad \lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{450}{(t-15)^4+1}=0$$

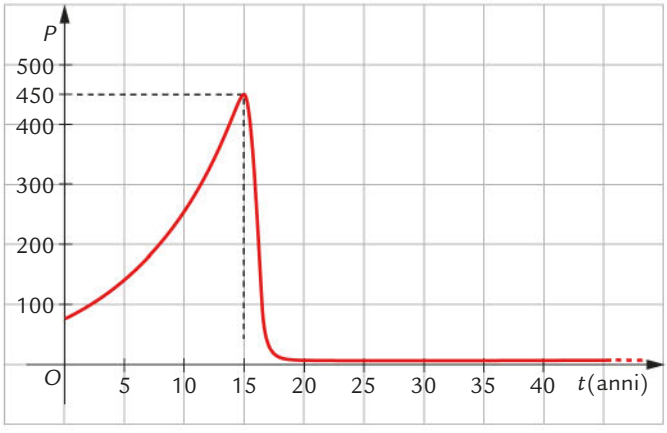
Infatti $\dfrac{450}{+\infty}\to 0$

5. Occorre risolvere l'equazione $\dfrac{450}{t^4+1}=72$ da cui $t=1{,}5$: quindi dopo circa 1 anno e mezzo dalla comparsa della malattia.

6. La funzione di cui tracciare il grafico probabile è la seguente:

$$P(t)=\begin{cases} \dfrac{1800}{1+24\cdot 2^{-\frac{t}{5}}} & \text{se } 0\le t\le 15 \\ \dfrac{450}{(t-15)^4+1} & \text{se } t>15 \end{cases}$$

Si verifica che il grafico probabile è quello indicato in figura e che in $t=15$ la funzione è continua.



Compito di realtà 2

1. $T_1(t) = 20 + 200e^{-\frac{t}{2}}$; la funzione $T_1(t)$ è decrescente perché lo è la funzione $e^{-\frac{t}{2}}$ (equivalentemente, perché è decrescente la funzione $-\frac{t}{2}$).

2. Circa 47 °C.

3. 20; ciò significa che, a lungo andare, la temperatura dell'oggetto tende a uniformarsi alla temperatura ambiente.

4. $t = 2\ln\frac{20}{9}$; arrotondando ai minuti: 1 ora e 36 minuti.

5. $d_n = 200(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n+1}{2}})$, $d_n \to 0$ per $n \to +\infty$ (infatti la temperatura del corpo tende, a lungo andare, a uniformarsi a quella dell'ambiente, dunque le diminuzioni di temperatura tra un'ora e la successiva decrescono fino a tendere a zero).

6. $T_2(t) = 20 + 200e^{-t}$; dopo circa 2 ore e 2 minuti e dopo circa 3 ore e 57 minuti.

7. **a.** 1; **b.** 0; **c.** $+\infty$; i risultati dei limiti **a** e **b** dipendono dal fatto che, a lungo andare, la temperatura di entrambi i corpi tende a diventare uguale (la stessa dell'ambiente); il risultato del limite **c** si giustifica invece in base al fatto che il secondo corpo tende a raffreddarsi più velocemente del primo (quindi nel rapporto il denominatore risulta un infinitesimo di ordine superiore al numeratore).

Tema H

Compito di realtà 1

1. Poiché il grafico della funzione in figura rappresenta lo spazio percorso in funzione del tempo, la velocità in funzione del tempo è data dalla derivata prima di tale funzione.
Nell'origine la tangente al grafico ha coefficiente angolare positivo per cui la velocità ha un valore diverso da zero: per questo Barbara afferma che lo sciatore era già «lanciato».
Nei primi 20 s la velocità diminuisce, mentre nei successivi 20 s essa aumenta: per questo Barbara suppone che il primo tratto della gara sia in salita e il secondo in discesa.
All'istante $t = 10$ s, la velocità dello sciatore risulta uguale al coefficiente angolare del tratto di retta riportato in figura:

$$v_{10} = \frac{400-160}{40-10} = \frac{240}{30} = 8$$

Lo sciatore percorre 400 m in 40 s, per cui la sua velocità media è di 10 m/s.
Si può osservare che la velocità media è di 10 m/s anche in ciascuno dei due intervalli [0, 20] e [20, 40], dunque il Teorema di Lagrange assicura l'esistenza di un istante in cui la velocità è 10 m/s all'interno del primo intervallo e di un istante in cui la velocità è di 10 m/s all'interno del secondo intervallo.

2. I dati presenti sul grafico sono ridondanti e in alcuni casi equivalenti.
Determiniamo i coefficienti imponendo quanto segue:

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(40) = 400 \\ s'(10) = 8 \\ s''(20) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = \frac{1}{50} \\ b = -\frac{6}{5} \\ c = 26 \\ d = 0 \end{cases} \to s(t) = \frac{1}{50}t^3 - \frac{6}{5}t^2 + 26t$$

3. La simmetria ha equazioni: $\sigma_B : \begin{cases} t' = 40 - t \\ s' = 400 - s \end{cases}$. Sostituendo $40 - t$ al posto di t e $400 - s$ al posto di s nell'espressione di $s(t)$, si ottiene un'equazione equivalente a quella originaria, dunque la presunta simmetria sussiste effettivamente. La velocità finale è quindi uguale a quella iniziale, poiché i due punti corrispondenti del grafico sono simmetrici rispetto a B.

4. Il grafico della velocità è un arco della parabola di equazione: $v(t) = \frac{3}{50}t^2 - \frac{12}{5}t + 26$ (*vedi* **Fig. 1**).

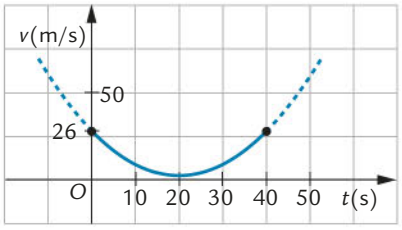


Figura 1

La velocità minima viene assunta in corrispondenza dell'ascissa del vertice, cioè all'istante $t = 20$, e risulta uguale a 2 m/s $\simeq$ 7,2 km/h.
La velocità massima è raggiunta in corrispondenza degli istanti iniziale e finale e risulta uguale a $v(0) = v(40) = 26$ m/s $\simeq$ 93,6 km/h.

5. La funzione che esprime l'accelerazione è $a(t) = v'(t) = \frac{3}{25}t - \frac{12}{5}$ (*vedi* **Fig. 2**). L'intervallo in cui l'accelerazione è negativa corrisponde a quello in cui la velocità è decrescente; l'istante in cui l'accelerazione è nulla corrisponde a quello in cui la velocità è minima; l'intervallo in cui l'accelerazione è positiva corrisponde a quello in cui la velocità è crescente.

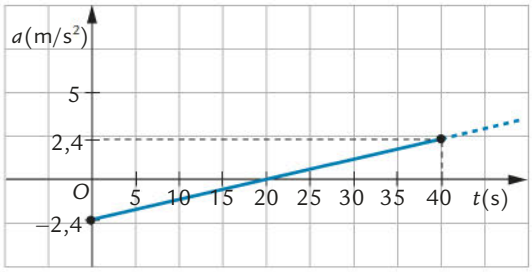


Figura 2

Compito di realtà 2

1. $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

2. Valutando $S(r)$ in corrispondenza dei tre valori di r proposti, si constata che il valore $S(r)$ minimo corrisponde a $r = 5$.

3. Il minimo assoluto della funzione $S(r)$ corrisponde all'unico zero dell'equazione $S'(r) = 0$. Si ottiene:

$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm $\simeq 5{,}4$ cm

a cui corrisponde una superficie totale di $300\sqrt[3]{2\pi}$ cm$^2 \simeq 554$ cm.

4. Indicata con x la misura (in centimetri) del lato di base minore della lattina, la superficie totale della lattina è espressa (in centimetri quadrati) dalla funzione $S(x) = 4x^2 + \frac{3000}{x}$. Il minimo si ottiene per $x = 5\sqrt[3]{3}$ cm, a cui corrisponde una superficie totale di $300\sqrt[3]{9}$ cm$^2 \simeq 624$ cm^2. Poiché $624 > 554$, il responsabile di produzione ha ragione.

5. La funzione $C(r)$ che esprime il costo complessivo della lattina in funzione del raggio di base r è così definita: $C(r) = c \cdot \left(2\pi r^2 + \frac{1000}{r}\right)$. Il minimo assoluto di $C(r)$ è raggiunto in corrispondenza dell'unico zero dell'equazione $C'(r) = 0$ e si ottiene quando $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ cm $\simeq 4{,}3$ cm. Rispetto al raggio calcolato al punto **3**, il raggio è diminuito all'incirca del 20,6%.

6. Il valore di r che fornisce il costo minimo è indipendente da c (vedi il punto precedente); il corrispondente costo minimo risulta invece uguale a $150c\sqrt[3]{4\pi} \simeq 348{,}73c$.

Tema I

Compito di realtà

1. $S(x, y) = x^2 + 5xy$

2. Risulta $dS = (2x + 5y)dx + 5xdy$; sostituendo i valori $x = 40$, $y = 20$, $dx = 4$, $dy = -2$ si ottiene che la superficie di cartone necessaria cresce di circa 320 cm^2; effettuando il calcolo esatto si ottiene invece un aumento di 296 cm^2; la stima ottenuta tramite il differenziale è affetta da un errore (per eccesso) dell'8% circa.

3. Dalla condizione sul volume si ricava che deve essere $x^2y = 1350$, da cui $y = \frac{1350}{x^2}$ e $S(x) = \frac{x^3 + 6750}{x}$. L'equazione $S'(x) = 0$ fornisce la soluzione $x = 15$, che corrisponde al punto di minimo cercato. Quindi la base della scatola deve avere lunghezza 15 cm, mentre l'altezza deve essere 6 cm; la superficie totale è uguale a 675 cm^2.

4. Si tratta di determinare il minimo della funzione $S(x, y) = x^2 + 5xy$ con il vincolo $x^2y = 1350$. Essendo necessariamente $x \neq 0$, l'equazione $5x = \lambda x^2$ equivale a $\lambda x = 5$. Sostituendo 5 al posto di λx nell'equazione $2x + 5y = 2\lambda xy$ ricaviamo $y = \frac{2}{5}x$. Infine, da $x^2y = 1350$ giungiamo per sostituzione a $x^3 = 3375$, cioè $x = 15$.

5. Circa il 26%.

6. Poiché devono esserci n comparti, sono necessari $(n - 1)$ divisori. Con calcoli analoghi quelli effettuati al punto **3**, si giunge alla funzione $S(x) = \frac{x^3 + (n+3)V}{x}$, da rendere minima. L'equazione $S'(x) = 0$ equivale a $2x^3 - (n + 3)V = 0$, da cui $x = \sqrt[3]{\frac{(n+3)V}{2}}$.

Indice analitico

A, B

accelerazione, 281
algebra
– dei limiti, 78 sgg.
– delle derivate, 267
analisi matematica, 2, 5
aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito, 80
asintoto obliquo, 202
– destro, 202
– sinistro, 61, 202
asintoto orizzontale, 61, 199
– destro, 61, 199
– sinistro, 61, 199
asintoto verticale, 60, 199
– destro, 61, 199
– sinistro, 61, 199

C

calcolo infinitesimale, 2
cambio di variabile
– nel calcolo dei limiti, 81
carattere di una successione, 158
codominio, 9
completezza di **R**, 6
continuità
– da destra, 192
– da sinistra, 192
– delle funzioni elementari, 76
– e composizione di funzioni, 193
– e derivabilità, 262
– e operazioni algebriche tra funzioni, 193
– in un punto, 75, 192
– in un punto per funzioni di due variabili, 513
criterio
– di concavità e convessità, 348
– di monotonia per le funzioni derivabili, 338
curve di livello, 509
cuspide, 276

D

derivabilità e continuità, 262
derivata, 260
– applicazioni alle scienze, 280
– applicazioni geometriche, 279
– calcolo, 275 sgg.
– destra, 263
– di ordine *n*, 262
– funzione composta, 271
– funzione coseno, 267
– funzione costante, 264
– funzione esponenziale, 265
– funzione identica, 264
– funzione inversa, 273, 274
– funzione logaritmica, 266
– funzione potenza, 264
– funzione reciproca, 270
– funzione seno, 266
– funzione tangente, 270
– funzioni elementari, 272
– linearità, 267
– prima, 260
– prodotto di funzioni, 268
– quoziente di funzioni, 269
– seconda, 262
– sinistra, 263
derivate
– parziali, 514
– calcolo, 514
– di secondo ordine, 516
– significato geometrico, 515
differenziale, 283 sgg.
– di una funzione in due variabili, 519
discussione di equazioni
– parametriche, 434
disequazioni in due variabili, 501
distanza nello spazio, 505
dominio, 12
– di funzione di due variabili, 507

E

equivalenza asintotica, 94
espressione analitica di una funzione, 9
estremo inferiore
– di un insieme, 8
– di una funzione, 14
estremo superiore
– di un insieme, 8
– di una funzione, 14

F

flesso, v. *punto di flesso*
forme di indecisione, 79, 82
funzioni algebriche irrazionali, 84
funzioni esponenziali, 87
funzioni logaritmiche, 87
funzioni polinomiali, 82
funzioni razionali fratte, 82
funzioni trascendenti, 85
forme indeterminate, v. *forme di indecisione*
funzione
– (definizione), 9
– composta, 21
– concava, 347
– continua, v. *continuità*
– convessa, 347
– crescente in senso lato, 16

– decrescente in senso lato, 16
– derivabile, 262
– derivata, 262
– dispari, 17
– inferiormente limitata, 15
– infinita, 90
– infinitesima, 90
– inversa, 19
– invertibile, 19
– limitata, 15
– monotòna, 16
– pari, 17
– periodica, 18
– reale di variabile reale, 9, 14
– strettamente crescente, 16
– strettamente decrescente, 16
– superiormente limitata, 15
– trascendente, 424
funzioni (classificazione), 11
– asintotiche, 94
– di due variabili, 507
– uguali, 13

G, H

grafico
– probabile di una funzione, 199, 205 sgg.
Hessiano, 523
– orlato, 527

I

immagine, 14
infinitesimi (funzioni), 90
– confronto, 91
– ordine, 90
infiniti (funzioni), 90
– confronto, 92
– gerarchia, 93
– ordine, 90
insieme
– inferiormente limitato, 7
– limitato, 7
– $\mathbf{R}$, 6
– $\mathbf{R}^2$, 500
superiormente limitato, 7
insiemi
– aperti in $\mathbf{R}$, 503
– chiusi in $\mathbf{R}^2$, 503
intervalli
– ampiezza, 6
– aperti, 6
– chiusi, 6
– illimitati, 7
– limitati, 6
intervalli di monotonia, 339
intorno
– circolare, 62
– completo, 62
– destro, 62
– di meno infinito, 62
– di più infinito, 62
– di un punto, 62
– sinistro, 62

L

legge
– di rifrazione, 3
– di Snell, 3
limite
– definizione generale, 64
– definizioni particolari, 66 sgg.
– introduzione, 56
– della derivata, 278, 355
– destro, 68
– per difetto, 69
– per eccesso, 69
– sinistro, 69
limiti di funzioni
– elementari, 76 sgg.
– algebriche irrazionali, 84
– polinomiali, 82
– razionali fratte, 82
limiti di successioni, 153 sgg.
– calcolo, 155
– e limiti di funzioni, 159
limiti notevoli
– di funzioni esponenziali, 87, 88
– di funzioni goniometriche, 85
– di funzioni logaritmiche, 87, 88
limiti per una funzione di due variabili, 512

M

maggiorante, 7
massimo di un insieme, 7
massimo di una funzione, 14
– assoluto, 332
– libero, 521
– relativo, 331
– vincolato, 524
metodo
– degli indivisibili, 4
– di bisezione, 435
– di Newton, 436
minimo di un insieme, 7
minimo di una funzione, 14
– assoluto, 332
– libero, 521
– relativo, 331
– vincolato, 524
minorante, 7
misura, 4

N, O

notazione di Leibniz, 260
numero di soluzioni di un'equazione, 433
numero *e*, 87
numero irrazionale, 6
ottimizzazione, 2
– vincolata, 524

P, Q

periodo di una funzione, 18
piani nello spazio, 506
piano tangente a una superficie, 517
principio di induzione, 161
problemi
– di ottimizzazione, 343
– di massimo e di minimo, 345
progressione aritmetica, 154
– ragione, 154
– somma, 156
– termine generale, 155
progressione geometrica, 154
– ragione, 154
– somma, 156
– termine generale, 155
punti critici, 343
punti stazionari, 333
– analisi, 339
– test, 340, 342
punto angoloso, 276
punto di accumulazione, 62
punto di estremo
– assoluto, 332
– relativo, 331
punto di flesso, 349
– a tangente verticale, 276
– ascendente, 350
– condizione necessaria e sufficiente, 349
– discendente, 350
– obliquo, 349
– orizzontale, 349
– verticale, 349
punto di Lagrange, 336
punto di massimo
– assoluto, 332
– relativo, 331
punto di minimo
– assoluto, 332
– relativo, 331
punto isolato, 63
punto medio nello spazio, 505
punto singolare, 194
– di prima specie, 194
– di salto, 194
– di seconda specie, 194
– eliminabile, 194
quadriche, 510

R

rapporto incrementale, 260
restrizione di una funzione, 20
retta
– normale, 279
– tangente, 3, 279
rette nello spazio, 506

S

segno di una funzione, 13
singolarità, v. *punto singolare, 8*
sistema **R** ampliato ($\mathbf{R}^*$), 8
sistema di riferimento nello spazio, 504
sistemi di disequazioni in due variabili, 502
studio di funzione, 418 sgg.
– ed equazioni, 433
– funzione con valori assoluti, 430
– funzione esponenziale, 424
– funzione goniometrica, 428
– funzione logaritmica, 426
– funzione polinomiale, 419
– funzione razionale frazionaria, 422
– schema, 418
– successione, 151
– convergente, 158
– crescente, 153
– decrescente, 153
– definita ricorsivamente, 152
– divergente, 158
– di Fibonacci, 152
– grafico, 151
– limitata, 153
– limitata inferiormente, 153
– limitata superiormente, 153
– monotòna, 153
– strettamente crescente, 153
– strettamente decrescente, 153
– termine generale, 151

T, U

tangenza fra due curve, 280
teorema degli zeri, 196
teorema dei valori intermedi, 198
teorema del confronto, 71, 72
– per le successioni, 159
teorema della distanza tra due punti nello spazio, 505
teorema della permanenza del segno, 74
teorema di Darboux, v. *teorema dei valori intermedi*
teorema di de l'Hôpital, 351
– applicazioni, 353
teorema di esistenza degli zeri, v. *teorema degli zeri*
teorema di esistenza del limite
– per le funzioni monotòne, 73
teorema di esistenza ed equazione del piano tangente a una superficie, 519
teorema di Fermat, 333
teorema di Lagrange, 335
teorema di Rolle, 334
teorema di Schwarz, 516
teorema di unicità del limite, 74
teorema di Weierstrass, 197, 521

V, Z

velocità, 3
– istantanea, 4
– media, 4
verifica di un limite, 69
zeri di una funzione, 13

Petrini

internet: deascuola.it

e-mail: info@deascuola.it

Redattore responsabile: Monica Martinelli
Redazione: Barbara De Bernardis, Chiara Tannoia
Redazione multimediale: Rachele Ambrosetti
Progetto grafico: Carla Devoto, Marco Satta
Impaginazione: M.T.M.
Ricerca iconografica: Laura Fiorenzo
Ricerca iconografica per la copertina: Alice Graziotin
Copertina: Silvia Bassi, Simona Speranza
Disegni: Leprechaun

Art Director: Nadia Maestri

Le animazioni «Con GeoGebra» sono state realizzate dalla dott.ssa Simona Riva
Le Videolezioni sono a cura di Marco D'Isanto (*Lezionidimate*)

Attività interattive e laboratori realizzati con il software *GeoGebra* (www.geogebra.org)
Microsoft Excel è un marchio depositato di *Microsoft Corporation*
Per ogni informazione relativa agli esercizi tratti dalle gare *Kangourou della Matematica* visitare il sito www.kangourou.it

Numerosi insegnanti e colleghi hanno contribuito al perfezionamento dell'opera, fornendo agli Autori preziosi spunti didattici, stimolanti osservazioni e puntuali segnalazioni. A tutti è indirizzata la loro riconoscenza.
Leonardo Sasso ringrazia in modo particolare gli insegnanti dell'Istituto Tecnico «Guglielmo Marconi» di Verona, dell'Istituto Tecnico «Guglielmo Marconi» di Padova e dell'Istituto Tecnico «Galileo Ferraris» di Verona. Enrico Zoli ringrazia i colleghi dell'Istituto Tecnico «Luigi Bucci» di Faenza.

Proprietà letteraria riservata
© 2019 De Agostini Scuola SpA – Novara
1ª edizione: gennaio 2019
Printed in Italy

Le fotografie di questo volume sono state fornite da: Archivio Dea Picture Library; Shutterstock; iStockphoto

Foto di copertina: Shutterstock

L'editore dichiara la propria disponibilità a regolarizzare eventuali omissioni o errori di attribuzione.
Nel rispetto del DL 74/92 sulla trasparenza nella pubblicità, le immagini escludono ogni e qualsiasi possibile intenzione o effetto promozionale verso i lettori.
Tutti i diritti riservati. Nessuna parte del materiale protetto da questo copyright potrà essere riprodotta in alcuna forma senza l'autorizzazione scritta dell'Editore.

Il software è protetto dalle leggi italiane e internazionali. In base ad esse è quindi vietato decompilare, disassemblare, ricostruire il progetto originario, copiare, manipolare in qualsiasi modo i contenuti di questo software. Analogamente le leggi italiane e internazionali sul diritto d'autore proteggono il contenuto di questo software sia esso testo, suoni e immagini (fisse o in movimento). Ne è quindi espressamente vietata la diffusione, anche parziale, con qualsiasi mezzo. Ogni utilizzo dei contenuti di questo software diverso da quello per uso personale deve essere espressamente autorizzato per iscritto dall'Editore, che non potrà in nessun caso essere ritenuto responsabile per eventuali malfunzionamenti e/o danni di qualunque natura.
Eventuali segnalazioni di errori, refusi, richieste di informazioni sul funzionamento dei prodotti digitali o spiegazioni sulle scelte operate dagli autori e dalla Casa Editrice possono essere inviate all'indirizzo di posta elettronica *info@deascuola.it*.